

發展式數學課程及其教學觀

陳竹村 / 國立花蓮師範學院數學教育學系



專
論

壹、前言

筆者本是師範體系出身的國中數學科教師，大學時期雖也修讀一些教育概論、中等教育、教育心理學之類的教育科目，而研究所碩士班期間仍只鑽研純數學的領域，在從事國中數學教學期間及碩士班結業後的師專教書歲月，總是自恃數學學得不錯而且能言善道，教數學怎會有困難？

後來筆者有機緣參與國小數學科教材的編輯工作若干年，而從事師範學院國小數學科教材教法的教學工作亦有若干年後，回首這些年來的思維，在心中似乎已逐漸醞釀著一個信仰：隨時思考「給學童這個教材對學童有什麼幫助？」，「這個教材用這樣的方式、在這個時間給學童是幫了學童，還是害了學童？」。這樣的信仰有別於早年總認為：身為教師只要認真，所有給予學童的不論手段和時間，縱使對學童沒有幫助，總也不會害了學童吧。早年可能是筆者的愚鈍吧，現在回想以前所學似乎是教育歸教育，數學歸數學，兩不相干。

透過這個省思，本文希望喚醒數學教師及家長們，在學習方面，我們對待學童

的方式和態度是否應虛心檢討呢？同時也對於筆者自己往日幼稚心態的懺悔。

近年來，教育改革的聲浪不絕於耳，理應慶幸生於此時代，但筆者憂心教育改革的結果只在行政制度和表面的改革，而忽略了最重要的成份：各科教材與教法的改革才是實質的改革。而教材必須思考「給學童這個教材對學童有什麼幫助？」，教法必須思考「這個教材用這樣的方式、在這個時間給學童是幫了學童，還是害了學童？」。筆者誠摯的希望推動教育改革的專家學者能了解教材教法的改革也是教育改革成敗的必要條件。

民國八十七年的天下雜誌教育專刊中曾對台灣的教育提出這樣的警訊：如果教育的現狀無法改變，二十年後台灣將會消失在世界的舞台上。在這些批判中和教改聲浪中，少有人關注教材教法（筆者認為教材與教法是不可分離的）的議題，然而人們是否同意筆者這樣的觀點：誠意的對待求學生涯中的學童、青少年、甚至青年是創造未來和諧社會必要的手段，而誠意的對待必須在教材與教法中隨時隨地展現。試想想，教材和教法不和學童講道理，那誠意在那裡？

今日世界不僅是台灣，在大學裡教師們爭先恐後的爭著要教研究所（其理由值得探究）以表示自己的身價，也汲汲營營於學術研究，而怠於教學實務，此種現象是否已普遍存在於台灣的各大專院校，可由讀者自己判斷。這種是非對錯不是筆者可以判準與討論者，但這樣只注重學術研究（在大專院校唯一升等的管道是學術研究著作）而忽略教學實務的現象，有沒有可能使台灣的大學教育品質日愈低落，終至只略高於高中的教育水準而已。這樣的情況如果發生在培育準教師的師範院校，其後果由讀者自行推演吧！師資培育的重要工作，除了修讀教育理論學科之外，各科教材教法是結合教育理論與實務的課程，也是重要的內容。但大多數各科教材教法的教師仍汲汲於理論性的學術研究（升等的價值觀），而少有人努力於教材教法的實務：實際的設計教材，以考驗自己所談的教育理念是否可行或互相矛盾。為何少有人努力於此工作呢？因為這樣的作品不入流不能作為升等的作品，因為這是國小教師能做的工作不需要師院的教師來作。結果長久以來師院的教師各說各話，甚且互相矛盾，叫國小教師無所遵循。如今面臨教育部積極地欲整頓師範學院，在各師院人人自危的情境中，急欲轉型為綜合大學或教育大學，到時擁有教材教法實務的少數人才恐將被學術研究的風潮所淹沒得無聲無息，這到底是國家社會的幸或不幸呢？

筆者上述的論點主要強調：其一各科教材教法的改革是教育改革成敗的關鍵，其二主政者所倡導的學術研究風氣已帶來師資培育過程中，各科教材教法素質的停滯。提此論點以呼籲主政者加以導正，以免徒勞無功。

貳、定義式數學課程

一、定義式數學課程

傳統數學是先有定義（definition），然後教材或教師說明、解釋這樣定義的種種，企圖說服讀者或學童如此定義的理由、用途，如果定義的是運算（operation），希望此運算成為工具，用以解決新的問題或用以處理後續的理論；有時數學上也把概念（concepts，例如因倍數、極限概念）改為嚴密的定義（像是：如果 a 可被 b 除盡，稱 b 是 a 的因數或 ε - δ 的定義），使得後續的定理易於驗證。像這樣由數學定義開始的數學課程筆者稱之為定義式數學課程。

以64年版國小數學科課程（國立編譯館依據民國64年教育部頒定的國民小學數學科課程標準所編寫的課程）為例來看，雖然編輯的專家學者努力的加以潤飾，但仍無法脫離定義式數學的本質。一般而言，64年版在數與計算教材的處理上，對於某一個運算的引入（例如乘法運算），大多採取下列的三部曲：



用一、二個文字題，透過依序同時呈現具體物操作、半具體物操作及符號操作的方式，企圖解釋某一運算中每一步驟的意義。

在教師舉例示範計算規則的情形下，給予大量的純數字的計算題，例如「 $38 \times 67 = ?$ 」，目的在使學童精熟此計算規則，以作為數學工具使用。

在教師舉例示範應用的情形下，給予學童一些文字題（又叫應用題），期使學童能把計算規則應用在情境中。

二、64年版國小數學教科書的省思

64年版國小數學教科書（當時國編本是唯一的版本）是在什麼企圖之下編輯的恐已無法了解，而由於時代的變遷，如今或許不怎麼適當的設計理念，在當時可能已是非常偉大的改革了，因此以下的分析是以現在的角度來看64年版的缺失而不是談論當時的錯誤。試分析64年版教材在今日的情形如下：

- (一) 以目前在學的國中生而言，約估將近五成的學生無法進行數學科的學習活動，以國民教育的立場來看，這是教育改革應檢討與改進的重要事項之一。
- (二) 上述64年版的三步曲，除了第二步

曲，給學童大量的練習期使學童終身不忘尚且成功之外，其他的幾乎沒有成功，換句話說，第一步曲沒有成功，即學童沒有理解所學計算規則的意義，第三步曲也不怎麼成功，即大多數學童記得了計算規則，但遇到了應用題（64年版對文字題的名稱）仍是不會，尤其在加減乘除都教完後混合出應用題時更加可以看出結果。

- (三) 從行為學派的觀點來看，給予大量的純數字的練習題，可以使學童養成對於計算的反射性行為：計算時可以不加思索，但由於沒有理解，學童幾乎被訓練成為一部計算器而已。在以前科技未發展的階段，訓練學童成為計算工具對於社會的職場多多少少總有些用途，但今之世界計算器隨手可得，磅秤也是電子秤（設好單價，放上即可，不須計算），單純以將學童訓練成計算器的教育目標是否恰當，也是教改的重要事務。
- (四) 64年版國編本是依示範—模倣（教師示範解題，學童模倣解題）的模式設計的。教材設計者認為學童可以學習社會上的多數人在面對同類問題（例如所有的整數加法問題類型）時所使用的算法，而且能理解並成為日後進一步學習數學或其他教材的工具。事實並非如此，多數的學習是模倣後死背下來的，沒有理解而死背的學習使

得學童數學課室內的痛苦指數日益增加。沒有理解而死背的學習少有概念的形成與發展，從皮亞傑的認知發展論及布魯納的認知學習理論來看，都必導至沒有發展可言。在模倣中，沒有理解而死背的學習，縱使當時會解題，大多數的學童可能是「假學習」，經一段時間就忘得一乾二淨。

參、發展式數學課程簡介

一、緣起

以經驗主義(empiricism)的觀點，真理是對應於字詞(word)和存有實體(existent reality)之間的事件(thing)，說真理即是正確地描述那些事件(thing)是什麼(Smith, 1942)。而Smith描述外在因素論者(externalist)對真理的主張：「真理(truth)是取決於我們所用的字詞(words)和外在存有實體的一致，換句話說，真理的判準在於『描述』是否正確地反映(reflect)或鏡射(mirror)實體」(Smith, 1942)。這個真理即是指「客觀知識」，而問題是此真理的判準是專業霸權的結果或多數人同意的。

長久以來，「客觀知識的存在」此一假設早就深植人心，其意味著「真正的知識」是獨立於認知主體的。因此，在此一假設之下的知識是具有獨立性、唯一性、以及結果取向等三種性質。回顧長期以來國內外數學教育界的研究可發現，知識的這三種性質對此一研究圈有著根深柢固的

影響(張淑怡，民84年)。多年來國內的數學教育即以此三個性質為基礎，試圖設計課程和架構教學法，以做為「數學知識與學童」之間的橋樑，教師和課程「下定義，解說概念，教師示範解題，學童模倣」來進行「數學知識」的傳遞。數學教育的工作者在這樣的知識論架構下，雖然盡心盡力地進行研究，但學童數學的表現卻未見提昇，我們是否應探究是那裡出了問題呢？

Rescher在內在因素論(internalism)中，有關他稱做「概念唯心論(conceptual idealism)」的討論裡，他辯稱：「雖然物理事件獨立於我們而存有，但它們的實體(reality)是心靈依賴(mind-dependent)於我們。換句話說，心靈雖然不創造世界物件，但是透過決定類別、外形塑造(shaping)或建構(construct)這個實體，而這個外形塑造是基於人們透過概念基模(schema)及架構(framework)，和環境交互作用(interact)的結果(Smith, 1942)。

根本建構主義的創造人Von Glasersfeld(1987)指出：近年來，由於研究察覺兒童是用他們自己的方式去概念化他們自己的數學經驗，而不是去發現數學最後的真理，因而一些數學教育界的研究者已改變他們的研究趨向，朝向調查數學概念的本質，以及觀察兒童在與數學概念相關的實驗上之表現(張淑怡，民84年)。

教育部國立編譯館依據民國82年教育部所公布的國民小學數學科課程標準編輯



的數學課程（簡稱為82年部編本，包含教學指引、課本及習作）是改編自台灣省國民學校教師研習會於81年開始編輯和實驗的國小數學實驗課程（簡稱數學實驗課程，包含教師手冊、課本及習作）。數學實驗課程在數與計算教材的處理上是，依研究者認為數學概念的本質是什麼的情境下，先發展學童的數學概念，再引入與此數學概念有關的數學語言，最後再考慮與此概念有關的數學問題社會上的大多數人是怎麼算的（簡稱成人算則），以及如何引入。筆者試圖分析此實驗課程的架構及其理論基礎，並給予此課程一個貼切的名稱「發展式數學課程」。

