1-30

值得探究，終有所獲~引領高一學生探究數學的教學實施~

臺北市立第一女子高級中學　許秀聰

研究的背景和動機

從喜愛數學到選擇以教數學爲終身職志，爲的就是要使“每一個人”都能從數學受益，大夥一起來領略數學的美，不論是那些視解數學題爲休閒樂趣的，或是上數學課會對聽到的內容眼睛發亮的，還是對數學沒多少興趣，甚至對數學感到挫敗的人。其實由於學科特質與結構，數學原本可以讓不同背景或程度的人各取所需，可惜有些人誤以爲數學僅是一些規則的匯集，因爲這樣的認知，使他們和數學的關係越來越疏離。我們可以用”as a set of rules to follow”來形容大多數教師對自身習得數學的觀點，致使他們努力教學生這些規則。因爲，自己以前是這樣學數學，而在學習成爲教師的訓練期間也認同這樣的教學技巧，所以，就很自然地用由來習慣的講述方式來進行教學活動。但是，不同於前述教師，研究者認同數學知識的形成是一個動態的過程，認爲”數學知識是可變動的、問題導向的、以及可持續擴展的；發現數學的過程可令人感到驚奇、相關、存疑和美”(Raymond, 1997, p.557)。

其實，學生在數學學習時發展出對數學的感覺和數學的本質無關。如果學生覺得數學工作很無聊，純然是因爲「被動接收知識」使他們經常犧牲深層思考的需求。也就是說，被動的參與比較不具感染力。相反地，學生若處在以討論爲導向的班級中，需要想得更多及有更主動的行動，則他們與數學形成的關係是極爲不同的。這種由學生出發的數學學習環境，會與他們在生活其他部份形成的身份相調和，使得數學知識較易於移轉。

爲什麼研究者如此重視學生學習數學的感覺？這樣的教學信念實與個人的特質有關。研究者相當贊同”教學的確需要關懷，而關懷驅動探究和反

思”(Henderson, 1992; 請見李慕華譯, 2000, 推薦序 p. 2)。也期許自己能朝一位「關懷的教師」邁進，”將自己視爲是學習的促進者”(ibid, p. 5)、”協助所有學生發現最佳自我，與學生對談、合作”(ibid, p. 7)。因而研究者希望，能在原本堅定的教學信念支持下，從學生學習的角度來重新看待教學，試驗並實現心目中理想的數學教學模式。也就是，教學活動的設計除了傳達知識之外，若想對學生產生真正深遠的影響，必然不能忽略引動學習的重要性。教師應設法讓學生以自信穩定學習情緒，從而開展自己的數學學習歷程。

因緣際會下，研究者 91~94 年數學教學碩士班的進修，除了加強自身的教學信念及重構教學概念外，一些看來可行的教學靈感也逐漸地浮現。再加上兩輪數理資優班的教學環境與身邊實習教師的參與觀察，再再促使研究者不斷反思教學成效，於檢視中持續進行教學實施的調整。

研究的問題和目的

研究者經常思索：如何在數學教學上做到效能提升？數學教學將帶給學生哪些豐富或愉悅的收穫？針對這議題，Geoffrey，Maryl & Na’Ilah (2001)曾經研究教師專業成長及課程在教授小學高年級學生分數理解上的影響，以分辨教師如何因不同的進修，而引導出學生學習的不同模式。從它們的兩個對照專業成長計畫中，應該可以體會到，當學校數學教學花很多力氣在做執行面的檢討，像是教學結構或如何實行，雖然，解決了老師們實際的困難，但是，還有更値得關注的焦點，也就是，不能忽略根源或基層面的探究。這是需要先去理解所教數學更深層的內涵、學生的數學思考和引起學習動機的氣氛引導…等，這樣才能從根本向外延來改革教學實施，有如活泉般的重構功效也許更甚策略的領悟。

Cooney (1994)認爲，教師不僅得具備數學知識、教與學數學的知識，還要知道「如何」使用這些知識來轉化教學，亦即，數學教師須同時具備數學功力(Mathematical Power)和教學功力(Pedagogical Power)。數學功力的提升是指學習者比起以往，在數學解題中抽取更爲深入的數學概念，更加注重概念間的數學連

結，也就是逐漸將所學數學知識透過深層理解形成綿密的網絡。教師有更進一步的數學理解，抓到數學世界中的核心圖像，將對數學教學形成較好的刺激，也就是說，教師數學功力的提升亦促成教學功力的成長。因爲，較熟悉數學知識的本質，又能以同理心看待學生的數學理解歷程，以致有辦法找出適合自身教學風格的教師教學活動與學生學習活動。

總結來說，基於個人的數學教學特質和教學理念，長期以來心中一直希望有機會嘗試讓數學教學活動涵蓋更多的「易學性」和「樂學性」。因此，想經由此次研究自己的教學，試試看能否讓學生以更自然的方式學習數學。所以，本研究的目的是：理解探究數學教學的可行性，嘗試建立探究教學的層次進展，並檢視學生探究數學概念內涵的感受。

探究式教學與傳統教學的不同

近幾年來，從數學教育的改革紀錄文件，例如美國 National Council of Teachers of Mathematics(NCTM, 1989, 1991)、以及國內九年一貫課程綱要(教育部, 2003)，我們都看到教師教誨學生的焦點，從以往加強程序練習和對定義的記憶，轉而強調師生間的數學探究(Inquiry)以及概念的理解。爲什麼這樣的轉移趨勢會形成，它的價值何在？研究者認爲因數學課堂上的學習需讓學生獲得利益（不論是實質應用層面，或頭腦訓練及情感欣賞層面），所以深思型教師經由不間斷的嘗試和反思，凝聚改革課程的想法，由此找到教學升級的具體實施方向。在對學生的數學思考特性及學習特質更加熟悉後，教師在心理層面提升自身對學習自主模式的認同，於是將目光聚焦在學生身上。

Krummheuer(1983)發現學生和老師所擁有的數學知識，主體基本上是不同的，對數學的思考方式也是不同的，這些差異似乎降低了老師要幫學生學好數學的努力。Krummheuer 建議老師要學習去理解他們學生的觀點和幫助他們理解老師的觀點，二者才能達到共同的目標。也就是，教師一開始假設，學生所做的是合理的，之後並從學生的透視眼光來描述它，這就是「好的數學」(對學生來說)。

不同於傳統教師的信念及課堂的教學實施，深思熟慮的教師思索的是，雖然經常教導規則能帶領學生達到正確的解答，但是，對學生而言，這些未必是其學習的起點。因此，若依教師經驗直接告知學生，解題有哪些可能的做法並比較優劣，這樣或許能讓教師覺得安心，但是，學生能否真正體驗到解題過程中的更深刻數學內涵？這點似乎無法只經由教師教授規則即可釐清的。因爲我們如果沒有站在學生考量解題的原出發點，就不容易進入他們的世界。研究者在課程上的教學信念原本就不停留於傳統的講授者，只是受限於進修前尙無法大幅改革教學；而進修後更加堅定教學應能「幫助學生自行開發解題之鑰」，故將教師視爲一位學生理解數學的「促進、佈置者」。因此，課堂的學習活動重心由教師轉至學生，師生或學生之間對數學本質的認知、課堂數學的探討、模式建立以及概念的形成等，都要透過協商和溝通來建立、凝聚共識，以引領學生探究數學知識的內涵。

Mau和D′Ambrosio(2003)進一步建議，學生須有一個學習的反思旅程，很多時候這旅程會促使學生考慮一些與學習數學相關的問題，也會促使他們重新檢視自己的數學學習過程。一種有效的做法是，讓學生經驗”被教導的反逆轉(Reversal)”，即在沒有人告知如何解題的情形下，試著自己體會如何思考與解決數學問題。一開始先給問題，鼓勵他（她）們在群體合作中解題，然後在教師引導之下進行全班學生的討論，以重新檢視他（她）們自身數學思考的正確性。這種教學環境能否發揮促進學生學習的功效，端賴數學教師如何展現其教育專業的精神，也就是需搭配教師個人的人格和教學特質。進行這種數學教學，不但要留意自身溝通、對話與互動的社會技能，還須兼顧學生的數學思考習慣和感受，不會因爲害怕得不到學校教師、同儕的認同，而放棄自己的想法。也就是說，數學教師要設法避免社會目標凌駕數學目標之上。

由於要讓學生同教師一般領略數學之美，非傳統的革新教師著力在如何增進自我認知以觸及學生數學學習的支撐點。首先，研究者努力充實自我對「學童法(Child Method)」(Case, 1975；Booth, 1981)的認知，才能於教學中架構貼合學生的學

