國立屏東大學－管理類　第一期　2018 年 12 月　頁 121-141

推導資本投資之財務決策公式
——使用下檔風險指標與模糊集合運算

曹中岑*

摘 要

企業成長與永續發展需要持續進行資本投資，投資決策包含財務考量與策略考量。本文針對資本投資決策之財務面可行性，以較少被使用的下檔風險指標取代普遍被使用的全距報酬波動度，詳述其於實務風險估計更合理有效的因果；同時結合模糊集合，應用於四個變數的估計與模糊運算，有系統的建構模糊淨現值與模糊下檔風險值，以提高估計的彈性。本文中投資案分為三種情況：單一投資案、不同存續期間但相同資金成本的互斥案、與不同存續期間且不同資金成本的互斥案。使用模糊數的α-截集與信賴區間，推導報酬的歸屬函數：模糊淨現值期望值、模糊淨現值期望值之等值年金、與模糊淨現值期望值之永續等值年金。經解模糊後，惟有正報酬的投資案可被接受、並進行後續風險評估。以低於報酬期望值的模糊半變異數為基礎，推導下檔標準差，以衡量投資案的絕對風險；再以下檔變異係數作為報酬與風險的綜合衡量指標。在沒有策略性考量下，優選投資案的財務決策規則為：正模糊淨現值期望值愈大愈好、下檔標準差愈小愈好、下檔變異係數愈小愈好。

關鍵字：資本投資、下檔風險、模糊集合、淨現值、半變異數

---

*曹中岑，國立屏東大學財務金融學系教授
E-mail：faith@mail.nptu.edu.tw

Deriving the Financial Decision Making Formula for Capital Investments: Using Indicators of Downside Risk and Algorithms of Fuzzy Sets

Tsao, Chung-Tsen*

Abstract

Capital investments are required for business growth and perpetual development. They include the financial and strategic considerations. This work makes the less used downside risk indicators replace the commonly adopted range return volatility, describing the cause and effect of a more reasonable and effective practical risk estimation. The fuzzy sets are applied to the estimation and operation of four variables to systematically obtain fuzzy net present values and fuzzy downside risk measures in order to promote the flexibility of estimation. In this work the capital investments are composed of three conditions: a single project, mutually exclusive projects with different life spans but the same cost of capital, and mutually exclusive projects with different life spans and different costs of capital. α-cuts and confidence of intervals are used to derive the membership functions of returns: the expected fuzzy net present values, the fuzzy equivalent annuity of expected fuzzy net present values, and the equivalent annuity to infinity of expected fuzzy net present values. After dufuzzification, only the positive-return projects can be accepted and processed by the subsequent risk evaluation. Based on the fuzzy semi-variance under expected returns, the down-side standard deviations are obtained to measure the absolute risks of investment projects. The downside coefficients are further developed to be the return-risk complex indicators. If there's no strategic consideration, the financial decision-making rules for priority project are: greater positive fuzzy expected net present value, smaller down-side standard deviation, and smaller coefficient of variation.

Keywords: Capital investments, Downside risk, Fuzzy sets, Net present value, Semi-variance

---

*Tsao, Chung-Tsen: Professor, Department of Finance, National Pingtung University.
E-mail: faith@mail.nptu.edu.tw

壹、緒論

企業的資本投資決定企業的成長與永續發展，過程須多方考慮未來政經情勢、產業景氣發展、投資成本效益等因素，結果則是：獲利符合或高於預期、獲利低於預期、或損失。對於未來將經歷的過程與結果的不確定(uncertainty)，即是普遍所謂的「風險」(risk)。若不確定狀況可以被描述，風險即可被估量。財務領域的風險分析常是從機率(probability)分析著手，描繪該事件的隨機性(randomness) ，經由預測一事件所有可能的出象(outcomes)與機率，計算隨機變數的參數(parameter)，使用例如期望值或標準差，以呈現報酬與風險的圖像(mapping)(Seitz & Ellison, 1999)。

自從 Portfolio Selection (Markowitz, 1952)論文中首次以「變異數」(variance)作為風險的測量數以來，報酬的「全距離散程度」(deviation)就成為財務理論中對於風險的主流定義；全距離散程度是包括獲利與損失的機率分配。然而，企業主進行資本投資或投資人買賣金融商品時，所要規避的是獲利低於預期或損失，不是要規避獲利符合或高於預期。獲利是要追求的，損失是要規避的，就一般認知或實務，後者才是風險，其在財務學中又被稱為「下檔風險」(downside risk)。

但報酬與風險並非可精確的數值(not an “exact” value)。未來所有可能出象形成的樣本空間經由定義隨機變數而以函數關係對應到一實數空間，其中隨機變量的估計又有不精確性(imprecision)。例如：對一資本投資的未來現金流量與資金成本之估計都只是近似(approximation)，很難剛好等於未來實際發生的數值。因此，由點估計擴張為區間估計會有比較高的信賴度。模糊集合(fuzzy sets)(Zadeh, 1965, 1975)即適用於隨機變量的區間估計。

本文應用模糊集合於資本投資決策的隨機變量估計，先預測未來可能遭遇經濟環境的情境(scenarios)與機率(probabilities)，估計各種情境下各投資案的模糊現金流量(fuzzy cash flows)與模糊資金成本(fuzzy costs of capital)，計算模糊淨現值(fuzzy net present value, FNPV)與模糊淨現值的模糊期望值(fuzzy expected value of FNPV)。之後經由解模糊(defuzzification)程序將上述模糊參數值解為定

值(crisp value)。再以下檔風險概念，計算模糊淨現值的下檔變異數(downside variance of NPV)與下檔標準差(downside standard deviation)與變異係數(coefficient of variation)。若遭遇互斥投資案有存續期間與(或)資金成本差異時，須進一步計算模糊淨現值等值年金(fuzzy equivalent annuity of net present value)與(或)模糊淨現值永續化等值年金(fuzzy equivalent annuity to infinity of net present value)，然後仍計算其模糊期望值與下檔變異數、下檔標準差、與下檔變異係數。在沒有策略性考量下，財務決策規則為：正模糊淨現值期望值愈大愈佳、下檔標準差愈小愈佳、下檔變異係數愈小愈佳。

