

國小學童數學直覺法則之認知評量分析 與性別差異探討

林原宏

國立臺中教育大學數學教育學系教授

郭竹晏

桃園縣桃園市西門國小教師

摘 要

直覺理論指出學童在數學問題常使用「More A—More B」、「Same A—Same B」、「無限細分」、「有限細分」等四種直覺法則（intuitive rule），這些法則會影響學童的數學解題表現。然而，學童使用這四個直覺法則的相關性和分群的問題，以及不同性別在表現上的差異性，文獻上卻甚少探討。基於此，本研究以國小五年級學童為對象，探討這四種直覺法則之相關性，利用多元計分混合Rasch模式（polytomous mixed Rasch model）進行直覺法則使用之分群，並進行性別表現差異探討。多元計分混合Rasch模式結果指出，全體學童和不同性別學童都可分成三個潛在類別，每個類別呈現的直覺法則使用各具特徵。不同性別之直覺法則使用相關性有所不同，但在各類別的人數分佈上並無差異。本研究結果有助於直覺法則的進階瞭解，以及提供教師採取同質性分組及補救教學之參考。

關鍵詞：直覺法則、混合Rasch模式、認知診斷、潛在類別

Application of Cognitive Assessment on the Usage of Intuitive Rule for Pupils with Comparisons between Genders

Yuan-Horng Lin

Professor, Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

Chu-Yen Kuo

Teacher, Simes Elementary School, Taoyuan County

Abstract

Intuitive theory had generated four intuitive rules about mathematics problems. Hence, intuitive rules played an important role in the mathematics education and mathematical concept construction. Research into this issue improved understanding of mathematical concept construction. However, most of the research focused on performance of intuitive rules and little was known about the dependence and relationship of these intuitive rules with comparisons between genders. The purpose of this study was to investigate latent class of rule usage and relationship on intuitive rules for pupils. The sample included fifth graders and polytomous mixed Rasch model was used to classify pupils. According to the results of data analysis, relationship among four intuitive rules varied. There were three latent classes and each latent class displayed its characteristics on intuitive rule usage. Relationship of intuitive rule usage between genders varied, but there was no significant difference in distribution of latent class for genders. Finally, results of this study improved understanding of intuitive rules and provide references for teachers on instruction.

Keywords: cognition diagnosis, intuitive rules, latent class, mixed Rasch model

壹、緒論

本研究旨在應用多元計分混合Rasch 模式 (polytomous mixed Rasch model) 探討國小五年級學童在數學直覺法則 (intuitive rule) 的潛在類別 (latent class) 和關聯情形，以及不同性別的直覺法則使用差異性，研究結果期能對於學童在數學直覺法則的使用能更深入瞭解，並能輔助提供同質性分組並施以補救教學之參考，以下分述本研究之動機和目的。

一、研究動機

直覺反應 (intuitive responses) 常出現在人類的生活中，但這些直覺反應不一定完全正確，而影響概念的形成。在科學方面，學童常存在直覺錯誤，例如認為「在標準情況下，從相同高度掉落的棒球和鉛球，鉛球會先著地」；在數學方面，學童也常存在「一個數愈乘其結果一定會愈大，愈除則一定愈小」的直覺。直覺反應並不同於迷思概念 (misconception)，但卻和直覺反應息息相關 (Stavy & Tirosh, 2000)。近年來，在數學與科學教育的研究領域中，Stavy, Tirosh, Tsamir 及 Ronen (1996)、Stavy and Tirosh (2000) 提出的直覺理論 (intuitive theory)，說明學童因受內隱經驗和知識，在數學或科學問題上常使用直覺法則。「直覺法則」係指經歸納出學童在數學與科學的認知學習過程之直覺特徵規則。累積至今，渠在文獻上已提出「More A—More B」、「Same A—Same B」、「有限細分 (everything comes to an end)」和「無限細分 (everything can be divided by two)」等四種不同的直覺法則，且證實來自不同國家背景之學童，都的確存在這四種直覺法則。

然而，對於這四種直覺法則，大多研究文獻均著重於描述性的分析，對於學童在這四個直覺法則使用的相關性，以及直覺法則使用的特徵之分群，甚少見諸於文獻。此外，直覺是一種心理特質，不同性別使用直覺法則的差異性為何，亦少有文獻進行探討。由於混合Rasch模式旨在進行潛在類別分群，相當適用於數學認知特徵診斷 (Rost, 1990, 1991)，而數學直

覺法則的測驗計分可視為等距變項（interval variable），符合混合Rasch模式之假定。此外，文獻上甚少利用混合Rasch模式進行直覺法則的探討。職此之故，本研究利用相關性分析和多元計分混合Rasch模式，探討學童在四個直覺法則的使用相關性以及其分群，以及不同性別的表現差異。研究結果期能對於數學與科學的直覺理論提供深入瞭解，以及相關補救教學與認知診斷的參考。

二、研究目的

研究者依據 Stavy and Tirosh（2000）、Stavy, et al.（1996）提出的四個直覺法則設計數學評量試卷，以五年級學童為研究對象，本研究研究目的如下：

一、依據四個直覺法則，編製數學直覺法則評量工具，驗證其數學直覺法則的使用情形。

二、依據四個直覺法則，探討數學直覺法則使用的相關性，並探討不同性別學童在直覺法則使用的差異。

三、應用多元計分混合Rasch模式，依四個直覺法則計分，進行分群並探究各潛在類別的特徵，以及分析不同性別在潛在類別分布的差異性。

貳、文獻探討

本研究以數學的直覺法則為理論基礎並編製施測工具，分析國小五年級學童在四個直覺法則的使用相關性並分群，以及探討不同性別的表現差異，以下論述有關直覺理論和研究方法論基礎。

一、直覺法則的意義與研究

「直覺」就是不需經由繁複的思考過程、嚴謹的證明程序，不加思索產生的瞬間想法（Fischbein, 1987）。Torff and Sternberg（2001）指出，直覺就是不經過深思熟慮的反應過程，順從且不加批評的對事實產生共鳴，

直覺縱使缺少嚴格的證明，但仍具有合理性與說服力。依據直覺的意義，直覺是一種認知形式，且源自於個人經驗之一種直接的了解或認知（謝展文，2000；Fischbein, 1987）。

人類的直覺有多種特性，直覺知識是不驗自明且顯然的，並不需要利用先備知識來做證明，直覺概念的作用如同認知的源頭，是不需要作進一步分析的（Stavy & Tirosh, 2000）。使用直覺的人也視此直覺為理所當然。Fischbein, Tirosh and Melamed（1981）認為直覺在個體中具有強任性與頑固性，不易改變。一旦個體存在了某種直覺知識，該直覺極容易對個體強加一些無庸置疑的詮釋或表徵，而此詮釋或表徵，會在個體進行推理時，強制引導其進入錯誤的思考方向，阻礙個體進行知識學習。

Stavy, et al.（1996）經長期研究，對各國家的學童進行測驗，發現學童在數學及科學等不同測驗主題上，皆有著類似的直覺反應，研究歸納提出直覺法則。直覺法則指出，學童在某些數學或科學問題上的反應，大部分是根據問題的外在特徵來作反應，而不是根據內容領域的正確知識概念來作思考。Stavy, et al.（1996）所提出的直覺法則理論，將直覺法則分成屬於比較型問題（comparison tasks）的「More A—More B」法則、「Same A—Same B」法則，以及屬於連續細分型問題（successive division tasks）的「有限細分」法則和「無限細分」法則等四種，此四種直覺法則分別概述說明如下：

（一）More A—More B法則

學童根據兩個物體或系統在某個A量上有明顯的不同（ $A1 > A2$ ），且被要求比較此兩物體或系統於另一個B量的大小，可能產生 $B1 > B2$ 的判斷。Stavy and Tirosh（1996）、Stavy, et al.（1996）、Tirosh and Stavy（1999）亦從研究中發現學童會根據明顯的A量（ $A1 > A2$ ）推得 $B1 > B2$ 。例如圖1中，學童在判斷角A與角B的大小關係時，可能會因為圖中標示角A與角B的弧線大小不同之特徵，來判斷角度大小，因而認為角B大於角A。這些由於依據試題本身外在特徵所顯示系統量的大小差異，影響學童類推至

