

貳、文獻探討

數學教育的成功，要從根本上改變教學的品質，教師的素質是數學教育成功的關鍵(林宜臻，2010)。本章針對「哪些數學知識是教師幫助學生學習數學所必需的？」，從「數學新手教師標準」及「專業教師標準」等文獻中進行「初任的小學數學教師所需的數學知識與數學教學」的資料彙整分析，理出「數學教學專業知能」要素；從剖析美國、日本、中國、芬蘭、新加坡以及香港等之小學教師證照取得管道，進而探討如何確保小學教師具有數學教學專業知能；由分析我國國小數學教學專業知能培育現況，以為思考國小教檢如何因應。

一、數學教學專業知能

教學前的準備、教學中的教學環境營造、教學後的反省等架構良好的教學模式，但因學科本質的不同，各學科的教學方法、教學重點等學科教學知識並不盡然相同，究竟一位教師需擁有哪些知能才能勝任於數學教學呢？本節針對「哪些數學知識是教師幫助學生學習數學所必需的？」，彙整分析數學教師專業標準等之相關文獻，理出職前培訓階段完成後，小學數學教師的數學教學專業知能的要素。

(一) 教師的專業知能

Shulman (1986) 將教師專業知能內涵分成(1) 學科內容知識(Content knowledge, CK)：學科領域中的概念及架構；(2) 一般教學知識(General pedagogical knowledge, PK)：教學技巧、原理、策略及對學生學習的瞭解等；(3) 學科教學知識(Pedagogical Content Knowledge, PCK)：將學科知識轉變成學生真正能夠理解、學習的知識。Shulman 於 1987 年再納入(4)課程知識(Curriculum knowledge)：對教材與課程的瞭解；(5) 學習者認知知識(Knowledge of learners and their characteristics)：對學生既有知識與概念的瞭解；(6) 教育情境脈絡知識(Knowledge of educational contexts)：對融入教學活動的社區文化等資源的瞭解；(7) 教育目的與價值及其哲學與歷史背景等的知識(Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds)。

(二) 數學教學的專業知能

Hill 與 Ball (2004)以及 Ball, Thames 與 Phelps (2008) 將 Shulman (1986, 1987) 對於教師知識的分類，以數學教學的觀點，進一步闡釋，形成數學教學知識內涵如下：

如圖 1 所示：Ball et al. (2008)將「數學教學知識(Domains of Mathematical Knowledge for Teaching)」分成「學科內容知識(Subject matter knowledge)」與學科教學知識(Pedagogical content knowledge)。

「學科內容知識」涵蓋：「一般內容知識(Common content knowledge, CCK)」、「水準的內容知識 (Horizon content knowledge, HCK)」及「專業的內容知識 (specialized content knowledge, SCK)」。其中「一般內容知識」指的是教師具備的數學知識和技能，必須能夠分辨學生或教科書定義的錯誤等，以及能正確使用專有名詞和符號(Ball et al., 2008 : 399) ；「水平的內容知識」指的是教師能察覺數學課程中的各項數學主題如何連結，例如：一年級教師須知所教的數學如何與三年級所學的，甚至與日後的數學相關概念連結(Ball et al., 2008 : 403) ;「專業的內容知識」指用於教學用的數學各主題 (如代數、分數、小數.....等) 的專門知識，如減法的「拿走 (take-away) 型」和「比較 (comparison) 型」等(Ball et al., 2008 : 400)。