習鷹架。Case(1975, 1978)依據 Piaget 認知發展理論，提出當學習者所處的學習環境要求他所掌握的資訊量超過他的能力時，就趨向發展出合理但過於簡化的解題策略。不僅小學生，中學生也使用自己的方法解題。Booth(1981)也發現英國中學生處理數學問題時，往往不用課堂上老師教的方法，而用自己較有感覺、有信心的方法，這就是「學童法」。

研究者為了進一步理解學生學習數學的本質，在反思教學成效之時，試著從認識論的觀點來剖析數學知識，因而明白學習環境中建構和社會化調適的重要性，那是學生獲得數學客觀知識的重要通路。教室可被視為社會互動的場所，在教師的引導下，學生重構先前已發展的概念和程序(Skott, 2004)。因此，教學功力的多元面向若以課堂師生互動而言，我們認為：除了傳統的「老師講，學生聽」之外，在尊重學生想法的教學概念下，應可加入「教師聽，學生講」的互動學習情境。Skott(2004)認為這樣的互動應關注以下幾點：

1. 教師能獨立且自發地運用課室的資源，包括學生的理解、小組討論等，並維持個人和群體的學習機會。
2. 教師引發的課室對話和互動，可提供較大的學習潛能。
3. 教師所做的內容總括，有利於提升學生的數學學習層次。
4. 教學想真正觸及數學豐富的內涵，須在心像上設法將學生的數學猜想過程具體化，此時，證明或反駁是不可或缺的活動。

當課室形成協商的氣氛，學生的想法被引出，討論的主角就是學生，學習是否充足完整的責任已由學生來承擔。此時，學生如果沒有強烈的數學感作為支撐，討論很有可能後繼無力，結果不是由老師直接講述，就是討論內容流於表層知識。我們如果想要有實質的學生探究及學習成效，必須設法培植學生深厚的數學感。如何培養學生的數學感？李源順和林福來(1998, p. 6-7)曾提及，"若能強調直觀，並且讓學生對所學的數學作合理的判斷與聯結，學生對數學的感覺就會加強"。課堂探究活動如果重視學生的直觀，由學生自己判斷，學生在看問題時就

不會只停留在最起始的學童法。

在這樣的學生數學探究活動中，教師鼓勵學生探究及反思，學生一開始面對問題可能先使用學童法，教師續以「檢核者」的角色確保學生所形成之數學概念的精確性和深度。因此，教師在以學生爲導向的教學活動中，需要一方面鼓勵學生的直觀猜測與分享，另一方面激發學生將自然語言轉化成數學語言。前者可以讓學生投入解題歷程，後者可以促使學生提升數學理解的層次。這兩項工作需要教師透過課堂溝通，先肯定學生個人想法的價值，再彰顯提升理解層次的重要性。教師想要扮演好促進者、佈置者、和檢核者的角色，必須比以往更加看重學生自我形塑的能力。數學對話可以引出學生的數學心像，透過對學生心像的檢核，應可逐漸地引導其發展個人的數學理解。而伴隨的教室數學溝通形式，似可從單向(Unidirectional)或輔助(Contributive)的方式，轉向反思式(Reflective)和教導式(Instructive)的方式(Brendefur & Frykholm, 2000)。

研究者的構想是，教師提問刺激學生自主地探究和發現數學。實際程序爲教師提供情境或問問題，讓學生在回應時自行發現某些數學性質，對數學內容賦予自己的解讀意義。最後教師做內容總括，則能促進學生檢驗想法，逐步達到抽象化和形式化的數學認知。研究者將這些相關學理在脈絡化後應用於教學，希望能使資優班學生盡情運用思考，能快樂、自信地面對數學學習，自我建構合宜深入之數學理解。雖然，學生才是學習的主角，但是，教師在幫助學生進行學習討論的引導上也扮演關鍵的角色。依此看來，以學生探究爲主、教師促進、佈置與檢核爲輔的教學策略，應該可以讓教學注入更多的活水。

「學生主動探究」的上課方法是否有缺點呢？關於這部分，先從文獻中找出前人探究成果爲這回研究基礎。Trevitt 和 Grealish 在 1994 年提及缺點之一就是時間的消耗，尤其在初始階段當學生尙不確定過程要如何進行時。對於此，有些學者陳述：不容置疑地，教學生理解意義(Teaching Meanings)真的花時間，但這個時間成本划不划得來，則是另一件事。此種教學的價值是漸增的！假如爲了有足

夠的探究意義教學，首先過程要放慢，它可以愈來愈快—並不只是快而是有較好的基礎，才能在學習主題中獲得全部效果。最後，花在發展意義的時間並沒有浪費而是儲存的。因此我們知道時間的消耗會在後面的進展中獲得平衡，研究者將在這回研究中好好體察這一點。此外，學生不知是否有足夠的前置經驗使他們能從探究數學中獲利，這也是此回研究中須關切的部分。

「探究式教學」研究方法

一、研究的設計

能在學生一進入高中即施以全面系統化的數學教學，可做的事情頓時開闊起來，能產生的影響較爲多面向而長遠。研究者苦思：「教師本身一直要求學生主動探究，這樣的主動性和探究精神，要如何才能讓學生實質養成？」因此一開始要釐清教學轉變的方向和內涵，以下就來分析對此探究教學有幫助的數學教師專業發展的模式：Simon 的學-教六循環（Learning Cycles）。

Simon(1994) 提出情境探索(Situation Exploration)和概念辨識(Concept Identification)兩階段的學習循環。在一個學習循環期中，學生須對數學情境做探索，並進而對所抽離出的概念做辨識。然後，這個新的數學想法會在往後不同的脈絡中再次被自然地喚起，如此又發動學習循環的另一個來回反覆的過程。因此，這個架構的循環觀點強調，新的學習「總是」環繞著先前知識的應用而拓展。我們將此學習數學的循環理論，平行運用在教師的學習數學教學上；教師應以自己學數學的經驗(Cycle One)爲基底來探索，藉反思促成對數學本質的學習(Cycle Two)和人們如何學數學的理解(Cycle Three)。再應用前述循環綜合、抽離出對學生學習的理解(Cycle Four)，接著，進入實際擬定教學計畫的階段(Cycle Five)，最後，到達教學實施的探索期(Cycle Six)。循環期的推展途中經常會折返(Cycling Back)到之前的循環裡，好讓教師們有機會，再以新的方式探索數學和數學教學的歷程與內涵。

