

第四章 容量的理論結構

有關容量的教材第一次出現係在第四冊（二下）第三單元「可以裝多少水」中，液量和容量的認識及容量的直接比較；第二次係在第六冊（三下）第三單元「看刻度」中，繼續透過倒水活動，讓學童多經驗液量的保留現象，並能使用以分公升為刻度單位的量杯來報讀液量或檢驗容器的容量；第三次係第七冊（四上）第十一單位「容量和重量」中，透過裝水、倒水活動，讓學童認識「容量」的語詞，間接比較二個容器中的液量和容器的容量，並認識「1分公升」；第四次係在第八冊（四下）第十三單元「時間的計算與毫公升」中，使用以「毫公升」為刻度單位的量筒來報讀容器中的液量或容量，並認識「分公升」、「公升」個別單位的意義及進行實測活動。

爾後在高年級階段學童是在五年級上學期認識「毫公升」個別單位的意義及公升、分公升間的整數化聚；在五年級下學期是認識1000個1毫公升和1公升一樣多，並進行毫公升和公升間的整數化聚。在六年級上學期引入容積的概念，用體積單位來描述容積，並察覺容積和容量的關係；而六年級下學期則是利用排容原理測定不規則實體的體積，並認識「公乘」個別單位的意義及公升和公乘間的關係。

本章將呈現與此教材設計背後有關的認知結構和數學結構；有關容量教材設計的細部分析則在下一章敘述。

第一節 認知結構

容量是一種三維的量，意指要從寬度、厚度、高度三者同時掌握。容量涉及容器可感液量的多少，所以討論容量之前需認識液量；若以容器中空間（體積大小）來描述容積，則產生容積和容量的關連。本節將敘述教材設計中有關的認知結構。

1. 皮亞傑的體積保留概念

通常學童在六歲之後，其保留概念（conservation；守恒概念）才發展。在此之前，他們還無法了解物質經過物理轉變後，總數量、重量以及體積仍然不變。重量的保留概念大約在9~12歲時發展，但是體積保留概念差不多要到11~12歲左右，甚至之後才發展。

具有體積保留概念的學童知道物質經過變形或分割重組，其所占有的空間大小和原來一樣。有關液積部分，則指學童知道同一液量不受容器外型影響，在短而寬的杯中和高而窄的杯中是一樣的，也就是說學童在同一時間能處理的向度（維度），例如：高度、寬度、底面積大小等，可以超過一個以上，譬如能同時看到容器的高度和底面積。學童具有體積保留概念時，在內心做倒水的運思，已不需仰賴知覺中杯子的局部外觀。

2. 液量的保留現象

學童能了解這種現象：認定液量不因容器大小而形狀而改變，或經分割後其總量和不改變；則稱其具有液量保留概念。

透過倒水活動，經驗一樣多水量在不同容器中的現象。當學童時，說“一樣多”時，老師再追問理由；當學童說“不一樣多”時，老師要讓他們多操作倒水活動，增進經驗，加強信念。倒水活動可以促進學童液量保留概念，但保留訓練並非永遠可以成功。液量的保留概念在教學上的意義，有下列幾點：

- (1)獲得可逆性信念；所謂“可逆性”即倒回原杯檢驗，水量一樣多。
- (2)等量水，不隨杯子不同而改變。
- (3)經驗互補性；所謂“互補性”等量的水倒在杯子底較窄，水位會較高。

3. 容量的掌握及初步描述

教師應藉由容器中液量之增減，讓學童觀察液量的顯著變化，並鼓勵學童用手勢配合語意來表示水量，並藉容器中液量之增減，觀察空間被物質填滿的情形，並同時觀察容器中可以再裝水的空間，以掌握容器的容量；著重逐漸填滿或倒光的過程，進而做容量的初步描述（類似對長度的描述活動或