二、「發展式數學課程」模式

以往的數學教學大多停留在傳統的教學：下定義，解說概念，遇有問題，教師示範解題，學童模倣，定義式數學課程即是根據這樣的教學法及考量數學知識的邏輯性和或多或少的一些教育心理學觀點來發展的數學課程。這種定義式數學課程，自有其發展的由來及存在的價值，但在國民中小學的階段，由於是義務教育、是強迫教育，這種只能適合部份學童的課程，是否應重新檢討而選擇另一種課程呢？筆者在此提出另一種數學課程：發展式課程供教育界及數學教育界參考。

筆者用了七、八年的時間，研讀及分析82年版國編本，並加以修飾及整理，最後給這樣的數學課程一個名稱為「發展式

數學課程」，一來凸顯這套課程的精神，二來凸顯這是一套課程，有其理論架構而不是許多人誤解的：只是教學法的改變（有人誤解82年版國編本等同於建構主義的教學法）。

「發展式數學課程」是依一個一個概念為發展主軸，其主要成份為：(1)如何發展學童的某一概念（例如整數的加法概念）；(2)與此概念有關的數學語言之學習；(3)與此概念有關之問題相對於社會上大多數成人所使用的算法（簡稱為成人算則）之學習；以下筆者將「發展式數學課程」摘要成表一，並於表後再進一步將發展式數學課程的主要內容分別說明之。

在第一個部份「數學內容的學習」方面有幾點必須先確定，其中(a)什麼是概念，例如什麼是“5”的數概念、什麼是“13”的數概念、什麼是整數加法概念、什麼是分數乘法概念、.....等等應該先界定，(b)再談怎麼發展學童的概念的細節。對於與學童的概念發展有關的數學教育內涵有些學者稱之為「數學的內容」（黃敏晃，民82年）。

幫助學童發展概念，在現代的教育界應已形成共識，但是所存在的歧見在於(1)概念是什麼的界定，(2)透過什麼手段來幫助學童形成與提昇概念。至於概念形成的重要性容後再討論之。

在第二部份「數學語言的學習」方面，應分析與某一概念有關的數學語言有那些，例如算式摘要紀錄、解題過程紀

表一：發展式數學課程的主要成份摘要表

	數學內容的學習	數學語言的學習	成人算則的學習
主題	關心學童的數學概念是否形成與發展。	關心學童數學語言的學習與發展。	關心學童對於成人算則的理解。
主要內容	(1) 教學者應確定概念是什麼？例如數概念是什麼？整數加法概念是什麼？…等（發展式數學課程主張：學童的整數加法概念是指學童在經驗「一個一個整數加法問題的解題活動」後，並從中抽離的共同性質稱之）。 (2) 教學者透過什麼手段來幫助學童概念的 formed 和發展？（發展式數學課程主張：透過學童用自己的方法解決一個一個不同類型的整數加法問題是形成與發展整數加法概念的唯一手段，不承認教師解說概念可以形成概念，不承認教師示範解題—學童模倣是有效形成概念的方法）。 $\left\{ \begin{array}{l} \text{整數} \\ \text{分數} \\ \text{小數} \end{array} \right\}$ 的 $\left\{ \begin{array}{l} \text{加法} \\ \text{減法} \\ \text{乘法} \\ \text{除法} \end{array} \right\}$ 問題類型？ (3) 教師是否應了解什麼是 (4) 教師是否應了解學童在面對同一個問題時，有那些不同解題策略？或者知道在那裡可查得到這些不同的解題策略？為何學童會有不同的表現？面對這些不同的表現，教師的立場應如何？（發展式數學課程主張：課堂中不論是教師或學童不可比較優劣，教師不可下結論）。	(1) 那些數學語言是學童必須學習的？（發展式數學課程主張：算式摘要紀錄、解題過程紀錄、問題紀錄，列式、併式紀錄及逐次減項紀錄是學童必須學習的）。 (2) 這些數學語言中，每一個項目的意義分別是什麼？ (3) 這些數學語言中，每一個項目對學童有什麼幫助？ (4) 這些數學語言中，每一個項目引入的先後次序應怎樣較合理？也就是這些數學語言引入的流程和時機應怎樣較合理？	(1) 對於不同類型的問題（例如分數乘法問題），成人算則是指什麼？成人算則是什麼樣的人發明的？ (2) 成人算則在社會文化的地位為何？成人算則會不會隨著時空改變？ (3) 學童應不應該學習這一個個的成人算則？也就是問學習成人算則對學童有什麼幫助？（發展式數學課程主張：其一在課堂時間足夠，其二學童能理解，這兩種條件下才可進行） (4) 各種類型問題的成人算則對於不同的成人可能有不同的意義詮釋，使用那一種意義來引入成人算則對學童而言比較容易理解？ (5) 各種類型問題的成人算則應如何引入較合理？ (6) 學童學習了這些成人算則後，課程或教師是否要求學童把成人算則當做標準算法？

錄、問題紀錄、列式活動、逐次減項紀錄等等，在國小數學教育稱之為「數學格式」，它們是某些前段所言「數學內容」的表徵（或稱為格式記錄）。學童為何要學習這些呢？也就是說學童學了這些數學語言有什麼幫助？進而再考慮引入各種格式紀錄的流程應如何處理比較合理？

在第三個部份「成人算則的學習」方面，應分析成人算則是什麼？學童應不應

該學習？或可以不可以學習？教師對於成人算則應站在什麼立場？如果學童要學或可以學成人算則，那應如何引入較合理？

三、傳統數學課程與發展式數學課程的比較摘要

筆者以下表(表二)說明傳統數學課程與發展式數學課程的比較摘要。



專
論

表二：傳統數學課程與發展式數學課程的比較摘要表

	傳統數學課程	發展式數學課程
教學主張	下定義，解說概念，教師示範解題，學童模倣。	教師布題，學童自行解題，以形成概念，引入算式等數學語言做為概念的表徵。
概念發展	概念未必形成與提昇，即概念未必有發展。	肯定概念有形成與提昇，即概念必有發展。
缺點	(1) 由於大多數學童沒有概念的 formed 與發展，故所習得的數學符號也不具意義。 (2) 「示範—模倣」的教學就像給學童「魚」吃，而不是教學童釣「魚」，養成學童在面對新問題時，總是等待別人的示範解題。 (3) 由於「示範—模倣」的教學過程中，不確定學童已理解或學會，故造成不知不覺中學童被遺棄了而沒有跟上進度。	(1) 由於學童使用自己發明的解題策略解題，當然顯得較為笨拙。如果考試的試題須要在有限的時間內快速的計算時（不知這樣的考試是評量數學能力，還是評量反應速度的能力），學童的考試成績在低中年級會較不理想，但在高年級則未必。 (2) 由於「在須要快速計算能力的考試」中，尤其在低中年級階段，成績比較差，故必須面對家長、學校主管及同事的執疑。你是教師，你有說理的能力嗎？還是要屈服？
優點	對於考試成績的表現有速效，故而易於維持教師的聲望。	(1) 由於概念有發展，必然促成智力成長。 (2) 真正的理解（自己發明的解法，不是別人示範的），可以長久記憶。 (3) 養成遇到問題主動探索、尋求解答的習慣。
備註	誇張的說，像是在餵學童毒藥來維持學習，當停止餵食即停止學習。	教書者的良心，為了學童日後的學習著想。

肆、數學內容的學習：與學童概念發展有關的觀點

一、「數學內容的學習」之主張

以「數學內容的學習」而言，所關心的是學童的概念是否已形成或者已提昇。與82年版及九年一貫的國小數學科課程標準相對照，學童應發展（形成與提昇）的概念，例如「數概念」、「整數的加法概

念」、「整數的減法概念」、「整數的乘法概念」、「整數的除法概念」、「分數的加法概念」、.....等等，除了「數概念」的發展較特殊而另外說明之外，對於「整數、分數及小數的加、減、乘或除法概念」的發展，換言之，應幫助學童建立及充實各個數學知識（或稱為各個數學表徵）的意義，例如「數字」、「 $18+5=23$ 」、「 $2/3$ 」、「 $18 \div 3 = ()$ 」、.....等等，筆者以表三做發展式數學課程的重要觀點摘要，並依據表三

表三：發展式數學課程的重要觀點摘要表

發展式數學課程關心的議題摘要	發展式數學課程的主張摘要
1.發展式數學課程關心學童的某一概念發展，即關心學童的某一概念有否形成與提昇？	· 如果整數的加法概念沒有形成，那強加於學童的算式「 $8+7=15$ 」及面對「 $284+475=()$ 」的計算規則是沒有意義的學習。
2. (上述的主張本已包含了「數學內容」的全部，但上述的主張中至少產生)「概念是什麼？」，發展式數學課程必須有所主張，或者說必須取得共識。	· 整數的加法概念是指學童在面對「一個一個的整數加法問題的解題活動」時，從其中所抽離出來的共同性質。(「概念是什麼？」參見筆者自己的數概念觀點一節)
3. (由「關心學童的某一概念有否形成與提昇」的觀點來看) 透過什麼手段來發展（形成與提昇）學童的某一概念？（參見如何發展學童的整數加法概念一節）	· 學童必須用自己的方法來解決一個一個的整數加法問題，才確定整數加法概念能發展（形成與提昇）。強調：解題不可由他人代勞，即如果不是學童自行解題，往往概念不會發展。同時強調：教師示範解題，學童模倣對於概念的發展是無效的。
4. (如果學童必須用自己的方法來解決一個一個的整數加法問題，才確定整數加法概念能發展，那麼) 教師是否應了解什麼是 $\left\{ \begin{array}{l} \text{整數} \\ \text{分數} \\ \text{小數} \end{array} \right\} \text{ 的 } \left\{ \begin{array}{l} \text{加法} \\ \text{減法} \\ \text{乘法} \\ \text{除法} \end{array} \right\} \text{ 問題類型？}$	參見「如何發展學童的整數加法概念」一節。
5. (如果學童必須用自己的方法來解決一個一個的整數加法問題，才確定整數加法概念能發展，那麼) 教師應否了解學童在面對某一問題類型時，會有那些不同解題策略呢？或者在那裡可以查得到？學童為什麼會採用不同策略解題呢？	學童採用不同解題策略是因為學童的整數加法概念發展及其他所需用以解題的概念發展不同的緣故。



的議題在以下繼續說明如何才能使得學童的數學概念得以發展。

二、數字、數詞、數碼、數、數概念、…等名詞的意義

爲了與讀者溝通的需要，本節先區分下列名詞：

- 1.數字：國小數學教育界把「數字」指爲數的書寫符號，例如“5”、“12”、“256”、……。
- 2.數詞：國小數學教育界把「數詞」指爲數的口語符號或語音，即口中吐出的聲音，例如“×ゝ”、“尸ゝ 儿ゝ”、“ム弓 ㄅ ㄅゝ ×ゝ 尸ゝ カ一又ゝ”、……。
- 3.數碼：指0、1、2、……、9的十個符號（或稱爲數字元素），在印度-阿拉伯計數系統中，是利用這些數碼合成排列而成數字，例如「87」是「8」與「7」兩個數碼組合而成。
- 4.數：並沒有特別的定義，一般人有時用以表示書寫符號，而有時也用以表示口語符號。
- 5.標準數詞序列：按照社會文化約定的排列方式，唱出一連串的語音，各個語音皆爲數詞，例如「一、儿ゝ、ム弓、ムゝ、×ゝ、カ一又ゝ、……」。
- 6.基數：正整數數詞或數字可以用來標示某一群體物件的總量，此種功能稱之爲正整數的基數概念，而當正整數「7」是用來標示某一群體的總量，例如「七

