

(1) 教育思潮：

數學教學法不能僅強調學習觀，教學目的、教學過程、教學情境及教學內容，都是主張特定教學法時，必須特別說明，活動先於經驗，從而知識得以建構，數學的教學目的在於使兒童建構解題活動類型，有效的活動不一定有效率，也不一定是約定成俗。在教學的過程方面，透過嘗試與辯證，教學者與學習者針對對方進行的活動捕捉對方的意圖，直至雙方解除因為交流活動而產生的壓力為止。壓力的解除不但受陷於問題是否因著活動而解決，也受到雙發情意表現的影響，從而教學歷程是相互辯證的。

教學者是佈題者，透過現象學、心理學、社會學以及人類學的數學問題的提出，教師期望能促使兒童建構不僅有效，而且能與傳統典範競爭效率的抽象解題運思。教學的情境是兒童自行建構的，在兒童對於信號系統尚未有經驗之前，最佳的溝通方式應是活動的演式，因為兒童必須以其原有的知識對教學者的行為加以闡釋，以表示教學者的活動變的有意義。教學內容的重點範圍在於學習者的可能建構區，學習者透過已習得的活動類型把他們的問題環境視為必然，便可以提供進一步的活動加以操作，而使環境產生新的可能性，而學習者的可能建構區之間的結構，應當是以類似的學科『發生邏輯』而非學科的『組織邏輯』的方式組織的。

(2) 教學理論：

建構在探討知識問題時主張，「知識是建構來的」，這項基本觀點放棄傳統認識論中有關知識基礎的問題，而直接討論知識的發生與學習。從理論基礎的探討可以瞭解，心理學對知識建構偏向心理歷程的解說，而哲學則注重社會脈絡在知識發展上的功能，這兩個層面是不可偏廢的。

- 1、自古代懷疑學派開始，就以質疑知識是否能夠反應外界實體。康德則提出主體個體構成活動，將知識的基礎轉移到「建構」上。實用主義對知識的有效與否提出「有用性」的判準，有用性一方面指個體可以成功的適應環境，一方面只為社群共同的信念。換句話說，知識是個體與環境互動中所建立有用結構。
- 2、訊息處理模式承襲心理學的觀點，主張所有的心理歷程都是對訊息進行結構的活動。皮亞傑延續康德的觀點，申論主體的實

體建構是個體的適應歷程。在此歷程中，反身性的抽象作用扮演著建構知識的關鍵性角色。

- 3、就知識的客觀性來說，皮亞傑理論以適應性為核心概念。而適應性的概念容易引起爭議，不如已有有用性來詮釋比較適切。因為適應性一詞較具生物學色彩，偏重個體的心理層面。有用性的工具意義較強，卻可以結合心裡與社會層面，為知識的建構提供比較完整的基礎。

歸節上述理論基礎，建構論具備兩個關係密切的性質：一個是認知的結構論，討論的重點是知識的發展；另一個是方法的建構論，探討的問題是教學與研究方法。

(3) 教學重點：

1、將數學視為解題：

所謂解題，並不是指文字題而已，文字題只是練習，用以解釋已教過的概念、技巧或是計算過程。問題是指一個人遭遇到了困境沒有辦法立刻看出解決的方法，需要將許多已知的東西加以組織，運用這些知識找出方法，所以解題的方法至少和答案是同樣重要的。

2、將數學視為推理：

Skemp 在研究中發現，死既和推理這兩種不同的教學方式，教出了兩種不同的數學，一種是基於工具性的瞭解，另一種是基於關係性的瞭解，特性是「不僅知道要做什麼，而且知道理由」，工具性的瞭解較為流行，也較容易看出成果，但是，關係性的瞭解而學得的數學，更能適用於新的情境，一旦學會了比較容易記住，當學生能看出不同的概念和過程之間的關係時，他們記得的是整體中的相關部份，而不是各自獨立的部份。

爲了要培養兒童的推理能力，教師必須要營造出一種批判性思考的教室氣氛。不論教師或學生們在教室裡所提出的意見都應該允許其他的人提出質疑，做不同的反應或更深入的探討，這種氣氛的形成全賴教室裡的所有成員對其他人的意見表現出尊重和支持。兒童必須瞭解，能說明自己的想法，並且證明自己的想法是對的是極為重要的一件事，一個問題是如何解決和他的答案是同樣重要的。

