

第二章 長度教學研究篇

第一節 數學結構

• 長度概念的由來

在空間中，質點從一位置移動到另一位置，花費最少的時間，或最少的能量，它所經過的路徑，可以加以量化，以與時間、能量、質量建立關係。另一方面，物質或能量在空間移動，常需要傳導的載體，例如電力輸送需要導線，螞蟻在空間移動需要繩子，質量愈少的載體愈有利。這兩者是物質世界中，長度概念的由來。

• 直線

直線是符合上述最小化目標，而能連接兩點的幾何圖形。因此在物理世界中，以光線和拉緊的繩子最接近理想的直線。事實上，以配有游絲的望遠鏡做地面測量，以及木匠用的墨線就是這兩者應用的例子。

直線最重要的幾何形狀特徵就是兩段直線一定能處處疊合，事實上，只要用這個事實，就能區分直線與非直線。例如兩段同半徑的圓弧可以處處疊合，但不同半徑的圓弧則否。

直線可以任意延長，故在數學上，在嚴格使用中，以直線稱呼兩方向都延伸至無限遠處的直線。直線中任意兩點之間的部分稱為直線段，簡稱線段。從某一點開始，只以一個方向延伸至無限遠處，稱為射線。在較寬鬆的使用中，直線和線段的界限模糊化了。

直線段可以相接成更長的直線段，這也是延長它的意思。直線段的相接是直線長的個別單位描述的基礎，將直線段接成更長的直線段就是直線段的合成，反之則稱為分解。

• 直線段的長短

將甲、乙兩直線段疊合，則必然出現三種狀況。1. 甲線段完全在乙線段上。2. 乙線段完全在甲線段上。3. 甲線段部分在乙線段上，乙線段部分在甲線段上。前二者是完全包含的關係，後者則是互有出入的關係。但是，後者可以調整為前二者之一，最直接的方法就是疊合兩線段的其中一個端點。

若甲線段完全包含於乙線段，則稱乙比甲長，反之，稱甲比乙長。如果兩者皆發生，則甲、乙一樣長。

換言之，兩直線段之所以能直接比較，完全是因空間中的物件可以移動，而且，在移動時，直線段可以完全維持住，不會變形所致。

• 直線段長的描述

將乙、丙兩線段合成為直線段，再與甲線段疊合比較，如果恰巧相等，則稱甲線段與乙、丙兩線段合起來一樣長。顯然多個線段的合成也是可行的。如果這多個線段皆等長，則此種描述稱為用一線段去度量甲線段。

用乙線段去度量甲線段，幾乎都會剩下一段比乙線段短的部分。這時可以用乙線段的十分之一，再去度量剩下的部分。若又有剩下，可以用乙線段的百分之一再去度量剩下的部分，理論上，這個過程可以無限進行，最後得到甲線段是乙線段的實數倍的結果。在此關係中，乙線段稱為基準。

• 曲線長的描述

屬於非直線段的曲線，例如圓周、或橢圓周，其長度的描述必須用到極限過程。一般的方法是在曲線上取一些點，包括曲線的端點，然後把這些點用直線段依次相連。如果取的點愈來愈多，則所連成的直線段的總長度雖然也會愈來愈長，但不會超過一個很容易決定的限度。數學上說，它會達到一個最短上限。這個最短的上限就被定為曲線長。

• 普遍單位

一個可為社會大眾共同接受使用的基準顯然是必要的。最初的基準是由

統治者的權威支持建立的。最初，基準的高階單位，或基準的分割單位都不一定是十進位的。爲了教學效率，一開始就介紹國際標準度量衡制度。這個制度的長度基準原則上是以北極經巴黎到赤道的子午線長的一千萬分之一定爲一公尺（meter）。並製作一把金屬尺稱爲公尺原器。後來因爲科技進步，改用可在任何現代實驗室製作的方式定義一公尺長。

一公尺的十倍、百倍、千倍，……等，稱爲十公尺、百公尺、千公尺、萬公尺，……，其 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ 、 $\frac{1}{1000}$ 等，稱爲分公尺、厘公尺、毫公尺，……等。在九年一貫課程綱要中，公尺改稱爲米。

• 數線

數學上使用數線來表示分數、有理數及實數。表示實數全體的數線是一條向兩方向無限延伸的直線。選定其中一點爲“0”，“0”的右邊一點爲1。任何一個正實數 a 的位置，是以 a 位置到原點“0”的距離爲點1到0的距離的 a 倍定出的。負實數則在“0”的左邊，也是用距離來定位置。