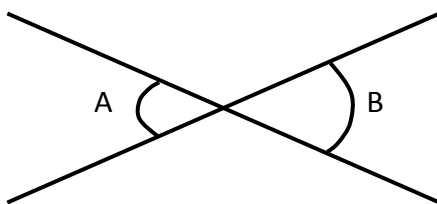


圖1 More A—More B 法則舉例

另一系統量同樣有相同大小關係的錯誤判斷，稱之為「More A—More B」法則。

（二）Same A—Same B法則

學童會根據兩個物體或系統在某個A量上相同（ $A1 = A2$ ），產生 $B1 = B2$ 的判斷。Stavy, Tirosh, Tsamir and Ronen（1996）、Tirosh and Stavy（1999）研究發現：當一個題目提出之後，學童被問到比較 $B1$ 和 $B2$ 之大小或性質，可能會受到其中的A量影響（ $A1 = A2$ ），藉由題目直接提供自己的推理，做出錯誤 $B1 = B2$ 的回答。例如圖2中，有一個長方形甲，將它的長放大3倍，寬縮短3倍，變成乙長方形，並請學童判斷甲、乙兩長方形的周長大小關係。多數學童會認為長乘以3，與寬除以3，此系統量都是3倍的關係，所以可以相互抵消，進而推論出甲長方形周長也會等於乙長方形周長的錯誤判斷。

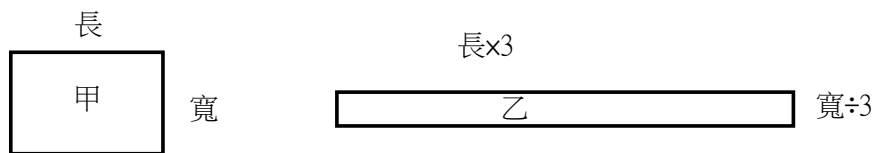


圖2 Same A—Same B 法則舉例

（三）「有限細分」法則與「無限細分」法則

「有限細分」法則與「無限細分」法則都是有關連續細分型的問題。在數學領域方面，連續細分的問題可用來檢驗學生有無「無限」概念（Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979; Nunez, 1991; Tall, 1981）。當問題所指出的物體是「物理性質」（例如：紙張、繩索、木塊等）的話，應該可以被細分到很小的粒子階段而停止，應歸為可以「有限細分」；而當問題所指出的

「數學性質」（例如：線段、長方形、立方體等）的話，則可無限被細分，應歸為「無限細分」。研究上顯示，學童會受經驗直覺與類推影響，做出細分問題上的錯誤判斷。例如圖3中，給定一個長方形，我們先在中間標示一條線A，使其分為兩個部份，在其中一個部份的中間再標示一條線B，使其中一部份再分成兩個部份，依此類推，請問學童學是否可以一直標示出其中的一半。若學童經由日常生活經驗的外推，或科學技術限制，認為長方形分到最後，會達到很小塊，甚至消失不見，因而無法一直標示下去，則此學童傾向擁有「有限細分」法則。若學童不受經驗影響，認為長方形屬於幾何上的幾何圖形，可以有無限個位置做標示的動作，則傾向擁有「無限細分」法則。

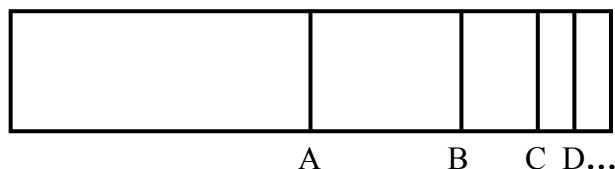


圖3 有限細分法則與無限細分法則舉例

針對Stavy, et al. (1996) 所提出四種直覺法則，後續有些相關的研究，例如：Stavy and Tirosh (2000) 提出讓學童察覺答案不正確的教學方案；謝展文 (2000) 探討直覺法則對於國內國小學生在數學及科學學習上的影響，以及其「習慣化」法則及「More A—More A」法則等新的直覺法則存在。紀宗秀 (2005) 參考 Stavy and Tirosh (2000) 提出的「類比教學」與「衝突教學」兩種教學方法，並進而提出另一種「預測 (predict) —觀察 (observe) —解釋 (explain)」(Gunstone & White, 1981) ——簡稱「POE」的教學法，企圖將學習到的新概念與先前直覺想法相比較，以達概念改變而減少依循直覺法則解題的情形。Zazkis (1999) 發現國小學童於數字概念受到直覺法則的影響，而楊美惠 (2002) 則探討直覺法則對於台灣學生K—六年級學童面積概念之影響。何健誼 (2002) 探討直覺法則對K—6年級學童在體積概念學習上的影響。張玉枝 (2002) 以國中地球

科學教科書作為研究工具，探討國中生在詮釋地球科學課本中的圖形時，是否有受直覺法則影響的跡象。呂玉琴、陳瑞發（2004）則認為學童概念的形成，教師本身扮演著重要的角色，因此將研究對象延伸至職場教師，探討直覺法則對國小代課教師解數學問題所產生的影響，並且提供師資培育機構了解教師在解題過程中存在的問題癥結。

上述四個直覺法則相關研究中，大多數的研究均著重於直覺法則的描述分析和教學方法設計，對於直覺法則使用的關聯性和分群，以及不同性別的在直覺法則的表現差異，則較少探究。因此，本研究進行直覺法則使用的關聯性和多元Rasch 混合模式的分群探究，以及不同性別表現的差異，實有必要與可行之處。

二、混合Rasch模式的理論與應用

（一）混合Rasch模式的理論基礎

Rasch模式是試題反應理論（item response theory）中常被廣用的模式，以 θ_i 表示受試者能力值（ability）或潛在特質（latent trait），以 b_k 表示第 k 題的難度參數（difficulty parameter），則Rasch模式之答對機率函數可以下列的公式表示：

$$P_k(\theta_i) = \frac{e^{\theta_i - b_k}}{1 + e^{\theta_i - b_k}} = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_i - b_k)}} \quad (1)$$

考慮不同潛在類別（latent class）下受試者對題目反應機率不同，此不同乃由於試題在不同類別下的參數並不相同，可由Rasch模式來描述。因此，Rost（1990）提出二元計分的Rasch混合模式，其認為潛在類別中，試題難度參數會因不同類別而有所不同。令試題 k 在類別 c 的難度參數為 b_{kc} 。因此，屬於潛在類別 c 之能力值為 θ_{ic} 的受試者，在第 k 題的答題機率，可由Rasch模式表示如下：

$$P_{kc}(\theta_{ic}) = \frac{e^{(\theta_{ic} - b_{kc})}}{1 + e^{(\theta_{ic} - b_{kc})}} = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_{ic} - b_{kc})}} \quad (2)$$

表示受試者 的反應向量（反應組型）在類別c中之條件機率，而 表示受試者 的反應向量在全部類別中的機率，則：

$$P(X_i; c) = \prod_{k=1}^K [P_k(\theta_i)]^{x_k} [1 - P_k(\theta_i)]^{1-x_k} = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1}{1 + e^{-(\theta_i - b_k)}} \right)^{x_k} \left(\frac{e^{-(\theta_i - b_k)}}{1 + e^{-(\theta_i - b_k)}} \right)^{1-x_k} \quad (3)$$

$$P(X_i) = \sum_{c=1}^C \alpha_c \prod_{k=1}^K \left(\frac{1}{1 + e^{-(\theta_i - b_k)}} \right)^{x_k} \left(\frac{e^{-(\theta_i - b_k)}}{1 + e^{-(\theta_i - b_k)}} \right)^{1-x_k}, \text{ 其中 } \sum_{c=1}^C \alpha_c = 1 \quad (4)$$

