

12/12

分數的除法運算

陳竹村

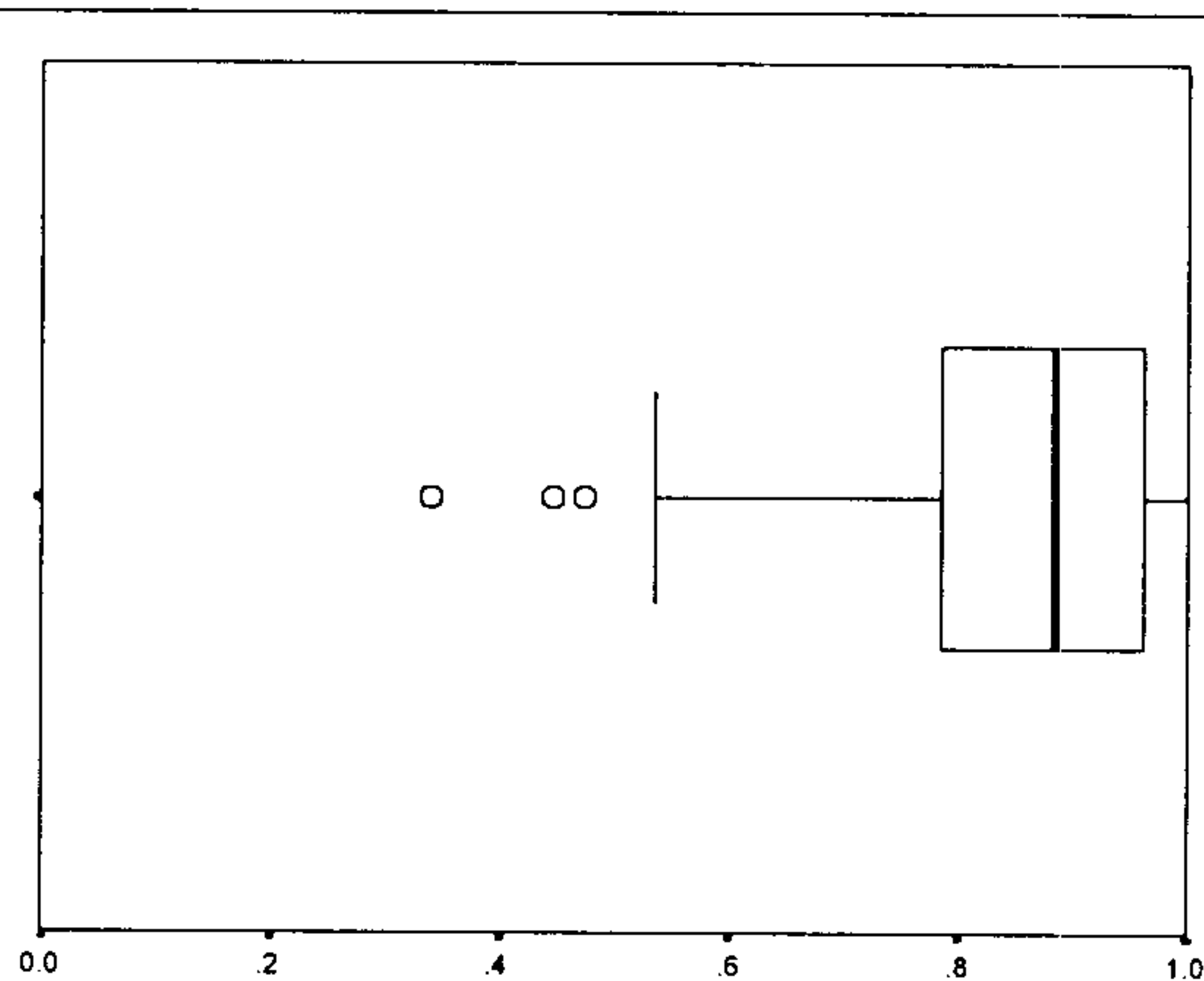
壹、總結性評量中分數除法各試題的內容及通過率

一、試題「4-3」的內容及通過率如下：

◎填填看：

4-3

(3)把一個餅平分給 2 個人，
1 個人可得多少個餅？
() 個餅。



全體通過率：85.7%

班級通過率最低與最高：45~100%

學校通過率最低與最高：55~100%

二、試題「10-9」的內容及通過率如下：

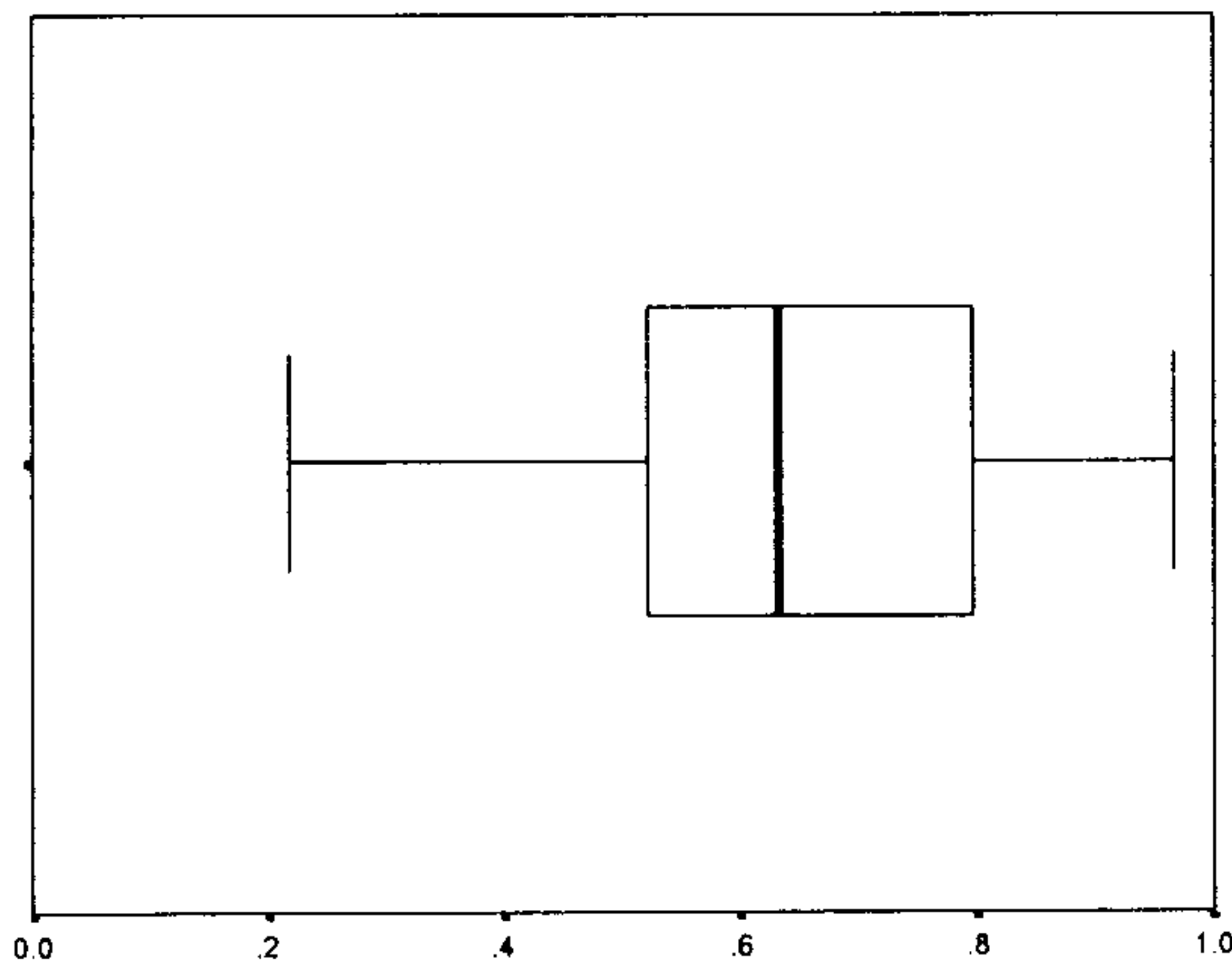
三、先用算式填充題記錄問題，再用算式把你的做法記下來。(每題 4 分，共 28 分)

10-9

(9) 24 顆糖果裝一包，把 4 包糖果全部平分成 3 盒，一盒可以裝多少包糖果？

最後答案儘量用帶分數回答。

算式填充題：_____



全體通過率：65.59%

班級通過率最低與最高：25~97%

學校通過率最低與最高：28~92%

三、試題「10-5」的內容及通過率如下：

三、先用算式填充題記錄問題，再用算式把你的做法記下來。(每題 4 分，共 28 分)