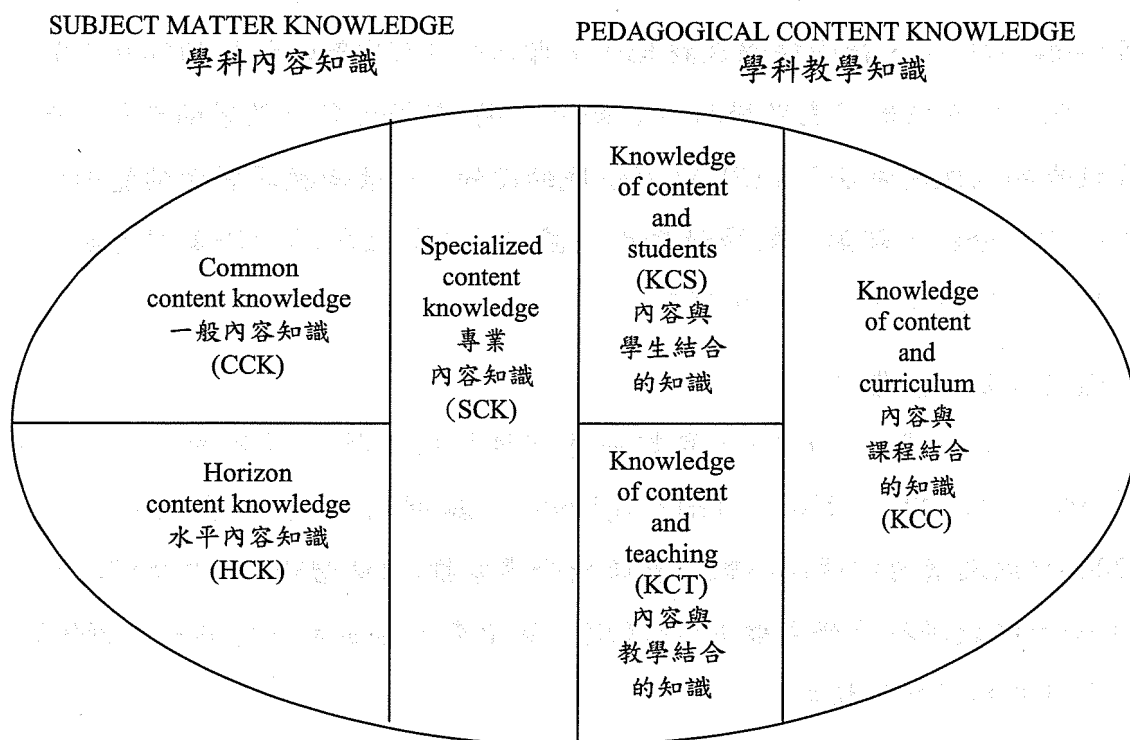


圖 1：數學教學知識

(摘自 Ball, Thames, & Phelps, 2008 : 403)

「學科教學知識」涵蓋：「內容與課程結合的知識(Knowledge of content and curriculum, KCC)」、「內容與學生結合的知識 (knowledge of content and students, KCS)」、「內容與教學結合的知識 (knowledge of content and teaching, KCT)」。

其中「內容知識與課程結合的知識」包括各主題的知識及其組織架構的「內容知識」與特定年級主題的課程規劃的「課程知識」(Ball et al., 2008 : 391)；「內容知識與學生結合的知識」指的是教師必須能預期：學生可能的想法以及困惑；所舉的例子能引起學生什麼樣的興趣與動機；所安排作業學生可能如何完成，會覺得容易還是困難，此外，必須能聽懂及解釋學生不能完整表達的語言，這些都需要對數學的熟悉，並瞭解學生及其數學的思維 (Ball et al., 2008 : 401)。「內容知識與教學結合的知識」指的是教師須具備數學教學設計的知識，能循序教學，選擇由哪些例子開始，以及哪些例子是用來讓學生深入內容；能評估使用某些特殊想法進行教學的優缺點，並能辨別不同的教學方法能否提供充分的教學，這些都需對數學以及對影響學生學習的教學法的瞭解(Ball et al., 2008 : 401)。

姚如芬(2006:314)將數學教學專業內涵界定為(1) 數學知識：數學專業知識、數學知識體系、數學與生活或其他領域的連結與應用；(2) 數學課程知識：數學課程的目標/精神/內涵、數學課程教材地位之關聯性；(3) 數學教學的認知：數學教學的主張、以有效形式表徵學科內容知識；(4) 對學生學習數學的理解：對學生學習數學的認識與看法等；(5) 教育情境的認知：對數學教學資源的覺知與應用。以此作為分析、歸類「數學教學成長團體」成員之數學教學專業發展的依據及其數學教學專業內涵的變化情形。

(三) 數學教師專業知能指標

本節主要針對美國三階段師資專業培育監控機制所提數學教學相關準則 (INTASC, 1995 ; NCATE , 2008 ; NBPTS, 1998)、澳洲的卓越數學教師標準 (AAMT, 2006), 以及國內有關國小職前教師數學專業標準(林碧珍、蔡文煥, 2006, 2007)、小學教師數學教學發展標準(李源順、林福來、呂玉琴、陳美芳, 2008) 等探討數學教師專業知能指標。