數線的主要目的是利用長度量來表徵實數，使實數的大小次序、分解結合、十進位小數、無理數的認識乃至極限的概念，都有一個可以做些初步操作以有助於了解的具體對象。它對長度量本身的認識並無進一步的貢獻。

• 比例尺

在五萬分之一以上的比例尺的地圖上，比例尺的意義可以理解爲，假設比例尺爲 $1 : a$ ， a 小於五萬，則地圖上長度的1公分，則實際地面的長度爲 a 公分。若 $a = 1000$ ，即爲10公尺， $a = 10000$ ，即爲100公尺。

五萬分之一以下的比例尺的地圖，如全國地圖或亞洲、世界地圖，則因爲地球表面無法在完全保持長度的比值下，畫在平面紙張上，所以比例尺的意義只能從可以保持長度比值的那些部分來看。例如在Mercator投影的世界地圖，則比例尺可由赤道長的比值決定之。

第二節 第一階段之認知結構

• 長度啓蒙教學前的學童經驗

學童在長度教學的第一課之前，已有許多和長短有關的經驗，它們是視覺的，以及行動的。較短的物件，眼睛掃描較快，較長的物件，需要較長的掃描才能完全看完，有時除了眼球轉動外，還需要頭的轉動，例如在月台上看火車。在剪或貼東西時，較短的容易做，較長的不易做好，這些判斷可做為教學開始溝通的基礎，我們稱之為直觀比較。

伴隨著這些經驗的，是相關語詞的知識，如長短、遠近、高矮、厚薄、粗細等。教師可以透過具體實物或具體比出，強調或介紹這些語詞的使用，加強兒童對長度量的認識。在這過程中，教師介紹後面長度教學頻繁使用的物質媒介，如鉛筆、繩子、黑板的邊沿、長方體盒子的邊沿等。老師介紹時，應以手指尖沿著物品的一端徐徐移動至另一端，以增強兒童對直線段表徵之認識。

• 直線段的表徵實物的認識

教師用「鉛筆的長在那裏？是從哪裏到哪裏？用手指比比看。」討論到繩子時，一定要將繩子拉直。這些都是在認識可以表徵直線段的實物，透過這些以及下述的直接比較，兒童逐漸將直線段抽象化。這裡抽象化的意思是指直線段可以互相疊合，它只有長短，它沒有寬度、厚度，它似乎是可以延長的。這些逐漸形成的概念，開始是無法令兒童描述的，但是只要例子夠多，描述得夠多，兒童自動會理出它們的共通之處，教師不必預設要逼出兒童一定得怎麼說。

• 直線段表徵實物的直接比較結果的報告

此時兒童的手眼協調，要將兩實物的某部位疊合沒有問題，例如將拉緊

的繩子和長方體盒子的邊疊合，疊合時，若出現前述的甲線段部分在乙或乙線段部分在甲的情況時，教師可要求學童共同解決此一困難。此時，對齊端點的解法常常是自發性的。當兒童做完直接比較，兒童須說出，如繩子比盒子的這一邊長的結果報告。

• 以遠近、高矮、厚薄、粗細做為報告結果的描述的直接比較活動

在比較兩本書或兩塊木板的厚薄時，真正在比的是兩平行面之間的距離，因為書本或木板基本上為長方體，所以此距離大致有一個直線段存在書本或木板的角上，且與書面垂直。若要求兒童以直尺的邊沿記錄其厚薄時，由於直尺的兩端的邊與尺沿是垂直的，因此這也符合幾何上的要求。總之，雖然在此時，兒童無法真正認識兩平行面之間的距離，但是活動是有意義的，且不會和以後的發展矛盾。

在比較兩小朋友的高矮時，真正要做的是，過頭頂做一平面或直線平行於足底平面，測量或比較兩者之間的距離。但是活動進行是以小朋友背靠背站著，其他同學在旁觀察或以一木板（表徵平面）頂住頭頂，以便在牆上做出記號，故與上段所述活動相同，都是有意義的活動，不致造成客觀的矛盾。