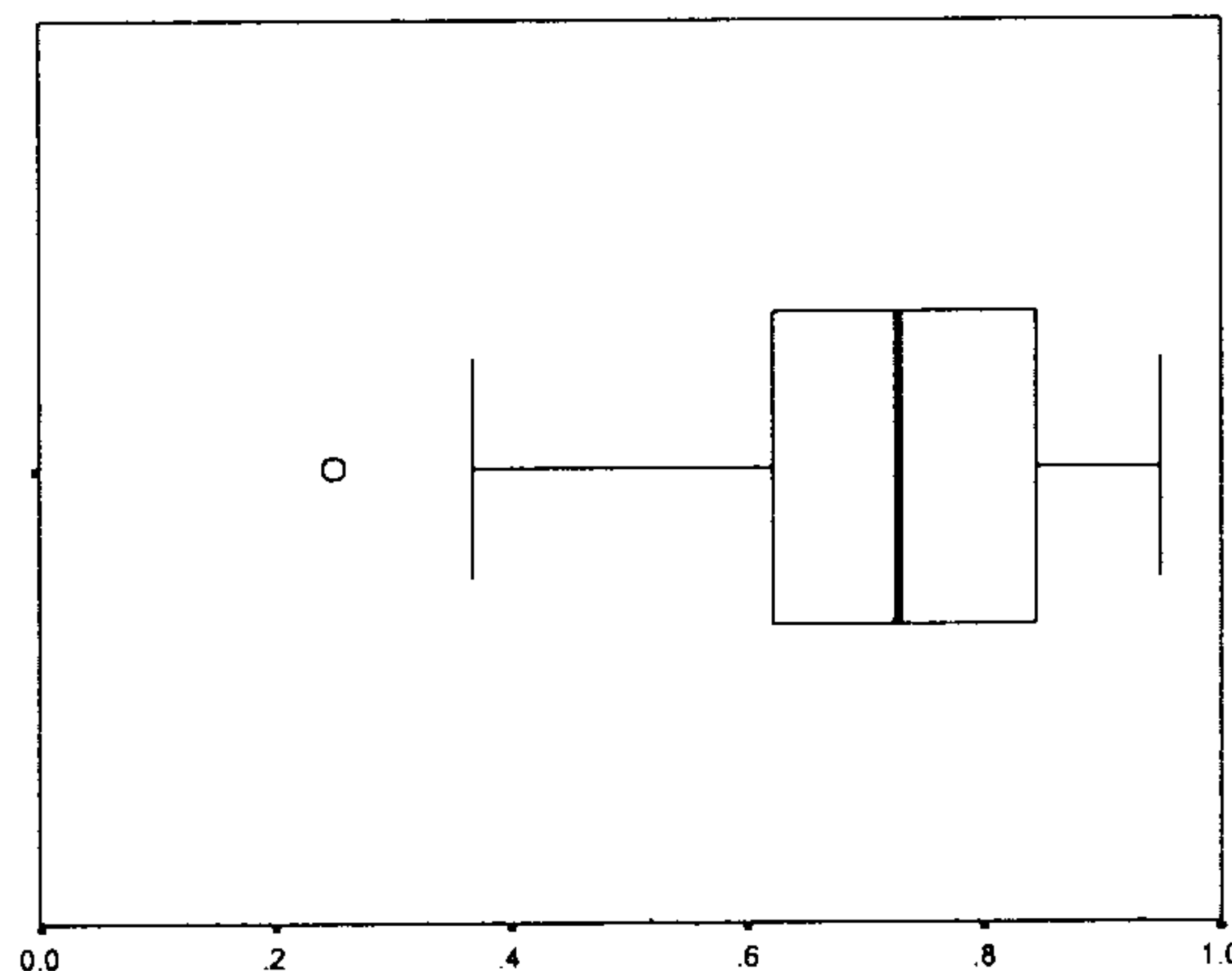
10-5

(5) 張老闆有 $9\frac{3}{8}$ 斤的花枝丸，他

把 $\frac{7}{8}$ 公斤的花枝丸分裝成一

袋，儘量分裝完，可裝成多少袋？剩下多少公斤？

算式填充題：_____