研究者於 92 學年擔任兩班---共 55 人的高一資優班數學教師，爲了在自己的

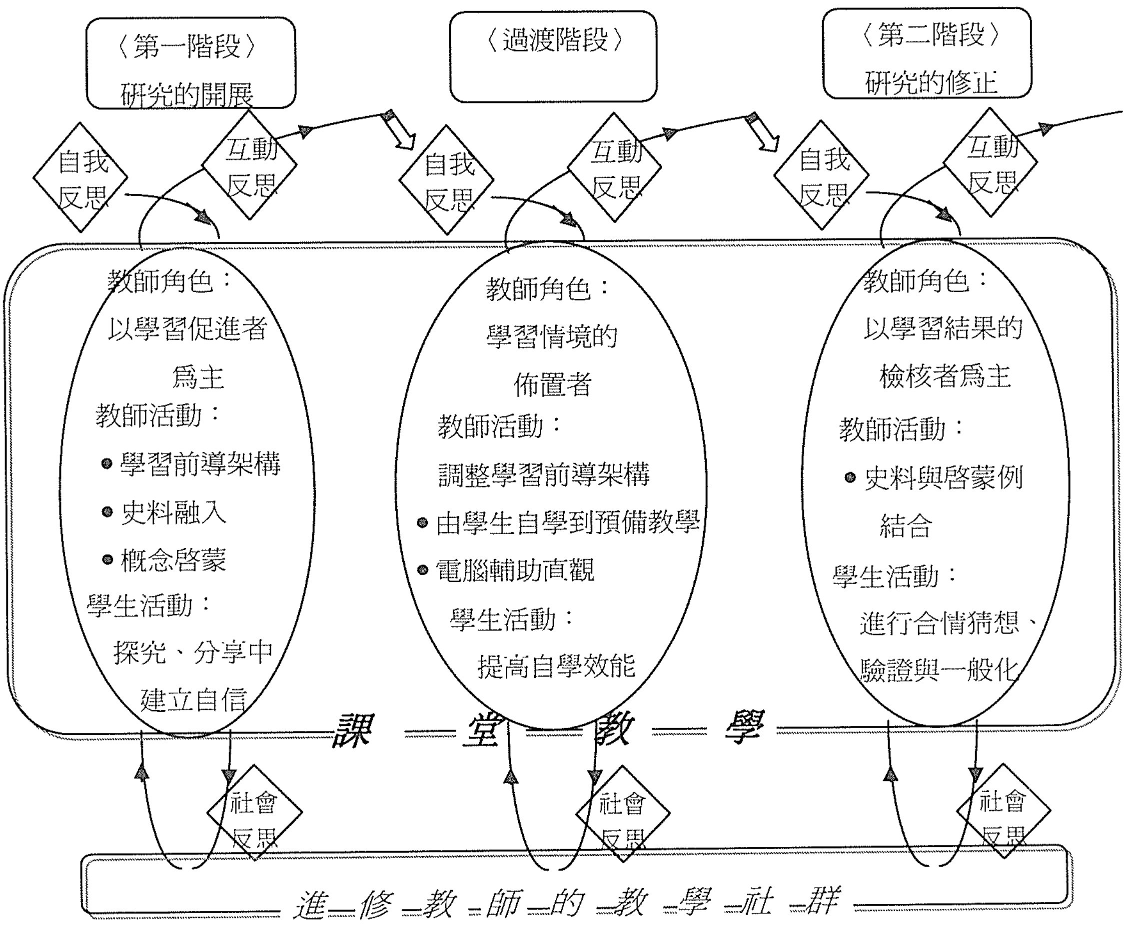
教學場域重構教學概念，因此，需要隨時依據進程作調整，所以，比較適合採用行動研究法(Action Research)。研究者以 Simon 的學-教環爲主架構，特別著力於教與學的反思，而發展出以學生探究、辨識和觸發爲取向的數學學習活動架構，亦即將數學教學活動的內涵和方式，放在與學生的互動中持續地進行調整。教師藉由教學後逐一反思教學過程與成效，再修正下回的教學計畫，以改進教學。

當設計某個單元的數學教學活動時，一般會整合相關的單元教學概念，經由教學推理進到教學行動，以建構出數學教學概念。研究者的實際步驟是，先回溯單元所涵蓋的數學知識，考慮一般教學知識和有關學習者的知識如何運用在這個特定單元上，而形成對這單元獨特的數學教學設計。Noddings (1992)指出，教師的專業知識要特別留意轉化學科教學知識(簡稱 PCK)、一般教學知識、學生知識、及其間之交互作用關係。其中，PCK 於一般教學知識上加入特定科目的特質，在整合的理解下，成爲具可教性的學科知識(Shulman, 1987)。大部分數學教師的 PCK 應是從實際教學場域之中逐漸累積而學得，所以，教師透過教學知識與其實際教學行動的互動，應可促成教師個人 PCK 的成長。當教師 PCK 獲得實質的成長，數學教學轉變便能朝著預設的目標前進。

研究者在研究初期僅有模糊的想法，藉著行動研究進程的逐步修正下，才發展出比較完整的面貌。因爲，想以探究教學取代講述教學，而這樣的教學實驗重視學生理解數學的方式及內容，所以，在參酌 Freudenthal (1991)「重新創始數學內容」的理念後，設計教學活動，而將本研究分成研究的開展及研究的修正兩個階段，中間夾有一縮減研究規模的過渡期，形成一個整體動態循環的發展歷程。

「教師預想學習進程」對探究教學活動是重要的，依據 Simon (1995, p. 133) 的主張，"雖然個別學生的「預設或預想的學習軌道(Hypothetical Learning Trajectory，簡稱 HLT)」很多樣，但是，經常有相似的路徑"。研究者認爲，教學前教師可事先思考學生可能的參與方式，勾勒單元教學的大致輪廓；之後，於實施時依據學生當下的數學理解，調整課堂溝通的內容和層次。學生經由活動產生

自我的數學理解後，教師讓全班互動、討論想法並進行驗證，學生會因而繼續發展出更深層的數學理解，並修正原有數學概念的內涵，往「重新創始數學內容」的目標邁進。進行這種教學，教師在概念上須先明瞭數學理解的各層級，教室環境營造對學習的影響，以及教學活動如何進行，才能進一步將概念用在課堂實際教學活動上。這個發展的歷程，如圖二所示。這是完整研究的發展架構圖，本文聚焦於其中的探究教學的部分，其他內容請參見許秀聰(2005)。



圖一　兩階段教學行動研究設計圖示

第一階段(92 年 7 月到 93 年 1 月)的研究目標，初步設定教師先著力於扮演學習的促進者，研究者嘗試調整數學教學的技巧。在暑期自學、第一冊學前評量、單元數學史介紹，及第一冊單元 3-2、4-4~4-6 概念啓蒙例的引動下，研究者教學活動的主體在於，以學生的直觀想法來吸引學生投入學習過程；至於學生活動部

份則包括，數學概念的探究和解題的想法分享。學生探究數學概念的能力，預想將因教師認同其直觀想法，而不斷增強。爲了佈置這部分的活動，研究者在課前即詳盡蒐集相關的數學深層知識，以設定引導課堂討論的焦點；在教學活動進行時細心觀察學生活動，將重心擺在是否達成團體探究的目標；在教學實施後的反思和分析中，設法釐清教學成效與課前設計的關聯，希望自己能對「學生課堂探究」的教學概念，較以往有進一步的理解。

過渡階段(93 年 1 月到 2 月)在寒假進行，因假期沒有實施正式的課堂教學，所以，設定教師角色爲學習情境的佈置者。這個過渡階段的研究設計和第一階段不同，以前導架構增強下一階段對學生學習的輔助，也就是說，過渡階段是第二階段的學習預備時期。在時間較無設限的優勢下，研究者嘗試透過電腦輔助學習，讓學生以網路試用軟體進行三角函數繪圖，則學生由圖形部分可先透過直觀認識三角函數。研究者預想著提供這些自學素材及學習活動，將能提升第二階段探究教學的內涵與成效。

一位數學教師對教學應有知識與實施的認知，在經驗一些學習或教學的活動後，會對既有的和新進的知識再做認同、調整和評估，以修正或轉化已有的教學概念，藉以引發解決教學問題的教學思維和發展有效的教學實作方案(陳松靖, 2001)。在前階段的教學研究後，研究者發現，教師如果想靈活地(Flexibly)支持學生的數學學習，就得針對問題所掌控的主題和工作，形成更具條理的一貫性理解。例如 Skott(2004)主張教師應運用數學和後設數學(Meta-Mathematical)概念，以教室實作爲導向而發展出更具體的教學法，如此在處理學生學習數學的問題時，才能更爲有效。

因爲第一階段的研究教學重視「以學生的認知爲起點」，開放教師對學童法的接受度；所以研究者一再利用機會讓學生在課堂上進行猜想，並請學生卸下猜想不知會不會出錯的過度疑慮。施行一學期後，覺得學生似乎已經建立自信，課室數學社群的氣氛足以支撐學生的各式猜想，故想要全體皆參與發表、討論，並

進一步強化學生猜想的動力及內涵，以促使討論、驗證對學生產生更大的學習助益。此時，研究者從文獻中找到可用的“猜想”概念，遂將其加入第二階段的研究設計中。波利亞(Polya)（請見李心煽, 王日爽和李志堯合譯，1992）的「猜想及合情推理」的構念，重點在鼓勵學生盡情地大膽思考。因爲研究者覺得猜想對學生探究具有重要性，並注意到學生要能對數學解題作出合於情理的猜想，才能使自身更爲接近數學，遂視「合情猜想」爲下學年教學的啓發術(Heuristics)。，

第二階段(93 年 2 月到 93 年 7 月)的教師角色設定不再以學習的促進者爲主，而是在促進及佈置的同時，更看重學習檢核者對探究教學的輔助功用。這階段學生學習的內容較爲抽象，須使用不少符號表徵，並須加強學生一般化數學內容的能力，故教師需留意學生學習的轉化提升，並在檢核學習的同時，亦幫助學生形成較深層的數學理解。關於學生課堂探究的活動，則著重於延續第一階段的學習環境營造和學生學習信心的建立。此外，研究者將波利亞的構念「再脈絡化」，以「合情猜想」做爲這階段學生的首要活動。合情猜想與數學證明要求的嚴密推論不同，它讓學生盡量地展示自己的數學直觀，使數學能力不同的學生都有機會發表想法。