比較活動中，異物累積或同物累積的描述)，而不著重單位化、數量化。若學童尚未具有體積保留概念，既不能進行液量的直接比較，也不能進行容量的間接比較。

4. 學童不具體積保留概念時，不進行「液量的直接比較」，只進行「容量的直接比較」

本課程的安排，配合學童的認知發展，到三年級才有「體積的認識及直接比較」的教學，所以凡涉及學童需具體保留概念才能進行的活動，在二年級時尚不出現。液量依附容器而存在，所以進行兩液量的直接比較，即使利用同一種容器，要學童能指出液量高度較高者液量較多；或利用不同容器但其中液量高度一樣時，要學童能指出液量，它的寬度較寬者液量較多等等，在學童尚不具體積（volume）保留概念之前，上述活動是沒有意義的。通常，體積是指物質占有空間的大小，包括液積和容積；而液量是流體物質的體積，可稱為液積，容量也可稱為容積；只是液量、容量需依附容器存在，液積、容積則不必依附容器存在。

所以，在進行兩容量的直接比較時，也要注意並非就兩個容器可盛滿物質的空間去做兩容器容積的比較，而是僅就容器的容量（capacity）是否還能再裝入物質，來判斷兩容量的大小；意即兩個容器A和B，其中容器A可以完全（包含高度）放入容器B中，再看看容器B中除了容器A的空間外，是否還有空間可以再裝入物質，來了解A和B容器的容量差異，直接比較兩容量的大小。在此並非任何兩容量都適合做直接比較。

5. 使用以分公升或毫公升為刻度單位的工具

在民國八十三年版數學課程標準中「註200」，明確的指出像容量這一類在實體上存在的數量，其教材架構有四個層次：容量的掌握→容量的間接比較→容量某普遍單位（例如：分公升）的認識與實例→容量二階單位（例如：公升、分公升）的關係與化聚。而容量（含液量）的認識、容量的直接比較，及使用分公升或毫公升為刻度單位的工具報讀液量和容量，都是在第一層次「容量的掌握」中建構概念，所以教學中出現毫公升量杯的工具，測量

容器中液量或容量有 \times 分公升，只有讓學童藉由分公升刻度的記號來描述液量和容量。

6. 液量的直接比較和間接比較

二杯水靠近放在一起比較液量時，如果是因為大小一樣的杯子而從水面高度判斷，不算是真的在比較液量；如果是大小不一樣的杯子，不能精確掌握水所占空間大小做直觀判定，這也不算是直接比較。液量的直接比較是要在學童能把靜止的液量所占空間做直觀判定時才算，所以在低年級的教學中很難進行。

學童在三年級下學期透過倒水活動，多次經驗液量的保留現象後，此階段則盼兒童能運用液量的保留概念：認定液量不因容器大小形狀而改變，或經分割後其總量和不改變，進行液量的間接比較。

液量的間接比較有二個層面：一為「間接比較」，一為「個別單位比較」。間接比較係指透過媒介物或對實物的同類量予以變形後，再加以直接比較並描述比較的結果；個別單位比較係指能以一個量為基準，去累積一個被測量的量，並用量累積的次數報告測量的結果。

7. 容量的間接比較

容量的直接比較在二年級下學期進行過。在三年級正式出現容量的語詞後，教師可就二個空容器直接詢問那一個容器的容量較大，學童可藉二個容器先裝滿水再倒出進行間接比較、個別單位比較，或利用個別單位比較的想法倒入水分別讓二個容器裝滿後進行比較，或一個容器先裝滿水，再倒入另一個容器比較。

8.1 分公升杯也是一種個別單位

利用分公升量筒的1公分升刻度定義1分公升杯的容量，讓學童初步認識1分公升，再藉每個1分公升杯裝1分公升的水進行描述容器中的液量、容器的容量的倒水活動，再限制只有1個1分公升杯進行液量或容量的描述。有關描述容量的倒水活動，可以是由容器倒出水或倒入水的方式；因為強調1分公升量的累積，所以以倒水活動為主。

9. 容量的測量活動

測量的學習可分為二階段：第一階段是「分離量化」的測量，屬於分離量。使用計量容器——小杯、1分公升或1公升杯為個別單位，描述被測容器的容量是幾個小杯或幾個「1分公升（1公升）」量杯。第二階段是「線性化」的測量，屬於連續量，使用的計量容器是量筒，量筒上有分公升（公升）刻度，比較方便來測量描述被測的容量是幾分公升（公升）。這個階段是本單元主要的實測方法。