全體通過率：71.60%

班級通過率最低與最高：25~95%

學校通過率最低與最高：42~92%

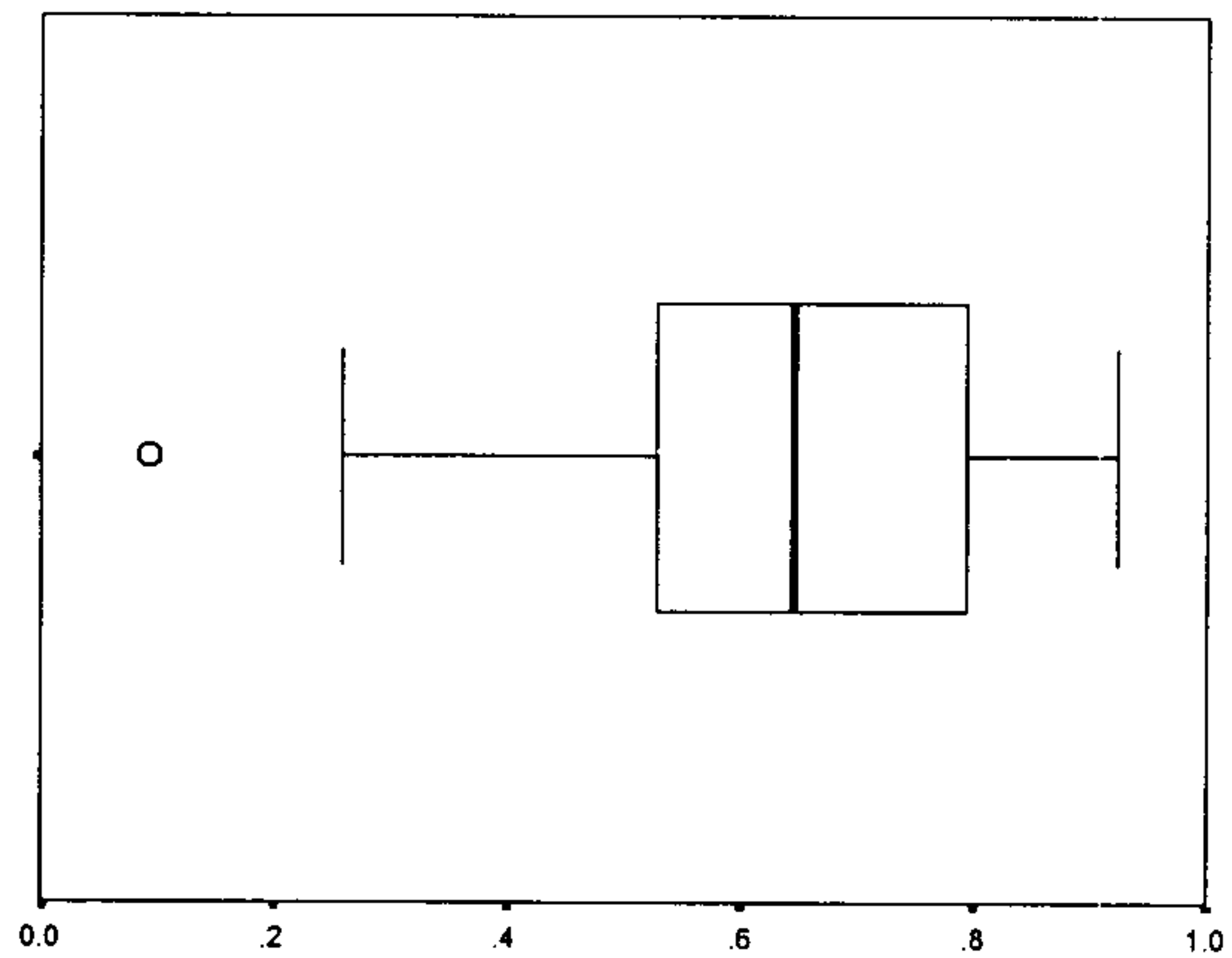
四、試題「11-4」的內容及通過率如下：

一、先用算式填充題記錄問題，再用算式把做法記下來。(每題4分，共24分)