3、將數學視為溝通的工具：

數學符號是一種語言，假如要讓兒童能用這種語言來與人溝通且能運用於日常的生活之中，兒童必須察覺數學對他有意義才行。

數學是說、聽、讀、寫的工具，所以，在低年級時，教師一定要提供機會，讓兒童說數學，當然也要讓他們聽教師或其他人或其他人解釋其他的想法或做數學的過程，至於寫數學，描述解題過程，也能幫助學生澄清自己的想法，做更深入的瞭解。讀別人寫出來的有關數學的解題過程，或是教科書上的教材也是溝通的一部份。最後，利用手勢、肢體動作、圖畫或操弄具體物來表達數學，是幫助兒童把自己的直覺想法和數學的抽象語言作連結的一個好方法。

4、數學的連結：

□ 數學內在的連結：

通常一般人都認為數學課程包括幾個獨立的領域，計算、幾何圖形、實測和解題都分別教都分別教學且彼此不通。但就學童的學習而言，除非他們將數學的概念融會貫通或不同領域之間的概念彼此連結，他們就無法了解數學上的原理和原則。結果，是學生們需要學得或記憶太多孤立的觀念。

□ 數學與其他科目的聯結：

兒童初入國小時，並未將他們的學習分成許多科目，如國語、數學、美勞、音樂等，因此，我們有必要根據他們對世界的整體觀，推展並納入更多的數學知識。譬如說，二年級上學期，我們透過兒童在美勞已有的摺紙、剪紙經驗，指導出對稱的圖形，使瞭解線對稱圖形的直觀意義。

□ 具體操作活動與抽象數學符號的連結：

實驗課程中，即為強調具體操作物、半具體操作及抽象符號操作的過程，希望能透過這樣的學習歷程，讓兒童瞭解抽象的數學符號或算式所代表的意義。

在新的課程中，注重一邊操縱具體物，一邊說明在算式上所呈現的記錄，以幫助兒童搭建具體操作活動與抽象數學符號之間的橋樑。

因此，數學新課程對於如何透過活動提昇學生的概念層次特

別加以重視，並彰顯在教材的設計上，提昇概念層次的活動區為感官活動、表徵活動、抽象運思活動，新課程不以學生能在感官活動中成功的解題為教學目標，而是以學生能透過抽象運思活動解決問題為最終教學目標。

(4) 教學分析：

新的課程背後有一個假設，及知識不是客觀的存在的，是在人的身上的、生活的、活用的，學習者一定要主動將資訊作某種處置，知識才會作某種程度的停留。知識形成的過程大致如下：經驗→察覺→理解→內蘊化，知識是由經驗開始的，經驗累積足夠多了，我們才會開始察覺到一些規律。譬如說，5、6歲小孩再數一堆由三個白色花片和五個紅色花片主成的集合時，他先屬白的再數紅的得到8，下一次他先數紅的再數白的也得到8這裡是不是有規律的存在，每一次都這樣就有了察覺，慢慢的掌握了這堆花片數量是8的事實，但我們還不能說他對這個知識有所瞭解，什麼時候他才有理解？什麼叫做理解？我認為只有當這個小孩能利用他非常清楚，確定能掌握或推論而得到的知識，來像自己或別人解釋這個結果或現象時他才有理解。例如： $7 + 1 = 8$ ， $6 + 2 = 8$ ，來解釋 $5 + 3 = 8$ 時，而能將 $5 + 3 = 8$ 轉化成 $4 + 4 = 8$ 的結果時，算他有理解，這樣理解是關係性的理解，如果進一步，他與一些人具有共識下的知識系統時，而這些又能向別人解釋的清楚時，我就認為他有了結構性的理解，或系統性地理解。

當一個小孩對某一特定的知識有了初步的理解時，他就可以沿著這個知識在他腦海裡形成的過程來說明，解釋這個知識，即使有一段時間生疏沒用到這個知識，也不會完全忘記，特定的知識將重新複製出來，而有了關連性的理解時他對這個知識的記憶或抽取就更方便了。他可以由許多相關的知識連結到這個知識，也就是說知識有了不同的來源，化成許多不同的樣子來呈現，而各種方式的呈現之間關係也很清楚，知識就有變形的使用，而有學習轉移的效果。