「幾個1分公升（公升、毫公升）」就是幾分公升（公升、毫公升）」這個數學概念是容量的加法合成性與減法分解性的主要基礎知識。例如：2分公升+5分公升學童能知道2「1分公升」加5個「1分公升」是7個「1分公升」，7個「1分公升」的水合起來和7分公升一樣多，也就是7個「1分公升」就是7分公升，所以2分公升+5分公升=7分公升。

用「1分公升量杯」與「分公升刻度量筒」也能證實，方法是在一個分公升刻度量筒裝2分公升的水，另一個分公升刻度量筒5分公升的水，然後將兩個分公升刻度量筒的水倒入另一個沒有刻度的容器內，再將水倒入幾個1分公升杯，可以裝滿7個「1分公升」杯、最後將7個「1分公升」的水倒進分公升刻度量筒，報讀刻度是7分公升。

10. 容量的單位化聚活動

化聚是二個不同階的量，例如：公升和毫公升，進行由低階單位聚成高階單位，或高階單位化成低階單位的活動。若遇到低階單位的量不足1個高階單位時，則會產生分數和小數的表徵，例如： $750\text{毫升} = 750/1000\text{公升} = 75/100\text{公升} = 3/4\text{公升} = 0.75\text{公升}$ 。

對於十進位制的量，通常會涉及二、三位小數，開始僅進行整數化聚，也就是整千毫公升聚成公升，或者是餘量仍用毫公升表示（×公升○毫公升的複名數型態）；也可以是整公升化成整千毫公升的活動。俟兒童的小數概念完備後，才進行小數化聚。至於分數化聚，則因量的表示不常用，所以不是教學的重點。

11. 建立1公秉的量感

1 立方公尺算是學生熟悉的體積；因此可讓學童利用容積是 1 立方公尺的容器，認識它的水量就是 1 公秉。另一方式就是以浴缸的水的 4 倍或 5 倍來累積出 1 公秉的水量，此時亦可用保特瓶及水桶引導兒童決定浴缸的容量。

12. 容量概念和容積（體積）概念

兒童對於固體和液體的認識是很不相同的。課程的設計讓兒童認知：使用體積單位和容量單位，皆可以描述空間區域的事實，徵求兒童同意一水也是有體積的。當兒童認識水也有體積之後，便可以討論「沉入水中的物體的體積，等於此物體所排開的水的水量，也就是水所占空間的體積」。

第二節 數學結構

容量常見的單位是公升、毫公升（舊稱公撮），而教學是分公升（舊稱公合）入手，最後也介紹公秉（可稱千公升）；常用的工具有“1分公升杯”、“分公升”量筒、“毫公升”量筒……等等。本節將逐一介紹有關容量的數學結構。

1. 什麼是「容量」？「容量」和「液量」的界定

一般人所稱的容量，有時指液量（例如：杯中的水量、瓶裡的牛奶量），有時指容量（例如：杯子裝滿的水量、滿瓶的牛奶量）。嚴謹的說法，「液量」是指流體物質在容器中所占據的空間；「容量」是指流體物質占滿容器的最大盛載量。藉容器所盛裝液量的最大限度，以平容器口為準；即用容器所能盛載的最大液量來表示該容器的容量。在此因為利用液量的描述來定義容量，所以要對此兩量有所區分。

有些細微的固體物質，例如：米、砂、糖、鹽等，也可以利用容器盛裝，但其顆料間有空隙，敲一敲容器使空隙減少時，還可以多裝一些，所以通常是用重量來描述固體物質。

在低年級時，學童可以描述容器中的水量，並對水量的增減有所討論，進而瞭解容器可以裝水的空間或容器所盛最大水量。對於液量和容量的名詞

並未在教學中出現，只是藉容器中的水量來了解液量，藉容器所盛最大水量來了解容量。

在三年級時，學童進行分公升為刻度單位的量杯來報讀容器中的液量和容器的容量，對於液量和容量的名詞仍未在教學中出現。

在四年級上學期則配合生活中出現的說法，介紹「容量」的語詞，來代替容器裝滿水可以裝多少的說法；而不介紹液量的語詞，仍以容器中有多少水的說法來進行討論。

學童是藉液量的概念來瞭解容量的概念；當兒童形成容量的概念時，才進行容量的實測活動。成人是將液量和容量混稱為「容量」，在兒童階段仍宜配合有關的概念發展進行教學。

2. 個別單位和普遍單位

四年級上學期已學過用個別單位來描述一個容器的容量。但是個別單位是各人或各地自己決定的單位，沒有一定標準，在溝通或貿易上不方便，有必要大家制訂共同單位。國際間通用的普遍（標準）單位，在容量方面國小數學課程標準上有公升(l)，分公升(dl)，毫公升(ml)，公秉(kl，千公升)其認定的標準分別敘述如下：