顆糖果的集合」，此時「7」是基數。

- 7.序數：正整數除了可以用來表示群體物件的總量（基數功能）外，亦可用來標示個體在群體中的位置，或個體與群體中其他個體間的次序關係，此種功能稱之爲正整數的序數概念，例如「排在第5位的是張小明」，此時「5」是序數。

三、有關數或數概念定義的文獻

對數或數概念加以定義的文獻有許多。有些對於教師教學有幫助，有些對於教師只是徒增負擔和了解上的困擾而已，讀者可各取所需，但基於文章的完整性仍整理於下：

- 1.高斯(Gauss,1800/1929)對於何謂「數」，給了如下的定義：

數是一個指標，此指標是用來指示，爲了獲得一個與一被界定量相等的量起見，一個已知量（單位量），或是此單位的一個被等分割部份，所需被重複累積的次數；這個次數則被用來指示被界定量。

因此人們如果想要稱呼一個「被界定量」則在心中必先存有一個「單位量」，使用它來重複累積以達到「被界定量」，而以高斯的定義而言，其中重複累積的次數即是「數」，例如「五個蘋果」是由單位量「一個蘋果」重複累積5次而成的，其中重複累積的次數是「5」即爲「數」。根據甯自強（1997）的說明高斯使用「次數」來

界定「數」不免陷入循環界定的問題：「次數」也應是「數」。

2. 羅素(1919)給基數的定義是：

The cardinal number of a given class is the set of all those classes that are similar to the given class. (一個給定類之基數乃是與此給定類相似之所有類所成的集合)

甯自強(1997)解釋羅素的主張為：「3」是由這個等價類：「三個人」、「三張椅子」、「三隻鉛筆」、.....等所抽象而得的。

3. 皮亞傑(1965)經由對兒童的觀察指出，基數概念與序數概念是同時產生的。也就是說數概念一經形成，一方面是序數，另一方面則同時是基數。雖然皮亞傑對羅素的基數定義有所批評，但仍以其定義為基礎加以修正使符合正整數的基數與序數兩概念，顯見其對羅素的基數定義沒有意見。

4. Davydov(1982)給數概念的定義是：

數概念是指某量，及該量中用作測量單位的一部份，經由測量活動所建立的一組多重(multiple)的關係。

5. 歐基里得(1926)則說過：

所謂的單位是指存有而被稱為「1」的事物，而數則是由單位所構成的多數。

6. Steffe等人認為「『1』是內蘊化的數數動

作，而數則為由集合「1」所構成的集聚單位(composite unit)」。

7. 劉秋木根據「人們要經過數數的過程才能確定一個集合（或一堆物件）的有多少元素（總量）」，稱「數是一個計算事物的系統（計數系統）」。

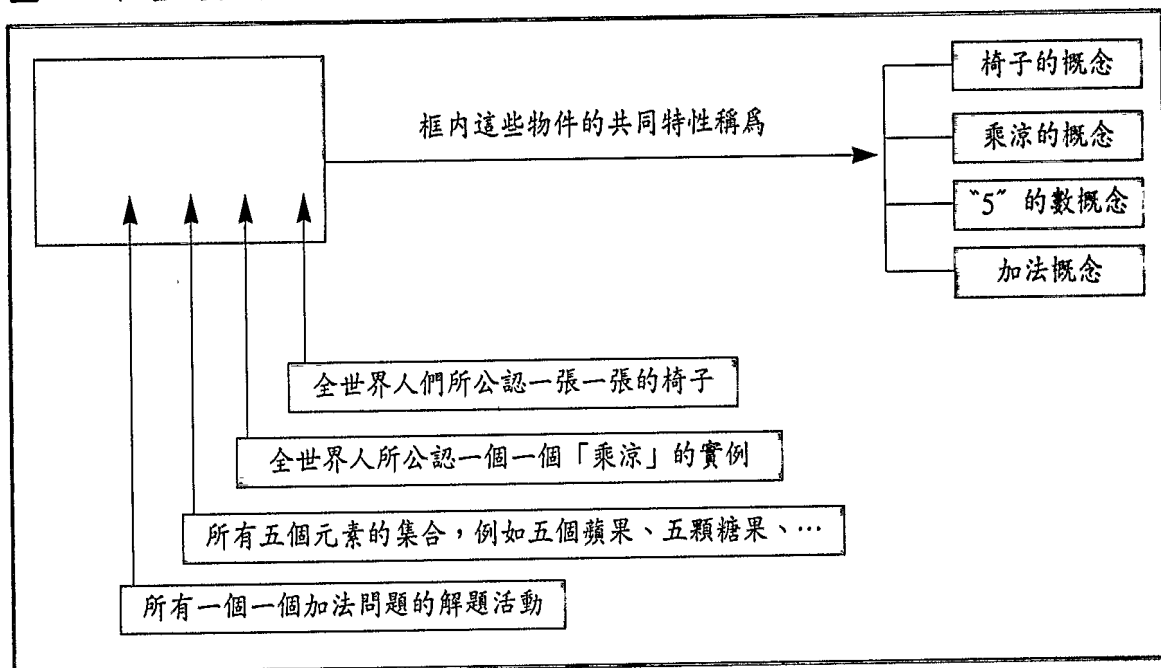
8. 甯自強認為，由心理學的觀點來看，數概念是由「1」概念的聯合再加以聚合而成的集聚單位；而「1」概念則由測量活動中的行為，或是數數動作的內蘊化所得的。另外數概念用在實際中，是單位量與被界定量的關係；此一關係多半發生在測量活動中，此一關係建立在單位量（部份）與被界定量（全體）的可重複累積的多重關係上。

四、筆者自己的數概念觀點

在數學或數學教育界中，已有許多著名的學者對於數和數概念下了定義和說明，雖說各有特色和擅長，但是否有用有待爭議。筆者仍舊試圖說明概念、數概念，以期建立一套數學教育觀的全貌。

Mayer(1987)指「概念學習(concept learning)是指根據對個別事例之經驗而習得新的分類原則」。Wittgenstein(1953)提出一個問題，即「一個概念或類別的所有正例到底具有多少共同點？」。饒見維(民83)在指出「每一個人的心中都擁有無數的概念。每一個概念皆由許多的事例(instances)來形成其意義範疇或意義內含」。

圖一 筆者的數概念觀點



筆者自己的概念觀點如上圖，主張「全世界人們公認一張一張的椅子的共同特性」是為「一般性的椅子概念」，或稱為「完全的椅子概念」、「精緻的椅子概念」……等等。同理，如果把左上角的框內物件置換為「全世界人所公認一個一個乘涼的實例的共同特性」是為「一般性的或精緻性的乘涼概念」。依此類推可以得到更多的概念，例如「車子的概念」、「房子的概念」、「石頭的概念」、「水果的概念」、「動物的概念」、「減法的概念」、「乘法的概念」、「分數的概念」……等等。

上述這種「完全的概念」是不會因人而異的，而不管個人是否努力及意圖如何，每個人必朝向此一概念。

至於加上特定人稱的概念，例如「愛因斯坦（死去的人）的椅子概念」，是指

「愛因斯坦一生所經歷過的一張一張的椅子，並從中所抽離的共同特性」。另外，例如「陳水扁（尚活的人）的椅子概念」是指「陳水扁從小到現在所經歷過的一張一張的椅子，並從中所抽離的共同特性」。因此只要把圖一內左上角框框取代為「某人從小到現在為止所經歷過一個一個的同類物件（例如：實物、事件、實例、……）」，而從中所抽離的共同特性即為「某人的某個概念」。

至此對於數概念做以下的結論：

- (1) “5”的數概念是指所有含有五個元素的集合，例如，五個蘋果、五個花片、五顆糖果、五張桌子、……，其共同特性即是。而“13”的數概念是指所有含有十三個元素的集合，例如，十三個蘋果、十三個花片、十三顆糖

果、十三張桌子、.....，其共同特性即是。其他的數概念亦同。

- (2) “5”、“13”、“28”、.....等等的數概念雖然相當抽象，但由於仍屬同一類物件，必有其共同特性，而這共同特性即為數概念。
- (3) 某特定人的“5”的數概念，是指某特定人從小到現在為止所經歷過的含有五個元素的集合，並從其中所抽出的共同特性稱之。
- (4) 某特定人現在的數概念，是指某特定人此時從1、2、3、4、5、.....等等的數概念再抽出共同特性即是。

五、概念的幾個性質

如果讀者同意上述某某概念的定義，筆者認為概念將會有下列三個性質：

(一) 個別差異

以某甲的椅子概念而言，是某甲從小到現在為止所經歷的所有椅子，並從中抽出共同特性稱之。而某乙的椅子概念是某乙從小到現在為止所經歷的所有椅子，並從中抽出共同特性。由於「某甲從小到現在所經歷的所有椅子」和「某乙從小到現在所經歷的所有椅子」在數量和式樣上都不盡相同，故某甲與某乙分別從其中所抽出的共同特性也不盡相同。這是概念之所以個別差異的主要理由之一。另外，縱使某甲與某乙兩人從小至現在為止所經歷的所有椅子完全相同，也可能因兩人的觀察力（或者叫敏銳性，或者是心理學稱之為

後設認知能力）不同，其所抽出的共同特性亦不盡相同，而產生不同的概念品質。這又是另一個個別差異的主要理由。

(二) 成長

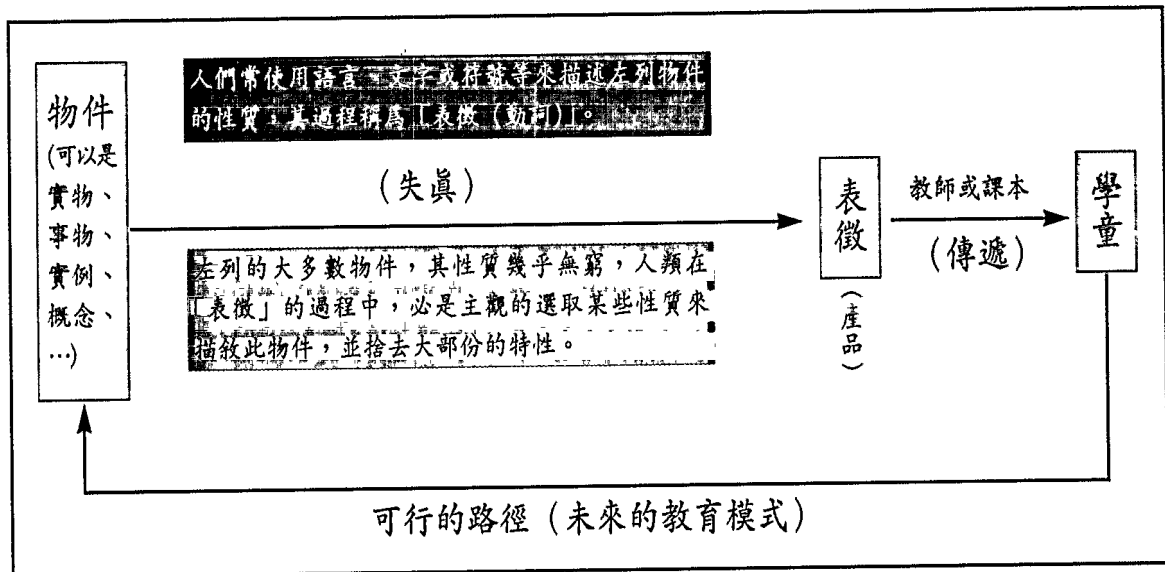
以某甲的椅子概念而言，某甲從小到六歲為止所經歷的椅子在數量和式樣上，與到十二歲相比較，必然有所增加，因所經歷的物件（椅子）的增加，其所抽出的共同特性勢必更加「精緻和完美」，此為概念會隨著年齡成長的主要理由之一。另外，隨著年齡成長個人的觀察力也會更加敏銳，是故縱使沒有增加新的物件經歷，也會抽出更加「精緻和完美」的共同特性。這又是另一個概念會隨著年齡成長的主要理由。