上式中 為類別參數（latent class parameter），表示類別c的比率，且 表示受試者 答對試題， 表示受試者 答錯試題。

以次序性的多元計分的試題言之，若能力值為 的受試者在第 題的選項為 之機率以 表示，則多元計分的Rasch 可以表示為（Masters & Wright, 1984）：

$$P(X_{ik} = x) = \frac{e^{[x\theta_i - \sum_{s=1}^x r_{ks}]}}{\sum_{y=0}^m e^{[y\theta_i - \sum_{s=1}^y r_{ks}]}} \quad , \quad x \in \{0, 1, 2, \dots, m\} \quad (5)$$

上式中表示第 題共有 個反應類別（response category），其中 為閾值（threshold）且為參數估計之需要，定義 。在一般化的多元計分潛在類別模式（general latent class）下，受試者 的反應組型為 之機率可表示為：

$$P(X_i) = \sum_{c=1}^C \alpha_c \prod_{k=1}^K p_{kxc}, \text{ 其中 } \sum_{c=1}^C \alpha_c = 1 \quad (6)$$

上式中 p_{kxc} 表示類別c的第k題得分為x之機率，Rost（1991）將公式（6）之 p_{kxc} ，以公式（5）之多元計分Rasch模式取代，整合多元計分Rasch模式與潛在類別模式，提出多元計分混合Rasch模式。則受試者i的反應組型 之機率以多元計分的Rasch 模式表示為（Rost, 1991）：

$$P(X_i) = \sum_{c=1}^C \alpha_c \prod_{k=1}^K \frac{e^{(x\theta_k - \sum_{s=1}^x \tau_{ksc})}}{\sum_{y=0}^m e^{(y\theta_k - \sum_{s=1}^y \tau_{ksc})}}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots, m\} \quad (7)$$

利用EM估計法和非條件化最大概似估計法（unconditional maximum likelihood estimation）之迭代計算，可獲上述公式中之參數。

（二）模式選擇的適配度指標

混合Rasch模式分析方法的原理，是依受試者答題的反應組型，觀察其與模式與資料的適配度（goodness of fit），再決定最合適的組數與其結構。由於並不是每位受試者反應組型皆和類別模型相同無異，因此，受試者反應組型和類別模型有距離（distance）存在。因此，在適配度指標上，常以 Akaike Information Criterion（AIC）、Bayesian Information Criterion（BIC）及Consistent Akaike Information Criterion（CAIC）來判斷選擇最佳類別數的依據。

Akaike（1973）根據Kullback-Leibler discrepancy定義出Akaike資訊參數（Akaike information criterion, AIC），一般稱為AIC。由於是選擇具有最小MSE（mean squared error）分配的模型作為適配模型，因此具有有效性和靈敏度。Akaike（1978）亦由貝氏的觀點所提出的貝氏資訊參數（Bayesian information criterion, BIC），是一個具有一致性的選模法，當樣本數夠大時，BIC 總是會選到最小的正確模型。Bozdogan（1992）提出CAIC（consistent Akaike information criterion），將AIC的懲罰項係數由一個比2更大的樣本數函數來替代。當樣本數較小或衡量變數較少時，AIC指標通常有低估的情形出現，而CAIC 則改善了這項缺點。AIC、BIC及CAIC之公式臚列於下：

$$AIC = -2\log L + 2t \quad (8)$$

$$BIC = -2\log L + (\log N)t \quad (9)$$

$$CAIC = -2\log L + [1 + (\log N)]t \quad (10)$$

其中， t 表示參數個數， N 表示受試者人數，或稱有效的樣本數； L 則為最大概似函數。在選擇最佳類別數時，可依據AIC、BIC及CAIC值，值愈小則為選擇較佳的類別數模式；若當AIC、BIC及CAIC值並非同時為最小值時，可考慮以「最簡潔模式」及「最佳解釋模式」的標準來執行最佳模式的選擇（吳毓瑩、林原宏，1996）。

（三）混合Rasch模式的應用

在科學與數理與教育領域的實證應用研究方面，莊嘉坤（1995）運用混合Rasch模式分析學生科學態度特質，並對於學生科學態度之潛在特質進行類別分析，以提供科學態度有關認知方面研究之詮釋基礎；鄭蕙如（2006）欲瞭解國中生在數學表現方面是否存在不同作答反應類型，因此採用2001至2005年各年度之兩次國中基本學力測驗數學科的試題作答反應，利用混合Rasch模式，針對參與國中基本學力測驗的國中生之數學科的作答反應組型進行分析，再根據模式選擇之依據，尋找在異質群體中的同質次群體，因而可更進一步瞭解各類型學生的數學表現。Koeller（1994）以混合Rasch模式分析受試者的猜測行為（guessing behavior）；Rost, Carstensen and Davier（1998）將混合Rasch模式應用於性格問卷的分析，該問卷主要在測驗受試者五種性格的分析。Schmidt（2002）將混合Rasch模式應用於了解個別認知差異的分析和診斷。Austin, Deary and Egan（2006）亦以性格問卷量表NEO-FFI為資料分析來源，進階探討混合Rasch模式應用於分析個別差異的可行性。

參、研究方法與設計

本研究對象為國小五年級學童，由於相關研究文獻顯示，國小中高年級學童存在頗高之直覺法則解題行為（蔡秉恆、黃天佑，2005），故本研究對此方面的文獻可再深入瞭解。本研究以「More A—More B」、「Same A—Same B」、「有限細分」和「無限細分」等四個直覺法則為基礎，自

編「數學直覺法則測驗工具」，測量學童解決數學相關試題時，受到直覺法則影響的情形，研究資料以相關分析與多元計分混合Rasch模式為主。

一、研究對象

研究對象為來自桃園縣及彰化縣國小517名五年級學童，樣本來源及背景資料如表1所示。

表1 樣本來源及背景資料

學校代號	縣市	學校類型			性別		小計
		大型 48班以上	中型 24~47班	小型 23班以下	男	女	
S1	桃園縣	○			53	61	114
S2	桃園縣		○		81	76	157
S3	桃園縣	○			16	17	33
S4	桃園縣			○	12	12	24
S5	彰化縣	○			38	21	59
S6	桃園縣	○			64	66	130

二、研究工具

（一）測驗工具

研究者參考國內外文獻之測驗工具據以自編試題（呂玉琴、陳瑞發，2004；楊美惠，2002；蔡秉恆、黃天佑，2005；謝展文，2000；Tirosh & Stavy, 1999），根據前述四個直覺法則下，「More A—More B」4題、「Same A—Same B」4題、「有限細分」和「無限細分」4題，共計12題。每一試題除了以選擇方式要求學童回答外，為了確認學童的確以該直覺法則進行解題思考，因此亦以「你選擇這個答案的理由是一」之簡答方式，要求受測學童寫出答題理由，以辨認該學童是否確實使用該直覺法則。當選擇和簡答結果都符合該直覺法則時，則認定此學童使用該直覺法則。

原始答題資料依使用該法則與否轉換成0、1二元值，1表示答題使用該法則，0表示則否。根據學童在各直覺法則累加得到的總分，共有四個直

覺法則的分數，故此四個直覺法則分數為多元計分，據以計算各法則間的相關性並進行多元計分混合Rasch模式分析。

測驗工具首先經由四位數學教育專長教授與一位測驗統計專長教授審查，在整個測驗工具12題中，此五位專家一致認定其符合測驗該直覺法則計有11題（達91.67%），僅有1題經專家建議修改內容敘述後，也同意認定符合測驗該直覺法則。根據其審查意見修改。確定具備專家效度後進行預試，預試樣本取自桃園縣某國小五 級4個班級138人進行施測，據以確定學童有無題意理解問題。經預試後綜觀學童填寫的答題理由，研究者找出學童容易誤解或不了解題意的語句或圖形，並且得知各試題的外在特徵是否反應出學童確實存在直覺法則，而各題預試存在直覺法則之比例如表2所示。預試結束後經過與上述四位數學教育專長教授與一位測驗統計專長教授再度討論後，預試試題的詳細變更如表3所示，修改後所有試題均獲五位專家同意認定符合測驗該直覺法則（達100%）。測驗工具在經過預試修正後，完成正式施測工具如表4所示。正式施測工具之各直覺法則的內部一致性信度Cronbach 值分別是：More A—More B 為 .64、Same A—Same B 為 .63、有限細分為 .69、無限細分為 .71，由於每個直覺法則僅有四題，題數愈多則信度高。因此，在僅有四題情形下，此測驗之信度可以接受。

