壹、緒　　論

一、小數數概念

(一) 小數、分數與整數的關係

人類很早就有分數的概念，當一個不滿一個單位量的量，需要被原單位量予以測量並加以描述（數值化）時，就產生了分數的問題，並發展出分數的數概念（如果想知道與分數概念有關的教材，請參閱國小數學教材分析－分數的數概念與運算）；但是人類很晚才有小數的概念，當人們想將印度—阿拉伯記數系統由整數推廣至分數情境時，才產生小數的問題，並發展出小數的數概念。小數也可以視爲不帶分母的十進位分數，以小數數字「2.34」爲例，可以記成「$2.34=2+\frac{3}{10}+\frac{4}{100}$」，因此，有人將小數稱爲十進分數，小數的出現，代表印度－阿拉伯記數系統，由整數範圍擴展到了分數。

小數與分數及整數都有關係，以小數「0.35」爲例，它和分數$\frac{35}{100}$的意義相同，都是等分割後的結果；它的記法也和整數的記法相同，都滿足「左邊位置的位值都是相鄰右邊位置位值10倍」的位值概念，例如個位的位值是十分位位值的十倍，十分位的位值是百分位位值的十倍。

因爲人們先發展出分數，再透過小數，將分數推廣至印度—阿拉伯記數系統。因此，國立編譯館依八十二年數學課程標準出版的部編本國小數學教科用書（以下簡稱本教材）先引入整數及分數的教材，待學童能掌握分數的意義及整數記法的位值概念後，先透過分數概念引入小數的記法，小數0.1是分數$\frac{1}{10}$的另一種記法，小數0.01是分數$\frac{1}{100}$的另一種記法，再幫助學童類比整數，發現小數的記法和整數的記法相同，都滿足位值概念。

對於小數的意義，本教材抱持二個觀點：第一是透過分數來瞭解小數，兩者皆由等分割及合成活動製作而成，例如0.01是$\frac{1}{100}$的另一種記法，而0.38是38個單位小數「0.01」合成的結果；第二是由印—阿記數系統的位值概念來瞭解小數，例如0.38是記錄3個「0.1」和8個「0.01」的合成結果。

雖然小數概念發展在分數概念之後，但是現在的社會中，使用小數的機會遠大於分數。例如一般常使用的簡易電算器，就是透過小數溝通運算的結果（電算器的螢幕上，無法呈現分數的記法）；日常生活中常使用的電器用品，例如冷氣機、微波爐等，也常透過小數溝通溫度或時間；報章雜誌所報導的統計數字，也是透過小數來傳達相關的訊息；也就是說，在日常生活中，學童觀察或使用小數的機會遠大於分數。因爲小數經常被使用，地位愈來愈重要，本教材花了較多的時間在小數概念的教學上。

（二）為什麼要規定「0.1＝$\frac{1}{10}$」「0.01＝$\frac{1}{100}$」？

人類爲了要溝通不同的數量關係，才發明了數字與數詞，例如使用5來表示有5個蘋果或5個人，使用8來表示有8個蘋果或8個人；而各種不同的數量情境，要有不同的符號與之對應，才能夠區辨，當人類要區辨的數量愈來愈多時（例如多到幾千億），如果對應不同數量的數詞或數字，彼此之間沒有系統化的結構關係，人類將無法記憶所有的數字與數詞。

印度—阿拉伯記數系統是十進位制的記數系統，只要使用「0，1，2，3，4，5，6，7，8，9」十個符號（數碼），加上逢十進一的原則與位值概念，就可以將所有大小的數都表示出來。例如數字「2052」表示2個千、0個百、5個十、2個一的合成結果，最左邊的數碼2與最右邊的數碼2，由於所在位置的不同，分別代表著「1000」與「1」的2倍，「1000」與「1」是數碼所在位置被計數單位量的數值，或稱爲位值，數字「2052」最左邊位置（千位）的位值是1000，因此，最左邊的數碼2表示1000的2倍，也就是2000，而最右邊位置（個位）的位值是１，因此最右邊的數碼2表示1的2倍，也就是2；百位的位值是100，而記在百位的數碼0是表示缺位的符號，因此百位的數碼0表示0個一百，也就是0。在數學上，常使用十進表示法溝通位值概念，例如將數字「2052」記成「2052＝1000×2＋100×0＋10×5＋1×2（或記成2×1000

＋0×100＋5×10＋2×1)」。

在國小階段，所有的教材都透過0.1是 $\frac{1}{10}$ 的另一種記法，0.01是 $\frac{1}{100}$ 的另一種記法的方式，引入單位小數「0.1」及「0.01」。老師們請先思考，爲什麼數學上要規定「$0.1=\frac{1}{10}$」、「$0.01=\frac{1}{100}$」？爲什麼不可以規定 0.1或0.01是其它分數的記法？三、四年級的學童有自己發現 0.1必須是 $\frac{1}{10}$ 另一種記法的能力嗎？

記數系統是數概念的一種表徵系統，它是人類文化上的產物，在印度—阿拉伯十進位記數系統中，小數的記數系統是整數記數系統的延伸，因此仿整數記數系統記數的方式，仍然採用0～9等10個數碼，配合位值概念，來記錄小數。

在整數記數系統中，各個相鄰位值間滿足10倍的等比例關係，以數字「1111」爲例，十位的1是個位的1的10倍（個位的1是十位的1的 $\frac{1}{10}$ 倍），百位的1是十位的1的10倍（十位的1是百位的1的 $\frac{1}{10}$ 倍），千位的1是百位的1的10倍（百位的1是千位的1的 $\frac{1}{10}$ 倍）。因此，當我們將印度—阿拉伯記數系統由整數推廣至小數時，小數部份也必須滿足左邊位置的位值是相鄰右邊位置位值十倍的等比例關係，也就是說，個位的1要是十分位的1的10倍（十分位的1是個位的1的 $\frac{1}{10}$ 倍），十分位的1要是百分位的1的10倍（百分位的1是十分位的1的 $\frac{1}{10}$倍），....依此類推。