(三) 表徵的主觀

下圖為人類經常使用的表徵系統，透過此系統筆者說明一些觀點如下：

- (1) 首先對於一個實物、一個事件、一個實例或一個概念等等在今日學者借用電腦程式語言的名詞「物件」來統稱之。
- (2) 對於一個物件，人們常習於使用語言、文字、符號、圖象、.....等來描述或表示之，這個描述或表示的過程叫「表徵（動詞，represent）」。被描述或被表示的物件可稱為一個「被表徵物件」，而使用語言、文字、符號、.....等組合而成的「產品」，是用來代替「被表徵物件」的，也叫做「表徵（名

圖二 人類的表徵系統



詞，representation)」。

- (3)左列的大多數物件，其性質幾乎無窮，人們在表徵的過程必主觀的選取某些性質而捨去大多數的性質來形成表徵，因此「表徵」與「被表徵物」（原物件）比較必然產生「失真」的現象，即在沒有「被表徵物」（往往沒有）的情境下，透過「表徵」是還原「被表徵物」的全貌的。
- (4)當左列物件是一個概念時，透過「表徵」來描述它也必然產生「失真」，加上概念不是一個實體，更加難以了解其「失真」的程度。
- (5)以往的教育方式在面對概念、事件等等的教學時，常為透過教師或課本使用「表徵」來傳遞概念、事件等等，如此更再次的擴大了「失真」的現象。
- (6)在未來可行的教育模式，可否為讓學童直接去經驗左列的物件呢？

六、概念只可意會不可言傳嗎？

由上述概念的三個性質來看，如果要透過「表徵」（語言文字）來表徵（說出或寫出）概念，必有「個別差異」、「今是昨非（今天和昨天不一樣的說法）」及「因人而異的失真」等現象存在。是故筆者認為概念往往都是只可意會不可言傳。

Skemp也主張直接去定義什麼叫「概念」並不是讓人對它有正確概念的好方法（陳澤民，民77）。

饒見維（民83）指出「我們往往擁有許多概念但卻不見得能說出這些概念的定義」，並據此推測：「一個人的心中真正記住的不是概念的定義，而是意義範疇中的事例」。

另外在前面筆者提到一些學者，都很努力的想要使用其所抽離的共同特性來描述數概念，但讀者是否感覺到不容易理解，例如上述高斯、劉秋木等人的說法。

七、使用「描述同類物件的共同特性」來表達概念的重要性

由概念的三個性質及前面的分析，可知他人透過描述同類物件的共同特性的手段所描述的概念，大多數的情境裡，對於自己往往不具意義，尤其那個他人是專家學者時更不易理解，讀者或許會質疑，當然有些常常接觸的事物性概念因為熟悉而且每個人大同小異或許沒有這個現象，但筆者相信大多數的概念是如前所述。是故筆者推論：透過描述同類物件的共同特性的手段來傳遞概念是相當不利於學童的學習。

但是從杜威的「我們如何思維」一書中，主張：反身性思維（reflective）在智力成長上的重要性來看，當一個人經驗了一些同類物件後，自己或被強迫使用語言文字來描述這些同類物件的共同特性（製作表徵）時，必然需要反復的思考其共同特性是什麼，而透過這種反復的思考可以加速概念的 formed 與提昇，因此「透過描述同類物件的共同特性的過程」對於描述者自己是具有相當的學習意義的。

八、安全快樂的學習環境與概念發展

為兒童提供「安全快樂的學習環境」是許多學者專家甚至於所有家長的期望，其中當然有學校的硬體與教師的手段等多方面的考量，筆者只針對數學課室內與概念學習有關的議題提出來與讀者討論。

從上個段落的觀點而言，透過要求學童描述同類事物的共同特性的過程，對於此童本身而言，必然可以加速其概念的 formed 與提昇。在課堂活動中是用紙筆描述或者用口語發表呢？如果用口語發表是僅止於各自表述，或可以做合理性的批判，或可以做優劣的比較？由於人類學習習性，筆者認為在國小階段後兩種作法都會引起學童的不安全感，進一步地，使學童漸漸的封口不談，甚至於不願動腦去思考「怎麼描述此同類物件的共同特性」，因而喪失課堂活動中的學習契機。

試想想，對於「描述同類物件的共同特性」的概念發表，由於這種描述往往沒有絕對的對錯，如果發表的過程中有合理性批判或優劣性批判，那學童所發表的只要經過三、五次被批判為不合理或是劣的看法，此學童將恐懼於發表，甚至於隱藏他（她）自己的看法，假裝不會而不願發表，久而久之，連對教師所要求的思考也馬虎應付了事。

另外，對於「學童自發的解題法」的發表，如果發表的過程有優劣性的批判，也會有相同的後果。但對於「學童自發的解題法」，由於學童解題的不合理，必有概念性的錯誤或計劃的疏忽，合理性的批判筆者認為有其必要，但最好由同儕來做合理性的批判，如果同儕無法找到其不合理處才由教師提出。在合理性批判的過程中應盡量避免人身攻擊及使用鄙夷的態度和語言。這些都是為了營造一個「安全快樂

的學習環境」所必須考量的。

筆者再次強調此觀點是針對國小學童而言，如果在高中、大學或研究所的發展仍處於各自表述而沒有爭論，將會產生怠惰性的學習現象（有答案就好，有說即可）。

九、如何發展學童的數概念

學童在國小數學科教材中最早接觸的教材是整數的認識，雖然不同的學童同樣的認識了「25」這個數字及數詞，但當學童需要操弄這個數「25」時（例如在解決含有「25」數量的整數加減法問題），卻對此數「25」產生不同的解讀，為什麼會如此呢？那是因為學童的數概念發展不同所造成的。筆者認為教師應關心：「學童數概念發展的起點是什麼？」、「透過什麼得以使學童數概念發展而漸趨完全與成熟？」、「那些是整數的認識階段學童必須具備的能力？」等三個議題。

（一）學童數概念發展的起點：唱數活動與數數活動

兒童約在二至四歲時期開始模倣大人或兄姊學會唱標準數詞序列至某一數詞為止，唸到那一數因人而異，此種行為為一模倣，有些學童在不知不覺中默默觀察他人的唱數活動而學會，有些學童在父母刻意安排的遊戲中學會，有些學童必須父母一再的示範才學會，……，總之唱數活動是一個模倣的學習活動，學童不可能創造或發明出來。

當學童能唱標準數詞序列至某一數後，就可以使用所唱的「標準數詞序列」當做工具來測量一堆「被界定量」的個數，國小數學教育界把這樣的活動或能力稱為「數數活動」。「數數活動（或能力）」的學習，仍停留在示範—模倣的學習模式，是在大人示範：在面對一堆被界定物件（先由排成一列的開始）時，使用標準數詞序列，在一個物件對應一個數詞的過程中，點數完所有物件，並使用最後唸到的數詞來表徵（或代表）被界定物件的總量，兒童在模倣之初常會出現這種現象：當大人放了8顆糖果，要求兒童回答有幾顆時，兒童常唸著標準數詞序列並一點數物件後，通常到此會停止而不會使用最後一個數詞來回答被界定物件的總量，這當然可以有一些揣測的理由，譬如整串示範活動過長，而兒童的注意力尚有限，故只能注意和記得前段而已，……等理由。在兒童唱數並點數完物件停止而沒有回答大人總量時，若大人追問兒童：「到底是幾顆？」，對於初學的兒童往往會隨便找一個點數過程中唸過的數來回答大人，例如「5顆」，這當然也有一些揣測的理由，譬如兒童沒有理解大人所要問的問題是什麼意思，……等。

絕大多數的父母在面對自己小孩的成長過程中都有上述的經驗，差別只是有些兒童比較快學會正確說法而有些兒童比較慢學會而已，當你的小孩完成數數活動時，家長可以做什麼呢？由於此活動與唱



數活動一樣兒童學習的模式來自於「大人示範—兒童模倣」，因此家長或教學者可做的只是多幾次的示範而已，但是筆者強調學習是要時間來沉澱，意思是說當學童在某一時間經過幾次嘗試而沒有成功時，大人（或教師）最好暫時放棄，經一段時間後才可再次進行相同的學習活動，這樣做可以避免學習焦慮及避免造成不是「安全快樂的學習環境」。

另外，唱數活動也可以在對應一個個具體物件的點數過程中進行，以做為數數活動的預備經驗，但大人應把握學習的重點：使兒童專注於標準數詞序列的前後次序並確定兒童會唱標準數詞序列，而且大人也應知道兒童會一對一的唱數並非已完全掌握了數數活動。

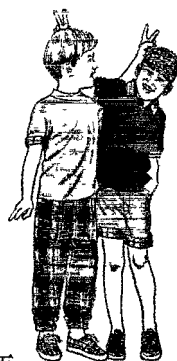
當兒童學會了唱「標準數詞序列」並使用「標準數詞序列」為工具，對一堆「被界定物件」進行一個數詞對一個物件的一對一點數的「數數活動」開始，兒童就已有最初階的某數概念（例如“5”的數概念），這即是兒童數概念發展的起步。

（二）透過什麼得以使學童數概念發展而漸趨完全與成熟？

當兒童數概念有了起步的發展後，隨著改變「被界定物件」的數量逐漸累積不同數量的「數數活動」，因而兒童數概念的品質得以提昇並朝向更精緻的概念發展，所以說學童數概念發展的持續須靠「數數

活動」的累積。但是以課程設計的觀點來看兒童的數概念發展，在課堂活動的時間有限（愈來愈少，九年一貫時只剩下低年級3節、中年級4節、高年級5節）情況下，課程和課堂活動內不應也不必有太多的數數活動來提昇兒童數概念的品質，在「整數的認識」教材中反而應專注於培養學童能解決整數加減法問題的基本必要能力，例如整數的說讀聽寫做的能力等，進一步地，由於學童在解決整數的加減法問題中將不斷的進行「數數活動」或操作有關的整數，因此兒童數概念的品質也因而提昇。