本課程未做粗細比較之活動。若以粗細不同之鐵絲置於桌上，兒童以目視之即可判別粗細，屬直觀比較即可看出。

總之，以上活動之目標在連結長度與更多樣的情境和語詞，故在教學時間充裕時，是很有意義的活動。

• 長度的複製

在本課程中，複製意指「在所談論的焦點上，原物和複製物是等同的。」例如，「在紙上畫出鉛筆的長」，此處複製物是一條用筆畫出的線，因為不是用尺協助畫出，所以不是很直。用筆畫出的線和鉛筆是相當不同的，但是就長度而言就是複製。複製是本課程進行時，教學上的重要概念，但是兒童

不必知曉此語詞的使用。高年級的學童於從事各種複製活動之餘，必能覺察此類活動的模式。

最基本的長度複製為完整複製，上述活動屬之，尚有以繩子剪出和長方體盒子上指定邊的長或在繩子上做出記號，使繩子之一端至記號處和原物等長，亦可在木條的直線邊沿上做記號，以木條一端至此記號的長記錄原物的長。

更進一步的複製為累積複製。就是用不同的物件頭尾相接成直線，並依次報告使用的物件。如果使用的是全等的物件，如迴紋針、鉛筆，或同等長的繩子，則為同長累積複製。同長累積複製是個別單位比較的基礎。

有些學童在執行同長累積複製時，會使用同一支迴紋針在所欲複製的直線物上做記號，如下圖示：



這些學童在概念上，應屬於相信這個迴紋針不論平移到那裏，都是等長的。

• 彎曲物的長

彎曲物，如水桶之把手，或圓形罐之周界，或人身之腰圍或樹圍，都是以柔軟的繩子去複製其形後，再拿開拉直，做為彎曲物之長。此長與數學上曲線長須嚴格區分。後者是折線段長的和，不斷增加後的極限。

• 長度測量工具的使用

小學生會使用到的長度測量工具是公分直尺及皮捲尺。公分尺也有做成捲起的形式，例如布尺。公分直尺上印有標識起點“0”每隔1公分寫上1，2，3，...的數字，各個數字標在垂直於尺沿的短直線段的直下方或緊鄰於其側方，這條短直線段及其對應數字 x ，課本上稱為刻度 x 公分。除了

這些刻度外，在相鄰兩刻度間，另有9條較短的垂直於尺沿的直線段，一般不再另標數字，它們是毫公尺刻度。由於這些刻度都是印在尺面上，較厚一點的尺容易造成視線方式判讀尺面上的刻度與欲測量的紙上線跡的端點在疊合上的誤差，因此宜建議學生使用較薄的尺，或使用透明尺，並將刻度數字反印以透過透明尺的方式判讀。這種公分尺也常印在三角板的邊上，它們兼具畫直線段的功能。

皮捲尺上有公尺及公分兩種刻度，公分刻度上可能每隔10公分才會標上10、20、．．．．90的數字，再以不同的長度區分5、15、25．．．．95的刻度及其他公分刻度。公尺刻度的數字常另加上表示公尺的縮寫“m”。使用這些數字的方法如下：從刻度“0”到刻度x的長是x公分或x公尺或x公尺x公分。

長度測量工具的使用可以視為完整複製的活動，但記錄方式為把端點的數字記下來。

第三節 第二階段之認知結構

• 長度保留概念

1. 長度保留概念是什麼？

對能夠運用直接比較活動以了解兩實際物件的長短比較的學童，是否相信如果此二物件沒有任何明顯的增損，比較的結果就一直可以維持？亦即不論何時、何人、何處再做幾次，結果都相同？其次是比較結果的遞移律的建立。如果A，C兩物等長，即 $A=C$ ，又 $C=B$ ，學童是否願意接受 $A=B$ 的結論呢？還是堅持要做直接比較？同理，若 $A>C$ 且 $C>B$ ，是否願意接受 $A>B$ 的結論？其次是先知道 $A=C$ ，然後把A分割成幾份。再問學童是否願意接受，再把這幾份合起來的長，仍然和C一樣長？

2. 長度保留概念的促成

讓學童就固定一物進行複製，但改變時間、地點、方式、媒介而得到多

個複製物。然後令學童就複製物是否等長進行意見的發表和辯論後，進行直接比較，如此學童的保留信念受到衝擊，應有促成之效。對遞移律及分割後再合成之保留性，亦可仿照進行。另一方面挑戰長度保留概念的是人類天生的某些視覺上的錯覺，以及像「十元硬幣比五元硬幣面積大很多」，所以長度也會「大很多」的錯誤直覺推理。例如⊥明明垂直線和水平線一樣長，可是看起來，垂直比較長。教師可以利用此種錯覺，透過討論以檢驗學生是否具備保留概念。以上運作除了透過複製，亦可使用測量工具來進行。