當我們將整數計數系統推廣至小數時，小數部份十分位位置的位值必須是個位位置位值的 $\frac{1}{10}$ 倍，也就是說，十分位是記錄有幾個 $\frac{1}{10}$ 的位置，因此引入單位小數0.1時，0.1必須等於 $\frac{1}{10}$(個1)。相同的，百分位位置的位值必須是十分位位置位值的 $\frac{1}{10}$ 倍，也就是說，百分位位置的位值必須是個位位置位值的 $\frac{1}{100}$ 倍，因此，引入單位小數0.01時，0.01必須等於 $\frac{1}{100}$（個1），....依此類推。

透過上述方式將印度—阿拉伯記數系統推廣至小數時，小數也可以用十進表示法來溝通位值概念，例如小數數字「30.078」表示3個十、0個一、0個0.1（十分之一）、7個0.01（百分之一）和8個0.001（千分之一）的總和，也可以使用十進表示法「30.078＝3×10＋0×1＋0×0.1＋7×0.01＋8×0.001」

來記錄小數。也就是說，小數的記法和整數的記法都滿足逢十進一的位值概念。

透過上述說明，我們可以發現，三、四年級的學童沒有自己發現0.1必須是 $\frac{1}{10}$ 的另一種記法的能力，因為三、四年級的學童無法掌握左邊位置的位值是相鄰右邊位置位值十倍的等比例關係。因此，本教材也透過0.1是 $\frac{1}{10}$ 另一種記法，0.01是 $\frac{1}{100}$ 另一種記法的約定方式引入單位小數。

（三）小數（分數）問題的分類

依據分數數詞（字）所描述的量的性質，本教材將分數問題情境區分為下列三類：(1)連續量情境：例如「$\frac{1}{3}$ 條」繩子；(2)離散量情境：在一打鉛筆有12枝的情境下，討論「$\frac{1}{3}$ 打」鉛筆；(3)全部為單位量情境：在全部有12枝鉛筆，或在全部有6公斤汽油的情境下，將12枝或6公斤視為單位量1，討論「全部的 $\frac{1}{3}$ 」。

當「1」單位是離散量時，本教材又依單位分數的內容物的個數，將分數問題情境區分為下列三類：(1)單位分數的內容物為單一個物（例如：3個蘋果裝一盒，$\frac{1}{3}$ 盒有1個蘋果）；(2)單位分數的內容物為多個個物（例如：6個蘋果裝一盒，$\frac{1}{3}$ 盒有2個蘋果）；(3)單位分數的內容物不是整數個個物（例如：2個蘋果裝一盒，$\frac{1}{3}$ 盒有 $\frac{2}{3}$ 個蘋果）。在學童尚未發展測量運思以前，單位分數的內容物是單一或是多個個物，對學童而言有很大的差別，學童在概念上較容易接受內容為單一個物的問題，面對內容為多個個物的問題則有較多的困難，故而本教材將它們當做不同的問題。本教材自第四冊起開始進行單位分數內容為單一個物的分數活動，而自第七冊起才開始進行單位分數內容為多個個物的活動，自第十冊起，本教材預期學童測量運思已漸趨成熟，單位分數內容為單一或多個個物的差異逐漸消失，因此在活動中，將單位分數內容為單一或多個個物的問題合併處理，都稱之為單位分數的內容物為整數個個物。故而自第十冊起，本教材只將分數問題的情境區分為兩大類：(1)單位分數的內容物為整數個個物：包括已度量化的連續量、離散量、或全部為單位量等問題情境，且單位分數的內容恰為整數個個物；(2)單位分數的內容為非整數個個物：包括未度量化的連續量或其他的問題情境，且單位分數

所指示的量爲非整數個個物。

本教材是透過分數概念引入小數，因此在教材的安排上，都是先進行分數的活動，再進行相關小數部份的活動，也就是說，小數教材是類比分數問題的分類方式安排活動，當進行某個小數活動時，學童大多已有相關分數活動的解題經驗。建議讀者先閱讀國小數學教材分析－分數的數概念與運算，並且在閱讀小數的教材時，一併閱讀相關部份分數的教材。爲了經濟教學的時間，建議教師視學童的反應，進行適當的教學活動，例如在進行小數活動前，察覺學童分數概念已經成熟，就可以採取檢查的角度進行相關小數的活動，但是當發現學童分數概念尚未成熟時，應該較仔細地進行相關小數的活動。

（四）如何引入小數數詞序列（「0.9」的下一個數是什麼？）

依據民國八十二年國民小學數學課程標準教材綱要小數教材，三年級學童必須認識一位小數（九年一貫課程數學學習領域之能力指標，也有相同的要求），但是國小三年級學童尚無法掌握印度—阿拉伯記數系統的位值概念（學童已相當熟悉整數數詞序列），如果沒有位值概念的規範，在引入小數數詞序列時，學童很可能類比整數數詞序列的讀法，將零點九後面的數詞，唸成零點十，零點十一，零點十二....。各位教師請思考，如何引入一位小數（零點一，零點二，零點三，....零點九，一，一點一，一點二....）的數詞序列？

因爲三年級下學期的學童已有單位分數的概念（將單位分數視爲可以被計數的單位），當約定0.1是 $\frac{1}{10}$ 的另一種記法後，可以透過具體物引入一位小數的數詞序列（以白色積木及橘色積木情境爲例），1個白色積木是0.1條橘色積木，2個白色積木是0.2條橘色積木，....，9個白色積木是0.9條橘色積木，10個白色積木和1條橘色積木一樣長，所以零點九後面的數詞是1。但是透過這種方式引入的數詞序列是沒有位值概念的，如果要讓這樣的數詞序列與整數的位值概念連絡，相當的麻煩，因此本教材不採用此種方式引入一位小數數詞序列。