對於學童而言，當學童在面對整數範圍內的加法情境文字題（如追加型與並加型），例如「小華有8個彈珠，小明有7個彈珠，兩人合起來有多少個？」，和學童溝通問題中的語言文字的語意是很重要的，



以這個例子而言，筆者認為學童能理解題意並自行解題是發展整數加法概念的起步，在後面的章節中將仔細說明之。當學童能理解這個情境文字題的例子後，在沒有人示範解題的情形下，學童可以佈置問題的情境並操作情境即可得到答案。在佈置情境與操作情境的過程中，學童必須製做「8個彈珠」的數量和製做「7個彈珠」的數量（兩個「做數活動」），合起來後再透過「數數活動」來確定總量。由以上的



例子及說明，筆者認為：(1)唱數活動是數數活動的預備活動，所唱的標準數詞序列是數數活動的工具，(2)做數活動（看到一個數字或聽到一個數詞能拿出對應數量的具體物）和數數活動是解決整數加減法問題活動的預備活動，(3)整數的說讀聽寫做活動是學習有關整數加減法教材的預備活動（說明於下段）。

(三) 依學童運思發展的不同階段決定引入整數的範圍

由於學童的個別差異和成長因素，使得學童產生數概念品質上的差異（參見本文的討論），因此如甯自強所言，以「53」為例，學童對於53的數概念品質就有：

- (1)53代表由1開始對應標準數詞序列到具體事物的最後一項，是數的前置概念。
- (2)53代表由53個「1」所合成的新集聚單位，是數的起始數概念。
- (3)53代表由一個集聚單位，比如48，再往上累積5個「1」，所合成的新集聚單位，由於此53可內嵌其他數（如48），是為內嵌數概念。
- (4)53代表可由5個「10」和3個「1」所合成的新集聚單位，為巢狀數概念（nested；Piaget, 1965, 甯自強，民83）。

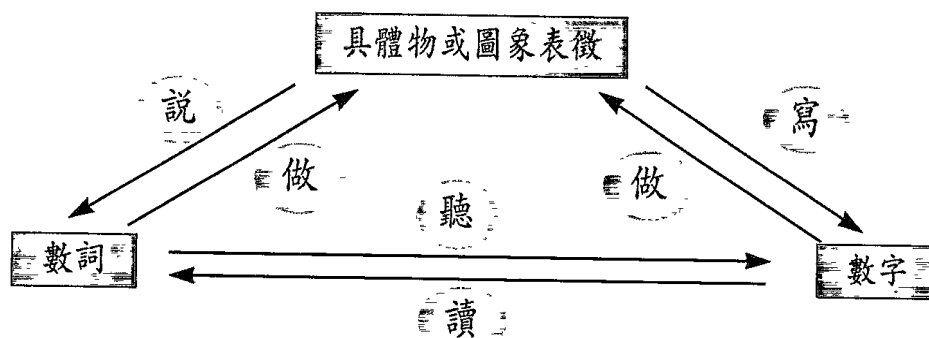
而在不同數概念品質之下的學童，當他們面對數學問題必須要操作數概念時，所表現的運思方式也會不同：(1)在起始數概念之前，學童表現出序列性合成運思；

(2)在內嵌數概念時，學童表現出累進性合成運思；(3)巢狀數概念時，學童表現出部份全體運思（早期）或測量運思（後期）（甯自強，民83）。

依據甯自強的說法：學童約在下學期開始發展累進性合成運思，而約在三年級下學期開始發展部份全體運思（甯自強，民83）。且由於運思及數概念品質的不同，使得學童能操作的大小整數有別，例如如果學童尚在序列性合成運思階段，則學童所有的數數活動都必須由1開始，此時要計數100以上的物件是煩人的工作，因此筆者同意82年部編本的引入整數認識的次序：(1)一年級上學期20以內；(2)一年級下學期前段50以內；(3)一年級下學期後段100以內；(4)二年級上學期後段200以內；(5)二年級下學期後段1000以內；(6)三年級上學期後段2000以內；(7)三年級下學期後段10000以內；(8)四年級上學期前段100000以內；(9)四年級下學期億以內；(10)六年級下學期億以上（兆以內）。



圖三：整數的說讀聽寫做活動



(四) 整數的說讀聽寫做活動

較摘要的描述，整數的說讀聽寫做活動是指具體物（或圖象）、數字與數詞三者之間的轉換活動。圖示詳如圖三。

上述圖表中所列的活動也可以說是學童必須具備的能力，有了這些能力學童才能繼續進一步做教材的學習，筆者以表四來分別說明整數說讀聽寫做活動的意義及活動中教師布怎樣的問題：

表四 整數的說讀聽寫做活動及教師的布題

活動名稱	活動意義	教師具體問話
說	對於一堆具體物或圖象表徵能說出相對應的數詞來表示其數量。	教師在黑板上貼若干圖卡或在學童桌上放若干具體物，問：xxx，這裡有幾隻青蛙，請你說說看。
寫	對於一堆具體物或圖象表徵能拿出相對應的數字卡或寫出相對應的數字來表示其數量。	教師在黑板上貼若干圖卡或在學童桌上放若干具體物，問：xxx，這裡有幾隻青蛙，請你拿出這個數字卡或你寫看看。
聽	聽到教師或他人唸出一個數詞能拿出相對應的數字卡或者能寫出相對應的數字。	當教師唸著一個數詞，例如“5”隻青蛙的“5”，問學童：拿出“5”的數字卡，或者問：寫出“5”的數字。
讀	看到一個數字卡或板書的數字，能把這個數詞讀出來。	當教師拿出一個數字卡或板書一個數字，例如“8”，要求學童說說看或讀讀看是多少。
做（左）	聽到一個數詞能拿出相對數量的具體物或畫出相對數量的圖象。	在教師口述布題的情境中，例如要求學童拿出8個花片出來。
做（右）	看到一個數字能拿出相對數量的具體物或畫出相對數量的圖象。	在教師板書一個數字或拿出一個數字卡的情境中，例如“8”，要求學童拿出8個花片出來。



(五) 命名活動

當學童在首次接觸一個新物件（例如實物、事件、新數量、概念、.....等）時，教師或大人不要先告訴學童此新物件的名稱叫什麼，而是讓學童自己嘗試說說看，這樣讓學童嘗試說出新物件稱呼的活動叫「命名活動」。

雖然學童對於一個新物件所命的名稱往往不是社會文化所使用的名稱，但學童在嘗試命名的過程中必然對此新物件加以觀察、把玩、反復思索以尋找貼切的名稱，如此的程序是可以加速與此新物件有關的概念的形成和成長。換句話說，命名活動透過杜威的主張：「反身性思維」而加速了與此新物件有關概念的形成和提昇。

命名活動的另一項功能是培養學童的類推能力。以正整數為例，82年版和九年一貫課程標準都規定國小學童要認識到一億以內的整數，如果所有整數都需要教師或大人一一給予稱呼，那所需耗去的時間將相當可觀。如果以整數名稱來看，不論是讀音（數詞）或記號（數字），大部份是可以使用已習得的部份讀音和記號來類推的，例如當學童已習得30以內的「唱數活動」、「數數活動」、「說讀聽寫做活動」後，學童在面對「30個花片再累加1個花片該怎麼說」時，可以用「20個花片再累加1個花片是儿、尸、一」來類推。筆者認為：當學童在面對一個新數量（新物件）時，給學童嘗試命名的機會，一來可加速

學童數概念的形成和提昇，二來可以培養學童在面對新物件（新學習）時類推的能力。

從上段的分析而知，有些整數在讀法和記號是可以由之前已習得的整數來類推，例如31、32、33、.....、99、.....等等，而有些整數是無法類推的，例如1、2、3、.....、9、10、12、20、100、101、110、200、1000、1001、1010、.....等等，教師在引入新數時，應特別注意學童對於不可類推的「關鍵數」，例如10、100、1000、.....等的相關學習活動。

教師應注意：在命名活動中學童所嘗試的命名應受到尊重，不做優劣的比較，不做合理性的批判，甚至於要常多加鼓勵，如此下次的命名活動才得以進行。至於教師最後提出的標準名稱，應強調並非這個名稱多好，只是社會上的大多數人都是如此稱呼，而學童要和社會上的人溝通不得不使用這一個標準的稱呼。

(六) 二個一數、五個一數、十個一數、百個一數、千個一數、.....的活動

當學童對於唱「標準數詞序列」熟悉了，「數數活動」熟悉了，「說讀聽寫做活動」也熟悉了以後，應該進一步地學習「二個一數」、「五個一數」、「十個一數」、「百個一數」、.....等等的「數數活動」，以方便（加快）當數量變大時的「數數活動」。而其中「十個一數」、「百個一數」、「千個一數」、.....等，更是印度—阿拉伯記數系統十進位制中位值概念的前置

活動，教師應給予學童發展的機會。

在前面所言整數的認識相關活動中，對「唱數活動」、「數數活動」及「說讀聽寫做活動」等都可以進一步地使用「二個一數」、「五個一數」、「十個一數」、「百個一數」、「千個一數」、……等來進行活動。

(七) 位值概念

位值概念是印度—阿拉伯記數系統的重要特性，此記數系統運用0~9十個數碼，配合書寫時的相關位置，組合起來形成數字，來描述數量。而像這樣利用相關位置來溝通數字中相關數碼的意義，稱之為位值概念，例如數字「87」是「8」與「7」兩個數碼組合而成，最右邊位置上的數碼「7」表示7個「一」單位，而左邊位置上的數碼「8」表示8個「十」；各個位置以其描述的單位為名，稱之為位，記錄「一」單位個數的位置，稱之為「個位」，記錄「十」單位個數的位置，稱之為「十位」，以此類推「百位」、「千位」、「萬位」等等。

在人類文明裡比較著名的其他記數系統，像是羅馬記數系統和古中國記數系統都沒有位值概念，這兩個記數系統只是使用更多的數碼來表示數量，和相對位置無關，例如羅馬記數法，是以M、D、C、L、X、V、I等分別代表「1000」、「500」、「100」、「50」、「10」、「5」及「1」的數量，如此「MDCCCCLXIII」即是「1964」。雖然人們在使用羅馬記數法

時，習慣於由大到小來排列數碼，但縱使不按大小排列還是可以確認其所代表的數量的。

有關位值概念在國小數學教材的地位，筆者認為只進行以下即可：(a)先不管位值概念的情境下，進行「唱數」、「數數」及「說讀聽寫做」等活動來認識「數字」及其書寫，(b)待這些數字應用自如之後，才幫學童澄清或提醒其注意：各個位置的數碼所代的數值是不同的，(c)並同時給予各個位置「位名」。

(八) 兒童數概念留待解決整數加減問題的活動中繼續成長

最後再次由前面的觀點來強調：學童數概念的發展並不須要在「數數活動」中著墨太多，以免浪費太多教學時間，而是在往後的學習活動中，例如整數的加減乘除問題的解題活動中，透過學童親自的解題活動必然不斷的進行「數數」和「做數」活動，學童的數概念應可漸趨成熟與精緻。