11-4

(4) 100 顆軟糖裝一桶，姑姑拿出 $1\frac{3}{10}$ 桶，再把 $\frac{19}{50}$ 桶裝成一盤，儘量分裝完，可以裝成幾盤？剩下多少桶？

有除號的算式填充題：



全體通過率：64.86%

班級通過率最低與最高：9~92%

學校通過率最低與最高：32~89%

五、試題「12-1」的內容及通過率如下：

<p>一、先用算式把做法記下來，再用等號把一樣大的地方連起來。(每題 4 分，共 8 分)</p> <p>12-1</p> <p>(1) 一壺奶茶有 $10\frac{1}{2}$ 分升，把 $6\frac{3}{5}$ 分升裝成一杯，全部裝完，相當於裝成多少杯？</p>	
---	--

全體通過率：80.36%

班級通過率最低與最高：42~97%

學校通過率最低與最高：49~96%

貳、總結性評量中分數除法各試題在 82 年版課程標準教材綱要項目中的意義：

試題別	題型類別說明	與課程標準教材綱要的關係
4-3	是一個連續量的分數概念問題，也可以說是一個整數除以整數，結果為分數的分數除法問題。	屬於分數概念中五年級的項目「把分數視為整數除法的結果」。
10-9	是一個離散量的分數概念問題，也可以說是一個整數除以整數，結果為分數的分數除法問題。	屬於分數概念中五年級的項目「把分數視為整數除法的結果」。
10-5	已知總量及單位量求單位數的除法問題（商為整數而且有餘數）、也是一個連續量情境之帶分數除以真分數的同分母包含除問題。	課程標準教材綱要沒有表列。
11-4	已知總量及單位量求單位數的除法問題（商為整數而且有餘數）、也是一個離散量中單位分數內容物為多個個物情境之帶分數除以真分數的異分母包含除問題。	課程標準教材綱要沒有表列。
12-1	已知總量及單位量求單位數的除法問題（商為分數而且沒有餘數）、也是一個連續量之帶分數除以真分數的異分母包含除問題（或稱為當量除問題）。	課程標準教材綱要沒有表列。

由於 82 年版課程標準在教材綱要表上，對於分數的除法計算部份只表列了分數除以整數部份。而對於除數是分數的計算問題，並沒有表列在教材綱要中。所以試題「4-3」及「10-9」是符合 82 年版課程標準教材綱要，而其他三個分數除法問題則否。

總結性評量中試題「10-5」、「11-4」及「12-1」是為了實驗階段的教學目的之教材評量。因為 64 年版課程標準的教材綱要上包含了除數是分數的除法計算，為符合實驗學生的利益（用年齡大部份的其他同學是使用依據 64 年版課程標準所編的教科書），在實驗階段必須有分數除以分數的除法教材。

參、總結性評量中分數除法各試題在實驗課程教材序列中的意義：

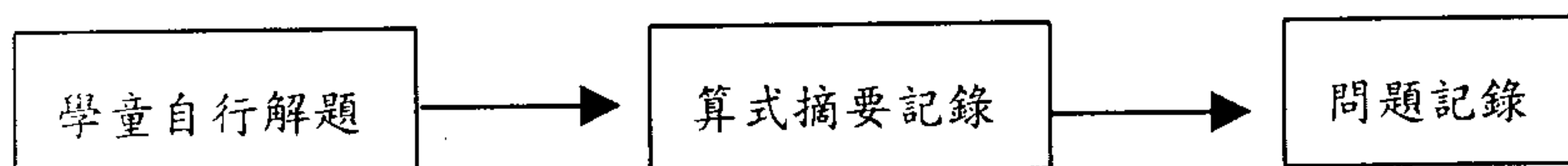
一、實驗課程分數除法教材活動內容說明：

(一) 實驗課程認為，依據分數數詞（字）所描述的量的性質，本教材將分數問題情境分為三類：(1) 連續量，例如「 $\frac{1}{3}$ 條繩子」；(2) 離散量，例如在一打鉛筆有 12 枝的情境下，討論 $\frac{1}{3}$ 打鉛筆；(3) 全部為基準單量，例如在全部有 12 枝鉛筆的情境下，或全部有 6 公斤汽油的情境下，由解題者視「12 枝」或「6 公斤」為一高階單位「1」，而討論全部的 $\frac{1}{3}$ （國立編譯館依據 82 年版課程標準所編之教學指引，或實驗本第九冊教師手冊）。由此分類及活動序列的內容來看，實驗課程主張這三類情境下的分數問題應看成不同類型的問題，並分別進行解題活動，也就是說這三類情境下的分數除法問題應看成不同類型的問題。