本教材爲了節省教學時間，讓學童更能掌握小數的位值概念，透過下面

五個階段引入一位小數數詞序列：第一階段：約定0.1是 $\frac{1}{10}$ 的另一種記法。第二階段：透過分數十分之幾的連絡，或以0.1爲計數單位引入0.1～0.9的讀法及記法，此時的一位小數是分數的另一種記法，並沒有位值概念。第三階段：類比帶分數的記法，將整數（例如3）與一位小數（例如0.5）合起來記成3.5，並溝通記幾個1的位置是個位，記幾個0.1的位置是十分位，此時一位帶小數已經與整數連結，有位值的概念。第四階段：重新討論0.1～0.9（以0.5爲例），0.5 記了0個1和5個0.1。請注意，第二階段的0.5只是分數的另一種記法，並沒有位值概念，第四階段讓學童重新認識有位值概念的一位純小數。第五階段：類比整數的位值概念（每個位置上只能書寫一個數碼，例如，3個「10」17個「1」必須記成47），並利用10個0.1合起來和1等價的性質，透過定位板討論十分位上數碼的限制，將3個「1」17個「0.1」記成4.7，0個「1」10個「0.1」記成 1.0。

（五）小數點的功能

人們習慣將小數點視爲一個小數的焦點，但是以小數點爲對稱中心，小數點左右兩邊的位名並沒有對稱，小數點左邊（由右至左）的位名依序是個位、十位、百位、....，小數點右邊（由左至右）的位名依序是十分位、百分位、千分位....，如果小數點是位名的對稱中心，小數點右邊少了「個分位」。

對有位值概念的學童而言，很容易判斷整數的各個位名，因爲整數的記法中，最右邊的位名是個位，找到個位後，就可以順利的找到十位、百位、千位....。但是在小數的記法中，如果沒有小數點，學童就無法決定各個位置的位名，因爲小數的個位不在最右邊的位置，沒有小數點，就找不到個位的位置，相對地，也找不到其他的位名。由上述描述可以知道，小數點並不是小數位名的對稱中心，小數點的功能只是告訴我們個位在那裡，個位才是位名的對稱中心。

多數成人與學童溝通小數加減問題時，常要求學童必須先將小數點對齊，才能夠開始計算，至於爲什麼要先對齊小數點，則沒有說清楚、講明白。成人是使用多單位策略解決小數加減問題，因爲相同的單位才能進行加

減運算，因此被加（減）數與加（減）數各個單位必須對齊（個位對齊個位，十位對齊十位，....），當個位對齊個位時，其它位置自然也對齊了（當然，小數點也對齊了）。

二、小數加、減

(一) 單位的概念

○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○
○○○○

（圖　一）

學童使用「ㄕˊ，ㄦˋ ㄕˊ，ㄙㄢ ㄕˊ，ㄙㄢ ㄕˊ ㄧ，ㄙㄢ ㄕˊ ㄦˋ，ㄙㄢ ㄕˊ ㄙㄢ，ㄙㄢ ㄕˊ ㄙˋ」這種方式點數圖一中共有多少個圓圈時，他一共使用了幾種單位？爲了書寫上的方便，我們使用數字「10，20，30，31，32，33，34」來替代唸出的數詞。

多數成人都認爲在點數的過程中，同時使用了「10」和「1」兩種單位。其實不然，使用上述方式點數時，只使用了「1」一種單位。爲了溝通方便，請使用「個」當做量詞重新描述點數的過程：「10 個、20 個、30 個、31 個、32 個、33 個、34 個」；再使用「個」當做量詞來點數圖一中最上面這排有幾個圓圈：「1 個、2 個、3 個、4 個、5 個、6 個、7 個、8 個、9 個、10 個」，與最下面的這排有多少個圓圈：「1 個、2 個、3 個、4 個」。各位是否發現，在上述的點數過程中，只使用了「1 個」這一種單位。

使用「10、20、30、31、32、33、34」這種方式點數，其實只是省略了「1、2、3、....、32、33、34」中部份的數詞，例如在點數呈不規則排列的圓圈數時，成人會一邊點數，一邊在心中默唸「1、2、3、4、5、6、7、8、9、10」，等點數到「10」的時候，才發出聲音唸出數詞「ㄕˊ」，接著繼續在心中默唸「1、2、3、4、5、6、7、8、9、10」，等點數到「10」的時候，再發出聲音唸出數詞「ㄦˋㄕˊ」。也就是說，使用「10、20、30、31、32、

33、34」的方式點數時，只是省略了「1、2、3....、9，11、12、13、....、19，21、22、23....、29」這些數詞，而不是使用了兩種單位。

如果「10 個」是一個新的單位，就必須給它一個新的量詞，例如稱「10 個」爲「1 堆」，學童可以使用「1 堆、2 堆、3 堆」、「1 個、2 個、3個、4 個」的方式，分別點數出圖（一）中有 3「堆」圓圈和 4「個」圓圈，並得到 3 堆和 4 個合起來有 34 個的結果。上述這種點數方式，同時使用了「堆」和「個」兩種量詞，才是同時使用兩種單位的點數方式。

當學童將一個數視爲一個集聚單位（數個「1」所合成的一個集合體，學童可以將這個集合體視爲一個整體，但是這個集合體尚未變成可以被計數的單位），例如學童將 5 個「1」合成爲一個集聚單位「5」，如果「5」是學童首次做出的集聚單位，這個「5」並不是一個可以被計數的單位（此時，「1」已經是一個可以被計數的單位）；要讓「5」成爲一個新的可被計數的單位，首先學童要有很多做集聚單位「5」的經驗，能夠一再地複製「5」，並且知道這些複製出的集聚單位「5」彼此之間都相等（等價），進而可以點數有多少個「5」，此時，「5」開始成爲一個可以被計數的單位；當「5」是一個可以被計數的單位時，學童在點數有幾個「1」與點數有幾個「5」的過程中，可能會混淆其點數的意義（因爲在點數有幾個「1」，與點數有幾個「5」的過程中，都使用相同的數詞序列），當學童不會混淆「1」和「5」這兩種單位點數的意義時，「5」才是一個眞正的新單位。