二、資料蒐集的過程

本研究透過教室觀察、問卷調查和選樣晤談，蒐集相關實徵資料，計有教學活動紀錄、書面問卷、錄音及部分教學錄影四種資料。資料分析的方法乃參照紮根理論(grounded theory, 1998；吳芝儀和廖梅花譯，2003)中，系統歸納程序(systematic inductive procedure)和持續比對方法(constant comparative method)之精神而來。以下說明蒐集資料的過程和發展的研究工具，並舉例說明各類資料的分析方法。其中，訪談錄音是爲了明瞭史料融入數學教學的成效，因而略過。

（一）教學觀察紀錄

在本研究期間，只要課堂教學中發生令研究者(或研究者指導的實習教師王老師)印象深刻的事件，或是我們覺得某些學生表現值得留意，就會進行參與觀

察紀錄。首先，系統式地建立教學觀察日誌，將課堂教學行爲的發展記下，也速記學生當下的數學學習態度與轉變，以做爲後續教學反思和分析的資料。而且，除了研究者之外，實習的王老師也隨班觀察並紀錄，以方便課後相互驗證與比對。此種自我反思式的分析(Tzur, 2001, p. 263)是有價值的，因爲，”這樣的片段報導，不需要讓不同觀察者對片段中描述的事件完全認同，反倒是片段需以較清晰的面貌，來與其他人的經驗產生共鳴(Resonate)”。

（二）問卷調查

研究中使用的問卷共有五份，其中與數學探究教學相關的有三份，底下說明之。第一份問卷針對第二階段的 1-3「對數介紹」單元，由於，想了解這樣帶著探究特質的教學活動，是否達成學生具備對數數感和理解圖形操作的教學預設目標，故從上課反應熱烈的學生中，隨機選取 6 位施行延後測。藉由她們表達自身對對數公式的理解，評估對數數感和圖形連結的教學成效。

另有參酌和修改自Raymond (1997)的教師數學信念及上課風格問卷，在第二階段進入尾聲時(93 年 5 月)由全班學生填寫。這是想刺激學生反思學習的內容，並評估研究者設想的學生探究學習的效果。問卷共有 11 道選擇題，提供的選項依序區分成傳統型、混合型和非傳統型三種數學教學取向。有些題目則增加爲 5 個選項，加入略偏傳統型和略偏非傳統型的敘述。其中 1~4 題反映課堂上的數學學習，5~9 題反映課堂上的數學教學實施，10~11 題反映經由課堂獲得的對數學本質的看法。分析這份教師數學信念及上課風格問卷時，研究者藉助大群量化的資料來界定自己的教學風格。除了上課班級的全體學生塡答這份問卷之外，王老師和研究者也同時塡答。所以，課室教學的三種參與者－學生、觀察者、教師的勾選結果，皆依相同標準歸類，以方便之後的交叉比對，並提高學生反應的可靠性。譬如，問卷的第 2 題是：

在我們課堂上學習數學的方式是：

☐ 學生主要參與爲使技能熟練的重複練習，記憶和算術的熟練提供學習的主要證據。

☐ 學生應該對技能和算術兼顧了解和熟習。

☐ 學習的證據應多透過解釋了解的能力來看，而非算術熟練的記憶和執行爲保障。

若有學生勾選第三項，表示她感受到，研究者在課堂的數學教學偏向非傳統型，重視學生的數學理解過程勝過技巧的熟練。在交叉比對王老師和研究者本身的填答狀況後，發現我們都是勾選第三項。如此，應可提升部份研究者推論的可信與可靠程度。

第三份的學生對教學策略看法問卷，是配合第二問卷而來，在分析出第二問卷的結果後，研究者再依據學生的不同反應，挑選 14 位學生(填答的學生之中，看法屬傳統型、混合型和非傳統型者，各佔 2、7 和 5 位)，由其自行找時間作答。問卷中共有三道問答題，分別針對研究者教學策略中前導架構、概念啓蒙例及課堂探究分享等三方面，詢問學生學習後的效果和感受，目的在檢驗，研究者預想的學生學習軌道(HLT)是否發生？這三份問卷的詳細內容，請參見許秀聰(2005)。

三、研究的限制

質性分析用的實徵資料，即是質性研究之果實。這樣的研究自有其無法避免的限制，我們也認爲完整無缺的質性分析是不存在的。像研究場域是台北市的一所公立女子高中，學生成績屬於全國頂級，個人任教的班級爲這所學校的資優班，學生在進行數學探究時，所需的基礎能力較一般班級學生更爲充足。本研究乃以特定資優班級爲研究場景，是否能平行轉移至其他學校場域的數學教學，則仍然是個問題。而方法學、研究人員、及信效度等方面，本研究透過教室觀察、問卷等多種類別資料的分析，並配合實習教師王老師形成三角檢核與校正，應該可以稍微降低這些研究限制。

爲盡量減少扭曲研究結果的真實性與可信度，個人盡力做到 Patton(吳芝儀和李奉儒譯, 1995, p.308)所說的"質的分析的規範和嚴謹性，有賴於詳實地呈現描述性的資料，故經常被稱爲「厚實的描述(Thick Description)」。如此方式的描述，才能使別人閱讀了分析結果之後就能理解，並能夠做出自己的詮釋"。Tzur(2001)

在研究中呈現資料的手法即是經驗片段的回顧，他說明"敘事片段必須鮮活地描述和解釋這些個人經驗"(ibid, p.263)，如此一來，即使背景故事爲個人獨有，卻會在不同研究者間，發現研究成果有趣的關聯。

以下針對探究教學這部分報導兩階段的研究成果，在使用或呈現實徵資料時，有時會選取一些關鍵且值得留意的故事片段或某些對話，以幫助讀者了解研究者的教學思考。

「探究式教學」研究結果

一、研究的開展：第一階段

第一階段的研究希望能夠透過研究者教學觀念和角色的轉變，促進學生課堂探究及自主學習，建立以學生想法爲導向的課室環境，使學生在這種環境中重新創始數學知識。

(一) 教師教學概念及設計

教學概念同時呈現在教學的構思與實施面，包含單元設計的想法、實施策略的決定、及教學活動的進行等。教師認爲適當的課堂活動、教學方法、教學步驟和教學結果，都屬於其教學概念的一部分。研究者在研究初始具備的數學教學概念爲何？底下以一段課堂觀察日誌（教材內容爲高中第一冊 2-2 有理數與實數）來說明：

> 我對指導的實習老師講述這單元整份教材的教學設計，其中有一點是，個人在教分點公式時不以演繹法介紹，改用歸納法促成學生的認知。這與課本十分不同，課本上的分點公式介紹，是直接以一般情形讓學生代數計算出分點數值，即給予線段左右端數值爲 r,s，並設分點兩段左右比爲 m：n，則算出此分點爲 $r+\frac{m}{m+n}(s-r)=\frac{nr+ms}{m+n}$；最後再告知若爲中點，則 m=n=1，故得中點公式 $\frac{r+s}{2}$。個人覺得這樣進行教學，學生比較不能深刻體會其數學概念的深層意義，故改變教授的順序。先由已學過的特殊情形（即中點概念）開始。
>
> 教師（即研究者）：數線上由左到右的兩點坐標分別爲 r 和 s，則如何求其中點坐標？
>
> （學生們一起說中點爲 $\frac{r+s}{2}$）

教師：爲什麼？請告訴我怎麼來的。

（某位學生用計算距離來說明，其他同學表示想法相同。這時沒人提及加權平均的 概念。）

教師：再請大家找出三等份的左方第一個分點之數值，寫下答案並作觀察。

（當她們算出$\dfrac{2r+s}{3}$時，教師則進一步提示留意式子中的 2，1，3 是從何而來，並請學生試著自行解釋其數學意義。）

教師：你們感覺這樣交錯使用 2，1 比重，合不合理？接著試試再猜測三等份的第二個等分點坐標應如何？

（讓大家發表比重的意義，並說出另一分點的猜測值，及猜測的理由。）

教師：將你猜的分點坐標與原本的距離公式相驗證、比對，寫出一般 m：n 的公式，並說明 m 與 n 代表的意義。

（92 年 10 月 8 日課堂觀察日誌摘錄）

在這樣的教學活動中，研究者扮演提問者的角色，不同於傳統教學的示範或傳達者；因爲，研究者想激勵學生對所接觸的數學內容有更深入的理解，試著自我解讀，而能對數學發展出自然接納的態度。配套措施是上課前的「自學教材」及「前測問卷」。在開學前自學教材和開學第一堂前測問卷的宣示作用下，學生對數學課堂上的探索之旅可說有了準備，因此很自然地，研究者認爲適合的教學方式是『學生主動探索』。在引入一個單元的主要學習概念時，先給予情境佈題讓學生進入適合的思考環境，則學生會浮現相應的想法或策略；然後教師鼓勵學生直觀描述以抓住感覺，增強學生自信。