當一個人對某個特定的知識有了結構性的，或系統性的理解時，他以將此知識變成他腦海中視為當然的一部份任何與此互相矛盾的事物都因此而受到強烈的排斥，由此，這個知識就進入了他的信仰系統，當這個人看到他週遭的事物時，就會帶著有色的數學眼鏡加以衡量批判，這就是所謂的數學化人格。

雖然在新課程標準中，僅在數量關係的領域中，明確的使用「經驗」、「察覺」、「瞭解」三詞來區分同一教材項目的不同教學內容，其實小學階段數學科的各项教學內容，大都可以用「經驗」、「察覺」、

「瞭解」來進一步的區分同一個教材項目，使成爲不同階段的教學內容。

☆ 經驗的意義：

所謂的「經驗」是指在一個解決數學問題的情境中，進行一個新而有效的數學解題活動而言，此一活動一實施，便成爲個人的一個經驗。「經驗」多了，經驗也隨之加多。經驗雖然增多，並不保證足以造成經驗的類型，教學者僅能藉由對學習者的注意力的方向調整，處成特定經驗類型的成形，因爲教學者無法確定學習者的真正的注意力方向，僅能經由對學習者的反應的推論的負向回饋予以修正，而所修正的結果，僅能與教學者相容而非相同。

活動之後，如果是意外的驚喜，原有的經驗類型的情境得以擴張，使此一類型的適用範圍更廣，從而活動者調適自己已有的運作方式，如果意外是挫折的，新的情境要素，便會被從新的評估，再使用別的經驗類型來加以同化新的情境。基本上辨識的活動是一項嘗試錯誤的活動；兒童嘗試用已有的類型來同化新的情境，獲致爲預期的結果，進而對自己的調適，進一步分化新的類型或是增強已有的類型功能。而辨識活動的進行，主要是依賴兒童在情境中所選取的要素所引發的，從而這些要素是必須可以觀察到的，所謂可觀察的到的，對運司而言是一個相對的詞語。

特別要說明的是，經驗類型的情境中的所要素並不需要全部出現，兒童方能進入辨識的活動之中，例如：兒童辨識某種車輛的廠牌，並不需整部車子呈現在他的面前，只要部份車身的呈現在他的面前，他便可以據以認出哪一部 B e n z 的轎車，兒童可以利用部份的感官材料的符合，據以連結經驗的類型並做出判斷來。

☆ 察覺的意義：

所謂的察覺，是指兒童不但能從已有的經驗類型中選出有效的解題活動類型，並且能再缺乏感官的材料情境中，自行供給所需材料的表徵以進行解題的活動，這個階段中，兒童知道如何做，但無法知道何以這樣做是有效的。

「被察覺」也是經驗的類型，然而此一經驗的類型其功能不僅能在有可觀察的到的感官材料的情況下進行辨識，更能在沒有感官材料的供給下，自行供給材料，把經驗得類型在表現出來。辨識與在表現間的另一個差異是，前者在本質上是嘗試錯誤的，而後者則是知其然，進行解題時，如果兩者均提出了有效的活動，從辨識的活

動來看，活動的有效是碰巧而已，但是驚喜的結果卻可以擴展原有經驗類型的功能；從在表現活動的觀點來看，活動的有效則是預期的，兒童不會進行調適的活動。

◇ 瞭解的意義：

所謂的瞭解，是指兒童不但能以再表現的方式決定問題，並且能以在表現中的活動的組織成分來說明，為何其解題活動是有效的。解題者不僅知道如何做，也同時知道他的作法何以有效的。

「被瞭解」當然也是經驗的類型，此一類型除了可以用來辨識、再表現之外，更重要的是，這個經驗的類型可以被當成可觀察到的物件，呈為情境中被操作的顯著要素，也就是說，被瞭解的經驗類型變成了進一步的經驗起點。新的經驗中不在只是形式，而是新的經驗活動中使用的內容，此一內容不是動態的，兒童仍可視其需要再加以表現，這是一個動態的內容。