• 公分刻度尺和公尺刻度尺的結構

學童認識公分刻度尺的活動分在第一和第二階段。在第一階段時，把它當怪尺，注重的是使用及報讀，只要有複製能力即可執行。在第二階段則注重相鄰刻度間的等長性，以及刻度旁的數字係指個別單位的累積。詢問學童「可否運用斷尺，少了“0”至“1”的刻度之間的部分的尺來測量？」可以檢驗兒童是否仍能以個別單位的累積的概念來使用公分尺。市售15公分小直尺和公尺刻度的皮尺上，另有其他的刻度，其結構說明，見第四節。

• 從個別單位到普通單位

1公分、1公尺是很抽象的名詞，相反的，一個白色積木的長，或一條木棍的長就很具體。這也是個別單位和普通單位最明顯的區別。否則，一般成人必知，普通單位不過是個別單位的一種。因此要使學童接受普通單位，須經兩階段，第一階段是透過具體的長度為1公分或1公尺的實物。這個實物宜有獨特性，且學童能具體接觸可產生恆久印象者為佳。故1公分以使用白色積木最佳，1公尺，則可用布尺，棉繩或木尺，確定後，不要再改。

使用時的溝通以 x 個1公分或 x 個1公尺為之，雖然手上操作的仍然是白色積木或木條。第二階段是能掌握1公分或1公尺大概有多長，通常是以手勢表出食指與拇指間的空隙寬度為1公分，而以兩手臂向兩側張開，以兩平行手掌之間的距離表示1公尺。

• 已度量化的長度量的合成分解與算式的關係

算式的原型來自小型個物的添加、併加及拿走型，結果量未知的解題記錄。教學上，自然應該讓學童覺察已度量化的長度量的合成分解，亦能透過個別單位的操作，猶如在操作小型個物一般，產生添加、併加及拿走的意義，進而以算式記錄。經過此一過程後，記成算式填充題再求解，將成爲已度量化的長度量的合成分解的標準解題模式，進而成爲已度量化的長度量的乘法和除法的解題發展的基礎，以及化聚的基礎。

以拿走型爲例：

(1) 具體做的方式：

15公分長的吸管，剪掉9公分，還剩幾公分長的吸管？

從頭數的解題策略：

拿一支吸管，量出15公分—相當於—數出15個花片

從一端量出9公分後，剪下—相當於—從15個花片中拿走9個花片

再量剩下的結果是6公分—相當於—數剩下的花片是6個

(2) 不是具體做的方式：

15公分是15個1公分白色積木合起來的長。拿走9個1公分合起來的長。因此 $15 - 9 = 6$ ，故剩下6個1公分合起來的長，所以剩下的吸管長6公分。

• 實測

最基本的實測是以直尺或拉直的皮捲尺去疊合直線物品。但是實際的測量有許多技術性問題，實驗課本提到實測長度的技術性問題的地方不多。惟一提到的是要求學童以15公分尺去量報紙的寬，學童必須分三次量，再加起來，但是把技術性問題交給老師權宜處理。

又如有些尺，刻度“0”的位置不一樣。有鐵環的皮捲尺，其刻度“0”未標識，因爲它是在鐵環的外緣。老師可能會疏於注意學童在測量前不一定能做檢查及調整。

• 估測

其實，小學生無法具備用長度估測解題的能力，只能夠說經驗估測，以及培養估測活動中所必須具備的基本事實的掌握。許多估測活動的產生與生活或職業需求有關，例如警探從房間或皮箱外部及內部察看，以判斷牆壁或皮箱內外層之間是否有夾層可藏東西。

普通人可用步測以決定從捷運站出口到辦公室應選擇哪一路徑。步兵必須直接以目視判斷目標與自身之距離以調整步槍的瞄準標尺。

本課程採用先猜後量的教學策略，但沒有進一步讓學童討論到猜的原則或依據，而且「猜」只是來自教師的布題，本身並未有合適的需求感。

生活上常見需要以繩子綁紙箱的活動，判斷繩子是否夠長可做為估測的布題。學者常以「截割」的出現與否來判斷一個人是否具備運用估測解題的能力。截割即以一熟悉之長度，去逐段減去欲估測之長度，且以目視，心象或身體活動為之。