(二) 實驗課程也認為，由於此階段的學童，尚須透過等分割活動，才能掌握分數的意義，如果要被等分割的量不確定時，則無法進行等分割活動，因此，本教材在布置連續量分數問題時，或提供實際的物件，或使用學童已熟悉的物件描述，讓學童在心像上能產生一個確定的量（其數值可以未定）；在布置離散量與全部為基準單位量的問題時，亦必清楚描述「1」單位中內容物的量。其中「1」單位性質為未定量或變數的分數問題，是國中教材的範圍（國立編譯館依據 82 年版課程標準所編之第七冊教學指引，或實驗課程第九冊教師手冊）。由上述實驗課程的主張，可知實驗課程的所有分數問題，包括分數概念問題、分數合成分解問題、分數乘除法問題，(1) 都須保留在量的情境之下進行解題活動，而且(2) 在基準單位量是離散量的情境時，必須告知基準單位量

「1」的內容物個數。

- (三) 實驗課程的另一個主張認為，當「1」單位是離散量時，可依單位分數內容物個數，將問題分為下列三類：(1) 1個；(2) 多個；(3) 非整數個，當學童尚未發展測量運思以前，單位分數內容是單一或多個個物有很大的差別，較易接受內容為單一個物的問題，而面對內容物為多個個物的問題有較多的困難，故而本教材將它們當做不同的問題。對於這些離散量的不同問題其引入的次序及時間為：(1) 自第四冊起開始單位分數內容為單一個物的分數活動；(2) 第七冊起開始單位分數內容為多個個物的活動；(3) 自第十冊起，預期測量運思已漸趨成熟，單位分數內容為單一或多個個物的差異逐漸消失，因此在活動中，將單位分數內容為單一或多個個物的分數問題合併處理（實驗課程第九冊教師手冊，或國立編譯館依據82年版課程標準所編之第七冊教學指引）。
- (四) 實驗課程在分數除法問題的格式記錄上，對於某一情境下的某一類（數的範圍）分數除法問題，例如在連續量情境下，帶分數除以真分數，商為整數而且有餘數的同分母包含除問題，實驗課程採用如下的流程來進行活動：