十、如何發展學童的整數加法概念（數學內容）

筆者用與上一節類似的方式，在本節中先確定「整數加法概念是什麼？」（Von Glasersfeld稱為概念的本質），再討論透過什麼手段來幫助學童形成與發展整數加法概念。

(一) 整數加法概念的本質

整數加法概念是什麼呢？對於一般人



而言，總試著想用語言文字去描述心中的概念，但多數人說得心虛。我們來看底下的兩段對話：

教師：xx同學，你有沒有整數加法概念？

x x：有啊！

教師：那你怎麼向別人證明呢？

x x：整數加法概念就是把兩個數加起來啊！

教師：yy同學，你有沒有整數加法概念？

yy：有啊！

教師：那你怎麼向別人證明呢？

Y Y：你儘管放馬過來吧！

試問像xx這樣：不管他面對怎樣的整數加法問題，他都能成功解題，那此人(他)是否已有整數加法概念了？

如果我們可以接受y y說法，那應可以接受筆者對於概念的觀點看法，「整數加法概念」是指：對於一個一個各種類型的整數加法問題，所引發的解題活動，而由這些解題活動所抽出的共同性質即是整

數加法概念。進一步地，某某人的「整數加法概念」是指：某某人從小到現在為止，所經驗過一個一個的整數加法解題活動，並從這些解題活動中所抽出的共同性質稱為「整數加法概念」。事實上，對每一個個人而言，從經驗少數幾個整數加法問題的解題活動開始，就或多或少已有了初步的「整數加法概念」，也可以說已形成初步的「整數加法概念」了。然後由於個人解題活動經驗的增加，概念愈來愈精緻，即概念有了發展。

(二) 整數加法問題類型

從「整數加法概念」的本質來看，學童必須經歷各式各樣的整數加法類型後，其「整數加法概念」才會完整，而且對於各式各樣的問題類型並非只經歷一兩個問題的解題活動即可，要能形成同等階段的概念通常所必經歷的問題數量是因人而異的。從「整數加法概念」的本質來看，教師與課程必須了解與提供「整數加法問題類型」有那些，筆者自82年版部編本整理成下表並說明觀點於後：

表五 整數加法問題類型

問題類型名稱	例子
1.追加型情境文字題	小華有8顆彈珠，爸爸再給小華7顆後，小華共有多少顆？
2.並加型情境文字題	小華有8顆彈珠，小明有7顆彈珠，兩人合起來共有多少顆？
3.加法標準算式填充題	$8+7=()$
4.被減數未知的情境文字題	小英有一些糖果，吃了7顆後，剩下8顆，問小英原有多少顆？
5.被減數未知的算式填充題	$()-7=8$

- (1)在數學教育界原本只稱做「追加型」與「並加型」問題而已，筆者爲了改變教師及大人的觀點：認爲「加法標準算式填充題（參見註解）」比較容易學習，刻意將「追加型」與「並加型」兩類文字題放在最前面，而且稱之爲「情境文字題」意思是：使用語言、文字及數字（詞）來描述一個問題情境。在教師或大人沒有示範解題的前提下，在學童能理解題意的情形下，學童至少可以透過「佈置情境—操作情境」來解決問題得到答案。
- (2)在發展式數學課程中，對於「加法標準算式填充題」主張：它是前兩類情境文字題的問題表徵，其引入的流程，參考「數學語言的學習」部份。
- (3)「被減數未知的情境文字題」可能是傳統課程使用者比較疑惑的，從大人的角度來看，大人在面對這種問題類型時是使用加法運算來解題的，但對於初學的學童而言，由於問題的語意與整數減法問題中的拿走型相同，是故學童可能會使用嘗試錯誤或其他方法解題。如何從「學童的想法」引導學童的解法成爲「大人的解法」，發展式數學也有一套流程和主張，讀者可參考「列式活動」一節。
- (三) 透過什麼手段來幫助學童形成與發展整數加法概念
- 發展式數學課程主張：學童必須親自用自己的方法解決一個一個的整數加法問

題才可以形成「整數加法概念」，而隨著學童所經歷的整數加法解題活動的增加，其「整數加法概念」得以朝向「精緻完美的概念」發展。筆者認爲：解題活動不得由他人代勞，即看著別人解題而自己不解題未必能形成與發展概念。另外筆者也認爲：「教師示範解題—學童模倣」也未必能形成與發展概念。

在發展式數學課程的主張之下，明顯的希望教師不是一個示範解題者，教師僅是一個布置問題的人而已，這對傳統教師是一個很大的衝擊，當教師沒有教些什麼，總覺得奇怪。但教師須常常捫心自問：以長期學童的發展來看，教師示範解題是幫助學童抑或害了學童？



(四)「整數加法概念」的發展模型

不同的學童在面對相同的整數加法問題時，會有那些不同解題策略呢？教師是否應了解？或者在那裡可以查得到？如果以82年版所建議的教學流程（教師布題，學童解題，發表與溝通討論）來看，暫時不知道學童有那些不同的解題策略應不是很嚴重的事，而能了解學童會有那些不同解題策略，對於教師在課堂活動將會比較自在而有信心的處理學童解題過程中超乎常理的部份。



由運算策略的角度來分析，當學童面臨「 $38 + 23 = ()$ 」的問題，學童可以進行下列四個層次的解題策略：（甲）又一累進性合成運思：學童以38為起點，連續進行23次「又一」的點數，即「38、39、40、……、61」而得到61的答案。（乙）又十累進性合成運思：以38為起點，先連續地進行2次「又十」的累進性合成運思，再連續地進行3次的「又一」的點數，即「38、48、58、59、60、61」。（丙）分解再結合的策略：學童先把38看成30和8，23看成20和3，將先算30和20是50，再算8和3是11，再50和11合併，而得到答案是61。（丁）「拾」「壹」兩階單位的運算策略：……（第三冊教學指引p.54）

以下是摘自82年版部編本教學指引第三冊的教學研究篇內容：

在面對相同的整數加法問題時，為何不同的學童會有不同的解題策略？發展式數學課程認為：學童的數概念，自學童經驗幾個「數數活動」後，開始就有了「初步的數概念」，隨者「數數活動」的增加及數量的擴大逐漸朝向「精緻完美的數概念」發展，在發展的過程中，研究者因其特性而將其分為幾個階段（前置數概念、起始數概念、內嵌數概念、巢狀數概念等不同的數概念品質），而且研究者也發現：學童必須經過每一個階段才會到達下一個階段。

研究者本想擴大調查以了解是否所有學童「數概念」的發展途徑都一樣，但從研究「測量工具」的角度而言，由「數數活動」來直接調查學童的「數概念品質」有其調查的困難，不如使用「整數加減問題」來調查較好。但當研究者使用「整數加減問題」來調查學童數概念的品質時，本是觀察學童如何透過使用兩個「數數活動」和兩個「做數活動」來佈置問題情境，並操作情境（點數全部）得到答案，但研究者卻意外的發現了：當學童在不同階段的數概念品質時，會用不同的運思方式來解題（例如序列性合成運思、累進性合成運思、部份全體運思、測量運思及比例運思等）。

換言之，發展式數學課程認為：當學童在面對相同整數加法問題時，學童之所以有不同的解題策略是因為學童的數概念品質不同的緣故。當學童的數概念品質是前置數概念和起始數概念時，學童只能使用「序列性合成運思」來操作「數概念」用以解決問題，表現出來必是把兩堆做出的具體數量合起來後再重新點數（最刻苦耐勞的解法）。當學童的數概念品質是內嵌數概念時，學童可以使用累進性合成運思來解題，表現出來就不會把兩堆做出的具體數量合起來了，例如一堆是8個和一堆是7個時，學童並不合起來，而是從9開始點數「7個那一堆」。當學童的數概念品質是巢狀數概念時，學童可以使用部份全體運思（初期）或測量運思（後期）來解題，

表現出來是用兩階以上的被計數單位來解題（參見82年版部編本第六冊教學指引p.5）。

（五）依據整數認識的引入數量範圍進行一波一波的合成分解活動

在前面的討論中，筆者同意82年部編本引入整數認識的分段方式，在進行合成分解活動時，也主張應隨著新數的引入，而接著進行該數量範圍的合成分解問題之解題活動，一方面可提昇數概念的品質，另一方面擴展合成分解的解題範圍。

十一、加速學童「整數加法概念」發展的機制

同意杜威主張的「反身性思維(reflection)」對於學習的重要，筆者認為只要能啟動學童的「反身性思維」，即可加速學童概念的發展，而發展式數學課程認為：(1)在解題時要求學童整理「解題草稿」或「解題過程紀錄」；(2)解題後要求學童發表其「解題過程」，並與學童討論解題過程的合理性；(3)解題後要求學童對於某同類

問題（例如整數乘法問題）做出算式摘要紀錄（算完後用一個算式把問題和結果記下來），都可以啟動「反身性思維」而加速概念的發展。

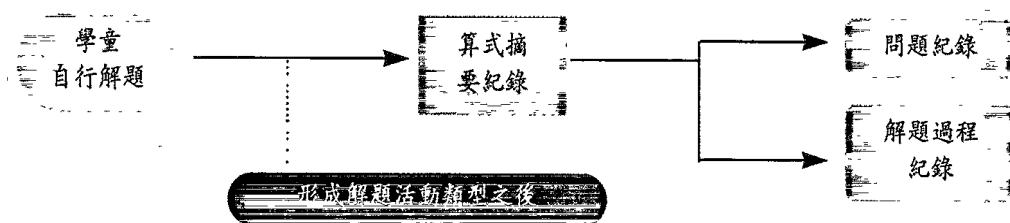
伍、數學語言的學習：與學童概念表徵有關的觀點

發展式數學課程認為：當學童能用自己方法解決相當數量的整數加法問題之後，必須引入(1)算式摘要紀錄；(2)解題過程紀錄；(3)問題紀錄等三種格式紀錄來表徵解題活動中的一些內容。並主張使用下列流程與時機（如圖四）來引入整數加法問題有關的各種格式紀錄：

一、算式摘要紀錄

舊式的數學課程是用一兩個文字題透過具體操作、半具體操作及符號操作來解釋整數加法算式： $8+7$ 的意義，隨後給予大量的純數字的計算題（例如： $9+6=?$ ）給予學童練習，希望學童在精熟後整數加法算式能成為工具，雖然事後教師或課程

圖四：引入整數加法問題各種格式紀錄的流程與時機



註：上圖只適用整數加法與減法問題有關的各種格式紀錄的引入時機及流程，對於整數乘法及除法應略做修正。



給了一些文字題（64年版部編本稱之為應用題，當時唯一的教科書）期望學童能把整數加法計算的能力應用出來，在當時評量學童的表現尚可，但等整數的加減乘除問題教完後混合給予評量，結果就不太好了。綜合言之，傳統數學課程是把算式解釋引入後隨即成為工具。

