

第三章 小學生面積的認知結構

第一節 平面區域

· 區別平面區域和非平面區域

兒童容易把光滑和平混淆。靜止的水平面很好，可做為概念的原型。果凍的平面成型來自水平面，但又可以擺成其他方向。塑膠板或牆面、桌面、玻璃表面皆可。不必刻意強調光滑玻璃之表面比地面更接近平面，因為其差異係來自光不光滑，反而容易誤導學童混淆光滑與平平。

· 區分周界與區域，以及周界長和區域的大小

在長度概念啓蒙時，直線段先於距離。兩點之間的距離是連結這兩點的直線段的長度，這兩點是直線段的端點。

面積概念啓蒙的麻煩是，無法像直線段一樣，在紙上標示出平面區域。補救之道是在周界圍成的內部特別用顏色塗勻加以區分。在黑板上，教師可以用手掌在標示出的平面區域上做出塗抹的動作，以強調此區域。如果只是用食指指著某個長方形周界繞一圈，而口說這是長方形面積，就難怪學童始終混淆周界和面積了。

在學會求出長方形面積後，應令學生同時實測長方形區域的面積及周長，並經驗兩個長方形可以周長相等，面積不相等，或者反過來的情形。

· 曲面的面積

可展曲面如圓柱面和圓錐面，可令學童剪開，比較其大小。至於其他不可展曲面，如人體之表面，可以透過皮膚的概念，或以剪成塊狀或報紙片覆於身體之上，估測人體的體表面積。

· 平面區域的分與合

平面區域的原型為課本上的色塊或圖形板之表面，或一塊布、一張報

紙。有必要與兒童溝通將報紙剪為兩塊，或將分開之兩塊再拼合，拼合時宜以膠帶自背面黏合之，不宜重疊報紙，以免引起兒童誤解。

第二節 兩平面區域大小之比較

· 直接比較

將一平面區域，如切取報紙一塊，覆於另一塊之上，這是學童可以做的，但不易察覺到，如果不是平面，不可能使這兩塊之間沒有空隙。此活動有時可以有確切的結果，如一塊完全在另一塊之下，學童可以檢視後報告此一結果。

· 間接比較

兩平面區域若無法直接比較，則可以用紙或布複製其一，再與另一比較，再以此直接比較結果做為原來兩平面區域的比較結論。由於人們對於平面區域與觀察者的相對位置較無估測其大小變化的意見，故此種間接比較沒有什麼教學上的困難。比較困難的是切割重組。

以往台灣物質較匱乏，蛋糕、涼糕常故意切成平行四邊形，而非長方形，以使人們感覺得大些。可見這種感覺終生不變。但是所謂保留概念的意思就是，理智可以克服感覺，只要是同樣那幾塊區域合起來的，不論形狀如何，面積都一樣。

相當比例的三年級學生在判斷由兩個等腰直角三角形所組成的平行四邊形和正方形，誰的區域比較大時，確有些爭議。與其提早讓學童掀起上述平行四邊形和正方形，誰的區域比較大的班級爭議，不如在介紹1平方公分後，常令學童以圖卡或在公分格上「做」出一定數量的平方公分的區域，如15平方公分的區域，並令學童互相欣賞，強調它們都是15個1平方公分合起來的大小，加強此類等積異形的印象。

有人認為等積異形的概念是求平行四邊形面積的先備條件，因此急於在課程中安排上述平行四邊形和正方形的區域大小的比較活動。其實，學童只要認識「平面區域的面積可以由數塊子區域的面積加起來」，就可以進行求解平行四邊形面積的活動了。因此上述有關個別單位活動的經驗較有建設性。

第三節 測量單位

· 面積個別單位

每個人的步幅不同，但使用腳步來估測距離卻很實用，類似這種例子很多，使得長度的個別單位概念非常重要，而各種長度個別單位與標準單位的換算也變得很重要。

但是在面積的情形有很大的差異。雖然使用正三角形、長方形、正六邊形等，亦可做平面的無空隙鋪設，但是這些個別單位的點數很不方便。考察本課程列在N-2-9下，個別單位比較欄的4個教學活動，讓我們覺得這些活動只有概念形成的過程價值。雖然以磁磚鋪設牆面、地面，以長方形格子劃分天花板或地面非常普遍，但與其點數長方形後，並量出這些全等的長方形的長與寬，再算出天花板的總面積，還不如直接量出天花板的長與寬後，直接算出天花板的面積。總之，在常用的公制單位，如平方公分、平方公尺以及民間用的坪（6尺見方）或英美的平方英呎、平方英吋之外的個別單位的價值不大。

· 以個別單位做面積

以個別單位做面積，共有兩種方式。一種是在打好格子的紙上，塗出指定數量的格子，另一種是使用全等的圖形卡片鋪排在一起，但不可重疊。不論用哪一種方式，做出的平面區域應該是連在一起較合理。由於打好的格子已經大大限制了個別單位鋪排的方式，因此，教學應以後者為主，前者為輔。由於1平方公分大的圖形卡片太小操作不易，因此有時會以正方體的白色

積木代替1平方公分的平面圖卡，以利操作。但是這樣做也可能引起學童的誤解，因此剛開始時仍以使用圖形卡片為宜。在後面討論長方形面積的求法時，經過適當的溝通後，就可以使用較方便的白色積木了。

· 面積的普遍單位的原型

分析個別單位和普遍單位在連續量的教學上的意義，我們可以注意到個別單位是用物件名稱，如數學課本，或手指正三角形圖卡，口說「這種正三角形圖卡」。普遍單位則是使用較抽象的「平方公分」及「平方公尺」，而非可操作的物件的名稱。一個有效的解決方式是利用白色積木的面做為1平方公分的原型，配合「以手操作×個白色積木的覆蓋」，「口說×個1平方公分合起來的面積」，達到「聽到1平方公分」就想到「1個白色積木的面」的效果。