在研究者的教學設計中，有關情境佈題交由「史料脈絡」和「概念啓蒙」共同完成，也就是說，數學史和生活啓蒙例是學生接觸一個數學單元的課程起始內容。史料脈絡勾勒出所學的價值，概念啓蒙例的生活情境則幫助學生掌握概念核心，所以能讓學生感受數學的易學，進而引動樂學和探究的精神，研究者希望探究教學由這兩項來開展（如第一冊 2-2 有理數與實數，教師先介紹數學史的畢氏學派研究成果；3-2 無窮級數求和，進行取自課本的「皮球自由落下彈跳」生活例之討論）。由「學生對教學策略看法」問卷的塡答可以得知，概念啓蒙確實給學生帶來快樂的數學經驗，也有助於研究者營造學習環境之氣氛，引出學生熱情

參與討論。底下擷取一些學生的作答內容爲例說明：

學生 222：對於生活實例或虛擬故事接受度高，因爲和生活結合在一起，可以直接觀察。

學生 217：生活實例或虛擬故事我覺得很好，如此很貼近生活，不與生活脫節，不會只是單純的死學數學。

(二) 學生活動和教師角色

學習數學應是一個探索的活動，獲致的理解並不完全來自教育者提供的資訊，反而是由學生自己的感覺形成(Sense-Making)與相互溝通而來。在此階段，研究者主要是扮演學習促進者的角色，盡量讓學生以自己探索的方式體會概念的核心，避免數學因其抽象性而跟學生的關係越來越疏離(Boaler, 2002)。學生對概念的體會，是藉由課堂集體討論來逐步成形、確認的，在這樣的學生活動中，教師的角色尤其重要。誠如 Simon (1994)所說的，課堂學生探究並非只是讓學生發現解答，反而是教師應設法營造一個環境並編織解題工作(Tasks)，以提升學生的想像力。本階段的教室師生互動模式可大致分成 3 個階段，底下舉一個第四章「多項式介紹」單元的例子來說明：

教師：若最大公因數（9，15）=3，則式子的相當問題（(x-1)(x+2), (x-1)(x-5)）該爲何？

學生全體：是 (x-1)。

學生 212：老師，我想知道最大公因數的正值如何維護？因爲，以前 9 和 15 的公因數以正數 3 最大，這在代數式中又要如何看待？

（以上爲第 1 階段：學生個別探究）

教師（對全班鼓勵她的想法縝密！）：大家一起想想，何時 x-1 才是 3？

多數學生：須 x = 4 代入(x-1)，才得 3。

（以上爲第 2 階段：全班學生分享）

教師：從上面的處理過程，我們會注意到在未指定數值代入前，一多項式以其整體各可能數值視之。亦即沒有代入前是多項式，代入某特定值後回復爲一單純數值。那麼大家覺得在比較兩個多項式時，不能用某個代入數值去比大小，應該比的是什麼？

多數學生：應該比次數高低才合理。

教師：所以，多項式在求最高公因式時，不計其正負，比的是次數的高低囉？

（以上爲第 3 階段：教師促進全班學生的分享）

我們可以發現，有時學生需要老師提供更多的資訊，幫助她們連結到形式化的數學想法，這時研究者是利用反思式的溝通，刺激學生更敏銳地觀察與探索例

子之中潛藏的數學內涵，以激發出學生對此概念的想法，或凝聚她們原本的想法。當學生「形成感覺」時，教師再說明形式的數學內容，這樣「延緩講述」的教學設計是想在學生心理產生一個根本的影響，使她們了解「自己是可以有想法的」，一步步建立學生的學習自信。

經由這階段的探究教學活動，研究者的教學概念在教學構思的部分，已經注意到了：教師在課堂上可盡力接收學生的數學觀點，那麼，數學教學的做法就有更多修正的機會。此外，教室提問的層次進展對整體學習有提綱挈領的作用，這呼應了 Skott (2004)"教師引發的課室對話和互動，可提供較大的學習潛能"以及"教師所做的內容總括，有利於提升學生的數學學習層次"的主張。

二、研究的修正：過渡與第二階段

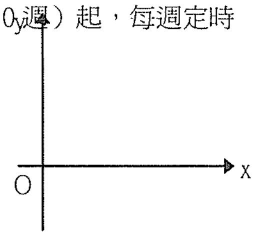
此階段研究者的預設教學路線是，以 Simon (1995)的 HLT 出發，加入教師的教學觀點，而轉化成爲「預設或預想的教學軌道(Hypothetical Teaching Trajectory，簡稱 HTT)」。第一階段已獲致師生相互理解的部份成效，又因爲持續教學反思而刺激出更細緻的想法。因此，研究者決定在過渡階段之後的第二階段中，加重歷史脈絡和概念啓蒙與數學探究的連結，特意構築兼具情意引動與思考啓發的歷史脈絡，還設計視覺化的概念啓蒙例，希望，這一階段的探究教學能讓教師和學生均具體感受到數學認知的提升。底下舉第二冊 1-3 對數單元爲例逐一說明之。

依據以往的教學經驗，許多學生容易在對數運算的「真數相乘，則對數相加」法則的運用上產生錯誤。這些錯誤可能來自，學生不知如何解讀這法則而只是強行記憶抽象的關係式。爲了改變學生對這個法則的學習，故以史迪飛的等差、等比數列觀察(詳細的史料教學，請見許秀聰，2005)爲學習起點，似可拉近學生與抽象代數法則間的距離。藉著觀看數學家對運算法則的解讀，學生自己也可提出個人心中最能理解的詮釋。後來，當學生練習對數運算有錯誤時，我就用史迪飛的故事提醒她們，學生也能夠心領神會地以微笑或點頭表示她們的理解。

在史料融入教學後，對數單元的探究教學活動續以概念啓蒙例「海藻蔓延」

活動來銜接，想以視覺意像和圖表牽動對數的數感(Number Sense)，如下：

海藻的栽培實驗中發現：海藻生長快速，從某一週（定爲基準週第 0 週）起，每週定時測量它繁殖覆蓋的面積一次，並作紀錄如下表：



時間 t（週）	0	1	2	3	4	5	6	7	…
面積 A(cm^2)	1	2	4	8	16	32	64	128	…

從實驗紀錄表中可以看出，海藻繁殖的面積 A 應該是__________，可以用函數記號寫成__________，並在直角坐標平面繪製其圖形（請畫在右圖上）。

若開始培育時海藻覆蓋面積是 1 cm^2，經過 2 週、3 週後，它繁殖的面積分別是 $4cm^2$、$8cm^2$，那麼需幾週面積始達 $5cm^2$？

這個概念啓蒙例是由學生熟悉的指數函數開始，並在指數圖形上呈現解題的想法。教師藉提問「所求時間是否爲整數或有理數？」，促使學生感受這個數的特質，並讓學生在圖形上標示數值。藉著標示活動，可「真正看見」滿足 $2^t=5$ 的t值，此時，因爲之前已驗證 $2^t=5$ 的t值爲無理數，就能比較自然地引入 $\log_2 5$ 的數感，同時，學生也能夠感受到對數符號的價值。這個似真情境的概念題是想，讓學生藉直觀圖像認識對數函數，直接在指數函數的圖形中「實際對到」對數值，並藉此過程了解對數函數的意義。這種呈現的手法，不但能降低學生學習對數符號的認知負載，也能幫助學生以較自然的方式理解對數運算的性質。

這樣的經驗讓研究者感覺到，史料背景可以成爲釐清學生數學概念的檢驗點，概念啓蒙例則提供生活情境，讓學生更自然地探索數學概念。進一步察看此單元延後測問卷的學生作答情形，以及整學期近結束時的史料教學訪談錄音整理，研究者覺得，學生傾向透過對數數感和圖像來表達她們的對數概念。接下來的課堂解題探索中，也有實徵資料可反映學生的學習喜好。

以合情猜想激發學生更爲深入的探究活動

研究者在本階段主要是，透過「合情猜想」鼓勵學生分享自己的數學直觀，並扮演檢核者爲主的角色，以促使學生驗證和反思數學活動內容與結果之關聯；同時，透過數學一般化的歷程，來提升學生的數學認知。