對學童而言，只使用一種單位與同時使用二種單位的困難度是不一樣的，如果學童在解題活動中只使用一種單位，當然不會發生單位混淆的問題，但是當學童在解題活動中同時使用兩種單位，就可能在換單位的過程中混淆兩種單位點數的意義。以問題「一隻狗有 4 條腿，5 隻狗有多少條腿？」爲例，學童可以透過畫一隻狗有 4 條腿的方式，先畫出 5 隻狗，再點數有多少條腿，學童在點數有幾隻狗的過程中，只使用「隻」一種單位，學童在點數有幾條腿的過程中，也只使用「條」一種單位，但是當繼續追問「5 隻狗有 20 條腿，跑掉 1 隻狗還剩下多少條腿？」時，就會牽涉到混用「隻」與「條」兩種單位的問題，部份學童可能會回答「跑掉 1 隻狗後還剩下 19

條腿」，學童這樣回答的原因，可能混淆了「隻」與「條」這兩種單位點數的意義，學童決定有幾「隻」狗時，是透過點數「1、2、3、4、5」的方式得到答案，而學童決定有幾「條」腿時，也是透過點數「1、2、3、4、....、19、20」的方式得到答案，如果學童無法區分「隻」與「條」這兩種單位的點數意義，也就是說，無法分辨跑掉的「1」是點數有幾隻狗時的「1」，或是點數有幾條腿時的「1」時，就可能回答還剩下 19 條腿。

人們只發展出一套數詞序列，這一套數詞序列可以用來點數有幾個人、有幾隻豬、摔了幾跤，也可以點數有幾個蘋果、有幾盤蘋果或幾箱蘋果。因此當使用數字「5」來代表數詞「ㄨˇ」時，只知道「5」是由 5 個「1」合成的，「5」代表什麼，由「1」是什麼來決定。以點數蘋果爲例，如果「1」是1 個蘋果，「5」就代表 5 個蘋果，如果「1」是 1 盒蘋果，「5」就代表5盒蘋果，如果「1」是 1 箱蘋果，「5」就代表 5 箱蘋果，至於 5 盒或 5 箱蘋果是多少個蘋果，就不是討論的範圍（由一盒或一箱有幾個蘋果決定）。

數字「2.4」是以「1」爲單位的記法，還是以「0.1」爲單位的記法？有人認爲數字「2.4」是一位小數，當然是以「0.1」爲單位的記法，其實不然，數字「2.4」記錄了 2.4 個「1」，而不是記了 2.4 個「0.1」。以一條繩子長 2.4 公尺爲例，2.4 公尺記的是 2.4 個 1 公尺，如果以 0.1 公尺爲單位，2.4 公尺是 24 個 0.1 公尺。

（二）小數加、減問題

小數和分數的意義相同，都是等分割後的結果；小數的記法也和整數的記法相同，都滿足左邊位置的位值，都是相鄰右邊位置位值 10 倍的位值概念。因此進行小數的加、減活動時，視學童對小數位值概念掌握的程度，可能有兩種解題策略，第一種是透過分數的加減活動來進行小數的加減活動；第二種是類比整數成人加減算則，使用多單位策略解決小數的加減活動。

以二位小數加二位小數問題「2.45＋3.52＝（　）」爲例，學童透過對小數意義的理解，可能使用下面兩種策略解題，第一種策略是透過分數概念，先將小數改寫成十進分數，算出分數部份的答案後，再轉換爲小數的答案，例如將2.45視爲 2、$\frac{4}{10}$ 和 $\frac{5}{100}$ 的合成結果（或視爲2和 $\frac{45}{100}$ 的合成結果），將3.52

視為3、$\frac{5}{10}$和$\frac{2}{100}$的合成結果（或視為3和$\frac{52}{100}$的合成結果），分別求出整數部份的和數5以及分數部份的和數$\frac{9}{10}$與$\frac{7}{100}$(或$\frac{97}{100}$）後，將分數$\frac{9}{10}$和$\frac{7}{100}$(或$\frac{97}{100}$）轉換為小數0.9和0.07（或0.97），再將它們合起來，得到答案是5.97。

第二種策略是類比整數位值概念來解題，因為小數的記數系統是整數記數系統的延伸，因此可以要求學童仿整數成人加減算則（如果想知道更多的整數成人加法算則，請參閱國小數學教材分析－整數的數概念與加減運算），使用「幾個1幾個0.1幾個0.01加（減）幾個1幾個0.1幾個0.01」的方法解決問題。例如將2.45視為2個1、4個0.1以及5個0.01的合成結果，將3.52視為3個1、5個0.1和2個0.01的合成結果，2個1加3個1是5個1，4 個0.1加5個0.1是9個0.1，5個0.01加2個0.01是7個0.01，合起來是5個1、9 個0.1和7個0.01，也就是5.97。

本教材在第六冊首引一位小數加減問題時，小數只是分數的另一種記法，並沒有位值概念，而第六冊小數數詞序列的範圍只有「0.1～0.9」，因此，學童較可能先將小數轉換為分數，解決分數的加減問題後，再將分數的答案改寫回小數；部份學童可能已將「0.1」視為可以被計數的單位，可以透過點數有多少個「0.1」來解決問題。

本教材在第八冊再次引入一位小數加減問題時，學童已能掌握小數的位值概念，能夠將小數視為多個單位合成的結果，因此本教材先幫助學童將單位小數「0.1」視為可以被計數的單位，再要求學童類比整數，使用較有效率的成人加減算則解決問題。相同的，二位及三位小數的加減問題，也要求學童使用較有效率的成人加減算則解決問題。第八冊以後，如果學童仍使用第一種策略解題時，教師應先接受，再要求並幫助學童使用第二種策略解題。

三、小數乘法

小數和分數的意義相同，都是等分割後的結果；小數的記法也和整數的記法相同，都滿足左邊位置的位值，都是相鄰右邊位置位值10倍的位值概念。因此進行小數的乘法活動時，有兩種安排教材的方式，第一種是透過分數的乘法活動來進行小數的乘法活動，也就是說，先將小數轉換為分數，進

行分數的乘法活動後，再將所得到分數的答案，轉換成小數的答案；第二種是類比整數乘法算則，幫助學童看到相同數字（不同位值）相乘時位值的變化情形，引入小數的乘法。例如幫助學童觀察300×3＝900，30×3＝90，3×3＝9，希望學童能察覺位值變化的規則，類推得到3000×3＝9000，0.3×3＝0.9，0.03×3＝0.09，最後能得到m位小數乘以n位小數時答案是（m＋n）位小數的算則。