（二）資料分析軟體工具

表2 預試結果之直覺法則使用人數比例

題號	直覺法則	人數比例
1	More A—More B	42.8 %
2	More A—More B	27.5 %
3	More A—More B	55.1 %
4	More A—More B	23.2 %
5	Same A—Same B	50.0 %
6	Same A—Same B	54.3 %
7	Same A—Same B	42.8 %
8	Same A—Same B	53.6 %
9	有限細分	70.3 %
10	有限細分	13.0 %

表2 預試結果之直覺法則使用人數比例 (續)

題號	直覺法則	人數比例
11	有限細分	56.5 %
12	有限細分	68.1 %
9	無限細分	23.9 %
10	無限細分	80.4 %
11	無限細分	36.2 %
12	無限細分	25.4 %

表3 預試試卷試題修改內容

題號	預試試題內容	正式施測試題內容 (修正後)	修正原因
6	大禹遊戲公司推出一款新型遊戲機，四月份以定價出售。但因其他公司也推出遊戲機競爭，所以五月份遊戲機改以定價8折(降價20%)的價錢出售。五月份銷售數字因此驟增，公司緊急決議六月份遊戲機改以五月份的售價調漲20% 作為最新售價。請問以下敘述何者正確？	大禹遊戲公司四月份推出一款遊戲機，因銷售不佳，所以五月份改以「降價20%」的優惠方式出售。五月份銷售數字因此成長很多，公司緊急決議六月份將以五月份的售價「調漲20%」 作為最新售價。請問以下敘述何者正確？	接受預試的學童表示題目有點長，且不懂題目意思
7	有一正方形的周長與一長方形的周長相同，請問此正方形與長方形的面積關係為何？	如果有一個正方形的周長與一個長方形的周長相同，請問此正方形與長方形的面積大小關係會是什麼？	接受預試的學童表示不瞭解「有一正方形的周長與一長方形」意思
8	老師分別給小美及小佳16張正方形色紙，小美將色紙排成一個大正方形，小佳則排成一長條狀。請問哪一個圖形的周長比較大？	老師分別給小美及小佳16張相同的正方形色紙，小美將色紙排成一個大正方形，小佳則排成一長條狀。請問哪一個圖形的周長比較大？	接受預試的學童質疑試題並未說明「每張正方形色紙的大小是否相同」

表4 正式施測試題類型、直覺法則與內容

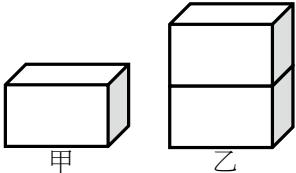
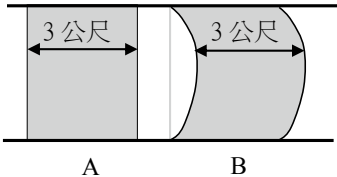
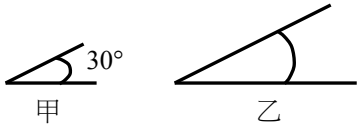
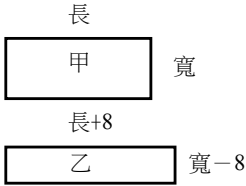
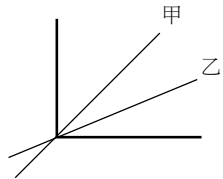
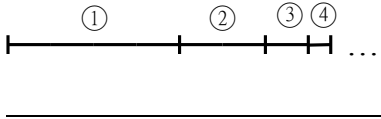
試題類型	直覺法則	題號	試題內容
比較型	More A—More B	1	一長方體(如甲圖)體積是30立方公分，表面積為62平方公分。現在將兩個完全相同的此長方體相疊在一起(如乙圖)，體積共60立方公分，而表面積大小會有怎樣的變化？ 
比較型	More A—More B	2	小宇想在庭院舖上一層草皮，他設計了A、B兩種草地形狀，請問哪一種草地面積比較大？ 
比較型	More A—More B	3	我們知道所有線段都是由「點」構成的，那麼請問甲、乙哪一條線段上「點」的個數比較多？ 甲 _____ 乙 _____
比較型	More A—More B	4	由兩條線段構成角度為30度的角(如甲圖)，如果將構成此角的兩條線段延長為2倍(如乙圖)，那麼乙圖的角度大小會有什麼變化？ 
比較型	Same A—Same B	5	將長方形（甲）的長增加8公分，寬減少8公分，變成另一個長方形（乙），請問哪一個長方形的面積比較大？ （下圖的尺寸並不很準確，僅供參考。） 

表4 正式施測試題類型、直覺法則與內容(續)

試題類型	直覺法則	題號	試題內容
比較型	Same A—Same B	6	太禹遊戲公司四月份推出一款遊戲機，因銷售不佳，所以五月份改以「降價20%」的優惠方式出售。五月份銷售數字因此成長很多，公司緊急決議六月份將以五月份的售價「調漲20%」作為最新售價。請問以下敘述何者正確？
比較型	Same A—Same B	7	如果有一個正方形的周長與一個長方形的周長相同，請問此正方形與長方形的面積大小關係會是什麼？
比較型	Same A—Same B	8	老師分別給小美及小佳16張相同的正方形色紙，小美將色紙排成一大正方形，小佳則排成一長條狀。請問哪一個圖形的周長比較大？
連續細分型	有限細分及無限細分	9	將一張長方形色紙對摺剪成兩半，然後再將其中一半色紙再對折剪成兩半，剪開後的其中一半色紙繼續對折剪成兩半。如果反覆同樣的動作，請問可以不斷的將色紙剪成兩半嗎？
連續細分型	有限細分及無限細分	10	1 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{27}$ 、 $\frac{1}{81}$ 、 $\frac{1}{243}$ 、……此數列中，後面的數是前面的倍，也就是後面的數是由前面的數除以3得來的。如果反覆同樣動作，請問這種數列會一直持續下去嗎？
連續細分型	有限細分及無限細分	11	阿良畫一條線(甲)將一個直角分成大小相同的兩個角，再畫一條線(乙)將這兩個角的其中一個角，分成大小相同的兩個角(如下圖)。如果重複同樣的動作，請問阿良可以一直將角分成兩個等角嗎？ 
連續細分型	有限細分及無限細分	12	阿傑將編號1號、2號、3號、4號……的繩子以下面的方法連接起來。其中 2號繩子是1號繩子的一半，3號繩子是2號繩子的一半，4號繩子是3號繩子的一半，依此類推。請問如此反覆同樣的動作，阿傑可以將繩子不斷連接下去嗎？ 

本研究 用SPSS 12.0與Winmira 2001 軟體進行資料分析，其資料分析項目如下：

1.用SPSS12.0中文視窗版軟體進 直覺法則之相關分析與各基本統計量計算，分析各直覺法則間的相關、統計檢定等。

2.應用Winmira 2001軟體既行多元計分混合Rasch模式分析，以探究學童在直覺法則使用之潛在類別特徵與相關訊息。

肆、結果與討論

一、描述統計與性別比較分析

表5說明各直覺法則使用的人數比例，分別依性別表列其人數和佔其該性別的百分比（男生總計264人，女生總計253人），每個試題不論男女生，皆有不少比例的受試學童擁有直覺法則，而且部分試題的男女差異統計檢定達顯著水準。表6中獨立樣本t檢定顯示，男、女生在「Same A—Same B」、「有限細分」均達顯著差異。t檢定結果顯示女生擁有「Same A—Same B」、「有限細分」直覺法則的情形皆高於男生。

二、直覺法則使用之相關性分析

表5 受試學童於各直覺法則試題得分之人數及比例

直覺法則	試題	該直覺人數		具該直覺人數百分比		男女差異比較 (t值)
	題號	男生	女生	男生	女生	
More A—More B	1	98	90	37.1%	35.6%	.37
	2	56	53	21.2%	20.9%	.07
	3	133	159	50.4%	62.8%	-2.88**
	4	47	53	17.8%	20.9%	-.90
Same A—Same B	5	107	131	40.5%	51.8%	-2.58*
	6	134	144	50.8%	56.9%	-1.40
	7	91	105	34.5%	41.5%	-1.65
	8	151	160	57.2%	63.2%	-1.40