本文以下結構為：第二節對下檔風險與模糊集合作定義與介紹，第三節簡述傳統淨現值方法，第四節推導模糊變量估計下之淨現值與下檔風險指標的運算式，第五節為結論與討論。

貳、下檔風險與模糊集合

一、下檔風險

Markowitz(1952)提出變異數作為風險的測量數。同年，Roy(1952)提出「安全第一」(safety first)，他認為投資人應偏好於具最小機率會低於災難水準(disaster level)或目標報酬(target return)的投資標的。之後 Markowitz(1959)修正其在 1952 年的看法，認為「標準差」(standard deviation)比變異數理想，並對下檔風險的重要性表示認同；基於安全第一和報酬不一定是常態分配的假設，提出兩個半變異數(partial variance or semivariance)：低於平均報酬的半變異數(below-mean semivariance) 和低於目標報酬的半變異數(below-target semivariance)。之後風險測量數有了多元發展，例如 β 係數用來衡量系統風險、Lower Partial Moment (Harlow & Rao, 1989)衡量個別風險忍受度(risk tolerance)之下檔風險。並且風險測量數被使用在形成決策指標，例如標準差被用於著名的 Sharpe Ratio 評估共同基金績效(Sharpe, 1966)；β 係數被用於資本資產定價模式(CAPM)(Sharpe, 1964) 、Treynor 績效測量數(Treynor, 1966)與 Jensen 績效測量數(Jensen, 1968)。

本文以 Markowitz(1959)提出之半變異數的概念，關注於資本投資案報酬率低於報酬率期望值的部分，衍生出第 k 個投資案的下檔半變異數定義如公式(1)之 $(\sigma_k-)^2$：

$$(\sigma_k-)^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(min_i(0, R_{ki} - \mu_k)\right)^2 \cdot P_i \quad \text{.....(1)}$$

上式，R_{ki} 為第 k 項投資案於第 i 種情境的估計報酬率，μ_k 為第 k 項投資案的估計報酬率期望值，k=1,2,…,l，i=1,2,…,m，$l, m \in N$，l 為投資案個數，m 為假設的情境個數。第 k 個投資案的下檔標準差定義如公式(2)之 $\sigma_k -$：

$$(\sigma_k-) = ((\sigma_k-)^2)^{1/2} \quad \text{.....(2)}$$

二、模糊集合

由於在實質世界中的物體歸類時常沒有明確定義的歸屬標準；「模糊集合」是一個具有歸屬強度(grades of membership)的連續閉聯集(continuum)的「類別」(class)，可作為與「慣用集合」(ordinary sets)平行的架構(Zadeh, 1965)。現實世界裡許多資訊以數據方式存在，例如財務報表的數字，稱為定量形式(quantitative form)；也可能難以數據表達或直接測量，例如直覺思維對事物的感知與判斷，稱為定性形式(qualitative form)。運用模糊集合，定性資訊可以被衡量並轉化為可計算元素，彌補慣用集合(ordinary sets)對定性資訊測量的困難。模糊集合可以處理非量化資訊、直覺判斷、無法精確定義的資料、或含糊朦朧的訊息，亦可模式化任意複雜性的非線性函數，與整合專家的經驗(Zadeh, 1975)；已被廣泛地使用於在應用科學(applied science)，例如數理經濟學(mathematical economics)、模糊最適(fuzzy optimal)、程序控制(process control)、決策理論(decision theory)、與模糊統計(fuzzy statistics)等(Feng, Hu, and Shu, 2001)。在財務上的應用，始自 Buckley(1987)提出模糊財務數學(fuzzy mathematics of finance)，主張可將財務決策中使用的現金流量、利率、期間加以模糊化。由於投資案建立在對未來的預測，在情境預測與變量估計上難以精確，因此使用模糊集合可望提高預測的彈性。以下為本文所定義的模糊集合與使用的運算規則。

(一)模糊數(Fuzzy Numbers)

一個實數模糊數 $\widetilde{A}$ 為位於實數線 R 上的任一模糊子集，其歸屬函數為 $f_{\widetilde{A}}(x)$。「任何型態」的模糊數表達為(方括弧)：

$$\widetilde{A}=[a,b,c,d] \quad \text{.....(3)}$$

$f_{\widetilde{A}}(x)$ 表達為：

$$f_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases} f_{\widetilde{A}}^{\mathrm{L}}(x), & a \le x \le b, \\ 1, & b \le x \le c, \\ f_{\widetilde{A}}^{\mathrm{R}}(x), & c \le x \le d, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \quad \text{.....(4)}$$

$f_{\widetilde{A}}^{\mathrm{L}}(x)$ 與 $f_{\widetilde{A}}^{\mathrm{R}}(x)$ 分別為 $\widetilde{A}$ 的左、右歸屬函數，具有以下性質 (Dubois & Prade, 1978)：$f_{\widetilde{A}}(x)$ 自實數連續映射至封閉區間[0,1]；當 $x \in (-\infty, a]$, $f_{\widetilde{A}}(x)=0$；當 $x \in [a,b]$, $f_{\widetilde{A}}(x)$ 嚴格遞增；當 $x \in [b,c]$, $f_{\widetilde{A}}(x)=1$；當 $x \in [c,d]$, $f_{\widetilde{A}}(x)$ 嚴格遞減；當 $x \in [d,\infty)$, $f_{\widetilde{A}}(x)=0$。以上 a,b,c,d 皆為實數，並可令 $a=-\infty$ 或 $a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=d$ 或 $d=+\infty$。除非另有假設，否則通常假設 $\widetilde{A}$ 為凸集(convex)、常態(normal)與有界(bounded)，亦即 $-\infty<a$, $d<\infty$。本文使用梯形模糊數於情境機率、現金流量、與資金成本的估計。梯形模糊數為常用的模糊集合型態，以圓括弧表達為 $\widetilde{B}=(e,f,g,h)$，其歸屬函數的公式為(Dubois & Prade, 1978; Kaufmann & Gupta, 1991)：

$$f_{\widetilde{B}}(x)=\begin{cases} (x-e)/(f-e), & e \le x \le f, \\ 1 & f \le x \le g \\ (x-h)/(g-h), & g \le x \le h, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \quad \text{.....(5)}$$

(二)標準模糊算術(Standard Fuzzy Arithmetic)

模糊數 $\widetilde{A}$ 之 α-截集(α-cut)，即在α高度的信賴區間(the interval of confidence for the level of α)，可定義如下(Kaufmann & Gupta, 1991)：

$${}^{\alpha}\widetilde{A}=\{x|f_{\widetilde{A}}(x) \ge \alpha,\}, \ x \in R, \ \alpha \in [0,1], \text{.....(6)}$$