本教材認為，國小階段的學童，無法理解第二種方式解題的意義，雖然學童可以透過模仿或察覺規律算出答案，但是無法了解解題活動的意義。因此本教材使用第一種方式編寫教材，先進行分數乘法的解題活動後，才會進行相關小數乘法的解題活動。

（一）小數的整數倍

因為小數的記數系統是整數記數系統的延伸，如同整數，小數也記錄了多單位的合成結果；例如一位小數是記錄數個「1」和數個「0.1」的合成結果，二位小數是記錄數個「1」、數個「0.1」和數個「0.01」的合成結果，三位小數是記錄數個「1」、數個「0.1」、數個「0.01」和數個「0.001」的合成結果，因此可仿照使用「幾個十幾個一的幾倍」、「幾個百幾個十幾個一的幾倍」或「幾個千幾個百幾個十幾個一的幾倍」等整數倍的解題策略，引導學童分別使用「幾個一幾個0.1的幾倍」、「幾個一幾個0.1幾個0.01的幾倍」或「幾個一幾個0.1幾個0.01幾個0.001的幾倍」的方法，解決一、二、三位小數的整數倍問題（如果想知道更多的整數成人乘法算則，請參閱國小數學教材分析－整數的數概念與乘除運算）。

當以多單位運算策略進行解題時，本教材建議使用直式格式記錄解題過程與結果。乘法直式紀錄須符合：(1)記錄問題的原始條件；(2)解題視窗內須利用位值概念簡化紀錄，例如：在十分位記錄5個0.1的合成結果時，不必在其他位置記0；(3)解題視窗內各數碼的位值必須以被乘數中的位值為基礎；(4)一個位置記的數字不能超過9。請注意，由於被乘數與積數的單位量是相同的，而乘數與積數的單位量並不相同，因此，記錄乘數時，不須考慮其位置對齊的問題，例如乘數是5時，5記在被乘數的個位或十分位下皆可。

（二）小數（整數）的小數倍

本教材先進行整數的分數倍及分數的分數倍問題的解題活動（如果想知道與分數概念有關的教材，請參閱國小數學教材分析－分數的數概念與運算）。以整數的分數倍活動經驗為基礎，本教材繼續探討整數的小數倍問題。仿整數的分數倍活動進行的方式，本教材先進行整數的單位小數倍問題的解題活動，再進行整數的純小數倍問題的解題活動，最後進行整數的帶小數倍問題的解題活動。相同的，以分數的分數倍活動經驗為基礎，本教材繼續探討小數的小數倍問題。仿分數的分數倍活動進行的方式，本教材先進行一位純小數的一位單位小數倍問題的解題活動，再進行一位純小數的一位純小數倍問題的解題活動，接著進行一位帶小數的一位單位小數倍問題的解題活動，以及一位帶小數的一位純小數倍及一位帶小數倍問題的解題活動。

（三）小數成人乘法算則

以小數乘以小數的乘法問題「0.9×0.46」為例，成人是先解決整數乘以整數（9×46＝414）的問題，再利用m位小數乘以n位小數答案是（m＋n）位小數的口訣，將原來整數的答案414改寫為小數的答案 0.414。老師們請思考，為什麼可以透過這種方式得到答案？

（甲）	（乙）	（丙）
0.9	9	0.9
×0.46	×46	×0.46
54	54	0.054
36	36	0.36
0.414	414	0.414

習慣使用的小數乘法紀錄格式，在甲紀錄中，被乘數、乘數及積數的「小數點」皆未對齊（最右邊的數字對齊），因此無法明顯地指出「54」或「36」的意義，也就是說，不易判斷在解題視窗中的「54」，究竟是代表「54」、「5.4」、「0.54」或「0.054」？這正是目前學童在學習此種紀錄形式時最容易迷失之處。

我們先比較甲、丙這兩種紀錄：如果學童實際上進行小數倍問題的解題

活動，並將解題過程與結果記成「0.9×0.06＝0.054；0.9×0.4＝0.36；0.9×0.46＝0.414」，則丙紀錄較能清楚地反映上述的解題過程，但是當我們比較甲、丙兩種紀錄中數碼的相關位置時，會發現這兩種記法有相當大的差異，也就是說，成人所喜歡的甲紀錄，與小數倍問題的解題活動關係並不十分密切。我們接著比較甲、乙兩種紀錄：雖然甲、乙兩種紀錄記的是兩種不同問題的解題過程與結果（甲紀錄記的是小數乘以小數問題的解題過程「0.9×0.46＝0.414」，而乙紀錄記的是整數乘以整數問題的解題過程「9×46＝414」），但是除了小數點與小數點前的「0」之外，這兩種紀錄中各個數碼的相關位置都一樣，換句話說，成人是透過熟悉的整數乘法算則來解決小數倍乘法問題。

爲了協助學童看得懂成人習慣的小數乘法直式紀錄，以及它所呈現的解題過程，本教材選擇透過分數的乘法，來進行說明。將小數轉換爲分數來進行解題，是解小數倍乘法問題的策略之一，它的解題過程可用下列的式子來表示：

$$
\begin{aligned}
0.9\times0.46 &= \frac{9}{10}\times\frac{46}{100}\\
&= \frac{9\times46}{10\times100}\\
&= \frac{414}{1000}\\
&= 0.414
\end{aligned}
$$

當這兩個分數的分子的數字相當大時，成人會使用整數乘法直式算則來解決分子乘以分子（9×46）的部分，而形成上述的乙紀錄；當學童能理解 $\frac{9\times46}{10\times100}$ 的由來，亦能理解「414」是「414個千分之一」，將整數轉換爲小數的記法則不是困難的事。因爲學童已有上述各個步驟的活動經驗，因此透過「分數乘法」來說明成人習慣的小數乘法直式紀錄，學童可能較易理解成人的直式紀錄中反映了哪些解題活動。