1. 國外數學教學標準

(1) 美國數學教師標準

以下就美國三階段師資專業培育監控機制行政首長協會(Council of Chief State School Officers ,CCSSO)、全美師資培育認證委員會 (National Council for Accreditation of Teacher Education, NCATE)、全美專業教學標準委員會(National Board for Professional Teaching Standards , NBPTS) 所提數學教學相關準則陳述於後：

1) INTASC(CCSSO)的數學新手教師 10 項準則

全美州教育行政首長協會(Council of Chief State School Officers ,CCSSO) 主要探討 K-12 教育的主要政策並形成共識，引領美國新手教師資格認證的「新進教師評鑑及支援聯盟 (Interstate New Teacher Assessment and Support Consortium, INTASC)」是 CCSSO 的計畫之一，主要探討有關新進教師應具什麼樣的知識與專業素養，方能有效教學，其中數學新手教師相關內容知識及教學知識的 10 項準則(Principle)如下(INTASC,1995)：

■ 準則 1：

擔任任何年級的數學教師須瞭解數學的關鍵概念及程序(procedures)，並且對 K-12 的數學課程擁有廣泛瞭解。他們處理數學及數學的學習多於程式性的知識。他們瞭解學科架構、數學的來龍去脈，以及科技和學科間的相互影響 (INTASC,1995:13)。

■ 準則 2：

擔任任何年級的數學教師應瞭解孩童如何學習與發展，並能提供支援孩童智力、社交和個人發展的學習機會 (INTASC,1995:39)。

■ 準則 3：

擔任任何年級的數學教師應瞭解學生學習的差異，並能創造適應不同學習者的教學機會 (INTASC,1995:39)。

■ 準則 4：

擔任任何年級的數學教師應瞭解與使用多種的教學策略，鼓勵學生發展批判思考、解決問題與表達技巧 (INTASC,1995:40)。

■ 準則 5：

擔任任何年級的數學教師應利用對個人與團體的動機與行為的理解，創造鼓勵正向的社會互動、積極的學習參與和自我動機的學習環境

(INTASC,1995:40)。

■ **準則 6：**

擔任任何年級的數學教師應利用有效的口頭、非口頭和媒體傳播技術知識，促進教室內的積極提問、合作與支援性的互動(INTASC,1995:41)。

■ **準則 7：**

擔任任何年級的數學教師應以學科內容知識、學生、社群與課程目標為基礎規劃教學(INTASC,1995:41)。

■ **準則 8：**

擔任任何年級的數學教師應瞭解並使用正式與非正式的評量策略確保學習者智力、社交與身體的持續發展(INTASC,1995:41)。

■ **準則 9：**

數學教師是反思的實踐者，他們能持續評鑑他們的選擇及施於他人（學生、家長和其他學習社群的專家）之效果，並能主動尋求專業成長的機會(INTASC,1995:41)。

■ **準則 10：**

數學教師能促進學校同仁、家長以及社區服務機構間的關係，以支持學生的學習和良好行為(INTASC,1995:42)。

2) NBPTS 的數學教師專業標準

成立於 1987 年的美國專業教學標準協會（National Board for Professional Teaching Standards，NBPTS）提供全國性教學標準認證系統的教師評鑑，使教師於教學現場的知與行，能維持高而且嚴格的標準(NBPTS ,2009)，他們提出數學教師專業標準如下(NBPTS,1998)：

■ **標準 1：對公平與接納的承諾**

有素養的數學教師承認每位學生的獨特性與價值，他們相信所有的學生都可以學習，也應該接受所有的數學課程；他們將此信念付諸於行動，有系統地提供所有學生公平且完整的數學(NBPTS,1998:13)。

■ **標準 2：學生的知識**

有素養的數學教師明白學生是經由多樣化的教育、社會、文化背景與影響學生學習經驗等型塑而成。他們利用自己對學生如何學習和發展的知識，進而指導課程及做教學決定(NBPTS,1998:15)。

■ **標準 3：數學的知識**

有素養的數學教師理解數學概念與數學、其他學科，以及學校外的世界間的

有效連結(significant connections)，並將這些概念應用在。他們擁有數學概念、原理、技術與推理等豐富的知識，用於設定課程目標與教學(NBPTS,1998:19)。