${}^{\alpha}\widetilde{A}$為位於實數線上之非空有界閉區間(non-empty closed interval)，可寫為${}^{\alpha}\widetilde{A}=[{}^{\alpha}\underline{A},{}^{\alpha}\overline{A}]$，${}^{\alpha}\underline{A}$與${}^{\alpha}\overline{A}$分別為區間之下界(lower bound)與上界(upper bound)。若梯形模糊數$\widetilde{B}=(e,f,g,h)$，其α-截集可表達為：

$$ {}^{\alpha}\widetilde{B}=[{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\overline{B}]=\left[(f-e)\alpha+e,(g-h)\alpha+h\right],\ \ \alpha\in[0,1] \quad \text{……(7)} $$

公式(7)~(10)為運算$\widetilde{A},\widetilde{B}\in R$的標準模糊算術規則(Kaufmann & Gupta, 1991)：

$$ {}^{\alpha}(\widetilde{A}+\widetilde{B})={}^{\alpha}\widetilde{A}+{}^{\alpha}\widetilde{B}=\left\lfloor{}^{\alpha}\underline{A}+{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\overline{A}+{}^{\alpha}\overline{B}\right\rfloor \quad \text{……...(8)} $$

$$ {}^{\alpha}(\widetilde{A}-\widetilde{B})={}^{\alpha}\widetilde{A}-{}^{\alpha}\widetilde{B}=\left\lfloor{}^{\alpha}\underline{A}-{}^{\alpha}\overline{B},{}^{\alpha}\overline{A}-{}^{\alpha}\underline{B}\right\rfloor \quad \text{……(9)} $$

$$ {}^{\alpha}(\widetilde{A}\cdot\widetilde{B})=\left\lfloor\min({}^{\alpha}\underline{A}\cdot{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\underline{A}\cdot{}^{\alpha}\overline{B},{}^{\alpha}\overline{A}\cdot{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\overline{A}\cdot{}^{\alpha}\overline{B}),\max({}^{\alpha}\underline{A}\cdot{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\underline{A}\cdot{}^{\alpha}\overline{B},{}^{\alpha}\overline{A}\cdot{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\overline{A}\cdot{}^{\alpha}\overline{B})\right\rfloor \quad \text{……..(10)} $$

$$ {}^{\alpha}(\widetilde{A}/\widetilde{B})=\left\lfloor\min({}^{\alpha}\underline{A}/{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\underline{A}/{}^{\alpha}\overline{B},{}^{\alpha}\overline{A}/{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\overline{A}/{}^{\alpha}\overline{B}),\max({}^{\alpha}\underline{A}/{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\underline{A}/{}^{\alpha}\overline{B},{}^{\alpha}\overline{A}/{}^{\alpha}\underline{B},{}^{\alpha}\overline{A}/{}^{\alpha}\overline{B})\right\rfloor \quad \text{……(11)} $$

(三)必要相等限制

Klir (1997)認為標準模糊算術僅考慮運算元素本身包含的資訊，但忽略了運算過程衍生的任何附加資訊，須將後者納入，因此標準模糊算術須受必要限制(Requisite Constraints)。例如兩個相同模糊數的相乘式受到一實數平方值非負值的必要相等限制(Requisite Equality Constraints)之影響，Ã與Ã的相乘式之 α-截集應為非負實數區間：

$$ {}^{\alpha}(\widetilde{A}\cdot\widetilde{A})_E=\begin{cases}[{}^{\alpha}\overline{A^2},{}^{\alpha}\underline{A^2}], & {}^{\alpha}\overline{A}<0,\\ [{}^{\alpha}\underline{A^2},{}^{\alpha}\overline{A^2}], & {}^{\alpha}\underline{A}>0,\\ [0,\max({}^{\alpha}\overline{A^2},{}^{\alpha}\underline{A^2})], & 0\in[{}^{\alpha}\overline{A},{}^{\alpha}\underline{A}],\end{cases} \quad \text{……(12)} $$

公式(12)之 E 代表必要相等限制，後文將運用於模糊下檔半變異數之計算。

(四)解模糊－平均相對區域法

欲比較任何型態模糊數的大小，須將模糊數解模糊。本文使用平均相對區

域法(the method of average relative regions)(Tsao & Chu, 2002)，其優點有二：1.納入模糊參數之歸屬函數的所有資訊，2.可一致性地排序任何型態的模糊數，無論實數區間為正或負。令任一型態模糊數 $\widetilde{A}_k=[a_k,b_k,c_k,d_k]$， $k=1,2,...,l$ ， $l\in N$ ：

$$S(\widetilde{A}_k)=\frac{1}{2}\left(S_L(\widetilde{A}_k)+S_R(\widetilde{A}_k)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\left(b_k-\min_k(a_k)\right)\times 1-\int_{a_k}^{b_k} f_{\widetilde{A}_k}^{\mathrm{L}}(x)\,\mathrm{dx}\right)+\left(\left(c_k-\min_k(a_k)\right)\times 1+\int_{c_k}^{d_k} f_{\widetilde{A}_k}^{\mathrm{R}}(x)\,\mathrm{dx}\right)\right) \quad (13)$$

上式中，$S(\widetilde{A}_k)$、$S_L(\widetilde{A}_k)$、$S_R(\widetilde{A}_k)$ 分別表示平均相對區域、左相對區域、右相對區域；$S_L(\widetilde{A}_k)$ 定義為 $\widetilde{A}_k$ 的左歸屬函數至所有被排序的一組模糊數下限軸之面積、$S_R(\widetilde{A}_k)$ 定義為 $\widetilde{A}_k$ 的右歸屬函數至所有被排序的一組模糊數下限軸之面積；$S_L(\widetilde{A}_k),S_R(\widetilde{A}_k),S(\widetilde{A}_k)\geq 0$，$S(\widetilde{A}_k)$ 值愈大表示 $\widetilde{A}_k$ 愈大。