本教材以整數的分數倍活動經驗爲基礎，幫助學童解決小數（整數）的小數倍問題。對現階段學童而言，本教材認爲在面對小數乘法問題時，不宜要求唯一的解題策略，因爲學童可以透過不同的觀點來解決問題，當然，教師亦宜接受各種不同的直式紀錄，只要直式紀錄中記錄出問題與解答，解題

視窗內能反映重要步驟的結果，並應用位值概念，來掌握各步驟的意義，都是合理的記法，因此下列的直式紀錄（或其他類似的）都是可以接受的記法，例如：

（1）	（2）	（3）	（4）
0.9	0.9	0.9	0.9
×0.46	×0.46	×0.46	×0.46
54	36	0.36	36
36	54	0.054	54
0.414	0.414	0.414	0.414

進行直式紀錄的討論時，宜注重它所反映的解題過程，以及解題者本身是否能掌握紀錄中位值的意義。至於社會上成人習慣的直式紀錄，是社會中溝通的習慣，經常會遇到，因此希望在多次討論與說明中，協助學童理解它所表達的意義，進一步地，在不經說明的情況下，亦能解讀此種紀錄。

四、小數除法

小數和分數的意義相同，都是等分割後的結果；小數的記法也和整數的記法相同，都滿足「左邊位置的位值都是相鄰右邊位置位值10倍」的位值念。在進行小數的加減活動時，本教材主要是類比整數成人加減算則編寫活動；在進行小數的乘法活動時，本教材主要是透過分數的活動來進行小數的活動，希望學童能掌握解題活動的意義。教師們請思考，如何編寫小數除法教材較恰當？

（一）除法問題的情境

就問題情境來分類，我們可以將除法問題分成包含除問題與等分除問題兩類。當包含除問題的商數是整數時（使用儘量分完的語詞來溝通），不論其被除數及除數是分數或小數，這類問題情境在日常生活中都是存在的，例如：「有14（12）元，每人分3元，儘量分完，可以分給多少人？剩下多少元？」、「14.4元，每人分3元，儘量分完，可以分給多少人？剩下多少元？」、「14元，每人分3.2元，儘量分完，可以分給多少人？剩下多少

元？」、「14.4元，每人分3.2元，儘量分完，可以分給多少人？剩下多少元？」等問題，都是有意義的問題。

但是當包含除問題的商數不是整數時（使用全部分完的語詞來溝通），日常生活中就不易找到這類情境，以問題「14.4元，每人分3.2元，全部分完，可以分給多少人？」爲例，這個問題是不容易被接受的，因爲在全部分完的限制下，答案是可以分給4.5人，而人是不可以被分割的。爲了要擴張包含除問題的範圍，本教材將這種問題視爲當量除問題，透過「相當於」的語言，將上述問題改寫成「14.4元，每人分3.2元，全部分完，相當於可以分給多少人？」，改寫過的問題是一個較容易被接受的問題。請注意，商數不是整數的包含除問題是不會有餘數的。

當等分除類問題的除數是整數時，不論其被除數及商數是分數或小數，這類問題情境在日常生活中都是存在的。例如：「有14（12）元，平分給3人，儘量分完，每人分得多少元？剩下多少元？」、「14.8元，平分給3人，儘量分完，每人分得多少元？剩下多少元？」、「14元，平分給3人，每人分得多少元？剩下多少元（商數算到小數點一位）？」、「14.8元，平分給3人，每人分得多少元？剩下多少元（商數算到小數點一位）？」、「14.8元，平分給3人，每人分得多少元？（用四捨五入法取近似値到小數一位）」等問題，都是有意義的問題。請注意，爲了溝通方便，在要求記餘數的情境下，使用儘量分完的語詞時，商數必須是整數，當商數不是整數時，則透過商數算到小數點一位（或多位）的語詞來溝通；在不要求記餘數的情境下，使用全部分完的語詞時，題目都能夠除盡，如果不能除盡，則透過用四捨五入法（或其它取概數的方法）取近似値到小數一位（或多位）的語詞來溝通。

但是當等分除問題的除數不是整數時，日常生活中就不易找到這類情境，以問題「14.8元，平分給3.2人，每一人可以分得多少元？剩下多少元？」爲例，這個問題是不容易被接受的，因爲無法將錢平分給不是整數個人。爲了要擴張等分除問題的範圍，本教材將這種問題視爲當量除問題，透過「相當於」的語言，將上述問題改寫成「14.8元，相當於是3.2人份的錢，每一人

份是多少元？」，改寫過的問題是一個可以被接受的問題。請注意，除數不是整數的等分除問題是不會有餘數的。

（二）當量轉換觀點

本教材由單位量轉換觀點，來處理整數乘除問題的教材，在以「1」爲原始原單位量情況下，乘法問題亦即倍的問題，是指：已知新單位量和新單位數，而總量（積數）未知的問題；反之，包含除是新單位數未知的單位量轉換問題；等分除是新單位量未知的單位量轉換問題。換言之，以單位量轉換觀點，可以將乘除問題視爲下列三個式子：

乘　法：新單位量×新單位數＝總量

包含除：總量÷新單位量＝新單位數

等分除：總量÷新單位數＝新單位量

在一般的情境中，整數的除法可以用包含除或等分除的觀點來理解，但是將除法運算推廣至分數或小數範圍時，上述的觀點已不足以說明除法的意義，例如：「0.2公尺長的鐵絲重3公斤，問1公尺長的鐵絲重多少公斤？」，這種問題可以透過除法運算來解決，「3÷0.2＝15」，但是這種除法運算不易使用包含除或等分除的意義來解釋。因爲「3公斤並不包含0.2公尺」，所以無法用包含除的意義來解釋此算式；另一方面，將3公斤等分成0.2份，等分成不足1份，在使用等分除的意義來解釋也有困難，因爲一旦等分，勢必分成整數份，而非純小數份。又例如：「有19個蘋果，一人分3個，全部分完，可以分給多少人？」，這個問題的答案是『6又 $\frac{1}{3}$ 』人，使用包含除的語意，在解釋包含不足一個（例如：$\frac{1}{3}$ 人）的意義時，亦發生困難。由於以上所述的困難，需要賦予新的除法意義，本教材選擇將原先單位量轉換的觀點，擴充爲當量轉換的觀點，來彌補意義解釋上的不足。