表5 受試學童於各直覺法則試題得分之人數及比例(續)

直覺法則	試題	該直覺人數		具該直覺人數百分比		男女差異比較 (t值)
	題號	男生	女生	男生	女生	
無限細分	9	117	102	44.3%	40.3%	.92
	10	220	216	83.3%	85.4%	-.64
	11	132	104	50.0%	41.1%	2.03*
	12	128	98	48.5%	38.7%	2.24*
有限細分	9	133	146	50.4%	57.7%	-1.67
	10	34	31	12.9%	12.3%	.21
	11	124	139	47.0%	54.9%	-1.82
	12	128	149	48.5%	58.9%	-2.38*

*p<.05 **p<.01

表6 男女學童之直覺法則平均得分及獨立樣本t檢定

直覺法則	平均得分		t 值
	男生	女生	
More A—More B	1.27	1.40	-1.71
Same A—Same B	1.83	2.13	-2.75**
無限細分	2.26	2.06	1.86
有限細分	1.59	1.84	-2.32*

*p<.05 **p<.01

依各直覺法則之得分並計算其Pearson積差相關係數，全體樣本相關係數矩陣如表7所示。根據表7，可知「More A—More B」與「Same A—Same B」呈現正相關，顯示這兩種直覺法則使用具有相依性。「無限細分」與「有限細分」呈現負相關，即受試學童若擁有「無限細分」法則，則該生傾向不擁有「有限細分」法則，這亦表示「無限細分」與「有限細分」此兩法則間存在互斥的關係。事實上，研究者在編製測驗工具時，有關「無限細分」與「有限細分」的試題就是採取「二分法」的原則，亦即此二法則是同時設計在同一試題，且每個試題皆僅有兩個選項。例如：測驗工具第9題題目是「將一張長方形色紙對摺剪成兩半，然後再將其中一半色

紙再對折剪成兩半，剪開後的其中一半色紙繼續對折剪成兩半。如果反覆同樣的動作，請問可以不斷的將色紙剪成兩半嗎？」。本題的答題選項只有「可以不斷的剪成兩半」與「無法不斷的剪成兩半」，若受試學童選擇「可以不斷的剪成兩半」，顯示該生擁有「無限細分」；若選擇「無法不斷的剪成兩半」此選項，則顯示該生擁有「有限細分」。所以，相關分析的結果顯示「無限細分」與「有限細分」呈現負相關。整體分析結果，全體樣本之四種直覺法則關係如圖4所示。

表7 各直覺法則間之相關情形（全體樣本）

	MoreA-MoreB	SameA-SameB	無限細分	有限細分
MoreA-MoreB	—			
SameA-SameB	.12**	—		
無限細分	-.08	-.03	—	
有限細分	.08	.08	-.90***	—

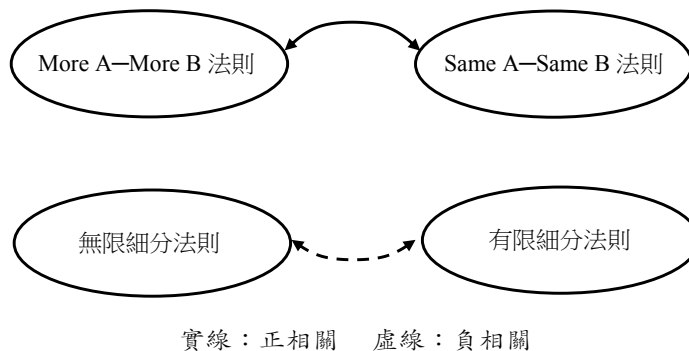


圖4 各直覺法則間之關係圖（全體樣本）

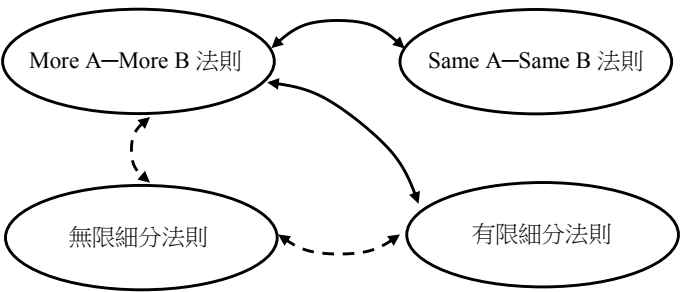
由於男女生在前述的直覺法則使用情形稍有差異，因此分別就男女生進行直覺法則使用之相關分析，男生樣本相關係數矩陣如表8所示。根據表8，可知「More A—More B」與「Same A—Same B」呈現正相關，顯示這兩種直覺法則使用具有相依性；「More A—More B」與「有限細分」亦呈現正相關，顯示其直覺法則使用也具有相依性。然而，「More A—More B」與「無限細分」呈現負相關，顯示這兩種直覺法則使用是具有互斥性；

「無限細分」與「有限細分」呈現負相關，因其法則使用是互斥的，因此呈現負相關是必然的。綜觀相關分析結果，男生樣本四種直覺法則間之詳細關係如圖5所示。

表8 各直覺法則間之相關情形（男生）

	MoreA-MoreB	SameA-SameB	無限細分	有限細分
MoreA-MoreB	—			
SameA-SameB	.21**	—		
無限細分	-.12*	-.05	—	
有限細分	.13*	.10	-.89***	—

* $p < .05$ ** $p < .01$ *** $p < .001$



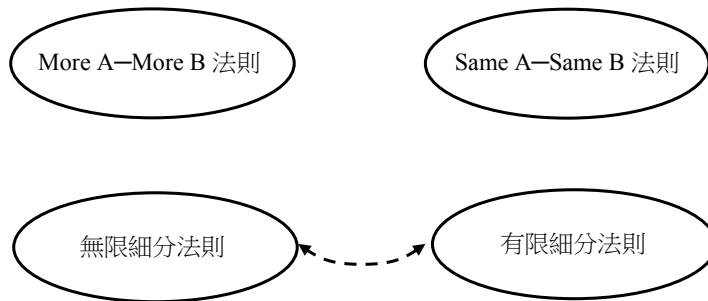
實線：正相關 虛線：負相關

圖5 各直覺法則間之關係圖（男生）

女生樣本相關係數矩陣如表9所示，可知只有「無限細分」與「有限細分」呈現負相關，而各其他個直覺法則之間，並無相關性存在。此結果與前述之男生樣本結果有所不同。有關其原因，未來可就性別因素在直覺法則的使用差異，進行深入深究。綜觀相關分析結果，女生樣本在四種直覺法則間之詳細關係如圖6所示。

表9 各直覺法則間之相關情形（女生）

	MoreA-MoreB	SameA-SameB	無限細分	有限細分
MoreA-MoreB	—			
SameA-SameB	.01	—		
無限細分	-.01	.01	—	
有限細分	.01	.03	-.90***	—

*** $p < .001$ 

實線：正相關 虛線：負相關

圖6 各直覺法則間之關係圖（女生）

二、多元計分混合Rasch模式分析

以下分別就全體樣本與不同性別樣本，分析其模式選擇結果和各類別的直覺法則得分期望值。此外，進一步針對全體樣本下之各類別的性別人數分佈進行統計檢定，並說明原始總分與潛在特質分數之分佈關係。

（一）模式的決定與潛在類別特徵

模式的選擇旨在決定最佳的類別數，研究者以類別數從2至6，分別就全體樣本與不同性別樣本的挑選最佳的類別數。由表10可知，無論是全體樣本或男女生樣本，當類別數為3時，其AIC、BIC和CAIC三個指標均為最小值，表示三個類別數是相當適合。因此，全體樣本三個類別以T1、T2、T3表示，男生樣本三個類別以M1、M2、M3表示，女生樣本三個類別以F1、F2、F3表示。此外，各類別條件得分期望值（conditional expected score）如表11所示，