參、傳統淨現值法

本文將資本投資案分為單一案、不同存續期間(unequal durations)但相同資金成本的互斥案、與不同存續期間且不同資金成本(unequal costs of capital)的互斥案等三種狀況。投資案互斥(mutually exclusive)是指非屬資金之原因，無法同時選擇二投資案或所有投資案。無論投資案是否互斥，淨現值都是最常用的評估工具(Seitz & Ellison, 1999)。文中對未來的景氣發展假設有很好到很差的數種不同情境、決策者可以機率估計各種情境的可能性，各情境下可估計產生不同的現金流量，包括投資支出、收入、資金成本率，所以各情境之淨現值可被估計，再依情境機率合計投資案之期望值。投資案於各情境下若為單一投資案、互斥投資計畫具相同存續期間且相等資金成本，依 3.1 公式(14)-(15)計算淨現值期望值即可（比較）。若各計畫案具不相等存續期間或（暨）不相等資金成本，則分述於 3.2 與 3.3。報酬的決策指標分別為淨現值之期望值、淨現值之等值年金期望值及淨現值之永續等值年金期望值，決策標準為：正值才列入可被接受、排序為正值愈大愈佳。

一、單一投資案－淨現值期望值

一投資案之淨現值等於估計利益折現值減去估計支出折現值；利益與支出以現金流量表示(Seitz & Ellison, 1999)。若已估計各種情境與其機率、各情境下的現金流量與資金成本，則可計算投資案於各情境下的淨現值：

$$NPV_{ki}\ \sum_{j=0}^{n_k}\frac{CF_{kij}}{(1+R_{ki})^j}\cdots\cdots(14)$$

公式(14) 之CF_{kij}代表第 k 項投資案在第 i 種情境下之第 j 期之估計現金流量；R_{ki}與NPV_{ki}分別代表第 k 項投資案在第 i 種情境下之資金成本率與淨現值，$R_{ki}>0,\ k=1,2,\ldots,l,\ i=1,2,\ldots m,\ j=0,1,2,\ldots,n_k,\ l,m,n_k\in N$。估計各情境之機率 P_i，可計算投資案 k 之淨現值期望值如下：

$$\mu_{NPV_k}=\sum_{i=1}^{m}(NPV_{ki}\cdot P_i)\cdots\cdots(15)$$

二、互斥投資案

互斥投資計畫具不同存續期間是十分常見的情況。若各計畫具不同存續期間但相同資金成本，可使用淨現值之等值年金(EA, equivalent annuity)，其程序是將存續期間標準化，計算淨現值之等值年金方式，亦即年化淨現值(annualized NPV)，將不同存續期間投資案的的淨現值化為以可比較的年金水準現值(Seitz, N. and M. Ellison (1999))。當互斥投資計畫具不同存續期間且不同資金成本時，則以不同資金成本為分母，永續化不同存續期間計算淨現值之等值年金，計算淨現值之永續化等值年金，使投資計畫可在相同的基礎下被比較。

(一)互斥投資案，不相等存續期間、相等資金成本－計算淨現值等值年金期望值

在各投資案僅有不相等存續期間條件，須計算淨現值等值年金 $EA(NPV_{ki})$ 如(16)式：

$$EA(NPV_{ki})=NPV_{ki}\cdot A_{n_k,R_{ki}}=V_{ki}\cdot\frac{1-(1+R_{ki})^{-n_k}}{R_{ki}}\cdots\cdots(16)$$

(16)式中，$A_{n_k,R_{ki}} = \dfrac{1-(1+R_{ki})^{-n_k}}{R_{ki}}$ 為年金現值利息折現因子(present value interest factor of annuity, PVIFA)。決策指標為淨現值等值年金期望值($\mu_{EA(NPV_k)}$)：

$$\mu_{EA(NPV_k)} = \sum_{i=1}^{m} EA(NPV_{ki}) \cdot P_i \quad \text{.....(17)}$$

(二)互斥投資案，不相等存續期間、不相等資金成本－計算淨現值永續等值年金期望值

若各互斥投資案有不相等存續期間與不相等資金成本，須計算淨現值永續等值年金 $EAI(NPV_{ki})$ 如(18)式；決策指標為淨現值等值年金期望值($\mu_{EA(NPV_k)}$) $EAI(NPV_{ki})$ 如(19)式：

$$EAI(NPV_{ki}) = EA(NPV_{ki})/R_{ki} \quad \text{.....(18)}$$

$$\mu_{EAI(NPV_k)} = \sum_{i=1}^{m} EAI(NPV_{ki}) \cdot P_i \quad \text{.....(19)}$$

肆、模糊淨現值與模糊下檔風險運算式

使用模糊淨現值評估資本投資案之預期報酬，包括 Tsao (2005)以三角模糊數估計現金流量，Tsao (2012)以梯形模糊數預估情境機率、各情境下之現金流量與資金成本，近期有 Guo, Yu, Li, & Kar (2016)應用模糊集合模擬基因算式於不同投資期間的投資組合選擇；以上三者皆以全距標準差或變異數作為風險測量數。近期有 Ayub, Shah, & Abbas (2015)使用下檔風險作證券投資組合管理，實證結果比使用變異數能提升績效。Paquin, Gauthier, & Morin (2016) 以平穩隨機過程(stationary stochastic process)模式估計投資計劃的淨現值與下檔營運風險。

本文以梯形模糊數預估情境機率、各情境下之現金流量與資金成本，計算投資計畫的淨現值；並提出可能更合理與有效率的下檔風險測量指標、與報酬風險的綜合決策指標。假設 $\widetilde{P}_i^{'} = (o_i^{'}, p_i^{'}, q_i^{'}, r_i^{'})$ 為模糊情境機率，$0 \le o_i^{'} \le p_i^{'} \le q_i^{'} \le r_i^{'} \le 1$。為使所有情境在 α=0 之截集區間上界總和符合機率總和 100%，因此將 $\widetilde{P}_i^{'}$ 標準化

為 $\widetilde{P}_i$：

$$\widetilde{P}_i=\left(o_i^{'}\Big/\sum_{i=1}^{m}r_i^{'},p_i^{'}\Big/\sum_{i=1}^{m}r_i^{'},q_i^{'}\Big/\sum_{i=1}^{m}r_i^{'},r_i^{'}\Big/\sum_{i=1}^{m}r_i^{'}\right)=(o_i,p_i,q_i,r_i)\ldots\ldots(20)$$