使用當量轉換的觀點，「0.2公尺的鐵絲重3公斤」，並不是將鐵絲等分成非整數的0.2份，而是以1公尺爲單位，3公斤的鐵絲相當於0.2份（單位）；在「一人分得3個蘋果，19個蘋果全部分完」的情況下，並不是19個蘋果包含了非整數的 $\frac{1}{3}$ 份，而是以3個蘋果爲1份（單位當量），19個蘋果分去3個的整數倍後剩下的1個，相當於分給 $\frac{1}{3}$ 個人的蘋果數量，在這樣意義的擴充之下，

原先的三個式子可以改寫爲：

當量乘：單位當量×當量數＝當量值

當量除：當量值÷單位當量＝當量數

或　當量值÷當量數＝單位當量

當量轉換觀點與單位量轉換觀點最大的差異在於：當量數不一定和新單位數一樣是計數測度（即整數）。當然，如果當量數恰好是整數時，例如：「2公尺的鐵絲重4公斤，1公尺的鐵絲重多少公斤？」或「18個蘋果，一人分得3個，全部分完，可以分給多少人？」，仍然可以用單位量轉換的觀點來理解，因此當量轉換觀點是單位量轉換觀點意義上的擴充。將當量數由整數數值擴充至小數或分數數值時，新單位量的操作方式產生質變。當量數爲整數時，新單位量可以被重覆地製作，例如：「3公尺的5倍是多少公尺？」的問題，可以透過重覆製作5次的3公尺，加以合成，獲得15公尺；當量數擴充至分數或小數範圍後，新單位量應該被允許等分割，例如：「3公尺的 $\frac{1}{3}$ 倍是多少公尺？」問題，在解題過程中，蘊涵了將3公尺進行三等分分割的活動。

當量數爲小數或分數時，新單位量的意義亦產生質變，此時的當量數不會是計數測度，因爲次數均爲整數；而當量數應爲一可被分割的測度，否則其數值不可能是小數或分數數值；由於當量數是非計數測度的其他可分割測度，而新單位量則是一個單位的當量數（當量數爲1時）下的量的測度值，以「2公尺的鐵絲重4公斤，1公尺的鐵絲重多少公斤？」爲例，「1公尺的鐵絲重2公斤」，新的單位量不再是2公斤，而應該是2kg/m；以「一人分得3個蘋果」爲例，新單位量應爲「3個/人」。在「1公尺的鐵絲重2公斤」的例子中，1公尺是一個單位的當量測度，而2公斤則是此單位下的量的測度值，因爲新單位量是1個當量數測度下的量的測度，故而稱之爲單位當量。相對地，在「0.2公尺的鐵絲重3公斤」的例子下，可以說「0.2個當量數下的當量值爲3公斤」。由上述的討論中，亦可看出單位當量事實上是兩個測度所聯合的量，其本質是比值，或是密度。

（三）小數的除法（包含除類）

學童解包含除問題時可能有三種解題策略；第一種是連減策略，第二種

是先乘後減策略，第三種是換單位策略。以問題「有14元，每人分3元，儘量分完，可以分給多少人？剩下多少元？」爲例，學童可以使用連減策略解決問題，並使用算式「14－3＝11，11－3＝8，8－3＝5，5－3＝2」記錄解題活動；學童也可以使用較有效率的先乘後減策略解決問題，並使用算式「3×4＝12，14－12＝2」記錄解題活動。再以問題「有14000元，每人分3000元，儘量分完，可以分給多少人？剩下多少元？」爲例，學童可以使用被除數及除數同時換單位（換成以1000元爲單位）的策略，將問題改寫成「有14個千元，每人分3個千元，儘量分完，可以分給多少人？剩下多少元？」後解決問題，並使用算式「14÷3＝4....2（千元）」記錄解題活動。

相同地，解包含除類的小數除法問題（商數是整數，被除數及除數是小數或整數）時，學童也可能使用連減策略、先乘後減策略或換單位策略解決問題，只是部份學童在進行連減策略或先乘後減策略時，可能先將小數轉換成分數進行解題，最後再將分數的答案換回小數。

以問題「23.6公尺長的繩子，1.4公尺剪成一段，儘量剪完，可以剪成幾段，還剩下多少公尺？」爲例，學童可以使用連減策略解題，或使用較有效率的先乘後減策略解決問題，並使用算式「1.4×10＝14，23.6－14＝9.6，1.4×6＝8.4，9.6－8.4＝1.2，10＋6＝16」記錄解題活動，學童也可以仿整數除法直式紀錄格式，使用直式記錄解題活動（見圖二）。

```
           6
          10…16                  16
      ┌──────────          ┌──────────
  1.4 │  23.6          1.4 │  23.6
      │  14                │  14
      ──────────           ──────────
          9.6                  9.6
          8.4                  8.4
      ──────────           ──────────
          1.2                  1.2
```

（圖　二）

學童也可以使用「被除數與除數同時轉換單位」的策略解決問題，例如以「0.1 公尺」為新單位，先將問題改寫成「236 個 0.1 公尺長的繩子，每 14 個 0.1 公尺剪成一段，儘量剪完，可剪成幾段，還剩下多少個 0.1 公尺？」，透過整數除法得到「236÷14＝16....12」的答案後，再將餘數 12 個 0.1 公尺改寫成 1.2 公尺，學童也可以仿整數除法直式紀錄格式，使用直式記錄解題活動（見圖三）。

1.4) 23.6

16
14) 236
14
96
84
12…1.2

（圖　三）

包含除類的小數除法問題（商數是小數，被除數及除數是小數或整數），學童可能有二種解題策略。在除數為分數，商數為整數，有餘數的包含除的問題情境中，學童已有將餘數轉為除數的分數倍，而使商數成為分數的當量除問題的解題經驗，第一種策略是延續上述活動經驗，在除數為小數，商數為整數，有餘數的包含除問題情境中，仿分數包含除活動進行的方式，幫助學童解決將餘數轉為除數的小數倍，而使商數成為小數的當量除問題。第二種解題策略和第一種解題策略類似，只是透過「被除數與除數同時轉換單位」的方式進行解題活動。