被瞭解的經驗類型與可在表現的經驗類型的差異，除了前者成為活動的起點，不一定需加以實施及可以掌握，而後者必須通過具體的表現之外，另一項重要的差別則在於前者是可以回溯的運思，而後者則是不可回溯的運思活動。

綜合前面所述，所謂的「經驗」，是指一個解決數學問題的情境中，進行一個新而有效的解題活動，而教學者僅能對學習者的反應加以推論，題供負向的回饋予以修正，「經驗」的成果是能夠辨識的，而辨識在本質上是嘗試錯誤的，而且是依賴可觀察的感官材料。所謂的察覺，是指兒童不但能選出有效的解題類型以解決問題，並能自行提供實施活動的感官材料。「察覺」的成果是能夠再表現，在表現是只知其然而不知其所以然，兒童在察覺的階段無法所瞭解所進行解題活動的構成成分，而僅能透過再表現活動的重播畫面性質，來掌握經驗的類型。所謂的「瞭解」，是指兒童能以在表現中的活動組成成分來說明，其解題的活動是有效的，兒童『不僅知其然，亦知其所以然』，被瞭解的解題活動類型，除了可以被當成新的活動所操作的動態的內容之外，活動的類型是可以回溯的運思。

◇ 有效的解題活動：

有效的解題活動是由兒童主動建構而成的，其主要來源有二：第一種是偶發所得的，兒童透過摸索的行為，突然或得意想不到的效果之後，將能獲得有效的經驗類型，這種經驗的類型產生，從兒童學習電動玩具的活動中，可以找到很多兒童自行建構活動類型的例子。第二種是模仿所得的。兒童與他人相處的時候，觀察到他人的活動後，

自行選取顯著要素，加以組合而成，由於顯著的要素是由兒童自己選取的，要素的組織也是自行組織的，所以觀察者認為兒童是在模仿，事實上仍是兒童自行依其注意力取捨所建構而成的。因此，在課程的教導下，利用對兒童注意力的負向回饋，縮短兒童建構有效解題活動的時間過程。

五、教學理念：

教師在數學教室中實施數學新課程理念的教學，教學活動中有一些行為模式及其轉變階段是可以被描述的，其中最為顯著者為三，即：1、教師如何處理兒童的自然想法，2、教師扮演著引導者、促動者的適時介入，3、教師對兒童認知衝突的處理方式。這些行為模式亦可作為經營數學教室新文化的參考。

(一)、兒童自然想法的處理：

1、自然想法的定義：

自然想法是學生看到佈題後的各種嘗試的說法和作法。有時也是有效解題策略的一種，但有時也只是能夠啓發一種有效解題的模糊提示，有時是錯誤的聯想。

2、培養默契尊重孩子的想法：

讓孩子知道自己有不會及做錯的權利；人人有發表的機會，不要怕說，多注意自己的禮貌及小組的榮譽；多尊重孩子的自然想法，甚於統一標準答案，不同孩子有不同的想法。

3、給孩子一片天空：

對於孩子的解題速度和方式，在螺旋式的教學安排下，逐漸累積解題的經驗，讓孩子找尋自己最易瞭解又會的方法，而不要求馬上會做格式化的解法，容許孩子有學習的時間差。對於題目出現後，他可以用自己的理解方式來記錄，再透過同儕，師生互動下，建構成格式化的數學記錄。

4、多藉助孩子的力量：

當孩子不按牌裡出牌提出一些讓老師當場無法立即回答的時候，可按兵不動把問題在拋回給孩子，由孩子來解答，更有意想不到的精彩回饋，其次讓孩子互為小老師，增加其責任和榮譽感，並多給一些成功的解題經驗。

5、放下身段：

如果孩子的方法並不像教學指引的方法，千萬別急，放下身段和孩子一同想辦法並誰時記錄孩子與指引不同的解法，不以大人

的權威干涉孩子用最有效率的方法求答，經由討論發表引導至合理的解題過程時，也不求方法的多樣性和一致性，以免孩子爲了發表而想出各種湊答案的方式，喪失原先要求反省的本意。