上式 $\sum_{i=1}^{m}r_i=1$，變數 m 定義同公式(14)。

假設梯形模糊現金流量 $\widetilde{CF_{kıJ}}=\left(a_{kij},b_{kij},c_{kij},d_{kij}\right)$，其中 $-\infty<a_{kij}\leq b_{kij}\leq c_{kij}\leq d_{kij}<\infty$；梯形模糊資金成本率 $\widetilde{R_{kı}}=(e_{ki},f_{ki},g_{ki},h_{ki})$，其中 $0<e_{ki}\leq f_{ki}\leq g_{ki}\leq h_{ki}$；根據公式(7)：

$$^{\alpha}\widetilde{CF_{kıJ}}=\left[\left(b_{kij}-a_{kij}\right)\alpha+a_{kij},\left(c_{kij}-d_{kij}\right)\alpha+d_{kij}\right]=[\underline{^{\alpha}CF_{kij}},\overline{^{\alpha}CF_{kij}}](21)$$

$$^{\alpha}\widetilde{R_{kı}}=[(f_{ki}-e_{ki})\alpha+e_{ki},(g_{ki}-h_{ki})\alpha+h_{ki}]=[\underline{^{\alpha}R_{ki}},\overline{^{\alpha}R_{ki}}]\ \ldots.(22)$$

$$^{\alpha}\widetilde{P_i}=[(p_i-o_i)\alpha+o_i,(q_i-r_i)\alpha+r_i]=[\underline{^{\alpha}P_i},\overline{^{\alpha}P_i}]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(23)$$

令 $\widetilde{A_{kı}}$ 為模糊折現因子，根據標準模糊算術規則，公式(8)~(11)

$$^{\alpha}\widetilde{A_{kı}}=\ ^{\alpha}\left(\frac{1-(1+\widetilde{R_{kı}})^{-n_k}}{\widetilde{R_{kı}}}\right)=\left[\frac{1-\underline{^{\alpha}(1+R_{ki})^{-n_k})}}{\overline{^{\alpha}R_{ki}}},\frac{1-\overline{^{\alpha}(1+R_{ki})^{-n_k})}}{\underline{^{\alpha}R_{ki}}}\right]=\left[\underline{^{\alpha}A_{ki}},\overline{^{\alpha}A_{ki}}\right]\ldots.(24)$$

一、模糊淨現值

(一)單一投資案－模糊淨現值期望值

代入模糊變量於公式(14)，依公式(8),(11)運算第 k 項投資案在第 i 種情境下之模糊淨現值如下：

$$^{\alpha}\widetilde{NPV_{kı}}=\ ^{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{n_k}\left(\frac{\widetilde{CF_{kıJ}}}{(\widetilde{1+R})_{kı}^{J}}\right)\right)$$

$$=\left[\sum_{j=0}^{n_k}min_i\left(\frac{\underline{^{\alpha}CF_{kij}}}{\underline{\alpha(1+R)_{ki}^{j}}},\frac{\underline{^{\alpha}CF_{kij}}}{\overline{\alpha(1+R)_{ki}^{j}}},\frac{\overline{^{\alpha}CF_{kij}}}{\underline{\alpha(1+R)_{ki}^{j}}},\frac{\overline{^{\alpha}CF_{kij}}}{\overline{\alpha(1+R)_{ki}^{j}}}\right),\sum_{j=0}^{n_k}max_i\left(\frac{\underline{^{\alpha}CF_{kij}}}{\underline{\alpha(1+R)_{ki}^{j}}},\frac{\underline{^{\alpha}CF_{kij}}}{\overline{\alpha(1+R)_{ki}^{j}}},\frac{\overline{^{\alpha}CF_{kij}}}{\underline{\alpha(1+R)_{ki}^{j}}},\frac{\overline{^{\alpha}CF_{kij}}}{\overline{\alpha(1+R)_{ki}^{j}}}\right)\right]$$

$$=\left[\sum_{j=0}^{n_k}\underline{^{\alpha}NPV_{kij}},\sum_{j=0}^{n_k}\overline{^{\alpha}NPV_{kij}}\right]=\left[\underline{^{\alpha}NPV_{ki}},\ \overline{^{\alpha}NPV_{ki}}\right]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

依公式(15),(8),(10)運算第 k 項投資案之模糊淨現值期望值如下：

$$^{\alpha}\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}=\ ^{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{m}\left(\widetilde{NPV_{kı}}\cdot\widetilde{P_i}\right)\right)$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{m} min_i \left(\underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right),\right.$$

$$\left.\sum_{i=0}^{m} max_i \left(\underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right]$$

$$= \left[\underline{{}^{\alpha}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}, \overline{{}^{\alpha}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}\right] \quad \text{.....(26)}$$

依公式(1) ，$\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}$可表達為：

$$\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k} = \left[\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}, \underline{{}^{\alpha=1}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}, \overline{{}^{\alpha=1}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}, \overline{{}^{\alpha=0}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}\right] \text{.....(27)}$$

帶入公式(27)於公式(13)解模糊，導出解模糊後之定值淨現值運算式如公式(28)：

$$S\left(\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}\right) = \frac{1}{2}\left(S_L\left(\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}\right) + S_R\left(\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{{}^{\alpha=1}\mu_{\widetilde{NPV}_k}} - min_k\left(\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}\right) - \int_{\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}}^{\underline{{}^{\alpha=1}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}} f^L_{\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}}(x)\,dx\right.$$

$$\left. + \overline{{}^{\alpha=1}\mu_{\widetilde{NPV}_k}} - min_k\left(\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}\right) + \int_{\overline{{}^{\alpha=1}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}}^{\overline{{}^{\alpha=0}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}} f^R_{\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}}(x)\,dx\right) \text{.....(28)}$$

(二)互斥投資案，不相等存續期間、相等資金成本－模糊淨現值等值年金期望值

依公式(16),(8),(11)，計算第 k 項投資案在第 i 種情境下之模糊淨現值等值年金如下：

$${}^{\alpha}EA\widetilde{(NPV}_{k\iota}) = {}^{\alpha}\widetilde{NPV}_{ki} \cdot {}^{\alpha}\widetilde{A_{k\iota}}$$

$$= \left[min_i\left(\underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}A_{ki}}, \underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}A_{ki}}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}A_{ki}}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}A_{ki}}\right),\right.$$
$$\left. max_i\left(\underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}A_{ki}}, \underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}A_{ki}}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}A_{ki}}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}A_{ki}}\right)\right]$$

$$= \left[\underline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}, \overline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}\right] \quad \text{.....(29)}$$

依公式(17),(8),(10)，計算第 k 項投資案之模糊淨現值等值年金期望值如下：

$${}^{\alpha}\tilde{\mu}_{EA\widetilde{(NPV}_k)} = {}^{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{m}\left(\widetilde{NPV}_{k\iota} \cdot \tilde{P}_\iota\right)\right)$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{m} min_i \left(\underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right),\right.$$

$$\left.\sum_{i=0}^{m} max_i \left(\underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right]$$

$$= \left[\underline{{}^{\alpha}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}, \overline{{}^{\alpha}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}\right] \quad \text{……...(30)}$$