■ 標準 4：教學的知識

有素養的數學教師賴其廣泛教學知識，決定課程、選擇適當的教學策略、訂定教學及評量計畫(NBPTS,1998:25)。

■ 標準 5：教學的藝術

有素養的數學教師以優雅(elegant)且具威力的方法挑戰教學，他們的實踐反映他們個人高度綜合對學生的關懷、對數學與教學的熱愛、對數學內容的理解與應用的能力，以及既有的與創新的豐富教育實踐知識等(NBPTS,1998:29)。

■ 標準 6：學習環境

有素養的數學教師創造刺激、關懷和包容性的環境。他們成立共同體的組織(communities)，使參與其中的學生願意承擔學習責任、從事智慧型冒險、發揮自信與自尊、獨立與合作方式進行工作，以及重視數學(NBPTS,1998:33)。

■ 標準 7：使用數學

有素養的數學教師幫助學生建立積極面對數學的性格，並促使所有學生具有將數學成為瞭解周遭世界的方法的能力。他們將教學聚焦於培養學生對數學的理解，提供學生調查、探索、發現結構與關係，並展現解決問題的靈活度與毅力；創造與使用數學模型；形成自己的問題，證明與溝通他們的結論等的學習機會(NBPTS,1998:35)。

■ 標準 8：科技與教學資源

有素養的數學教師知道並盡可能使用最新技術和其他資源，促進學生數學的學習。他們選擇、適應及創造具有魅力的教材，並利用學校和社區的人力資源，以提高學生對數學的理解和運用(NBPTS,1998:39)。

■ 標準 9：評量

有素養的數學教師將評量結合於教學，以促進全體學生的學習。他們設計、選擇和運用一系列正式及非正式符合他們教育目標的評量工具，幫助學生發展自我評量技能，鼓勵他們反映自己的表現(NBPTS,1998:41)。

■ 標準 10：反思與成長

有素養的數學教師經常反省教與學。他們跟得上數學與數學教學的變化，不斷充實他們的知識與改進他們的教學(NBPTS,1998:43)。

■ 標準 11：家庭與社區

有素養的數學教師將家庭納入孩童的教育，並幫助社區瞭解數學與數學教學

在現今世界的角色，盡可能讓社區支持教學(NBPTS,1998:45)。

■ 標準 12：專業團隊(Professional Community)

有素養的數學教師和同行及其他教育專業人員合作，以加強學校的課程，提升課程的質量，以及跨年級的一貫性，精進數學教育領域的知識，並改善該領域內的教學(NBPTS,1998:47)。

3) NCATE 委由 NCTM 的職前教師數學相關素養標準

1950 年代以後，美國教師教育主要由綜合大學和一般大學的教育學院(系)負責培養，由於教育經費與資源的競爭，制定教師教育機構評鑑標準反應教師教育機構的實際情況的全美師資培育認證委員會 (National Council for Accreditation of Teacher Education, NCATE) 應運而生，於 1954 年得到官方正式認可，是全美國第一個教師教育認證機構。教育機構藉由向 NCATE 申請評鑑，證明辦學能力的同時，必須要努力於辦學，以達 NCATE 標準的要求，NCATE 促進師教育機構教學水準的提高，進而保證教師教育品質。為培育更有競爭力的教師，NCATE 自 2001 年採用以表現為基礎的認可系統，進行師資培育之認證，為確保職前教師數學相關素養，委由美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics,NCTM)制訂教師候選人有關知識、能力與素養的標準，該標準分為「過程標準(Procedure standards)」、「內容標準 (Content standards)」、「教學標準 (Pedagogy standards)」、「實地經驗標準 (Field-based experience standards)」。

數學教育相關標準目前分為「初等數學專家標準 (elementary mathematics specialist standards)」、「中等數學標準 (middle grades mathematics standards)」、「中學數學標準 (secondary mathematics standards)」等三套，提供培育數學教師課程用。其中「初等數學專家標準」用於培育 PK-8 年級階段；「中等數學專家標準」用於培育 5-8 年級階段；「中學數學專家標準²」用於培育 5-12 年級的中學或高中數學教師。