經過第一階段不斷在課堂上營造學生主動探究的班級學習氣氛之後，此階段是要進一步帶領學生熟悉探究的方向與步驟，即「大膽猜想、小心驗證」。實際使學生由單純的『執行學童法』提昇到『學童法的思考激盪』，她們會在課堂上花時間仔細檢視自己及同儕的數學方法與數學思考，進行群體的腦力激盪，共同獲得更為成熟精進的學童法(或自發性想法)。學童法比我們所教給他們的方法更自然、更具說服力，只是應用或推廣時，也許會有限制，所以，必須讓她們在使用的同時，清楚地知道這些限制。這樣一來，教學或許就可從學生的想法出發，漸進地銜接上老師所教的方法(Booth, 1986)。例如，93 年 3 月 5 日的對數函數圖形單元教學時，師生之間發展出以下一段對話：

教師：比較各數大小：$a=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}, b=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}, c=\log_{\frac{3}{4}}1, d=\log_2\sqrt[3]{2}, e=\log_{\frac{1}{2}}2$

同學們用自己的方法做做看。(教師在教室巡視，看看學生的求解情形。)

教師：現在請一位學生上台寫解題過程。

學生 118：a 的真數 $\frac{1}{4}$ 比 a 的底數 $\frac{1}{2}$ 小，又底數 $\frac{1}{2}$ 為真分數，∴a>1，而 b<1…

學生 106：老師，你看看我這樣做，我直接看到 a=2,b= $\frac{1}{2}$,c=0,d= $\frac{1}{3}$,e=-1,就知道它們的大小，比大小似乎不必用前面那麼麻煩的方法吧！

教師：學生 118 將邏輯分析方法用的很完善，而這是一個重要的能力，你們將會看見它對解題的幫助。(考慮了一下…)讓我們現在翻開學校講義看一些相關題：

(1) 比較 $a=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{7}, b=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{8}, c=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{11}$ 的大小。

(2) 比較 $a=2^{30}$,$b=5^{14}$,$c=6^{12}$ 的大小。

第 (1) 題的 a,b,c 不能立即以簡易的整數或分數表示其值，那麼是否仍能很快比出大小？

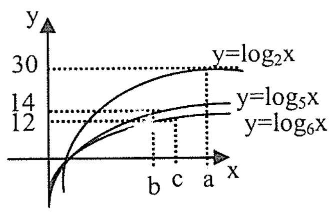
大多數學生：它們的真數越來越大，但底數小於 1,所以對數值反而越變越小。

教師：說的好，這就是邏輯分析的手法。再試試第 (2) 題，如果有比出大小的，跟我們分享你的解法。

學生 120：因為 $a=2^{30}$ 就是 $30=\log_2 a$ ，所以我用對數函數曲線來對出 x 值比大小。

右圖 x 軸由左而右是 b,c,a

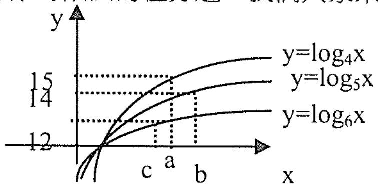
$\therefore b<c<a$ ……………………合情猜想



學生 118：老師，不知道我是哪裡做錯？我也用對數函數曲線來對出 x 值比大小，但答案卻不同。

教師：請上台將你的做法寫在旁邊，我們大家來看看爲什麼會這樣？

學生 118：



我先將 a 看成 4^{15}，結果比出 $c < a < b$，不可能有兩種大小啊。

……………………另一個合情猜想

教師：有誰看出什麼地方不太對勁嗎？這樣用畫圖看水平高度是不是能決定出 x 值？

（大家沉寂了一段時間，後來漸漸有人對著黑板的圖形指指點點。）

部份學生：她們畫的曲線彎曲程度不一定正確，而且 y 的高度也不準，這樣來對 x 值，位置可以變來變去的，不能用這方法來做。

一開始研究者安排一個對數練習題，學生 118 的解題方法與大家不同，其他人是直接寫出a,b,c,d,e的值而得知大小關係，個人心中原本的的HLT亦是如此，但是，這位學生卻以分析底數、真數對求值產生的影響來決定排序。當其他學生質疑此解法時，爲尊重學生 118 的原始想法，研究者特意藉安插原本不在原HLT內的題目，來突顯這個「學生解法」的價值，以培養學生的解題自信，激勵她們勇於嘗試各種想法(此即當下修正的HTT)。這個做法原本只是著力於肯定學生的想法，結果在學生以自己的方式解決難題時，意外地又獲得更豐碩的數學探究成果。在解第(2)題時，前後兩位學生所做的排序皆非正確解答，造成錯誤的原因來自：不易明確掌控所畫對數曲線的曲率。學生一開始爲這種結果感到困惑，這時研究者卻讓她們自己去想一想、試著檢查一下自己的直觀(此即再做修正後的HTT)。漸漸地，就有學生對畫圖取值的位置提出更細緻的想法，她們會注意到，雖是取值之位置細微變動卻會造成非常不同的結果。當研究者詢問同學對此問題的有效解法時，學生 111 則提出自己用同一底數 10 作比較的方法，並解釋它的有效性(調整的HLT)。這樣的師生共同探究過程，也就是，在HLT-HTT的循環往復過程之中，學生可同時獲致「不同底數會牽動對數值」和「常用對數在求對數的精確值上是有價值的」這兩個有用的心得。

王老師對這段教學帶來的學習效果曾經提出更多的想法，他的現場教學觀察

心得與質疑，也間接地幫助研究者，進一步體會如何從HLT衍生出HTT。他在觀察紀錄裡寫著"當學生畫出三條底數分別爲 2、5、6 的對數曲線，卻因圖形無法精準，以致不能比大小時，一些原先對對數符號必要性的質疑也自動消失"。這樣的教室數學溝通形式，應已經轉向反思式和教導式。因爲溝通中獲致更深層的數學理解，使學生在解題時困難度大幅降低，所以上課進度在後段明顯變快。值得注意的是，這些學習心得完全是當場發生的效果，事前無從預料，也就因爲這樣，更能讓教師心喜。雖然，研究者感覺到課堂探究對學生和教師都是一項很大的挑戰，我們無法預期過程和其結果；學生不一定得到高成就感，而且由於課程內容不能完全照既定教學計畫進行，敏感的孩子會擔憂課室中不確定的氣息(問卷中有些孩子也確實如此表示)。但是，研究者看重的是對師生而言，更深遠的內在教與學上的影響，這是探究式教學才能獲得的。

之後的教學活動中，也就更強烈地感受到「學生探究活動」所建立的互動氣氛，確實帶給師生豐富教與學的啓示。即使研究者教書十七年，都比不上這種師生互動的真實感受，又產生了那麼多的數學概念連結。許多學習上的困難，都在學生的自動探究中被部份解除。我們總是在驚喜與感恩中完成精采的一堂課，它是班級成員共同開發的結果。

例如後續之第二冊 3-5「和差與積互化公式」單元教學，研究者先用一個簡單易懂的「豪雨造成房屋傾斜」生活題開始，讓學生求算 $\sin 82.5° \sin 37.5°$ ，然後自由解題，學生隨即在班上發表想法如下：

學生 208；我們可以用查表得的小數值相乘。

教師：很有效的做法，不過有兩點要指出來，查表得的是可能有誤差的近似值，而且多位小數相乘比較適合讓計算機做。

學生 227：我試出角度有特殊的關聯，$82.5° = 60° + \frac{45°}{2}, 37.5° = 60° - \frac{45^0}{2}$ ，我覺得這應該有幫助，可是一時想不出來要怎麼用。

教師：她真的有一個很好的觀察，大家一起想想跟什麼有關？

學生 210：我也覺得這個觀察應該有價值，我們好像在前面哪一節看過這種一加一減

的角度有一個等式。

學生 221：找到了，在筆記的 3-2 例題有 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$，

所以 $\sin 82.5°\sin 37.5°=\sin\left(60°+\dfrac{45°}{2}\right)\sin\left(60°-\dfrac{45°}{2}\right)=\sin^2 60°-\sin^2\dfrac{45°}{2}$ 很好求。

這個過程讓學生了解如何運用和角公式，知道並列一和角一差角即可得解。因為，研究者對學生的各式解法均保持相當的彈性，以至於學生敢猜想與分享自己的想法。當呈現了她們的「學童法」之後，研究者再引導她們找到另一相似的想法，而且，也可以一般化得出和差化積的公式。