表10 模式選擇的適配度指標

樣本	指標	類別數				
		2	3	4	5	6
全體	AIC	5636.78	5337.21	5343.07	5338.68	5511.43
	BIC	5785.47	5562.36	5624.69	5709.76	5765.97
	CAIC	5820.47	5615.36	5695.69	5798.76	6872.97
男生	AIC	2919.44	2802.28	3029.12	2842.67	2874.91
	BIC	3044.59	2991.81	3283.02	3160.93	3057.54
	CAIC	3079.59	3044.81	3354.02	3249.93	3164.54
女生	AIC	2711.87	2531.76	3055.56	2580.75	2589.82
	BIC	2835.54	2719.03	3306.43	2795.22	2967.89
	CAIC	2870.54	2772.03	3377.43	2884.22	3074.89

全體樣本的得分期望值折線圖如圖7所示，由表11和圖7可知，三個類別在「More A-More B」、「Same A-Same B」兩個法則之期望得分相差不大而非常接近。但三個類別在「無限細分」和「有限細分」兩個法則的期望得分則頗有差距。由此可知，「無限細分」和「有限細分」兩個法則應是決定類別的關鍵。類別T1和類別T3的學童，其共同特徵是「無限細分法則的得分高於有限細分法則」，但類別T1和類別T3的差異點在於「無限細分法則方面，類別T3稍高於類別T1；有限細分法則方面，類別T1稍高於類別T3」。類別T2的學童與類別T1、T3相反，其特徵是「有限細分法則的得分高於無限細分法則」。本研究測驗工具之各直覺法則滿分為4分，若以表11期望得分值大於2為閾值，進行各類別之命名，則類別T1為「單純無限細分策略」，類別T2為「有限細分且Same A-Same B策略」，類別T3為「無限細分且Same A-Same B策略」。

男生樣本的得分期望值折線圖如圖8所示，分別為類別M1、類別M2和類別M3。由表11和圖8可知，三個類別在「More A-More B」、「Same A-Same B」兩個法則之期望得分也相差不大而非常接近。但此三個類別在「無限細分」和「有限細分」兩個法則分數高低互見。所以「無限細分」和「有限細分」兩個法則也是決定男生樣本類別的關鍵。類別M1和類別M2

的學童，其差異點在於「無限細分法則方面，類別M1期望得分高於類別M2；有限細分法則方面，類別M2期望得分高於類別M1」，類別M3的特徵則是「無限細分和有限細分法則期望得分近乎相同」。以表11期望得分值大於2為閾值，進行各類別之命名，則類別M1為「單純無限細分策略」，類別M2為「單純有限細分策略」，類別M3為「無限細分且Same A-Same B策略」。

女生樣本的得分期望值折線圖如圖9所示，分別為類別F1、類別F2和類別F3。由表11和圖9可知，三個類別在四個法則之期望得分差異不大而非非常接近，僅在More A-More B和無限細分兩個法則上稍有差距。這方面的結果和男生樣本頗不相同，而且「無限細分」和「有限細分」兩個法則並非決定女生樣本類別的關鍵。以表11期望得分值大於2為閾值，進行各類別之命名，則類別F1和類別F3都是「無限細分且Same A-Same B策略」，類別F2為「單純Same A-Same B策略」。

由上述可知全體樣本和不同性別樣本下之各類別學童直覺法則使用的特徵，也發現不同性別的直覺法則特徵頗不相同，這也呼應前述不同性別之直覺法則間關係的不同，此訊息可提供教師分組補救教學或指導學童的依據。

表11 各類別條件期望得分值

樣本	類別	直覺法則			
		More A-More B	Same A-Same B	無限細分	有限細分
全體	T1	1.19	1.91	2.40	1.59
	T2	1.51	2.01	1.48	2.22
	T3	1.31	2.06	2.6	0.97
男生	M1	1.09	1.67	3.44	0.38
	M2	1.30	1.82	0.76	3.05
	M3	1.56	2.17	2.00	1.97
女生	F1	1.27	2.13	2.16	1.83
	F2	1.53	2.15	1.85	1.87
	F3	1.44	2.12	2.16	1.80

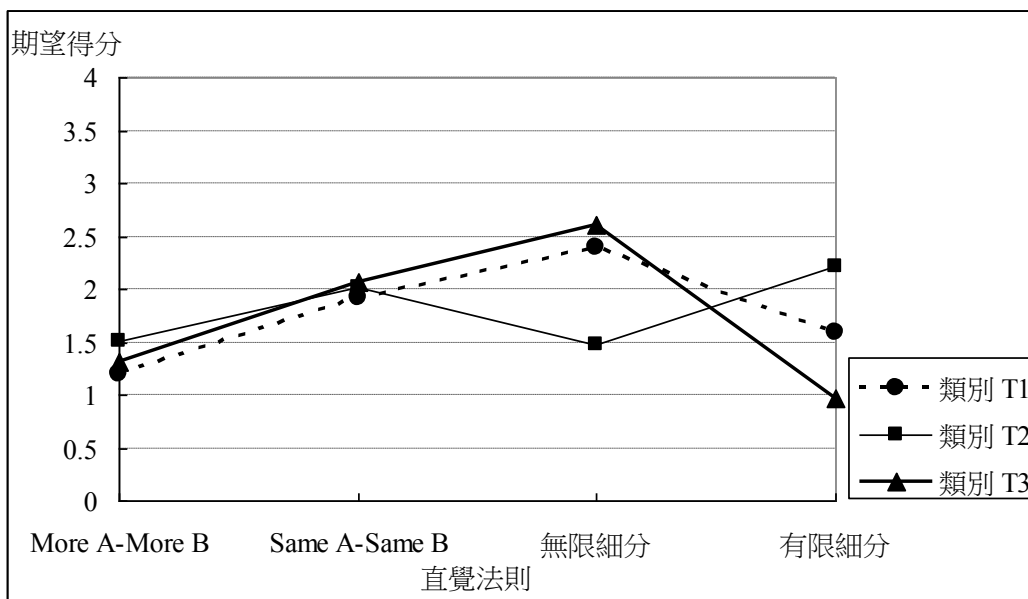


圖7 各類別條件期望得分折線圖 (全體樣本)

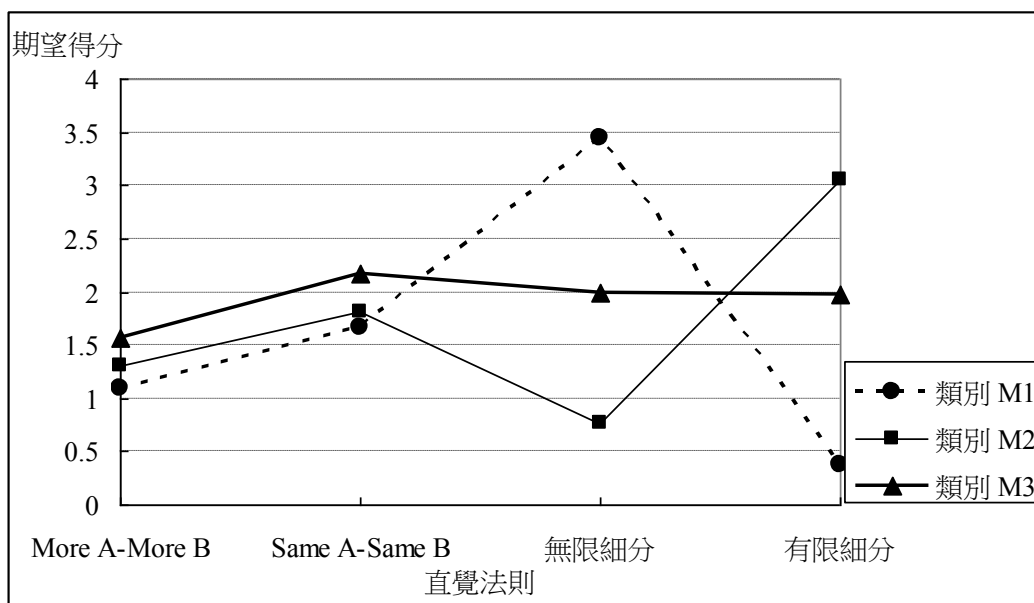


圖8 各類別條件期望得分折線圖 (男生樣本)