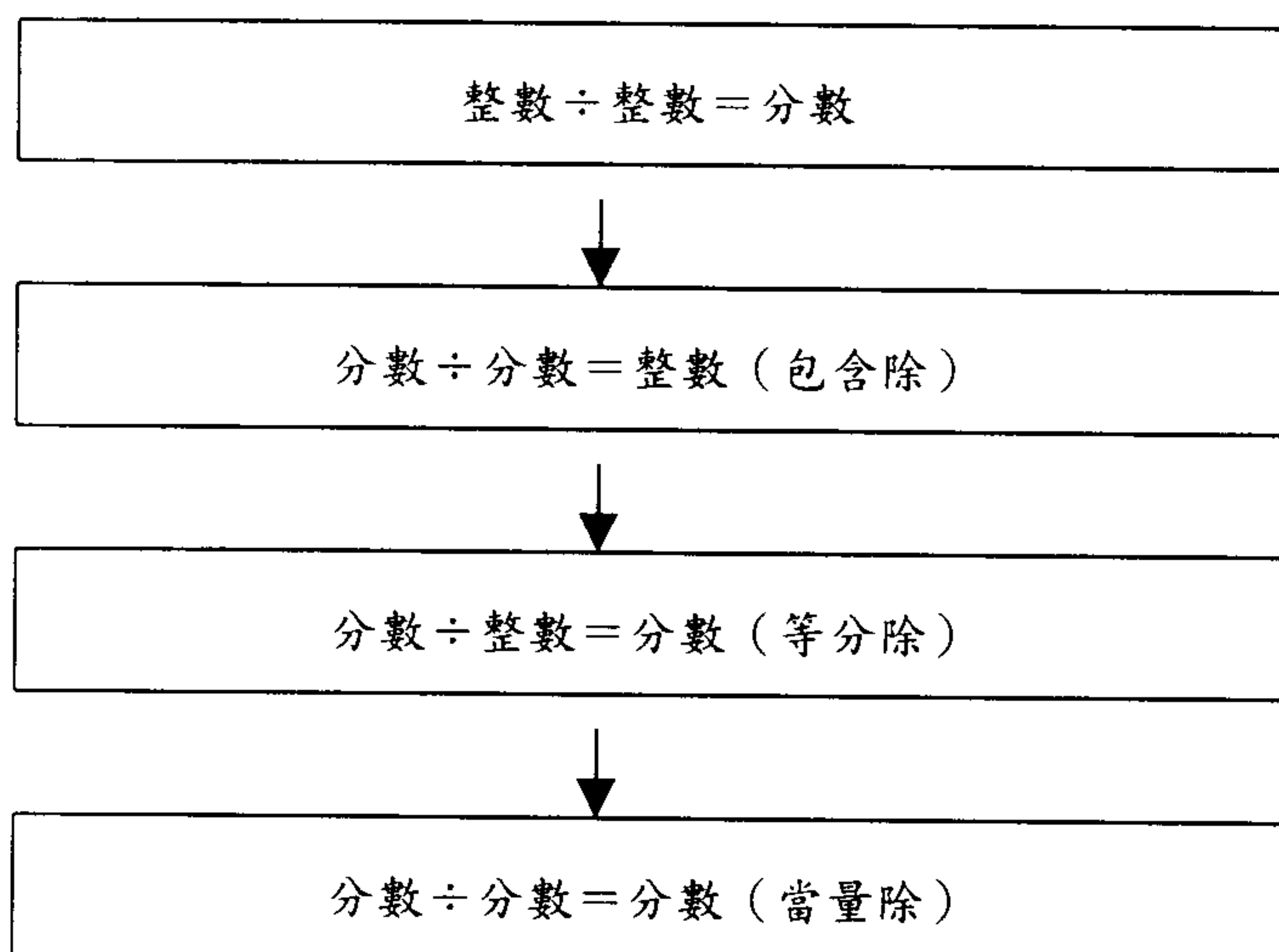
首先使學童對於某一類分數除法問題有成功解題的經驗，預期學童（可能性考量並非必然性）形成「解題活動類型」，即學童能視這類分數問題有相同的解題活動後，再進行「算式摘要記錄活動」，也就是要求學童用一個算式把解題活動與結果記錄下來。最後再進行用「算式填充題」把問題記錄下來後再解題的活動。但並非所有類型的分數除法問題。

由於學童已能使用「整數加減法算式」及「整數乘法算式」來記錄各種相關問題的解題活動，故在分數除法問題的解題活動過程中，可以隨時要求學童把先算什麼、後算什麼一步一步紀錄下來，而形成解題過程紀錄。

- (五) 實驗課程區分包含除、等分除及當量除三類分數除法問題。等分除與包含除問題由於解題策略的不同對於學童而言是兩種不同的問題類型，是故實驗課程主張分別進行解題活動。而當等分除和包含除問題中的單位數（除數或商數）由正整數擴充為分數或小數時，實驗課程把此兩種除法問題合稱為當量除問題，以有別於

前二種除法問題而再進行解題活動。

- (六) 實驗課程對於分數除法問題：除了依據前述的分類外，被除數、除數及商數的數量範圍亦是影響學童解題的因素。實驗依序進行下列除法活動：



- (七) 在分數除以分數的當量除問題方面，實驗課程引入(1)「被除數與除數同時轉換成以公共單位計數」的方法；(2)「被除數與除數同時轉換成以除數的單位分數計數」的策略；(3)「被除數與除數同時轉換成以除數為單位計數」的策略，三種解題策略來幫助學童分數除以分數的概念發展。
- (八) 在等分除方面，實驗課程主張透過「一輪一次(人、盒、袋、……)分一個(顆、公斤、分升、……)的方式」，把等分除轉成包含除解題。

三、各試題在實驗課程中的意義：

- (一) 試題「4-3」是連續量問題，可以說是實驗本第四冊第七單元活動4的分數概念教學活動，也可說是整數除以整數結果為單位分數的問題，屬於實驗本第九冊第五單元活動8的教學活動內容。學童必需有分數概念及了解等分除語意才有解題的能力。此試題為分數除法問題的最基本類型，總結性評量的結果全體通過率為85.7%尚可，有班級通過率只有45%，應是學童的分數概念有問題，這樣的班級中恐有大部份的人後序的分數除法問題將更困難。此觀點印證了另一篇「分數的乘法運算」中由試題「10-7」所得的分析：部分的班級分數概念有問題。
- (二) 試題「10-9」是「單位分數內容物為多個個物」的離散量情境的