這些學生活動使研究者體會到如何串聯不同單元間的各個數學主題，進而轉換了原本的教學概念，也就是說，學生看待數學活動的方式也會影響教師的教學準備。像這樣「課前設計－課堂觀察－課後反思」的模式，在每一節課都是研究者教學計劃的一部分。透過溝通和提問的手法，當師生在問題脈絡中將數學想法抽離成形之後，接續一連串的轉化歷程就自然地被引動。另外，在各研究階段中，不同的時間、章節段落之師生教與學的行為，均會被持續地進行比對與分析。審視「和差與積互化的公式」單元教學札記，當研究者提出「對這問題或陳述，你們有任何想法嗎？」，回應的人不再限於班上成績好的學生，也可能是低成就者。當不同想法被分享出來時，學生取代教師，主動向同儕表達支持；之後，教師在驚奇中發現，學生學會了以教室社群的方式來形成重新創始之數學概念，這也驗證了 Skott (2004)”當我們將猜想引進數學教學中，反而會增強知識的客觀，而能導入更抽象的概念層次”的見解。

最後，藉著「教師數學信念及上課風格」的問卷填答，學生、王老師和研究者三方面，皆對這樣的教學試驗提出各自的感受與看法，這也算是對研究者概念與角色轉換成效的一種評估。兩班全部 55 位學生之中，有 27 個人的答案歸屬於「混合型」，28 人作答為「非傳統型」，觀察員作答屬「混合型」，研究者本身勾選則是「非傳統型」。這顯示出，研究者的教學風格傾向於混合偏非傳統型(詳細資料，請參見許秀聰，2005)。

由「學生對教學策略看法」問卷的填答中（詳細的問卷及填答整理，請參見許秀聰(2005)），我們可以看見學生對這種課堂猜想、分享、驗證的探究活動所持的態度，茲舉數例如下：

> 學生 217：贊同讓同學解題發表，因為每個人的想法都不盡相同，多聽聽別人的想法，可以增進思考，也可以知道別人都是從何種方向切入的。
>
> 學生 123：老師提問題的做法很好，有助於解題的思考，能面對的題目更為廣泛。贊同同學各種解題呈現的處理。就算這題不適合這樣的解法，卻可能是另一題的最佳思考方法。
>
> 學生 222：老師問問題有時可以馬上聯想，但有時不行；可是在聽到他人的解答或想法時，可以強化連接、聯想的能力。

總結來看，研究者在課堂進行的探究教學，學生不僅是一位數學實作的參與者，還有機會發展成數學的理論家。相同地，擔任教師的研究者於教學實務的當下及課後，對如何改進數學理解與教學成效，有了更進一步的了解。所以，不論師生，因受到課堂上一些非預期結果的啓發，使我們在做數學的同時，也改進學數學的方式。在這回探究教學的行動研究過程中，研究者更深刻地體會到 Skott (2004)數學及後設數學(Meta-Mathematics)相互牽引的觀點，能夠導引教師教學改革的方向。如同 Simon(1994, p.71)所說的，"師生在課堂從事的工作與數學家是可以平行類比的，兩者都在找概念的源頭、重新創始數學、和明瞭應用價值"。在這種活動流程下，學生和數學之間搭起了「值得探究，終有所獲」的關係。

以下將依據上述教學行動研究的經歷、體驗和心得，試著與相關學理構念及研究者預擬的探究教學概念重構架構，進行對話和省思。

「探究式教學」討論和省思

對一個教數學已經十六年的資深高中教師來說，進行教學試驗研究使研究者發現，光是看待教學的眼光有一點不同，這樣的變化就會逐步發酵，到最後產生大力量！當研究者仔細回顧自己對教數學的理解時，感覺教師的教學轉變與學生的自主學習是息息相關的。根據本研究的階段性結果，我們提出一個深化數學教師教學功力的模式，意即「學與教的精密編織」，以進一步描述研究者數學教學

概念重構的歷程與內涵，底下試著陳述這些體認。

由於，研究者從教學概念重構後的實踐中，經歷以往不曾感受到的「學習歷程」，亦即再次學習「應該如何教數學」；這是一種由教學而引動的「教師與學生一起學習成長的雙向互動歷程」，具有「動態」和「合作」兩項特質。因爲，在課堂上教師爲了回應學生的數學思考，HLT 與 HTT 會隨時因爲學生的表現而動態地調整；而學習又是在師生雙方互動之下達成，使得教因學而活，學因教而動，凸顯了教學互動歷程中「師生合作學習」的價值，亦即，教師的教學環與學生的學習環之間的協同學習。

師生協同學習的歷程，不但可以深化教師的教學功力，也促成研究者對數學本質的看法更傾向非傳統型。藉著理解學生課堂上對情境所做的探究數學活動，除了察覺到她們提出多元化的數學解題觀點之外，研究者同時也看見了更深層的數學知識內涵，這激發了研究者在教她們的同時，也跟她們「學著重新感覺數學」。也就是說，課堂上的兩種學習者(教師和學生)獲得的是：認識更深層的數學概念、連繫代數形式與幾何圖像以及水平與鉛直連結不同的數學概念內容。這使得，教室裡的教學互動編織出相互學習的多向溝通網絡，同時呈現在教與學之間；而且，這樣的互動帶著有效的教育生產力，在課堂學習更爲活潑的當下，同時提高了對數學內涵深一層理解的需求，促使教師將數學與後設數學相揉和。教師在教學中所使用的數學與後設數學知識應該是互相呼應的，像是一種「數學與後設數學間的自主往復」遞迴過程。

關於教學實施部分，研究者是以「溝通」爲主要架構，內含「詢問」、「對話」與「互動」，試著達成「互動式協商數學意義」的目標。首先，教師應該提高教學詢問和學生能力關係的認知。在研究者的教學詢問中，雖然，經常會有些邀請的意味(亦即，讓學生猜想、修正、重組、和重新創始數學知識)，但是，也有挑戰(表示不接受目前初步獲致的結果)或鼓舞(刺激學生的數學認知再向前邁進)的教育意圖。師生間爲探索深層數學思維而對話，使得數學教室成爲一個「數學-

對話之學習社群(Math-Talk Learning Community)」(Hufferd-Ackles, Fuson & Sherin, 2004)。根據他們的研究結果，將數學教室中的師生對話區分為四個層次(從 0 至 3)，分別是：教師講述、嘗試讓學生表達、師生互動式對話以及教師監控學生間對話。逐漸地，在研究者的教學中，主要的探究者由教師轉為學生，包括數學想法的源頭來自學生，解釋數學思維的工作由教師激勵學生來部分承擔，形式化數學的一般性結論則由師生合作經營而得。為了讓學生的數學學習實質上獲取深層的意義，最困難的教學省思是「問什麼問題？」及「如何提供數學內容的深層心像？」。因此研究者原來預定的「提高教室師生對話的層次」教室溝通目標，也就隨著研究的推展，從第 0、1 層逐漸轉向第 2、3 層。

在以上這種師生雙向互動和協商之下，數學教師比較能夠自然地、持續地深化自己的教學功力。回顧這種「學與教交互精密編織」的課堂數學教學實施歷程，我們認為，研究者教學功力的深化與下列兩點有關：

一、以建立學習數學的探究關係和重溯數學概念的源頭深化教學功力

建構主義(von Glasersfeld, 1995)的一個基本原則是：學生須自行重組既有的知識以形成自己的認知結構。Boaler(2002)在思量與數學學習經驗有關的範疇時，將其擴展至學生「對數學的感覺」及「與數學的關係」兩個層面。當我們的課堂學習活動以開放性探討為主軸時，學生面對數學能夠自我解釋、做決定並採取行動，這種對情境的自主式察覺和解讀，才是實際造成這種「學與教的模式」與它種模式之間擁有不同特質的真正原因。研究者有意圖地讓學生在學習中，除了「經驗數學的內涵」，同時發展出「與數學之間的一種探究關係」，於是，學習的素材內含數學概念發展的源頭(包括認知的、歷史的)，如此，而能逐漸地形成重回源頭與重新創始數學的探究學習模式，這個考量同時也照顧到學生的學習感受。

結合「互動討論學習，讓學生和數學建立探究關係」以及「重溯數學概念和發展根源，使學生明瞭數學的抽象及應用」兩者，研究者的課堂教學實施就如此持續地被牽引著往更貼近數學本質和學生理解數學的方向轉變，也就因此，深化