基礎數學教育方面，要求教師能認識與瞭解，並能使用「數與運算」、「代數」、「幾何」、「測量」、「數據分析與機率」等主要概念，過程中能進行「問題解決」、「推理與證明」、「溝通」、「連結」及「表達」(NCATE,2008:62)。「過程標準」涵蓋 (1)解決問題(problem solving)：能認識、理解，以及應用數學問題的過程；(2)推理和證明(reasoning and proof)：能推理、建構與評估

² NCTM 課程標準中最常被使用的一套。

數學的論辯，並基於數學的嚴謹與深究發展評析的論述；(3) 數學溝通 (mathematical communication)：能以口頭與書寫方式溝通數學想法；(4) 數學連結 (mathematical connections)：能辨識、使用，及進行數學概念內、外及情境中的連結，建立數學的理解；(5) 數學表徵 (mathematical representation)：以數學概念的不同表徵方式，來支援和加深學生對數學的理解；(6) 科技 (technology)：將科技技術作為教學和學習數學的重要工具；(7) 處置 (dispositions)：支持有建設性的數學過程和數學學習 (NCATE, 2008：62；NCTM, 2003：2-3)。

「內容標準」涵蓋 (1) 數與計算 (2) 代數 (3) 幾何 (4) 資料分析、統計及機率 (5) 測量。

「教學標準」涵蓋 (1) 教學策略 (instructional strategies) (2) 班級組織模式 (classroom organizational models) (3) 數學概念和過程的表達方式 (ways to represent mathematical concepts and procedures) (4) 教材與資源 (instructional materials and resources) (5) 提升論述方式 (ways to promote discourse) (6) 評量學生理解的工具 (means of assessing student understanding) 等能深入瞭解學生如何學習數學，以及教與學的教學知識 (NCATE, 2008：62；NCTM, 2003：3-4)。

「實地經驗標準」指數學師培生應有機會：(1) 檢核數學本質如何教及學生如何學；(2) 觀察與分析一系列數學的教與學：聚焦於作業 (tasks)、論述 (discourse)、環境 (environment) 和評量 (assessment)；(3) 於個別、小組、大班的不同班級型態進行教學；(4) 參與跨級的數學學習課程。實習之際，能有更具水準的老師與具有該年段教學經驗的大學院教授，予以監督與指導 (NCATE, 2008：62)。

(2) 澳洲卓越數學教學標準

澳洲數學教師協會 (The Australian Association of Mathematics Teachers, AAMT) 期望所有數學教師 (1) 擁有教該年級及 (或) 數學的適切素質；(2) 以負責且適切的表現執行職責；(3) 在教室實務中具有個人鮮明的教學觀，訂定卓越數學教學標準，將標準分為「專業知識 (Professional knowledge)」、「專業特質 (Professional attributes)」、「專業實務 (Professional practice)」三個向度 (AAMT, 2006：1)。

「專業知識」涵蓋 (1) 對學生的知識 (Knowledge of students)：瞭解學生的社會與文化的背景、學生所認知與使用的數學、學生喜歡的學習方式，以學生對數學學習的信心；(2) 對數學的知識 (Knowledge of mathematics)：能將數學恰如

其分給予不同層級學生，知道數學如何呈現與表達，也知道數學為何要教。他們對於數學內與數學間，以及將數學與其他科目和社會的連結，具備信心與能力；(3) 對學生數學學習的知識(Knowledge of students' learning of mathematics)：瞭解目前數學學習的相關理論，以及一系列有效的策略和技巧：數學的教與學、提升數學學習的樂趣與正面態度、訊息利用與溝通技術、鼓勵家長參與等(AAMT,2006：2)。

「專業特質」涵蓋 (1) 個人特質(Personal attributes)：幫助學生學習的特質；(2) 個人專業的精進(Personal professional development)：致力於教學實務的不斷改進與個人專業的精進；(3) 社群責任(Community responsibilities)：積極貢獻數學教學專業於教室外的家庭學校與社區(AAMT,2006：3)。

「專業實務」促使學生的認知（指數學內容）與情感（指學習數學的感受）有正面的效果差異，涵蓋(1) 學習環境(The learning environment)：極大化學生學習機會的環境；(2) 學習計畫(Planning for learning)：有條理組織讓學生得以自發性學習的經驗；(3) 教學行動(Teaching in action)：引發學生的好奇心，挑戰他們的思維，並激發他們的積極學習。(4) 評量 (Assessment)：定期評量並報告學生在認知（指數學內容）與情感（指數學學習的感受）層面，包含能力、內容、過程與態度的狀況(AAMT,2006：4)。