發展式數學課程主張：課程設計者應考量在學童的可能發展區（Zone of proximal development; Vygotsky, 1978）內提供同類型的情境文字題（例如整數加法的追加型和並加型），讓教師布題，學童用自己的方法解題，提醒學童可以用具體物或圖象來幫助解題，待預期學童形成解題活動類型（參見註解）之後，再重新布題的情境中，要求學童算完後用一個算式把問題和結果記下來，以完成引入算式摘要紀錄的工作。

發展式數學課程建議教師用以下的布題方式要求學童做出算式摘要紀錄：「小華有8個糖果，小明有7個糖果，兩人共有多少個？算完後用一個算式把問題和結果記下來。」。

在首次引入算式摘要紀錄時，學童會發明各式各樣的紀錄，例如 $8 \oplus 7 \rightarrow 15$ 等等，其實學童的發明已符合數學上簡化的目的，使得學童在進一步的教材得以學習了。但最後仍希望學童使用社會文化所共用的



加法算式： $8+7=15$ 來表徵上述問題的問題、結果及解題活動方式，其理由是學童必須與教室外的人溝通。像這樣「先讓學童嘗試發明，讚同他們做得很好，最後由於社會上的大人們都使用標準算式，為了溝通的需要要求學童也使用標準的算式」，發展式數學課程也叫做「命名活動」。

二、解題過程紀錄

要求學童做解題過程紀錄，對學童有什麼幫助？抑或只是方便教師探查學童的想法而已。筆者認為要求學童做解題過程紀錄有下列的功能：

- (1)溝通：讓別人（尤其是教師和關心的家長）能知道學童一步步在算什麼，以便了解學童學習的困擾處。
- (2)反思：學童做解題過程紀錄相當於在進行反思（反身性思維），可以加速概念的發展，而所做出的解題過程紀錄使學童易於做事後的解題過程檢查，而這也是在進行反思。
- (3)加速加法算式成為工具：在引入整數加法算式摘要紀錄之後，要求學童做解題過程紀錄，由於解題過程紀錄的限制，學童必須使用一個一個的算式（此時學童用加法算式）來記錄解題過程，於是在學童反覆使用整數加法算式的情境中必然加速這個算式成為學習進一步數學教材的工具。

發展式數學課程建議使用下列的布題來要求學童做出解題過程紀錄：「老闆昨

天進了284公斤的米，今天又進了499公斤的米，兩天共進了多少公斤的米？把你先算什麼後算什麼一步一步用算式記下來。」，由此命令知解題過程紀錄是指學童用一個一個的標準算式（數學格式或數學語言）所記錄的才叫解題過程紀錄，如果學童是使用圖象來記錄解題過程，在發展式數學課程裡只稱之為解題草稿而已。

發展式數學課程主張：解題過程紀錄是忠實的反應學童自己的解題過程，而不可要求解題策略和解題過程紀錄的標準化。以問題「25個李子和38個李子合起來是多少個李子？」為例，學童可能的解題過程紀錄如下表（表六）。

對於表中這些不同的解題過程紀錄可能來自於相同的解題策略和解題步驟，有些人記得比較詳細，有些人記得比較摘要，教師在面對這些學童時，應採用什麼

樣的立場？發展式數學課程建議不論詳細或摘要的解題過程紀錄都可接受，但遇有學童從未詳細過而一開始就使用比較摘要的紀錄，教師應個別詢問學童是否確知自己一步一步在算什麼，如果說不出所以然則請學童重新使用其能說出所以然的解題過程紀錄。

三、問題紀錄

在數學上，問題紀錄是指對於一個使用語言或文字等描述的問題，在未進行解題活動之前先把原問題表徵為一個用簡單數學符號所呈現的問題，由於是在未解題之前就要先進行問題紀錄，所以發展式數學課程認為要求學童做問題紀錄即等同於要求學童先提解題計劃再解題一樣。發展式數學課程的觀點認為：(1)學童須對是類問題已相當程度的熟悉後，才可能在未解題之前先提出解題計劃；(2)學童對於用來

表六 解題過程紀錄示例

較詳細的解題過程紀錄	介於中間的解題過程紀錄	較摘要的解題過程紀錄
$25 + 10 = 35$	$25 + 10 = 35$	$25 + 30 = 55$
$35 + 10 = 45$	$35 + 10 = 45$	$55 + 8 = 63$
$45 + 10 = 55$	$45 + 10 = 55$	
$55 + 1 = 56$	$55 + 5 = 60$	
$56 + 1 = 57$	$60 + 3 = 63$	
$57 + 1 = 58$		
$58 + 1 = 59$		
$59 + 1 = 60$		
$60 + 1 = 61$		
$61 + 1 = 62$		
$62 + 1 = 63$		



做為表徵原文字題的工具（數學符號：未解算式或叫算式填充題，參見註解），也必須相當程度的了解，才有成功的機會。

根據這樣的觀點，發展式數學課程建議採這三階段來培養學童問題紀錄的能力：

一、介紹工具：引入算式填充題（ $8+7=()$ ） （參見82年版部編本第一冊最後單元）
二、熟悉工具：給予一個活動（約7~8題） 幫學童了解算式填充題也是一個數學問題，也可單獨解題（無法解題時可以回到情境文字題來幫助解題）。
三、使用工具：此時再要求學童先使用算式填充題來記錄情境文字題，再進行解題活動。初接觸時學童可能會回到情境文字題來幫助解題，教師不必反對，大多數學童終會脫離情境文字題單獨解題。

問題紀錄對學童的重要性如何，學者專家各有不同意見，但對於解題計劃而言，對善於作研究的學者卻堅持其重要性。64年版部編本高年級的「怎樣解題」兩單元，由於課本、參考書及大多數的教師都要求學童用一個算式（國小尚未有未知數）先記下後再計算，使得部份可以用自己方法解題的學童卻無法列式再算，因而恐懼數學。

四、列式活動

發展式數學課程區分「問題紀錄」與



「列式」兩活動，「問題紀錄」是指用「算式填充題」把情境文字題記下來以後再解題，而「列式」是指用「標準算式填充題」把情境文字題記下來以後再解題，而標準算式填充題指的是「等號右邊只有括號的算式填充題」。筆者先用下表以實例說明「算式填充題」與「標準算式填充題」的差別：

算式填充題	$8+7=()$ ， $15-8=()$ ， $8+()=15$ ， $()\times 8=184$ ， $25\div()=5$ ， $35\div 6=()\dots\dots()$ $18()7=11$
標準算式填充題	$8+7=()$ ， $15-8=()$ ， $25\div()=5$ ， $35\div 6=()\dots\dots()$

對於一般性的情境文字題，例如「一盒草莓有23顆，8盒共有多少顆？」，要求學童做「問題紀錄」和要求學童做「列式」，其結果是一樣的，也就是說，要求學童「用算式填充題把問題記下來」和「用標準算式填充題把問題記下來」所達到的結果是相同的。

但是對於下表的各類問題就不盡相同了。

以被乘數未知的情境文字題為例，「一盒草莓有多少顆時，8盒草莓共有184顆？」，當教師要求學童用算式填充題把問題先記下來時，學童可能記成一般的算式填充題「 $()\times 8=184$ 」，也可能直接記成標準算式填充題「 $184\div 8=()$ 」，但如果教師要求學童用標準算式填充題把問題記

問題類型名稱	實 例
整數被加數未知問題	參見82年部編本教學指引。
整數加數未知問題	參見82年部編本教學指引。
整數被減數未知問題	參見82年部編本教學指引。
整數減數未知問題	小英有25顆糖果，吃了多少顆後，才會是剩下18顆？
整數被乘數未知問題	一盒草莓有多少顆時，8盒草莓共有184顆？
整數乘數未知問題	參見82年部編本教學指引。
整數被除數未知問題	參見82年部編本教學指引。
整數除數未知問題	參見82年部編本教學指引。
分數被加數未知問題	參見82年部編本教學指引。
分數加數未知問題	參見82年部編本教學指引。
分數被減數未知問題	參見82年部編本教學指引。
分數減數未知問題	參見82年部編本教學指引。
分數被乘數未知問題	參見82年部編本教學指引。
分數乘數未知問題	參見82年部編本教學指引。
分數被除數未知問題	參見82年部編本教學指引。
分數除數未知問題	參見82年部編本教學指引。
小數被加數未知問題	參見82年部編本教學指引。
小數加數未知問題	參見82年部編本教學指引。
小數被減數未知問題	參見82年部編本教學指引。
小數減數未知問題	參見82年部編本教學指引。
小數被乘數未知問題	參見82年部編本教學指引。
小數乘數未知問題	參見82年部編本教學指引。
小數被除數未知問題	參見82年部編本教學指引。
小數除數未知問題	參見82年部編本教學指引。

下來時，那學童就只能記成標準的除法算式填充題「 $184 \div 8 = ()$ 」。

發展式數學課程認為：由於學童對於情境文字題的最初步解題策略是依語意、布置情境、操作情境、得到答案，故對於上表內的24種類型的問題，未必馬上能和大人一樣（大人的加減法互為逆運算概念，及乘除法互為逆運算概念已發展完成），改用另一運算來解決問題。發展式數學課程建議使用下列三個步驟來進行上表中的各類問題之解題活動，使學童的解法能趨向和大人一樣的效率，而且每一個步驟應該至少有一個活動來進行：

步驟一：讓學童自行解是類問題，使其有成功解題的經驗。



步驟二：要求學童做問題紀錄，再進行解題。（以上段例子而言，學童可能記成一般的算式填充題「 $() \times 8 = 184$ 」或標準算式填充題「 $184 \div 8 = ()$ 」，而且記法也會影響解法。）



步驟三：要求學童「列式」後再進行解題。（此步驟是在預期學童的加減法互為逆運算概念，或乘除法互為逆運算概念已發展後才進行，以上段例子來看，學童只能記成標準算式填充題「 $184 \div 8 = ()$ 」，而且學童也能用除法策略來解決此問題）

陸、成人算則的學習

一、成人算則的意義

成人算則指的是某類問題，例如整數加法問題，社會上的大多數成人在面對時



所採用的算法。這種成人算則通常有下列性質：

- (一) 成人算則的由來：成人算則一般而言，是在不可考的年代某個人或某群人，或許是學者專家，或許只是市井小民，在面對某類問題時發明了他自己認為有效的解題策略，並在事後流傳開來，在各個時代中被人們比較覺得同意其有效（比較方便），因為被不同時期的社會文化傳承下來，像這樣的解題策略對於社會文化而言，通常是指眾多解題策略中，對於多數人是「又經濟又有效率」的解法，也就是補習班教師口中的「ㄉㄙ、步（閩南語發音）」。由於成人算則往往都是經各時期的社會文化傳承而來，學者有時又稱之為「文化傳承的解法」。
- (二) 成人算則不易理解：由於成人算則是由極少數人所發明的，而且社會文化傳承者多是成人而不是學童，通常這種算法對於學童的心智和發展是難以理解的，甚至於大人也不易理解，例如分數乘以分數的問題「 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = ()$ 」，幾乎所有的大學生都知道怎麼算，但不知每一步驟的意義。
- (三) 社會文化中「又經濟又有效率」的解法，並不見得是個人「有效」的解法，也就是說個人可能使用自己覺得「有效」的解法而不喜歡用「文化傳承的解法」，當沒有人限制其解法時。而這樣的現象學童尤其普遍。