• 公里

對現代的高年級學童而言，公里的確是生活中容易經驗到的名詞，其原因來自人類旅行經驗的頻繁。例如：飛機飛在數公里高的天空、通車的學生每天到數公里至幾十公里外的學校上課、親戚住在幾百公里車程的城市、越洋飛機飛越數千公里的距離。其實公里的量感也來自這些經驗，因此此種經驗決定孩子在公里量感的差異。

在校園內以折線方式經驗一公里，仍然不如以一條筆直的道路從一點到1公里外的另一點的距離來得印象深刻。課程設計在校園內經驗1公里的步程，純是為了解學方便與安全考量。

• 化聚

公分和公尺這兩個單位獨立地提出，可以說沒有什麼選擇的餘地。一來

，1公尺和1公分的長相差100倍，太多了。如果只差10倍，那還可以用分割的方式。其次，在國際標準制度提出來之前，大單位和小單位的制定，完全與十進位制無關，有時是爲了求二等分的方便，如一斤等於16兩，有時會和12有關，這些對孩子而言，不見得有什麼意義。

提出用公分的累積與1公尺比較，是個適切的挑戰，值得讓孩子試試。白色積木也夠多，累積的效果也不錯。如此即得100個1公分和1公尺一樣長。再用布尺或皮捲尺看一下，做爲檢驗。此時用100公分=1公尺的等號是有對稱性的，亦即1公尺也和100公分一樣長。但是到了化聚時，等號變得有方向性，100公分=1公尺，解釋爲100個1公分合起來和1公尺一樣長。1公尺=100公分，解釋爲，1公尺可以分解爲100個1公分。趁著等號對稱意義確定後，可以溝通不等號的使用爲比較長和比較短的關係。

對1公尺及1公分有正確量感的學童，做化聚應該很容易，雖然我們不堅持學童要熟記換算的當量，但學童如果知道，只有10，100，1000三種選擇時，就不容易錯了。

化聚可以大致區分成簡單化聚、整數化聚及小數化聚。簡單化聚就是和整公尺、整百公分，或和整公里、整千公尺，或和整公分、整毫公尺，之間的化聚。整數化聚就是複名數化聚。小數化聚即複名數或低階單位量改用高階單位的小數倍的轉換。

1公里即1000公尺，是由1公尺的累積來的。毫公尺可以透過1公分的十分分定義。但是在82年版實驗教材也是獨立呈現的，再透過累積，連絡它與公分的關係。

• 長度的合成分解算式

長度的合成分解的算式不算重要項目，學童使用上困難也小，書寫時，數字之後都加上單位。但單位可以像使用定位板的方式，記在直式上方，有點像多項式加減時用的「分離係數法」至於長度的乘除算式不需規定格式較佳。

• 數線結構的認識

在本課程中，和數線結構相關的活動包括部分學童自發地用線段圖表達正整數加減問題中的部分-全體關係，統計圖表中表示數量的軸，刻度尺，鐘面及秤面上的刻度盤，表達昨日、今日、明日關係的時間之軸，以及表現兩量的倍數及倒數關係的線段圖，因此數線結構對學童應該容易溝通。因此教材設計重點應該放在需求感上。要求學生把 $\frac{1}{5}$ ， $\frac{2}{5}$ ， \dots ， $\frac{5}{5}$ ， $\frac{6}{5}$ ， \dots ， $\frac{15}{5}$ 標在數線上，一方面比整數數線往實數數線目標更進一步，一方面有助於掌握假分數和帶分數的關係。

此外，公路、鐵路的里程牌的設置的介紹也是連結數線的好方法，同時也連結了生活。

第四節 第三階段的認知結構

• 小數化聚

公分和毫公尺之間是一位小數化聚，公尺和公分是二位小數化聚，公里和公尺之間是三位小數化聚。由於在本課程中，小數之認知源自分母為10的乘冪的數的另一種記法，因此小數化聚也藉著分數概念而來。1公分=10毫公尺，故1毫公尺= $\frac{1}{10}$ 公分=0.1公分，藉著此一關係，把整毫公尺視為0.1公分的整數倍，若為複名數，則把整公分部分另外處理。例如：18毫公尺=0.1×18公分=1.8公分。3公分5毫公尺=(3+0.5)公分=3.5公分。其他的二位、三位小數化聚亦同。

• 比例尺

比例尺的用法就是以地圖上的多少公分表示實際地面的多少公里，再把這種方式的比的記號表示出來。前者常以線段圖實際表出。