依公式(1) ，$\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}$可表達為：

$$\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} = \left[\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}, \underline{{}^{\alpha=1}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}, \overline{{}^{\alpha=1}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}, \overline{{}^{\alpha=0}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}\right] \quad (31)$$

帶入公式(31)於公式(13) ，導出解模糊後的定值模糊淨現值等值年金的運算式如公式(32)：

$$S\left(\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}\right) = \frac{1}{2}\left(S_L\left(\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}\right) + S_R\left(\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{{}^{\alpha=1}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}} - min_k\left(\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}\right) - \int_{\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}}^{\underline{{}^{\alpha=1}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}} f^{L}_{\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}(x)\,dx\right.$$

$$\left. + \overline{{}^{\alpha=1}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}} - min_k\left(\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}\right) + \int_{\overline{{}^{\alpha=1}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}}^{\overline{{}^{\alpha=0}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}} f^{R}_{\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}(x)\,dx\right) \quad (32)$$

(三)互斥投資案，不相等存續期間、不相等資金成本－模糊淨現值永續等值年金期望值

依公式(18)與(11)運算第 k 項投資案在第 i 種情境下之模糊淨現值永續等值年金如下：

$${}^{\alpha}EAI(\widetilde{NPV}_{ki}) = \frac{{}^{\alpha}EA(\widetilde{NPV}_{ki})}{{}^{\alpha}\widetilde{R_{ki}}}$$

$$= \left[min\left(\frac{\underline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}}{\underline{{}^{\alpha}R_{ki}}}, \frac{\underline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}}{\overline{{}^{\alpha}R_{ki}}}, \frac{\overline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}}{\underline{{}^{\alpha}R_{ki}}}, \frac{\overline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}}{\overline{{}^{\alpha}R_{ki}}}\right), max\left(\frac{\underline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}}{\underline{{}^{\alpha}R_{ki}}}, \frac{\underline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}}{\overline{{}^{\alpha}R_{ki}}}, \frac{\overline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}}{\underline{{}^{\alpha}R_{ki}}}, \frac{\overline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})}}{\overline{{}^{\alpha}R_{ki}}}\right)\right]$$

$$= \left[\underline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})}, \overline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})}\right] \quad \text{……(33)}$$

依公式(19),(8),(10)運算第 k 項投資案之模糊淨現值永續等值年金期望值如下：

$${}^{\alpha}\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)} = {}^{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{m} EAI(\widetilde{NPV}_{ki}) \cdot \tilde{P}_i\right)$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{m} min\left(\underline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \underline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right),\right.$$
$$\left.\sum_{i=0}^{m} max\left(\underline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \underline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}, \overline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right]$$
$$= \left[\underline{{}^{\alpha}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}, \overline{{}^{\alpha}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}\right] \quad \ldots\ldots(34)$$

依公式(1) ，$\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}$可表達為：

$$\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)} = \left[\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}, \underline{{}^{\alpha=1}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}, \overline{{}^{\alpha=1}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}, \overline{{}^{\alpha=0}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}\right] \ldots(35)$$

帶入公式(35)於公式(13)，導出解模糊後的定值淨現值永續等值年金的運算式如公式(36)：

$$S\left(\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}\right) = \frac{1}{2}\left(S_L\left(\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}\right) + S_R\left(\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \underline{{}^{\alpha=1}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}} - min_k\left(\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}\right) - \int_{\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}}^{\underline{{}^{\alpha=1}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}} f^L_{\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}(x)\,dx \\ + \overline{{}^{\alpha=1}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}} - min_k\left(\underline{{}^{\alpha=0}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}\right) + \int_{\overline{{}^{\alpha=1}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}}^{\overline{{}^{\alpha=0}\mu_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}} f^R_{\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}}(x)\,dx \end{array}\right) \quad (36)$$

二、下檔標準差

(一)單一投資案－模糊淨現值之下檔標準差

令$\tilde{\theta}_{ki} = \widetilde{NPV}_{ki} - \tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}$為模糊淨現值估計值與其期望值之差距，依公式(9)其 α-截集為：

$${}^{\alpha}\tilde{\theta}_{ki} = {}^{\alpha}\widetilde{NPV}_{ki} - {}^{\alpha}\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k} = \left[\underline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} - \overline{{}^{\alpha}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}, \overline{{}^{\alpha}NPV_{ki}} - \underline{{}^{\alpha}\mu_{\widetilde{NPV}_k}}\right]$$
$$= \left[\underline{{}^{\alpha}\theta_{ki}}, \overline{{}^{\alpha}\theta_{ki}}\right] \quad \ldots\ldots(37)$$

帶入模糊變量於公式(1)，應用公式(9)與(10)，定義模糊淨現值之下檔變異數如公式(38)：

$$\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\left(min_i\left(0, {}^{\alpha}\widetilde{NPV}_{ki} - {}^{\alpha}\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}\right)\right)^2 \cdot {}^{\alpha}\tilde{P}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\left(min_i\left(0, {}^{\alpha}\tilde{\theta}_{ki}\right)\right)^2 \cdot {}^{\alpha}\tilde{P}_i\right) = \left[\underline{\left({}^{\alpha}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}\right] \quad .(38)$$

應用公式(37)與(38)於公式(12)，模糊淨現值之下檔變異數計算式依${}^{\alpha}\tilde{\theta}_{ki}$的區間在正負實數的位置，有如公式(39)的三種狀況：

$$\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2 = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\overline{{}^{\alpha}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}\right), \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\underline{{}^{\alpha}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right], & \overline{{}^{\alpha}\theta_{ki}} < 0 \\ 0, & \underline{{}^{\alpha}\theta_{ki}} > 0 \\ \left[0, \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\underline{{}^{\alpha}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right], & 0 \in \left[\underline{{}^{\alpha}\theta_{ki}}, \overline{{}^{\alpha}\theta_{ki}}\right] \end{cases} \quad \ldots\ldots.(39)$$

依公式(3) ，$\left(\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2$可表達為：

$$\left(\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2 = \left[\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}, \underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}\right] \ldots(40)$$