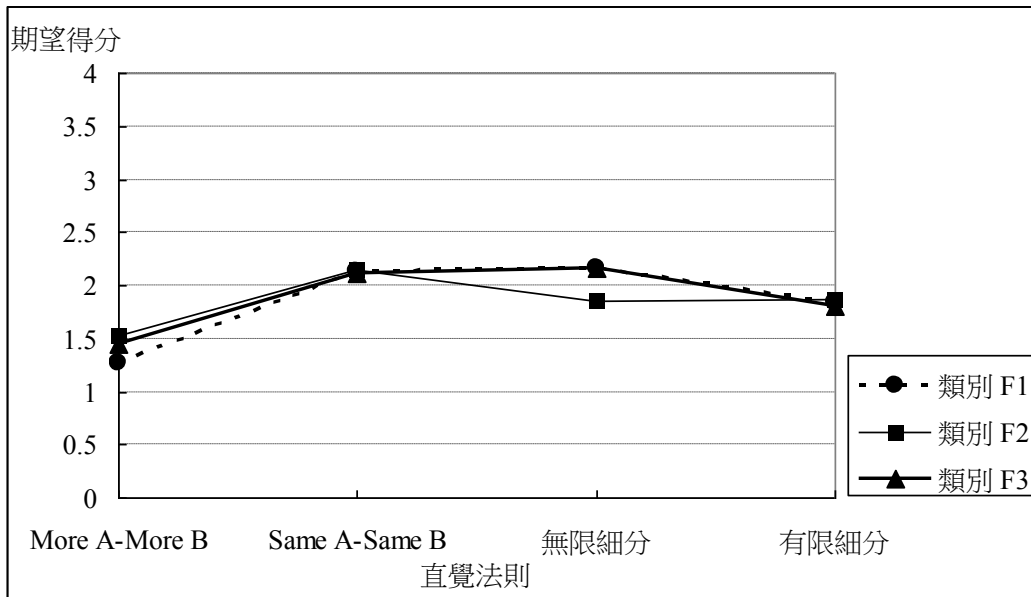


圖9 各類別條件期望得分折線圖 (女生樣本)

(二) 潛在類別人數與不同性別之分佈

各潛在類別的人數分如表12所示，由該表可知，類別 T1 和類別 T2 的人數較多，而類別T3的人數較少。就不同性別來看，男生屬於類別 T2 稍多（佔 41.11%），女生屬於類別 T1 較多（佔 46.59%）。但以卡方檢定（Chi-square test）進行檢定，卡方值為 $\chi^2 (2, N = 517) = 2.805, p > .05$ ，顯示不同性別在各潛在類別的分佈情形並無差異。

表12 各潛在類別人數分佈

類別	性別		人數 小計	人數百分比
	男 (%)	女		
T1	103 (40.71%)	123 (46.59%)	226	43.71%
T2	104 (41.11%)	90 (34.09%)	194	37.52%
T3	46 (18.18%)	51 (19.32%)	97	18.77%
小計	253	264	517	100%

由於在Rasch 模式中，總分為能力值（潛在特質）的充分統計量（sufficient statistics），亦即總分與能力值為一對一的函數關係。在混合Rasch模式中，此充分統計量的性質亦存在，唯需注意的是，不同潛在類別下的相同總分代表著不同層次的能力值（Rost & Langeheine, 1997）。本研究之各潛在類別下的總分與潛在特質（本研究以潛在特質稱之，因為直覺是一種特質而非能力）的關係如圖10所示。圖10顯示相同總分在各潛在類別中，對應不同層次的潛在特質，類別T2的原始總分分佈較廣，且和類別T1在原始總分為8時，是一個交錯點，而類別T3則是位於較低層次的潛在特質。

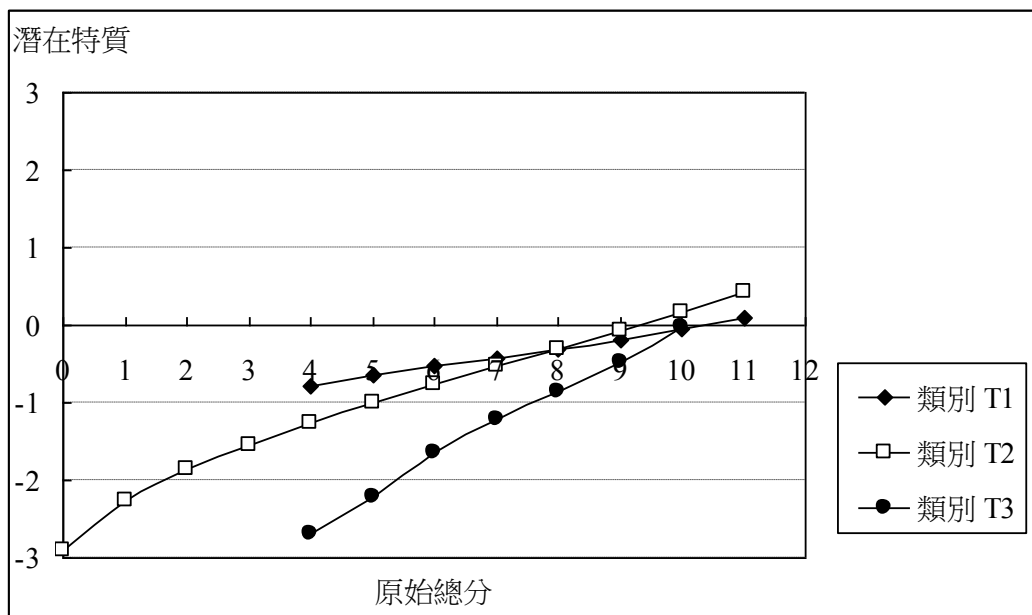


圖10 各類別之原始總分與潛在特質分數之分佈圖

伍、結論與建議

本研究分析學童在「More A—More B」、「Same A—Same B」、「有限細分」和「無限細分」等四個直覺法則的使用情形之關係和分群，並探討不同性別的表現差異，依本研究目的以及資料分析結果，本文之結論與建議討論如下。

一、結論

（一）本研究結果證實Stavy, et al. (1996)、Stavy and Tirosh (2000)所提出四個直覺法則的存在性。研究者以數學直覺法則測驗工具進行施測，顯示國內五年級學童的確在數學問題上使用直覺法則來進行解題思考。

（二）在直覺法則使用的相關性方面，可得下列數點：

1. 以整體樣本言之，「More A—More B」與「Same A—Same B」呈現正相關，表示此兩種直覺法則使用具有相依性；「無限細分」與「有限細分」呈現負相關，亦即若學童使用「無限細分」法則，則傾向不使用「有限細分」法則。

2. 就男生而言，「More A—More B」與「Same A—Same B」呈現正相關，「More A—More B」與「有限細分」亦呈現正相關，顯示其直覺法則使用具有相依性。但另一方面「More A—More B」與「無限細分」呈現負相關，「無限細分」與「有限細分」也呈現負相關。

3. 就女生而言，只有「無限細分」與「有限細分」呈現負相關，而其他直覺法則之間，並無相關性存在。因此，不同性別的直覺法則使用相關性呈現差異。

（三）依多元計分混合Rasch模式的分析結果，可得下列數點：

1. 全體樣本之多元計分混合Rasch模式的分析結果，類別T1為「單純無限細分策略」，類別T2為「有限細分且Same A-Same B策略」，類別T3為「無限細分且Same A-Same B策略」；男生則是類別M1為「單純無

限細分策略」，類別M2為「單純有限細分策略」，類別M3為「無限細分且Same A-Same B策略」；女生類別F1和類別F3都是「無限細分且Same A-Same B策略」，但類別F2為「單純Same A-Same B策略」。由上述可知不同性別下之各類別學童直覺法則使用的差異和特徵，此訊息可提供教師分組補救教學或指導學童的依據。