分數問題，也是整數除以整數，結果為帶分數的分數除法問題，屬於實驗課程第十冊第一單元活動 4 的教學活動內容，學童可以透過訴諸內容物（4 包換成 96 顆）來求出顆數，再使用分數概念把顆數轉為包數，或者直接 4 包做等分割活動後再平分以求取答案。其總結性評量的全體通過率只有 65.59% 並不理想。評量結果符合實驗課程的主張：在離散量的情境下，單位分數內容物為單一或多個個物的分數問題，對於學童有認知發展上的時間差。

- (三) 試題「10-5」是已度量化的連續量情境之帶分數除以真分數的同分母包含除問題，屬於實驗課程第十冊第十單元活動 6 的教學活動內容。學童用同分母累減策略即可解題成功，其總結性評量的全體通過率是 71.60% 並不理想，與分數乘法中的觀點相同（參見分數的乘法運算，1999），學童對於帶分數概念的不足，可能是影響學童解題成功的原因。另外學童由於某些因素被直接教了分數除以分數的算則，而缺乏基本的分數除法活動概念，反而無法使用算則來解決此類有餘數的分數包含除問題。
- (四) 試題「11-4」是離散量情境中單位分數內容物為多個個物之帶分數除以真分數的異分母包含除問題，屬於實驗課程第十一冊第十單元活動 5 的教學活動內容。學童可以使用等值分數的概念（通分）和同分母累減策略即可解題成功，或是訴諸內容物個數（把 $1\frac{3}{10}$ 桶換成 130 顆、而把 $\frac{19}{50}$ 桶換成 38 顆），用整數包含除觀點解題後，再把結果使用分數概念轉成分數桶，也可解題成功。其總結性評量的全體通過率是 64.86% 並不理想，從分數乘法中的觀點來看（參見分數的乘法運算，1999），學童對於帶分數概念的不足，可能是影響學童解題成功的原因。另外同試題「10-5」的分析，只套算則的學童大都不會解有餘數的分數除法問題（由試題「12-1」的全體通過率反而高或可推論）。
- (五) 試題「12-1」是已度量化的連續量情境之帶分數除以帶分數的包含除語意的當量除問題（沒有餘數）。其總結性評量的全體通過率是 80.36% 應屬不錯，但試題「10-5」及「11-4」的難度比「12-1」低，而且是能理解試題「12-1」如何解題的預備經驗，由總結性評量的通過率之反常來看，學童可能並不理解試題「12-1」的解題過程而只是套用算則而已。

肆、由總結性評量而來的建議：

- 一、由試題「4-3」的學童表現，可以看出整數除以整數，結果為分數的等分除問題，與分數概念用語之間的連結不夠，建議在活動中加強其連結。例如「1個餅平分給2人，一個人可以分得1個餅2等分後的一份，也就是二分之一個餅。」
- 二、由試題「10-9」的學童表現建議，對於離散量情境中，單位分數內容物為多個個物之分數除法問題往後延一年再進行教學。
- 三、由試題「10-5」（有餘數且餘數是分數）是依據64年版課程標準所編的國小數學教材中沒有的分數除法問題，如果把餘數進一步用除數（單位量）度量，才會變成商為分數，沒有餘數的分數除以分數，餘數為0的問題。首先逃避這種類型問題是沒有道理的，其次在沒有算則可用的情況下，此種問題類型（商為整數，餘數是分數）的解題經驗是解決其他分數除法問題的預備經驗。建議加強此類問題的解題經驗。
- 四、由試題「10-5」及「11-4」的學童表現，建議加強帶分數概念的學習活動。

參考資料

- 教育部。（1975）。國民小學數學科課程標準。
- 教育部。（1993）。國民小學數學科課程標準。
- 臺灣省國民學校教師研習會。（1996～1998）。國民小學數學科實驗課本教師手冊第七～十二冊。
- 國立編譯館。（1998）國民小學數學課本及教學指引第五～九冊。