依公式(2)，下檔標準差即下檔變異數之正平方根。然而，其模糊正平方根的運算相當繁複，因此先對模糊淨現值之下檔變異數解模糊，再取其正平方根可簡化計算過程。帶入公式(40)於公式(13) ，導出模糊淨現值之定值下檔標準差的運算式如公式(41)：

$$S\left(\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right) = \left(S\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2\right)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\left(S_L\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2\right) + S_R\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2\right)\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2} - min_k\left(\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}\right) - \int_{\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}}^{\underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}} f^L_{\left(\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}(x)\,dx \\ +\overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2} - min_k\left(\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}\right) + \int_{\overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}}^{\overline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}} f^R_{\left(\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k} -\right)^2}(x)\,dx \end{array}\right)\right)^{1/2} \quad (41)$$

(二)互斥投資案，不相等存續期間、相等資金成本– 模糊淨現值等值年金之下檔標準差

令${}_{EA}\tilde{\theta}_{ki} = EA(\widetilde{NPV}_{ki}) - \tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}$為模糊淨現值等值年金估計值與其期望值之差距，依公式(9) 其 α-截集為：

${}^{\alpha}{}_{EA}\tilde{\theta}_{ki} = {}^{\alpha}EA(\widetilde{NPV}_{ki}) - {}^{\alpha}\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}$

$$= \left[\underline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})} - \overline{{}^{\alpha}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}, \overline{{}^{\alpha}EA(NPV_{ki})} - \underline{{}^{\alpha}\mu_{EA(\widetilde{NPV}_k)}}\right] = \left[\underline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}} - \overline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}}\right] \quad (42)$$

帶入模糊變量於公式(1)，應用公式(9)與(10)，定義模糊淨現值等值年金之下檔變異數如公式(43)：

$$\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\left(min_i\left(0, {}^{\alpha}EA(\widetilde{NPV}_{ki}) - {}^{\alpha}\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}\right)\right)^2 \cdot {}^{\alpha}\tilde{P}_i\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\left(min_i\left(0, {}^{\alpha}{}_{EA}\tilde{\theta}_{ki}\right)\right)^2 \cdot {}^{\alpha}\tilde{P}_i\right) = \left[\underline{\left({}^{\alpha}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}\right] \quad (43)$$

應用公式(42)與(43)於公式(12)，模糊淨現值等值年金之下檔變異數計算式依 ${}^{\alpha}{}_{EA}\tilde{\theta}_{ki}$ 的區間在正負實數的位置，有如公式(44)的三種狀況：

$$\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2 = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\overline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}\right), \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\underline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right], & \overline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}} < 0 \\ 0, & \underline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}} > 0 \\ \left[0, \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\underline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right], & 0 \in \left[\underline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}}, \overline{{}^{\alpha}{}_{EA}\theta_{ki}}\right] \end{cases} \quad (44)$$

依公式(3) ，$\left(\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2$ 可表達為：

$$\left(\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2$$

$$= \left[\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}, \underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}\right] \quad (45)$$

帶入公式(45)於公式(13) ，導出模糊淨現值等值年金之定值下檔標準差的運算式如公式(46)：

$$S\left(\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right) = \left(S\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(S_L\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2\right) + S_R\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2\right)\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2} - min_k\left(\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}\right) - \int_{\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}}^{\underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}} f^L_{\left(\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}(x)\,dx \\ + \overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2} - min_k\left(\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}\right) + \int_{\overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}}^{\overline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}} f^R_{\left(\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)} -\right)^2}(x)\,dx \end{array}\right)\right)^{1/2} \quad (46)$$

(三)互斥投資案，不相等存續期間、不相等資金成本– 模糊淨現值永續等值年金之下檔標準差

令 ${}_{EAI}\tilde{\theta}_{ki} = EAI\widetilde{(NPV_{ki})} - \tilde{\mu}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}}$ 為模糊淨現值永續等值年金估計值與其期望值之差距，依公式(9) 其 α-截集為：

$$
\begin{aligned}
{}^{\alpha}{}_{EAI}\tilde{\theta}_{ki} &= {}^{\alpha}EAI\widetilde{(NPV_{ki})} - {}^{\alpha}\tilde{\mu}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} \\
&= \left[\underline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} - \overline{{}^{\alpha}\mu_{EAI\widetilde{(NPV_k)}}}, \overline{{}^{\alpha}EAI(NPV_{ki})} - \underline{{}^{\alpha}\mu_{EAI\widetilde{(NPV_k)}}}\right] = \left[\underline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}} - \overline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}}\right] \quad (47)
\end{aligned}
$$

帶入模糊變量於公式(1)，應用公式(9)與(10)，定義模糊淨現值永續等值年金之下檔變異數如公式(48)：

$$
\begin{aligned}
\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2 &= \sum_{i=1}^{m}\left(\left(min_k\left(0, {}^{\alpha}EAI\widetilde{(NPV_{ki})} - {}^{\alpha}\tilde{\mu}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}}\right)\right)^2 \cdot {}^{\alpha}\tilde{P}_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\left(min_k\left(0, {}^{\alpha}{}_{EAI}\tilde{\theta}_{ki}\right)\right)^2 \cdot {}^{\alpha}\tilde{P}_i\right) = \left[\underline{\left({}^{\alpha}\sigma_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha}\sigma_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2}\right] \quad (48)
\end{aligned}
$$

應用公式(47)與(48)於公式(12)，模糊淨現值等值年金之下檔變異數計算式依 ${}^{\alpha}{}_{EA}\tilde{\theta}_{ki}$ 的區間在正負實數的位置，有如公式(49)的三種狀況：

$$
\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2 = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\overline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \underline{{}^{\alpha}P_i}\right), \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\underline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right], & \overline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}} < 0 \\ 0, & \underline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}} > 0 \\ \left[0, \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\underline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}}\right)^2 \cdot \overline{{}^{\alpha}P_i}\right)\right], & 0 \in \left[\underline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}}, \overline{{}^{\alpha}{}_{EAI}\theta_{ki}}\right] \end{cases} \quad \ldots(49)
$$

依公式(1) ，$\left(\tilde{\sigma}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2$ 可表達為：

$$
\left(\tilde{\sigma}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2 = \left[\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2}, \underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2}, \overline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2}\right] \quad \ldots\ldots(50)
$$