(二) 引導者、促動者的適時介入：

適時介入是教師在數學教室的社會行爲，因爲學生的群體討論可分小組和全班兩種形式。

1、 適時介入的定義：

根據教學目標，教師適當判斷時機，明確地調解討論的進行方式，並提出適當的指導語。指導語有兩種，一類是會議機能性的，例如：剛才某某這樣說，你們同意嗎？另一類則與討論的數學內容的提示有關；以便拉回迷失的議題，引導學生深究，或暫緩進入結束，以掌握學生的專心和有效運用時間。

2、 教學行爲轉變的說法（個別晤談）：

當學生的想法都已說出，還各持己見，我就會介入。有時會告訴他結果，有時跟老師想法並未有衝突，不需老師介入時，我會淡化處理。

當學生有錯誤答案或不同意見時，若未爭執，則讓他們繼續說，錯誤答案時我會問學生他錯在那裡，而仔細觀察的學生則會說出錯誤之處，或由錯誤同學重新來一次，則可瞭解原來自己是錯的。若小朋友問問題時我會說：各位小朋友你看他這個問題是怎麼回事啊。趕快幫他想個解決辦法，以發揮同儕的力量。

3、 教師執行適時介入的轉變階段：

課堂上沒有討論或僅至於師生單句對答，及應適時介入，教師對討論方式的操控能靈活運用；但對數學內容指導語的掌握及應時適介入，以及老師能掌握會議型式的指導語，對討論的方式的操控應靈活運用。

(三) 兒童認知的衝突處理：

運用認知的衝突教學法，源自蘇格拉底的雅典街頭教學法；他常在街頭與人做嚴肅的哲學交談，先接受該人概括性對其事物信念的陳述，而不直接論斷其是非，在引導致一個顯然的矛盾，從而使該人對他自己的信念產生衝擊。

1、 認知衝突的定義：

認知衝突指的是學生提出一個看法或解法時，教師不以其權威直接對該陳述做出是非的判決；教師對於學生之間有不同的看

(5)、課程分析：

□ 億以下個數的概念、進位與位值：

皮亞傑的“認知發展理論”中，中年級的學生正好處於{具體運思}時期，對於具體生活情境、生活環境較為熟悉，因此在億以下的數字觀念比較能明白，也能常用。而數字概念中，我們將位值視為印度、阿拉伯十進位記數系統的一個特性，運用0至9個數碼，配合位值概念組織數碼，來記錄任何的數量，並透過被計數單位的化聚活動，執行算則所必須的概念。

學童以序列性合成運思為基礎，例如{47}的意義是47個{1}，發展為累進性合成運思，47的意義開始擴展，它不只是47個1，而且可視為1個47的集聚單位，逐漸發展部份全體運思，可以同時使用兩個以上被計數的單位，47則可擴展出新的意義，代表4個拾與7個壹的合成。

位值的書寫格式中，正整數數字的最右邊一個位置是個位，個位的左邊一個位置是十位，十位的左邊一個位置是百位，同理下去，數碼分別是記錄以“壹”、“拾”、“百”、“仟”及“萬”為被計數單位的結果，所以56732這個數字的組合，不只記錄以壹為被計數單位的計數結果56732，而且也記錄5個萬、6個仟、7個百、3個拾、2個壹的合成結果。

◆ 除數是一位數的除法、除數是二位數的除法：

除數為一位數的除法，是配合九九乘法的口訣，透過解文字題的活動，來解決算式填充題，例如：把56個橘子平分到7個小朋友，儘量分完，一位小朋友分到幾顆橘子？剩下幾顆？學生的記法可能有很多種，如：(1) $56 \div 7 = ()$ (2) $56 \div 8 = () \cdots ()$ (3) $8 \times () = 56$ (4) $8 \times () + () = 56$ ，如果學生出現第(1)、(3)種記法，教師宜追問學生這種記法有沒有把剩下幾顆也記下來，如果學生出現第(4)種記法，教師應淡化處理（欣賞他的做法，予以肯定，但不要其他的同學模仿），以如此解題過程溝通。

而除數為二位數與一位數的演算方面處理技巧，顯然有些不同，其主要的差異在於二位數的除法須經過估商的程序，指導兒童將除數估計成幾而將被除數估計成幾拾或幾百幾拾形式，當然文字題的活動也是解題過程溝通的必要程序，以了解整個估商的理由、便利性。