（四）小數除法（等分除類）

學童解等分除問題時可能有二種解題策略；第一種是透過一次（輪）一人分 1 個的方式，將等分除問題轉換為包含除問題後解決問題，當學童將等分除問題轉換為包含除問題後，就可以使用包含除問題的連減策略、先乘後減策略以及換單位策略解決問題；第二種是多單位結構策略，將被除數視為多單位結構來解決問題。

以等分除問題「有14元，平分給3人，儘量分完，每人分得多少元？剩下多少元？」爲例，學童可以透過一人一次（輪）分１元的方式，將等分除問題轉換爲包含除問題後，再使用連減策略或比較有效率的先乘後減策略解決問題，並使用算式「14－3＝11，11－3＝8，8－3＝5，5－3＝2」或「3×4＝12，14－12＝2」記錄解題活動。

再以等分除問題「有145元，平分給3人，儘量分完，每人分得多少元？剩下多少元？」爲例，學童可以透過多單位結構策略解題，將被除數視爲多單位的合成，將145視爲1個百、4個十及1個一的合成，1個百平分給3個人不夠分，將1個百換成10個十，加上原有的4個十，合起來有14個十，14個十平分給3個人，每個人分得4個十，還剩下2個十不夠分，將剩下的2個十換成20個一，加上原有的5個一，合起來有25個一，25個一平分給3個人，每個人分得8個一，還剩下1個一，也就是說，每人分到4個十8個一（也就是48），剩下1個一。學童也可以使用直式記錄解題活動（見圖四）。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8\cdots一 \\
 & 4\cdots十 \\ \hline
3 & 145 \\
 & 12 \\ \hline
 & \ \ 25 \\
 & \ \ 24 \\ \hline
 & \ \ \ \ 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 48 \\ \hline
3 & 145 \\
 & 12 \\ \hline
 & \ \ 25 \\
 & \ \ 24 \\ \hline
 & \ \ \ \ 1
\end{array}
$$

（圖　四）

相同地，解等分除類的小數除法問題（除數是整數，商數及被除數是小數或整數）時，學童可能有二種解題策略；第一種是透過一次（輪）一人分１個的方式，將等分除問題轉換爲包含除問題後解決問題；第二種是多單位結構策略，將被除數視爲多單位結構來解決問題。當然，學童使用第一種策略時，可以使用包含除問題的連減策略、先乘後減策略以及換單位策略解決問題，在進行連減策略或先乘後減策略時，可能先將小數轉換成分數進行解題，最後再將分數的答案換回小數。一般而言，當商數是整數時，學童可以使用第一種或第二種策略解題，但是當商數不是整數時（不管有沒有餘

數)，學童只能使用第二種策略解題。

以等分除問題「有一條緞帶長55.3公尺，平分給3位同學，儘量分完，一人可以分得多少公尺？還剩下多少公尺？」爲例，學童可以透過一次（輪）一人分 1 公尺的方式，先將等分除問題轉換爲包含除問題，再使用連減策略、先乘後減策略或被除數與除數同時轉換單位的策略解題。學童也可以使用多單位結構策略，將被除數視爲多單位結構解題。

再以等分除問題「有一條緞帶長5.52公尺，平分給3位同學，全部分完，一人可以分得多少公尺？」爲例，學童可以透過一次（輪）一人分1公尺的方式，將等分除問題轉換爲包含除問題後解題，學童也可以將被除數視爲多單位的結構，使用「先算最多有幾個1公尺，再算剩下的最多有幾個0.1公尺，最後算剩下的可以有幾個0.01公尺」的算法解題。從多單位的觀點，5.52公尺可看成5個1公尺、5個0.1公尺和2個0.01公尺，先將5個1公尺平分給3人，一人最多分得1個1公尺，用去3個1公尺後，剩下2個1公尺；2個1公尺可以看成是20個0.1公尺，加上原有的5個0.1公尺，就有25個0.1公尺，再平分給3人，一人最多可以分得8個0.1公尺，用去24個0.1公尺後，剩下1個0.1公尺，仿照此種分法，繼續做下去....，直到全部分完爲止，學童也可以仿整數除法直式紀錄格式，使用直式記錄解題活動（見圖五）。

```
      1.84              1.84
   ┌─────            ┌─────
 3 │ 5.52          3 │5.52
   │ 3               │3
   ──────            ──────
     2 5              2.5
     2 4              2.4
   ──────            ──────
       12             0.12
       12             0.12
   ──────            ──────
        0                0
```

（圖　五）

等分除類的小數除法問題（除數是小數，被除數及商數是整數或小數），

對國小學童而言相當困難，以問題「袋子裡的米重6.5公斤，相當於3.25人份的量，一人份的米是多少公斤？」為例，可能有三種編寫教材的方式，不過這三種方式對國小學童而言都不易理解，站在學童認知發展及教材一貫性的角度，本教材引入第一種解題策略。

第一種是轉換成包含除的策略，由於被除數與除數的單位分別是「公斤」與「人」，並沒有所謂的公共單位，所以在解題之前需要把等分除語意轉換成包含除語意，並把被除數6.5公斤用「一輪一人分一公斤」的方法分給除數指示的這些「人」(需用相當於的想法來看待小數個人)，因此分一輪將會用去3.25公斤，再分一輪將又用去3.25公斤而沒有剩下。最後可以把問題改寫成「6.5公斤的米用『一輪一人分一公斤』的想法分給一些『人』，一輪用去3.25公斤的米，求分了多少輪？」，後者是一個當量數未知的除法問題，它的被除數和除數的單位都是公斤，因而可使用「被除數與除數同時轉換單位」的方法來簡化解題過程。

第二種是使用多單位結構策略解題，由於小國小學童無法掌握等分成非整數份的意義，不易處理。

第三種是透過等比例放大的策略解題，將被除數及除數同時乘以100倍，將原問題轉換成新問題「袋子裡的米重650公斤，相當於325人份的量，一人份的米是多少公斤？」後解題。學童可以透過模仿或察覺規律算出答案，但是無法瞭解解題活動的意義。