- (1)「1公升」的量相當於現行教材配發的10公分×10公分×10公分壓克力盒子的容量，它的體積是1000立方公分。
- (2)「1分公升」的量相當於以1分公升杯裝水到1分公升刻度的液量，它的體積是100立方公分。
- (3)「1毫公升」的量相當於用針筒裝水，裝到刻度1的地方，這麼少的水是1毫公升，它的體積是1立方公分。
- (4)「1公秉」的量相當於箱子內部是1公尺×1公尺×1公尺的容積，它的體積是1立方公尺。

四年級上學期介紹的1分公升杯來認識一個特別的個別單位—1分公升，做為進入普遍單位「分公升」的瞭解；普遍單位的瞭解，要知道幾分公升是幾個1分公升、幾公升是幾個1公升的等量關係。

學生在四年級下學期時，進一步瞭解「1毫公升」個別單位的意義，是指能夠知道幾毫公升是幾個1毫公升、幾個1毫公升是幾毫公升的等量關係；進而學生能以毫公升為單位進行實測活動。此時，即表示學生進入普遍單位「毫公升」的瞭解。而普通單位「公秉」是在六年級下學期才引入的。

3. 分公升量筒和1分公升杯

一個量筒或容器上標有一些刻度，這些刻度記號如果是1分公升、2分公升、3分公升……我們稱它是「分公升量筒」。

學童在1-3階段只是報讀量杯中水量所在位置的刻度，以比對刻度觀點「報讀×分升」，並非進入了解「1分升」普遍單位意義的階段。

一個容器的容量恰好是1分公升，我們稱它是1分公升杯。為了教具準備的便利及學生盛水的準確，所以教學上的「1分公升杯」是利用比1分公升稍大的容器，在1分公升液量處記上1分公升刻度。

4. 毫公升量筒

一個量筒或容器上標有一些差異，這些刻度記號如果是1毫公升、2毫公升、3毫公升……我們稱它是「毫公升量筒」。

學童在1-3階段只是報讀量杯中水量所在位置的刻度，以比對刻度觀點「報讀×毫公升」，並非進入了解「1毫公升」普遍單位意義的階段。

5. 容量的單位：公升、分公升、毫公升、公秉

我國採用標準公制單位，一般常用單位有公秉、公升、分公升（公合）、毫公升（公撮）；社會上常出現有以公升、毫（公）升為單位的使用，而分公升是為配合學童在教學中較易操作，所以先出現「分公升」的討論。

分公升是十分之一公升的意思，則 $1\text{分公升} = 1/10\text{公升} = 100\text{毫升}$ ， $1\text{公升} = 10\text{分公升}$ 。

毫公升是千分之一公升的意思，即 $1\text{毫公升} = 1/1000\text{公升}$ ， $1\text{公升} = 1000\text{毫公升}$ 。

公秉是千公升的意思，即 $1\text{公秉} = 1000\text{公升}$ ， 1公升 是 $1/1000\text{公秉}$ 。

公秉、公合、公撮是中國人特有的說法，而千公升、分公升、毫公升是

配合國際使用萬國公制的慣例，也是中央標準局推動的說法。至於1毫公升=1.c.c.，是當1毫公升的水《容量的表示》在4°C時占有1立方（cube）公分（centimeter）的空間《體積的表示》；當學童尚無相關的概念，讓兒童記憶也沒有意義。

分公升量筒和1分公升杯曾在四年級上期學介紹過；四年級下學期會出現以「毫公升量筒」讓學生報讀刻度，並介紹「1分公升」和「1公升」的意義。

6. 認識毫公升單位的意義

容量（含液量）的認識、容量的直接比較，及使用以毫公升為刻度單位的工具報讀液量和容量，都是在「容量的掌握」階段中建構概念，所以在四下的教學中出現毫公升量筒的工具，測量容器中液量或容器的容量有 x 毫公升，只是讓學童藉由毫公升刻度的記號來描述液量和容量。