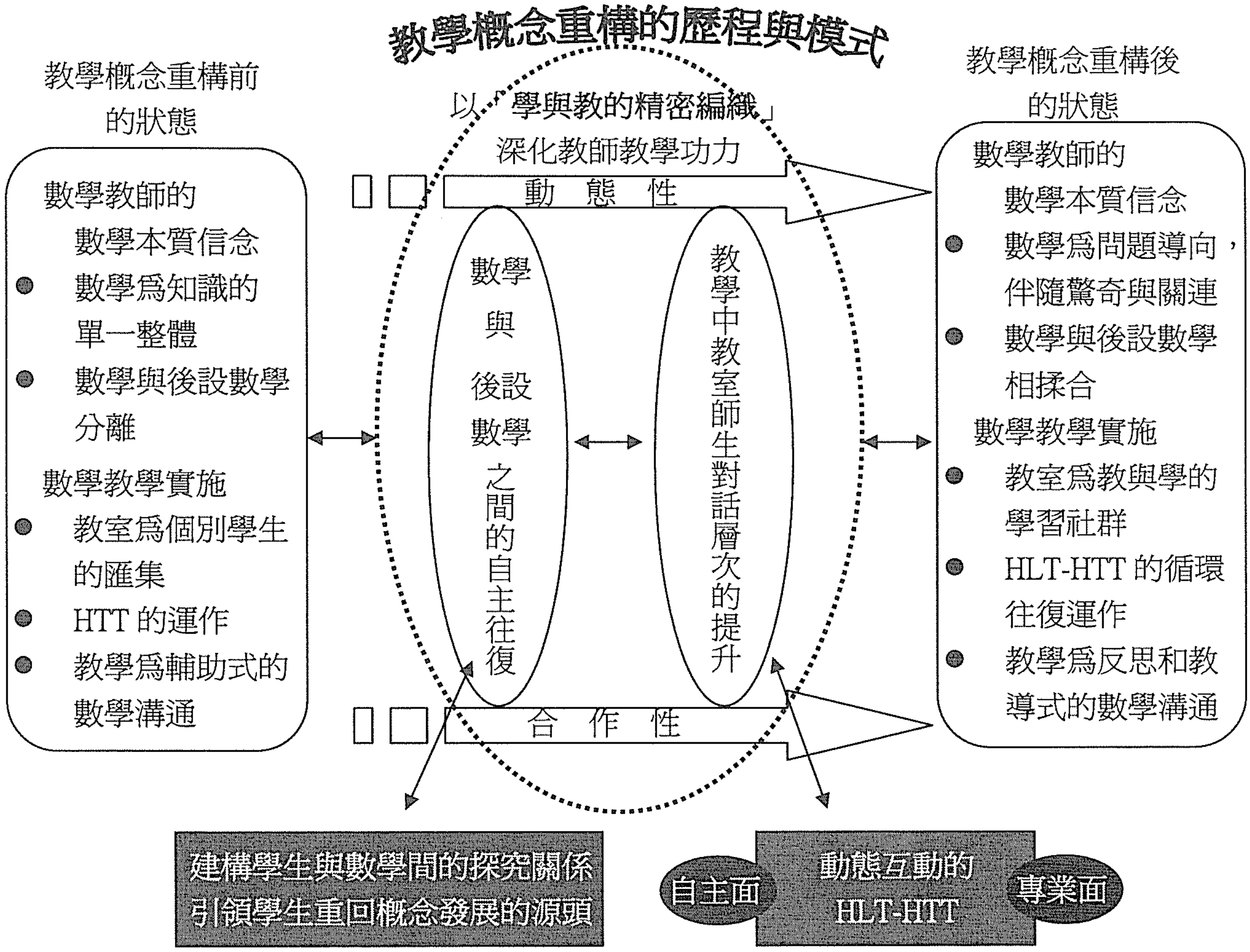
了教學功力。

二、以動態互動的 HLT 和 HTT 深化教學功力

在課堂教學實施與課前課後實作反思的過程中，教學會從 HLT 到 HTT，再聚焦到調整的 HLT，以形成修正的 HTT，這是一個不斷地往復的過程，以下簡稱這種循環引動的學-教過程爲 HLT-HTT。它對教師的數學理解、教學概念和實作反思內容皆有聚焦與指引的作用，因而啓動了研究者教學功力深化的進程。此種深化歷程，可由自主和專業面向來解讀。

由於研究者希望，所有學生均能夠學著自己去發現數學的內涵與美，也願意帶著她們找到通往數學較精密理解的入口。由於，學生在數學世界中創造出的意義才是學習的精義所在，所以 Ball 和 Bass (2000)指出，教師需要將數學概念「解壓縮(De-Compression)」，將數學例子「重組(De-Composing)」，以及將自我的數學理解「鬆綁(Un-Packing)」。也就是，教師得細想「如何引導學生在教師講述後表達想法？」。這時，上述解壓縮、重組和鬆綁的構念，就成爲有用與可用的專業指引。

其實，在本研究開始之初，研究者心理並沒有特定或預想的專業發展圖像，隨著研究進程的開展，從觀察和反思自己的教學行動研究之中，獲得比較清晰的發展心像，也漸漸地瞭解到，這種專業化可以開啓什麼樣的教學生涯？由於，想重新構築自己的數學教學概念，因而在上述的重構歷程之中，引動了研究者對數學本質信念和教室教學實施逐漸趨向於非傳統型。圖二綜合表徵了這一段教學與研究的旅程。



圖二　數學教師教學功力深化圖示

參考文獻

一、中文部分

李源順和林福來(1998)。校內數學教師專業發展的互動模式。**國立台灣師範大學學報：科學教育類**，43(2), 1-23。

陳松靖（2001）：**三位學生教師數學教學概念轉變歷程的個案研究**。國立台灣師範大學碩士論文。

許秀聰（2005）：**一位資深高中數學教師重構教學概念的行動研究**。國立台灣師範大學碩士論文。

二、英文部分

Ball, D.L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In Jo Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp.83~104). London：Ablex Publishing.

Boaler, J. (2002). The development of disciplinary relationships: Knowledge, practice and identity in mathematics classrooms. *For the Learning of Mathematics, 22* (1). Canada, Kingston: FLM Publishing Association.

Booth, L.R. (1981). Chid methods in secondary mathematics. Educational Studies in Mathematics, 12, 29-41.

Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education , 3*, 125-153.

Case, R. (1978). The developmentally based theory and technology of instruction. *Rrview of Educational Research, 48* (3),439-463.

Cooney, T.J. (1994). Teacher education as an exercise in adaptation. In D. B. Aichele & A. F. Coxford (Eds.), *Professional Development for Teachers of Mathematics: 1994 Year Book* (pp. 9-22). Reston: NCTM.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Geoffrey B. Saxe，Maryl Gearhart and Na'Ilah Suad Nasir (2001). Enhancing students' understanding of mathematics：A study of three contrasting approaches to professional support. *Journal of Mathematics Education, 4* (55), 70-200.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K.C., & Sherin, M.G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (2), 81-116.

James G, Henderson (1992). *Reflective Teaching：Becoming an Inquiring Educator.* 〔(李慕華譯（2000）。**反思教學：成爲一位探究的教育者**。台北市：心理出版社。〕

Krummheuer, G. (1983). Das Arbeitsinterim in Mathematikunterricht. In H. Baversfeld (Ed.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (pp.57-106). Koeln: Aulis verlag.

Mau, S., & D′Ambrosio, B. (2003). Extending ourselves: Making sense of students' sense making. *Mathematics Teacher Education and Development, 5,* 44-52.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA: Author.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan Publishing Company. Reston, VA: Author.

Noddings, N. (1992). Professionalization and mathematics teaching. In D.A. Grovws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.209-239). N.Y.: Macmillan.

Patton, M.Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods.* [(吳芝儀和李奉儒譯，1995)。**質的評鑑與研究**。台北市：桂冠圖書公司。]

Polya, G.. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* [(李心煽、王日爽和李志堯合譯，1992)。**數學與猜想**。台北市：九章出版社。]

Raymond, A.M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (5), 550-576.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1~23.

Simon, M. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 71-94.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145.

Skott, J. (2004). The forced autonomy of mathematics teachers . *Educational Studies in Mathematics, 55,* 227-257.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research: Techniques and procedures for developing grounded theory.* [(吳芝儀和廖梅花譯，2003)。**質性研究入門：紮根理論研究分法**。台北市：濤石文化事業有限公司。]

Tzur, R. (2001). Becoming mathematics teacher-educator: Conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education , 4,* 259-283.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* London: The Falmer Press