- (四) 由於發明者都已不在，成人算則每一步驟的意義，也只是後人的分析和架構，因此常有不同意義的解釋，例如成人用直式計算「 $284 + 563 = ()$ 」時，有一個步驟是算「 $8+6=14$ 」，有人認為是算8個十加6個十是14個十，所以只記14即可，也有人認為是算80加60結果是140，再轉成14個十。
- (五) 由於社會文化是大多數人選擇對他們而言「最經濟又有效率」的解法，透過這些大多數人不斷地使用「成人算則」才得以傳承下來。但如果環境改變，例如市場內的歐巴桑改用電子秤，例如計算機隨時在身上，那「最經濟又有效率」的解法將改變，因此成人算則也隨時空因素而改變。

二、發展式數學課程對於成人算則的立場

發展式數學認為：(1)除了格式紀錄外，學童不理解的教材對於學童心智成長幫助不大，當成人算則呈現在學童面前而他又不理解時只有死背下來，而等到學童記憶超載時只有放棄學習了；(2)九年一貫各科搶上課時數的情形下，上課時數縮為低中高年級每週分別只有三、四、五節，而政府公布的教材內容（九年一貫用能力指標，其實一樣）並未減少，此時，分析學童的學習內容可以刪去的恐怕只有成人算則的部份了。

發展式數學課程主張：在學童可以理解，及上課時間夠用兩條件下，可以引入「成人算則」的學習活動。在學童習得「成人算則」之後，一來可以提昇其解題效率，二來理解「成人算則」也可使其心智成長，三來和社會上成人溝通與比較後增強學童的信心。

對於某一運算（例如 $2386 \div 17 = ()$ ）的「成人算則」，雖可能只是某位特別厲害的人物發明的算法，但由於時代的變遷已不可考究是誰發明的，甚且也已無法考究其原算則的意義是什麼了。而從詮釋(interpretation)的角度而言，總有數學教育學者或數學家做事後的考證，藉以提出他們對此算則的意義，但也可能演成多種不同的看法或觀點。

筆者認為：引入「成人算則」時，雖然選用一個觀點來架構成人算則每一步驟的意義，但學童可能仍使用自己的觀點來解釋其所見的「成人算則」。是故發展式數學建議：(1)引入成人算則後，只希望學童能用引入的觀點，或者學童自己的觀點，來解釋學童所見的成人算則皆可，而不必強求統一的觀點；(2)引入成人算則的過程中，雖限制學童一定要使用「成人算則」這種特殊解法解題，但引入後不可再限制學童使用的解題策略，以免阻礙學童的概念發展或理解。



三、整數加法成人算則的意義

由第一節的討論中，知「整數加法成人算則」這種算法中每一步驟的原來意義已不可考究，對於後人的分析至少也有兩種，以「 $284 + 563 = ()$ 」的直式算則為例，有人認為， $4 + 3 = 7$ 是算4個一加3個一結果是7個一， $8 + 6 = 14$ 是算8個十加6個十結果是14個十，.....，也有人認為 $4 + 3 = 7$ 是算4個一加3個一結果是7個一， $8 + 6 = 14$ 是算80加60結果是140，而由於個位已被記錄了可以不記，或者省略0.....。

發展式數學課程認為並不堅持選用那一種觀點來架構成人算則的意義，但選用時必須盡量考量其後整數減法、乘法及除法算則的一貫性，同時也應考量印度—阿拉伯記數系統的特性：十進結構在科學及數學的重要性。

82年部編本對加減算則保持下列兩個觀點：(1)將使用算則（混用兩階單位）視為各種解題方式的一種，而非唯一的一種，教師可以使用問題限制的方式，要求學童進行此種方式的解題，但在評量時，如無限制，則不宜視算則為唯一解題方式；(2)將使用算則視為進行混用兩階單位的合成分解活動，也就是透過解決「幾個十幾個一加（減）幾個十幾個一」是幾個十幾個一」的活動，來解決兩位數的加減問題，對於先進行幾個一的部分的合成（分解），或先進行幾個十的部分的合成（分解），並不予以強制的規定。



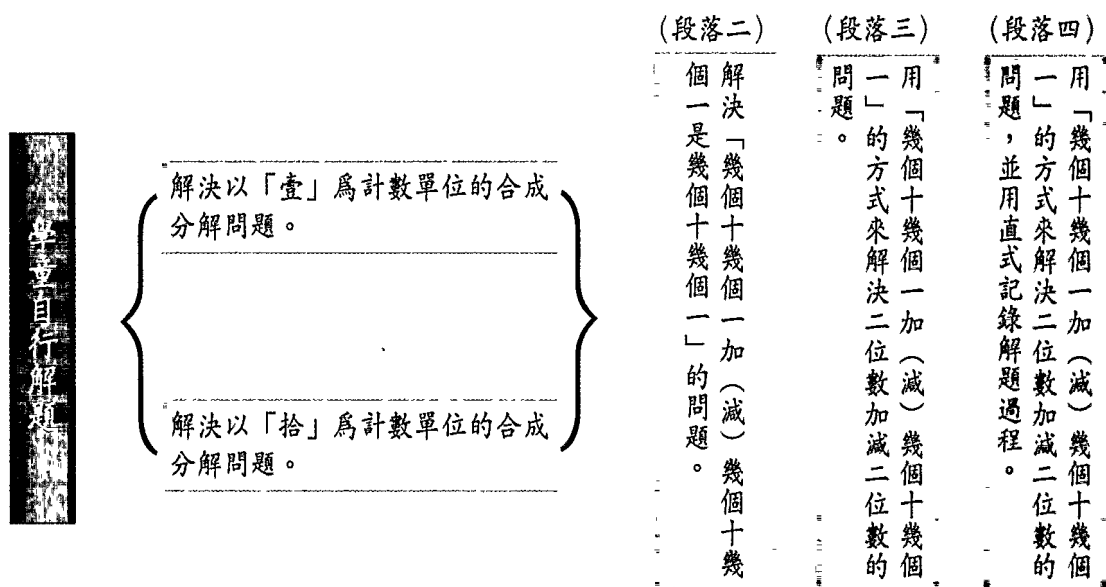
四、發展式數學課程建議「整數加法成人算則」引入的流程

筆者同意82年部編本的主張，對於加減算則採取「三階段四段落」的引入方式，建議在三年級下學期時，預期學童的部份全體運思成熟了，先分四個段落引入「二位數加減二位數」的加減算則，四年級上學期再分四個段落引入「三位數加減三位數」的加減算則，最後，在四年級上學期之後段（「三位數加減三位數」的加減算則引入完成之後）再引入四、五位數加減四、五位數的加減算則。

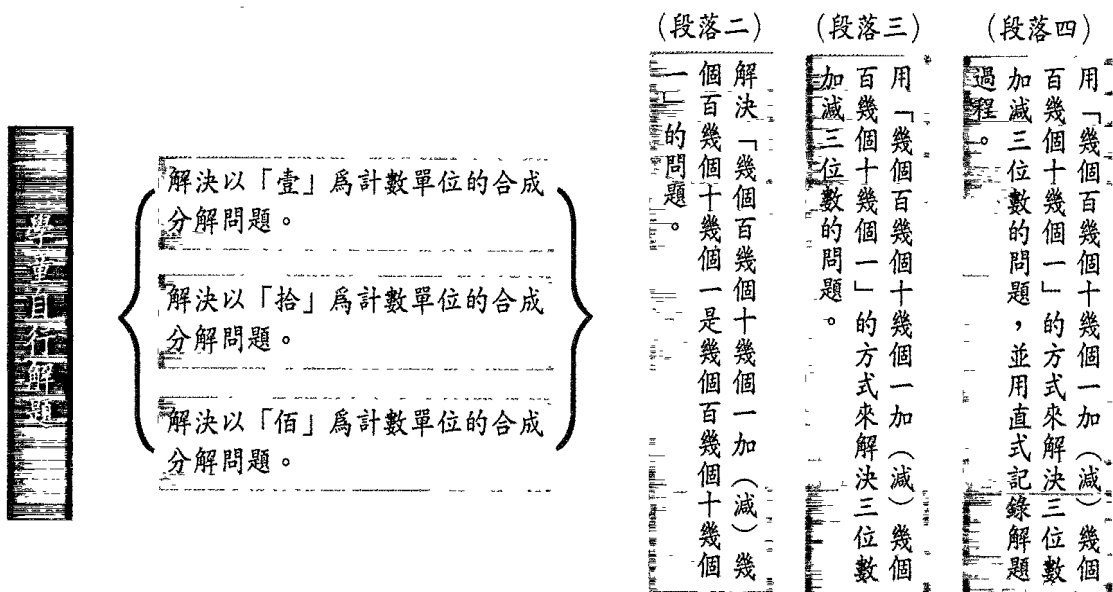
以三位數加減三位數為例，所謂的四段落是指(1)先進行以「壹」、「拾」、「佰」為被計數單位的合成分解活動，例如「8個十和7個十合起來是幾個十？是多少？」；(2)再進行「幾個百幾個十幾個一加（減）

幾個百幾個十幾個一是多少個百多少個十多少個一？是多少？」的合成分解問題，例如「2個百8個十4個一和4個百6個十7個一合起來是幾個百幾個十幾個一？」；(3)接著進行限制使用「幾個百幾個十幾個一加（減）幾個百幾個十幾個一」的特殊方式來解決「三位數加減三位數」的合成分解問題；(4)限制學童使用「幾個百幾個十幾個一加（減）幾個百幾個十幾個一」的方式，嘗試解決三位數的加減問題，並嘗試在直式的格式上，記錄解題活動與結果（參見下列圖五、圖六流程(一)及(二)）。

在進入以「拾」、「佰」、「仟」、「萬」為個別被計數單位的合成分解活動之前，學童應具有「欲進行的加減算則位數大小」（例如三位數加減三位數）的自發解題活動能力和經驗，即可以使用學童自己的兒童



圖五 流程一



圖六 流程二

法來解決該範圍的合成分解問題。

在第一段落中，建議教師應從情境文字題開始布題，例如錢幣的情境，而在此落段的活動中，教師也應處理和培養學童高低單位間的化聚能力。在第二段落中，重點在於溝通「幾個百幾個十幾個一加(減)幾個百幾個十幾個一是多少？」的題意，並給予和形成這種特定解法和名稱的共識。第三段落中，重點在於限制學童解

決「二、三位數加(減)二、三位數」時，使用上述特定的解法。第四段落中，重點在於將上述的特定解法的解題過程轉成直式紀錄，此時可以使用定位板來幫助紀錄或解題發表的說明。

筆者同意82年部編本的主張，直式紀錄不急著出現以免剝奪學童理解成人算則的機會(參見引入的流程圖一及二)。

(參考資料：如有需要請洽本社編輯部)