同樣的，可用報紙或不織布製作1平方公尺的原型，而且最好有許多塊效果較好。

至於1平方公里的原型，則以學童較熟悉的社區、原野，界定出1平方公里的周界後，把周界內的重要地標都標示出來。但這時主要是讓學童具備1平方公里的量感。

總之，面積的普遍單位的原型在1平方公分的處理時，要做得很透澈，到了1平方公尺時，可以重點處理，到了1平方公里時，就可以借用1平方公分和1平方公尺的經驗，而這種經驗是不能用長度概念的發展經驗代替的。

· 1平方公尺和1平方公分的關係

實驗教材利用學童習作附件的百格板，先建立1平方公尺和100張百格板合起來的面積一樣大，再由1張百格板是100平方公分，從而得到100個1平方公分的100倍，而得到10000平方公分。這樣引導的方式，對四年級上學期的學童的認知水平相當合適。

· 坪的介紹

九年一貫課程強調連結與統整，82年課程強調認知發展的數學課程的架構。因此在82年課程中並不在意坪的單位的介紹。再加上坪的單位與平方公尺的關係會涉及公尺的小數倍及小數的乘法，所以如果要提的話，也需放在六年級下學期，因此在教學時間的限制下，如果台斤、台尺都沒介紹的話，連帶坪也不介紹了。

不過，相當多社會人士樂見坪的單位的介紹。因此，當九年一貫課程來臨，此議題將獲重視。

· 面積的大範圍實測

對土地進行實測的活動有兩種實施方式，一種是事先劃定界限，並對學生宣告劃出的圖形為長方形、梯形、三角形或圓形，然後要求學生量出邊長、高長等，接著在紙上出畫出示意圖，標出邊長、高長協助思考，利用公式，算出答案。這些地面上的圖形可以事先畫在操場上，或以校園數學步道方式，預先規畫布置。例如：籃球場、躲避球場等。

另一種更接近實際情形的實施方式為類似測量校園的面積的活動。此時，須先以土地測量方式，將校園畫成依一定縮小比例，如二千分之一的平面圖。然後將此平面圖分割成長方形、三角形、梯形等，再在圖上量出底長、高長等，利用公式求出。

顯然，第一種方式較為可行。參見第八冊第五單元活動4。假如第二種方式的測量對象為長方形，可以考慮實施。

第四節 面積課程的一些議題

· 與分割重組有關的幾何論證

一個平行四邊形可以分割成兩個全等的三角形，或者從平行四邊形的左側切出一個直角三角形移到右側，即可構成一個長方形。在以往都是由老師

加以宣告，畫個圖就算交代了。

若按照凡析理夫婦的幾何教學理論，則以圓規、直尺加以檢查，以疊合方式檢驗，或透過三角形內角和為180度的定理做局部論證是絕對必要的。

至於學童是否能夠自發地利用長方形面積公式以解決三角形、梯形和平行四邊形的面積問題？此處國編本是將此三類圖形畫在公分格子上，期望學童在數格子時，能夠利用先乘後加或先乘後減的方式計算，從而察覺此種方法。實際教學的結果，效果並不完全。我們發現，可能由於讓學童點數的此三類圖形仍然失之過小，以致學童利用逐一點數以及逐一地出入相補的方式求得答案。因此解決之道，應將上述布題中的三種圖形的面積加大，例如加至50~100平方公分。

· 面積語詞引入的時機

本課程的長度啓蒙教學中，首先藉著長短形容詞，配合直觀比較，用「長」來介紹直線段，並以拉直的繩子或直的木條、竹竿表徵直線段，並以手指從一端觸摸直到另一端後才移開。在教到以刻度單位表示長時，才用長度的語詞來溝通。與此成對比的是面積的啓蒙教學。在學童的用語中，面積缺乏與長短對應的日常語詞。雖然在文言文中用「勢」表示面的大小，用「積」表示物體的大小，但現已不常用。因此本課程在N-1-9的直接比較，即面積教學的第二個活動，即引入面積的語詞，亦即在直接比較覆蓋活動之後即引入面積的語詞。這個時機是否太早呢？是否在面積可以用刻度表示之後才引入面積語詞較合適？如果這樣做，則在面積語詞未引入之前，可以使用「面的大小」一詞代替。

· 平方公分板的使用

在82年版課程標準的註200，以公分尺的使用為例，有兩個階段。首度使用係當作刻度工具，有人稱為「怪尺」，後來則是個別單位結構的理解。何以分成兩個階段？有三個好理由。

1. 學童早已熟悉公分尺的存在。他看過成人使用它，這也是他畫線的學具。
2. 使用容易，並常與直接比較有關。例如用公分尺對尺上刻度位置與欲度量物件，就是直接比較。
3. 在啓蒙階段有助於建立保留概念。

問題在於：是否每一種量都要有刻度工具階段的教學？重量、容量、角度這三種量可以做，而且需要。體積無法做。

本課程把平方公分板當作面積的刻度工具，但其效率則令人質疑。理由如下：

1. 平方公分板上格子的點數非常麻煩。
2. 它不是真正實用的工具。
3. 按照公分尺的教學模式，平方公分板至少要佔兩個教學活動，很花時間。不如在個別單位教過後，再使用格子就好。
4. 在紙上打格子，把需要討論內部面積的平面圖形畫上去，比使用平方公分板進行教學要容易得多。

一個折衷的建議是多利用上述第4點的方式進行求面積，作為格子的點數的經驗。