2. 男生屬於類別 T2 稍多，女生屬於類別 T2 較多，但卡方檢定顯示不同性別在各潛在類別的分佈情形並無差異。

3. 就各潛在類別的總分與潛在特質的對應而言，類別 T2 的學童之原始總分分佈較廣，且類別 T2 與潛在類別 T1 呈現交錯，而類別 T3 則是位於較低層次的潛在特質。

二、建議

根據本研究的結果與討論，提出有關教學與未來研究等方面建議如下：

（一）教學應用

1. 大部分學童皆擁有「More A—More B」、「Same A—Same B」、「無限細分」或「有限細分」中的數個直覺法則，對學童在學習數學知識時，必定產生一定的影響。所以，教師在進行數學教學時，勢必應多留意學童於數學試題的錯誤反應，是否因擁有直覺法則而引起，進而適時施以補救教學。

2. 從施測的數據觀之，不論試題中的概念是學校數學課程已教過的範圍，或是尚未習得的數學概念，學童都可能會使用直覺法則，這種不經由概念思考來解題，採取直覺法則來解題的情形，需採取適當之補救教學方法，以降低學童面對使用直覺法則來解題的情形。而教師職前的養成教育中，也應讓未來的準教師瞭解直覺法則的現象，避免學童或教師本身發生直覺法則的解題情形。

3. 學童使用直覺法則答題時形，有可能產生錯誤或正確的答案，所以教師宜從觀察或學童的上課中，了解學童是否使用直覺法則來答題，不應

只依紙筆式的答題結果。教師可在教授數學課程單元時，分析每位學童所擁有的直覺法則，便能即時對擁有類似直覺法則的學童施以補救教學。而本研究設計之數學直覺法則測驗工具，即可提供教師用來判斷學童擁有直覺法則的情形。

4. 學童擁有直覺法則的情形差異頗大，不同性別的學童亦有差異，教師若能設法將擁有類似直覺法則情形的學童集中，分成數個群組進行教學，必能提升教師進行直覺法則補救教學的效率。本研究所使用的分群方法，可供應用之參考。

二、後續進階研究

（一）各年齡層與學習領域的直覺法則研究

本研究中只針對五年級的數學直覺法則進行探究，未來研究可擴展至不同年級的學童甚至國中以上學生與職前教師，系統地進行橫斷面與縱貫面的探討。此外，除了數學學習領域以外，文獻上亦指出，自然科學等其他領域亦有直覺法則的出現。因此，未來可擴展至其他不同的學習領域。

（二）探討直覺法則的補救教學設計

有關直覺法則的補救教學設計原理原則，目前文獻上並無定論。因此，未來可進行直覺法則教學實驗研究，比較成效的優劣差異，俾便從教學原理角度，矯正學童直覺法則的思考。其次，如何針對各分群結果的各群特徵，採取適合之教學方法，亦是未來極為重要的研究方向。

（三）不同性別在直覺法則的表現差異探究

本研究顯示不同性別的學童在直覺法則使用的相關性有不同，這方面原因仍需深入探討，以取得更多的證據與說明。此外，造成不同性別使用直覺法則的差異原因，亦是未來非常值得深入探討的主題。

參考文獻

- 何健誼（2002）。直觀法則對K—6年級學童在體積概念學習上的影響。國立臺北師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 吳毓瑩、林原宏（1996）。潛在類別分析取向的除法概念結構。測驗年刊，43，345-358。
- 呂玉琴、陳瑞發（2004）。直觀規律對國小代課教師數學解題的影響。科學教育研究與發展季刊，34，66-87。
- 紀宗秀（2005）。從直觀法則分析學童的迷思概念及概念改變之研究。國立花蓮師範學院國小科學教育研究所碩士論文。
- 張玉枝（2002）。探討國二學生詮釋地球科學課本附圖的相關因素。國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文。
- 莊嘉坤（1995）。國小學生科學態度潛在類別的分析研究。國立屏東師範學院學報，8，111-136。
- 楊美惠（2002）。直觀規律對k—6年級學童面積概念之探究。國立臺北師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 蔡秉恆、黃天佑（2005）。直覺法則對兒童數學概念影響之研究。南大學報：數理與科學類，39(1)，91-110。
- 鄭蕙如（2005）。數學內容知識與數學認知能力之混合Rasch模式分析研究。國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系博士論文。
- 謝展文（2000）。直覺法則對於數學及科學學習的影響—以國小四、五、六年級學生為對象。國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文。
- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. pp.267-281 in B. N. Petrov and F. Csaki, editors. *2nd International Symposium on Information Theory*. Akademiai Kiado, Budapest, Hungary.
- Akaike, H. (1978). A Bayesian analysis of the minimum AIC procedure. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 30, Part A, 9-14.
- Austin, E. J., Deary, I. J., & Egan, V. (2006). Individual differences in response scale use: mixed Rasch modeling of responses to NEO-FFI items. *Personality and Individual Differences*, 40, 1235-1245.
- Bozdogan, H. (1992). Choosing the number of component clusters in the mixture model using a new Informational complexity criterion of the inverse-fisher information matrix. In O. Opitz,

- B. LAusen and R. Klar (Eds.) , *Information and classification: Concepts, methods and applications* (pp.44-45), New York, NY: Springer-Verlag.
- Fischbein, E. (1987) . *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.
- Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981) . Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 491-512.
- Fischbein, E., Tirosh, P., & Hess, P. (1979) . The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 , 491-512.
- Gunstone, R. F., & White, R. T. (1981) . Understanding of gravity. *Science Education*, 65, 291-299.
- Koeller, O. (1994) . *Identification of guessing behavior on the basis of the mixed Rasch model*. (ERIC NO ED369814) .
- Masters, G. N., & Wright, B. D. (1984) . The essential process in a family of measurement models. *Psychometrika*, 49, 529-544.
- Nunez, R. (1991) . A 3-Dimension conceptual space of transformations for the study of the intuition of infinity in plane geometry. *Proceedings of the Fifteen Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 362-368, Assisi, Italy.
- Rost, J. (1990) . Rasch models in latent classes: An integration of two approaches to item analysis. *Applied Psychological Measurement*, 14, 271-282.
- Rost, J. (1991) . A logistic mixture distribution model for polytomous item responses. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 44, 75-92.
- Rost, J., & Langeheine, R. (1997) . A guide through latent structure models for categorical data. In J. Rost and R. Langeheine (Eds.) , *Applications of Latent Trait and Latent Class Models in the Social Sciences* (pp. 13- 37) . New York, NY: Waxmann
- Rost, J., Carstensen, C., & von Davier, M. (1998) . Applying the mixed Rasch model to personality questionnaires. In J. Rost & R. Langeheine (Eds.) , *Application of latent trait and latent class models in the social sciences* (pp.324-332) . Munster Germany: Waxmann.
- Schmidt, K. M. (2002) . Using the mixed Rasch model to discover latent classes of cognitive self-efficacy. *Paper presented at the annual workshop of The Institute for Objective Measurement*, New Orleans, LA.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (1996) . Intuitive rules in science and mathematics: The case of "More of A—More of B". *International Journal of Science Education*, 18, 653-667.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000) . *How Students Misunderstand Science and Mathematics : Intuitive Rules*. New York, NY: Teachers College Press.
- Stavy, R., Tirosh, D., Tsamir, P., & Ronen, H. (1996) . *The Role of Intuitive Rules in Science and Mathematics Education*. (Unpublished thesis). School of Education, Tel-Aviv University, Israele.

- Tall, D. O. (1981). Intuition of infinity. *Mathematics in School*, 10(3), 30-33.
- Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). The intuitive rules theory and inservice teacher education. In F. L. Lin (Ed.), *Proceedings of the 1999 International Conference on Mathematics Teacher Education*. (pp.205-225). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Torff, B., & Sternberg, R. J. (Eds.) (2001). *Understanding and teaching the intuitive mind: Student and teacher learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Zazkis, R. (1999). Intuitive rules in number theory: Example of “the more of A, the more of B” rule implementation. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 197-209.