因為學生在四下已認識毫公升量筒上的1毫公升、2毫公升、……、20毫公升的刻度，所以五年級時是透過實作讓學生知道 n 個1毫公升的水到 n 毫公升的刻度所以是 n 毫公升；只是1毫公升的水量很少，可由教師示範或容忍學生的誤差來認識5毫公升以下的關係，再由較大水量，例如：6毫公升和8毫公升的水合起來的實測活動，來討論6毫公升和幾個1毫公升一樣多？

8毫公升和幾個1毫公升一樣多？6個1毫公升和8個1毫公升合起來是幾個1毫公升？14個1毫公升和14毫公升誰比誰多？等來認識「1毫公升」個別單位的意義，這個特別的個別單位，就是生活中常用的普遍單位。

7. 分公升和公升

和長度單位的關係探討一樣，我們用1分公升、1分公升地聚起來的方式，聚成10分公升的水以和1公升容量作比較，來產生10分公升的水和1公升的水一樣多的事實，再記成10分公升=1公升。在成人的應用上，「10分公升=1公升」的意義強調的是10分公升聚成1公升，而「1公升=10分公升」則強調1公升化成10分公升；也因為向兒童說明“不同單位間的等式，是對稱的”很困難，所以我們一向採用的是先說的先記向學生溝通，兒童在認知上

沒有接受的困難；但需注意要先進行聚的活動，再進行化的活動。

8. 公秉

公秉是容量（液量）的單位，1 公秉 = 1000 公升。按國際標準制，這個單位名稱應為「千公升」，不過，中央標準局准予列為併用單位。一般公開報導或文件上還是以使用公秉者居多。

當學童已經認識容量、容積、體積間的關係時，即可討論 1 公升水的體積是 1000 立方公分，1 公秉水的體積是 1 立方公尺。

9. 體積和容積

體積是立體物所占空間區域的大小，這個空間區域也有一個封閉的邊界，而立體物的表面即為此空間區域的邊界。一個立體物表徵一個空間區域，而此立體物變形時，它的體積是保持不變的，這是從物體保留概念衍生出來的體積保留概念的一部份。

討論體積概念時，對其空間區域和表徵它的實體不易區分；而體積概念亦可指其封閉空間，惟封閉空間的概念較難以具體表徵。因此，討論體積的封閉空間時，必需藉用容器來表徵封閉空間，以進行體積概念的討論。未盛裝任何東西的容器，其內部空空的空間即表徵空間區域，而容器的內壁即為邊界。在上述情形下，容積和體積於三維空間也產生了特有的差別，將容積定義為一容器堆放立體物時，在無空隙的堆積之下，所堆積出來的最大體積。

教材設計是從容器內部空間的形狀和大小開始討論，引導用多少個 1 立方公分積木可以填滿，才由教師宣告盒子內部空間的體積就是這個盒子的容積。

10. 容積和容量

容積是指容器內部空間的大小，其概念是體積概念；而容量是指容器所盛最大液量，其概念是液量概念。教材設計是聯絡發生的舊經驗：盒子的容積是多少？同一盒子的容量是多少？再由教師配合活動操作的結果宣告 1 公升的水所占的空間是 1000 立方公分；讓兒童瞭解水所占空間的體積是多少？

進一步才討論容器內部空間不是長方體時，可由容量推算容積。

11. 利用排容原理測量不規則實體的體積

一般不規則的實體（如石頭體積、錐體……等）較不易由直接測量邊長方式獲得，因此可藉由間接測量而獲得。在六年級上學期，透過排容原理，讓兒童了解容積和體積的關係；即「一公升的水是1000立方公分」，亦即「一毫升的水的體積等於一立方公分」的共識。進而知道一個長方體積木或多個1立方公分積木放入量筒時，水上升的毫升數會和長方體或多個1立方公分積木體積的立方公分數一樣。而測量不規則實體的體積僅能引用前面「物體的體積等於排開水的體積」的事實，並藉容積和容量的關係，換算而間接獲得；換言之，如把一塊石頭放入水中，如測出上升（或排出）的水量是500毫升，則體積即為500立方公分。