◇ 簡意的整數四則運算：

簡意的四則運算是由已習的加法、減法、乘法和除法等有關單元發展而來，本單元進行混用多個被計數單位所描述數量的倍、分的問題，例如：1個百5個拾6個壹的3倍，合起來是幾個百幾個拾幾個壹？活動中要求學童將被加（減）數和加（減）數皆看成三個被計數單位的合成量，在各個被計數單位上，進行合成或分解的活動，如：賣一粒球收到2個拾圓和7個壹圓的描述，或買一本書要付一張1百圓、3個拾圓和5個壹圓的描述，以方便溝通。

◆ 分數的種類、真分數的概念、假分數的認識：

對於分數的種類，小朋友因停留於具體運思時期，必須以學生的生活經驗為主來加以定義，透過文字活動的解題來幫助學生了解分數的概念，例如：一盒糖、一堆球等分成數份，來討論單位分數的意義，如1單位分成6等分之後，一份為 $\frac{1}{6}$ ，以討論真分數數詞的意義，進而能用分數數詞溝通分量的獲得過程，例如：十分之七份的蛋糕，是表示將一個蛋糕等分成7份，形成十分之一份蛋糕的單位份量，再將7個十分之一份蛋糕合起來的結果。而在分數數詞來描述不小於1單位的數量，例如：當9個 $\frac{1}{8}$ 條繩子合起來時，稱之“八分之九”條繩子，而此類分數數詞，則通稱為“假分數”，而1單位與單位分數兩種被計數單位情況下，引入帶分數數詞來描述不小於1單位的數量，例如：一又五分之二條繩子，來描述一條繩子和2個五分之一條繩子的結果，由於中年級具體運思的學童並不能認為，只能在比較之下，確認為等價，用 $\frac{5}{5}$ 來換1個“1”透過如此的交換，帶入假分數與帶分數的關係。

● 同分母分數的加減：

認知發展到具體運思階段，思考水準有了質的變化，兒童能借助邏輯推裡進行轉換，而{保留}概念的形成，是這一階段出現的標示，指認識一客體或一個集合的形狀以及空間的排列知覺變化雖然改變，但其數量不變，因此，在一個集合中未增加或減去，則該集合內的成分或數量保持不變，由於形成了這些的推理規則，他們在面對數量或保留問題就能夠進行邏輯推理、轉換，因此，在加法與乘法具有交換性、集合性的觀念之後，他們已學過的運算自然就會擴大應用到分數的數的方面，例如：我們可以用數線來擴大分數的加減，兒童也能因為這是加法而能向右邊跳，或者使用區域法、集合法

來了解分數的加減法，同分母的分數加減，分子的減法與全數的減法一樣，分母保持原分母。

☆ 電算器的介紹與應用：

在日常的生活中，電算器的使用愈來愈普及，甚至很少用紙筆來做大數目的計算，而電算器的介紹著重於如何使用這個特殊的計算工具，而不討論如何計算的原理，課程中討論加減算則，偏重培養學童在概念上對多個被計算單位的掌控，故較常做四位數以內的加減練習，較少做五位以上的加減練習，其中介紹的按鍵有下列幾類：“運算鍵”、“數字鍵”、“電源開關鍵”、“清除鍵”學會這些按鍵的使用方法，學童大多能利用電算器做兩數的加、減、乘、除的運算，而活動中可以佈一些被加數或減數未知的算式填充題，讓學生知道電算器不是萬能的，很多問題需要經由人腦思考，透過格式的轉換後，才能使用電算器幫助計算大答案。

《數學科四年級教學流程設計》

△單元名稱：分數

一.學生分數概念之前置經驗檢驗：

◇佈題:1.請你從生活上，去找出 $1/2$ 的例子。

2. $1/2$ 的兩倍是什麼意思?