帶入公式(50)於公式(13) ，導出模糊淨現值永續等值年金之定值下檔標準差的運算式如公式(51)：

$$
S\left(\tilde{\sigma}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right) = \left(S\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2\right)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\left(S_L\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2\right) + S_R\left(\left({}^{\alpha}\tilde{\sigma}_{EAI\widetilde{(NPV_k)}} -\right)^2\right)\right)\right)^{1/2}
$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}-min_k\left(\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}\right)-\int_{\overline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}}^{\overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}} f^L_{\left(\tilde{\sigma}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}(x)\,dx \\ +\overline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}-min_k\left(\underline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}\right)+\int_{\underline{\left({}^{\alpha=1}\sigma_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}}^{\overline{\left({}^{\alpha=0}\sigma_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}} f^R_{\left(\tilde{\sigma}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)^2}(x)\,dx\end{array}\right)\right)^{1/2} \quad (51)$$

三、報酬與風險之綜合衡量指標－下檔變異係數

變異係數其定義為標準差除以平均數（期待值）之比值，可解釋為一單位報酬期待值所攜帶之風險值。除了不會受到測量單位的影響外，在比較兩組或以上的數據參次的標準差與平均數（期待值）時、或報酬期待值所與風險值二者排序有所衝突時，是容易被比較的標準化參考指標。4.1.計算模糊淨現值，解模糊後定值小於零的投資案為財務上不可行；大於零的投資案才能進入4.2.計算下檔標準差。模糊淨現值為絕對報酬，愈大愈好；下檔標準差為絕對風險，愈小愈好。若依前二者排序有所衝突，則以4.3.下檔變異係數作為報酬與風險的綜合衡量指標，愈小愈好。下檔變異係數定義為解模糊後下檔標準差除以解模糊後淨現值之期望值，表示每一單位淨現值期望值所對應的投資報酬低於預期報酬之數值。公式(52)為單一投資案：

$$CV^-_{\widetilde{NPV}_k}=S\left(\tilde{\sigma}_{\widetilde{NPV}_k}-\right)/S\left(\tilde{\mu}_{\widetilde{NPV}_k}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(52)$$

公式(53)為互斥投資案，不相等存續期間、相等資金成本：

$$CV^-_{EA(\widetilde{NPV}_k)}=S\left(\tilde{\sigma}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}-\right)/S\left(\tilde{\mu}_{EA(\widetilde{NPV}_k)}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(53)$$

公式(54)為互斥投資案，不相等存續期間、不相等資金成本：

$$CV^-_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}=S\left(\tilde{\sigma}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}-\right)/S\left(\tilde{\mu}_{EAI(\widetilde{NPV}_k)}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(54)$$

伍、結論

本文將資本投資案的風險定義為報酬低於期望值的可能性，使用下檔標準差作為風險測量數，而非最普遍使用的報酬的全距離散程度，在實務操作上更

具合理性。並結合模糊集合，擴大應用在四個變數的估計：資本投資案的現金流量、資金成本率、未來市況的情境與機率；模糊集合提高估計的彈性，由點估計擴張到區間估計，機率方法則呈現未來市況的隨機性。

文中將投資案分為單一案、不同存續期間但相同資金成本之互斥案、與不同存續期間且不同資金成本之互斥案，提出估計絕對報酬的決策指標、絕對下檔風險的決策指標、與標準化的報酬風險綜合決策指標，使決策者可有多面向的參考。上述決策指標並非新創，然而本文著力對於同時多次方運算四個模糊變數，完整推導以上指標的模糊運算過程、暨建構系統化的公式，可提升實務操作時之可行性與進一步程式化之簡易度。決策規則歸納如下：

1.模糊淨現值（或等值年金、或永續化等值年金）期望值，解模糊後為正值始具被接受資格，愈高愈佳；負值之投資案應予拒絕。
2.具被接受資格之投資案之下檔標準差愈低愈佳。
3.以上 1.與 2.之排序有衝突時，可再參考下檔變異係數，愈低愈佳。然而決策者各有其風險態度，報酬期望值、下檔標準差、變異係數，三項指標之主次要考量，仍需決策者以主觀智慧作出結論與決策。

參考文獻

Ayub, U., Shah, S. Z. A., & Abbas, Q. (2015). Robust analysis for downside risk in portfolio management for a volatile stock market, *Economic Modelling*, *44*, 86-96.

Buckley, J. J. (1987). The fuzzy mathematics of finance, *Fuzzy Sets and Systems 21*, 257-273.

Dubois, D., & Prade, H. (1978). Operations on fuzzy numbers, *International Journal of Systems Science*, *9*(6), 613-626.

Feng, Y., Hu, L., & Shu, H. (2001). The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications, *Fuzzy Sets and Systems*, *120*, 487-497.

Guo, S., Yu, L., Li, X., & Kar, S. (2016). Fuzzy multi-period portfolio selection with different investment horizons, *European Journal of Operational Research*, *254*, 1026-1035.

Harlow, W. V., & Rao, R. K. S. (1989). Asset pricing in a generalized mean-lower partial moment framework: theory and evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *24*(3), 285-311.

Jensen, M. C. (1968). Problems in selection of security portfolios - the performance of mutual funds in the period 1945-1964, *The Journal of Finance*, *23*, 389-416.

Kaufmann, A. & Gupta, M. M. (1991). *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Application*. New York: VanNostrand Reinhold.

Klir, G. J. (1997). Fuzzy arithmetic with requisite constraints, *Fuzzy Sets and Systems*, *91*, 165-75.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77-91.

Markowitz, H. (1st Ed.) (1959). *Portfolio Selection*. New York: John Wiley and Sons.

Paquin, J., Gauthier, C., & Morin, P. (2016). The downside risk of project portfolios: The impact of capital investment projects and the value of project efficiency and project risk management programmes, *International Journal of Project*

Management, *34*, 1460-1470.

Roy, A. D. (1952). Safety first and the holding of assets, *Econometrica*, 431-450.

Seitz, N., & Ellison, M. (1999). *Capital Budgeting and Long-Term Financial Decisions*. U.S.A.: Dryden.

Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk, *The Journal of Finance*, *19*(3), 425-442.

Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance, *Journal of Business*, *39*, 119-138.

Treynor, J. L. (1966). How to rate management of investment funds, *Harvard Business Review*, *43*, 63-75.

Tsao, C. T. and Chu, T. C. (2002). An improved fuzzy MCDM model based on ideal and antiideal concepts, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, *45*(2), 185-197.

Tsao, C. T. (2005). Assessing the probabilistic fuzzy net present value for a capital investment choice using fuzzy arithmetic, *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, *22*(2), 106-118。

Tsao, C. T. (2012). Fuzzy net present values for capital investments in an uncertain environment, *Computers & Operations Research*, *39*(8), 1885-1892.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, *8*, 338-353.

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I, *Information Science*, *8*, 199-249.