3. $1/2$ 和 $1/3$ 那一個大?(你能不能舉出生活上的例子)。

◆結果:1.部份與全體模式:

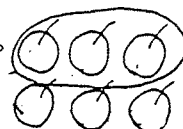
在布題要求學生用分數確定一量的數值時，必須詢問一個名數，亦即一個數和單位量的單位的合成。例如:一公尺的繩子分成四等份，一等份是多少公尺?而不是一等份是多少?因為後者可以以25公分作有效的解答，便失去分數的引導。而從學生去找出生活上 $\frac{1}{2}$ 的例子來看，例如:我每次吃西瓜的時後，都只會吃一半；我把餅乾吃了一半；他沒帶抹布，我的抹布剪 $1/2$ 給他。這些例子都是從單一個體去思考，也是大部份學生思考的路徑，少有從集合的模式去著手，例如:我媽媽買了六根香蕉，我吃了三根，也就是吃了全部的 $\frac{1}{2}$ 。

以下是學生寫的一些例子:

(1)我發現每次吃飯都只吃 $1/2$ 。



(2)我買了6顆水果，一天之中吃了全部的 $1/2$ 。

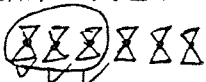


(3)我有2隻烏龜，隔天就死了 $1/2$ 。

(4)我發現每次吃西瓜的時候，我都只吃 $1/2$ 顆。



(5)6顆糖果，我吃了全部 $1/2$ ，總共是三顆，我還剩下3顆糖果。



2.子集合與集合模式:

學生對於這問題，一開始就回答1，也就是對於量的感覺較深，而當我提示整體分割活動時，他們的思考路徑變的很活躍，也能較於舉例，例如:早上我吃了 $\frac{1}{2}$ 塊麵包，下午我又吃了 $\frac{1}{2}$ 塊麵包，最後我發現整塊都吃完了；我買了六本書，早上看了三本書，下午又看了三本書，結果我發現全部的書都看完。學生已能從集合的模式去了解分數的意義。

以下是學生寫的一些例子:

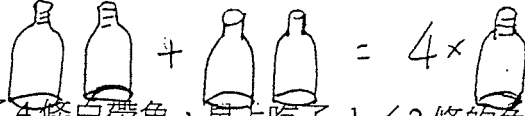
- (1) 我們家今天買了一隻鴨，中午吃 $1/2$ 的鴨，晚上又吃了 $1/2$ 的鴨，我發現整隻都被我吃完了。



- (2) 我中午喝了 $1/2$ 的茶，下午又喝了 $1/2$ 的茶，我發現整杯茶都被我喝光了。



- (3) 弟弟有 4 瓶可樂，弟弟喝了 2 瓶，哥哥也喝了 2 瓶，全部都喝光了。



- (4) 爸爸釣了 4 條白帶魚，早上吃了 $1/2$ 條的魚，下午又吃 $1/2$ 條的魚，我發現全部的魚都吃完了。(語意上有錯)

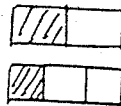
- (5) 蘋果有 6 顆，上午吃了 $1/2$ 顆，下午又吃了 $1/2$ 顆，全部就給我吃完了。(語意上有錯)

3. 數線模式:

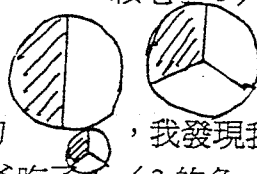
進一步把分數表示在數線上，透過相等的關係、大小關係等的指導，把過去由量導出來的分數，漸漸的脫離量而提高到抽象的分數的概念。學生在解題時，有四種的紀錄方式，例如：畫圖、摺紙、數線模式、集合模式。都能一一顯示 $1/2$ 比 $1/3$ 大，但有的學生就出現用不同的物體來相互比較，造成不同屬性的差異，無法得知它們的大小。



以下是學生寫得一些例子:

- (1) 紙一張我要剪 $1/2$ ，後來又要剪 $1/3$ 張。(語意上有錯，但是在記錄上卻沒問題)



- (2) 西瓜有 2 顆，一顆吃了 $1/2$ ，一顆吃了 $1/3$ ，相互比較之下，發現 $1/2$ 較大。



- (3) 我吃的 ，妹妹吃的 ，我發現我吃的多。

- (4) 媽媽早上買了 6 條魚，爸爸吃了 $1/3$ 的魚，媽媽吃了 $1/2$ 的魚，我發現媽媽吃的魚比較多。



- (5) 我有 1 塊年糕分給妹妹 $1/2$ ，我用一桶水澆 3 棵樹，每棵樹澆 $1/3$ 的水，發現水較多。(這是因為屬性的不同，所造成的比較錯誤。)

二. 引發學生對分數概念的建構:

◆佈題一: $1/2$ 的三倍是多少? 試舉例說明, 如何紀錄?

剛開始學生對於3倍的意思產生困惑, 老師必須從前置經驗($1/2$ 的2倍)來建立學生對於分數的序列觀念。學生對於真分數→假分數的過程中, 有些無法用正確的語文來表達, 造成表達者能用畫圖來正確詮釋, 卻在語言的溝通上讓聽者會錯意。

例如:(1)媽媽買了2顆蘋果給我, 早上我吃了 $1/2$, 中午吃了 $1/2$, 晚上又吃了 $1/2$, 我總共吃了 $3/2$ 顆。(語意上總是犯同樣的錯誤)
(2)我家有2隻雞, 第一天吃了 $1/2$, 第2天吃了 $1/2$, 第3天又吃了 $1/2$, 3天下來一共吃了 $3/2$ 隻雞。(圖示沒錯但是語意有錯。)

這時老師的適時介入, 說明這樣的寫法可能表示第一天就吃了1隻雞了, 引導學生說明第一天吃了哪一隻雞的 $1/2$, 第二天吃掉哪一隻雞.....。這時學生對於這樣的表達方式意願不是很高, 老師就以前置經驗(子集合與集合模式)的例子來做分數序列。

以下是學生寫的一些例子:

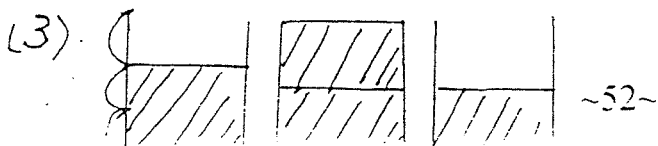
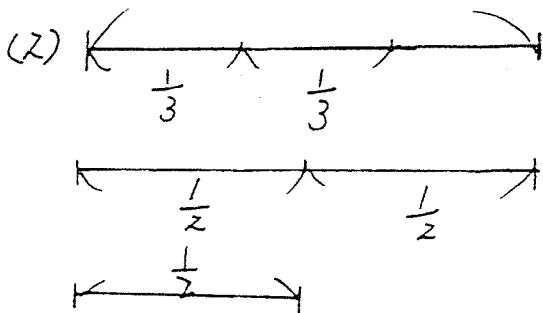
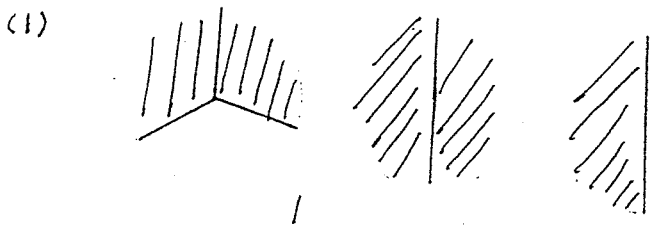
(1)早上我吃了 $1/2$ 顆的蘋果, 中午吃了 $1/2$ 的蘋果, 晚上我又吃了 $1/2$ 的蘋果, 今天我總共吃了 $3/2$ 顆的蘋果。

(2)爸爸買3隻魚, 第一天吃了第一隻的 $1/2$, 第2天又吃了第一隻魚另外 $1/2$, 第3天又吃了第2隻的 $1/2$, 結果我發現爸爸吃了1又 $1/2$ 條魚。(這位學生已能用正確的文法來描述了)

◆佈題: $1/3$ 的2倍和 $1/2$ 的3倍是否相等?

學生大都能以圖像的方式來比較, 很明顯已知 $2/3$ 小於1, $3/2$ 大於1, 但是文字的敘述上則顯得很弱, 所以都以圖像來表達為主。

以下是學生畫的例子:



教學佈題設計

目標:讓學生建構等值分數的概念

(1) $1/2$ 與 $2/4$, 那一個比較大?你要如何比較, 請舉例或畫圖說明?

(2) $1/2$ 與 $3/6$, 那一個比較大?你要如何比較, 請舉例或畫圖說明?

(3) $1/2$ 和 $1/3$, 那一個比較大?爲什麼?

家庭作業:

(4) $2/4$ 和 $3/6$, 那個較大?