2. 國內數學教學標準

林碧珍與蔡文煥(2006，2007)主要針對國小輔導教師專業發展訂指標，共包含(1) 數學專業素養：專業信念、專業發展、反思能力；(2) 數學教學知能：數學課程與教學規劃、數學學科、數學教學、掌握學生學習數學認知、數學學習評量、數學課程與教學評鑑，以及 (3) 實習輔導知能等三個向度，其中「(3) 實習輔導知能」不在本研究討論範圍。

劉曼麗(2006a、b, 2008)發展的國小教師數學教學專業基準共包含(1)基本理念：教育改革理念、學習理論、課程理論；(2) 內容知識：數學知識和能力以及數學思維 (3) 學科教學知識：課程、教學與學習以及評量 (4)教師專業成長：反思和進修等四個向度為其架構，另基於解題是數學教育的核心，因此將佈題、解題與溝通做為數學教學的主要過程。

李源順、林福來、呂玉琴、陳美芳整合了國內外機構或學者數學教學專業知

能相關文獻，發展出 6 個國小教師數學教學專業知能面向，47 條的標準（2008：648）：

- (1) 數學知識 (Mathematics Knowledge)：對數學教學的學科知識
 - MK01.瞭解數學課程教育理念和課程目標
 - MK02.瞭解主題單元內的教學順序
 - MK03.瞭解各單元內的教學目標、關鍵概念、與實例
 - MK04.瞭解概念之間的關係
 - MK05.瞭解如何進行連結、溝通、推理、表徵和解題
 - MK06.瞭解生活中使用的數學概念和用語與抽象的數學概念和用語的異同
 - MK07.有牢靠的高中學科背景知識和瞭解
 - MK08.有大學基礎數學的素養
 - MK09.瞭解數學與日常生活、其他學科和職業上的關聯與應用
- (2) 學生認知 (Student Cognition)：對學生認知的知識
 - SC01.瞭解學生的宏觀認知發展理論
 - SC02.瞭解學生的微觀認知發展理論
 - SC03.瞭解學生的迷思概念及其源由
 - SC04.瞭解學生的語言、書寫…等溝通能力和如何更有效率的學習
- (3) 教學方法 (Teaching Method)：對教學法的知識
 - TM01.瞭解有助於數學教學的班級經營策略
 - TM02.瞭解各種教學方法的適用時機與應注意事項
 - TM03.瞭解 ICT (資訊溝通科技) 與相關教學資源的適用時機與應注意事項
- (4) 教學實務 (Teaching Practice)：對教學實務的知識
 - TP01.能營造安全、互信和正向的數學學習環境
 - TP02.能運用恰當的班級經營策略，幫助學生進行數學學習
 - TP03.能運用適當的題材，引發學生的學習興趣與動機
 - TP04.能依據學生的認知進行教學，與破除學生的迷思概念，提升學習成效
 - TP05.能運用多元優選的教學策略達成教學目標
 - TP06.能有效率的使用 ICT (資訊溝通科技) 與相關教學資源
 - TP07.能充分利用課餘時間，擴展學生的學習
 - TP08.能激發學生主動思考與學習，幫助學生學得數學能力或後設認知能力
 - TP09.能評析教學教材
- (5) 教學評量 (Teaching Assessment)：對數學教學評量的知識
 - TA01.瞭解評量的相關理論及使用時機
 - TA02.能運用各種評量方式適切的評量學生的學習成效
 - TA03.能運用評量結果以監控和檢視教學成效

- TA04.能利用評量結果和學生家長或其他人有效溝通學生的成就
- (6) 專業責任 (Professional Accountability)：包含情意、信念等的專業責任
- PA01.能在法令許可的範疇下，自主自律的進行教學相關事務
 - PA02.能在法令規範的上班時間內奉獻自己，並且有強烈的責任感
 - PA03.能在教學前進行教學反思
 - PA04.能在教學中進行教學反思
 - PA05.能在教學後進行教學反思
 - PA06.能進行教學行動研究，培養創造思考能力
 - PA07.有進行專業發展的責任感
 - PA08.能依據教師個人的成長歷程而能自信的前進
 - PA09.期望和督促學生培養正向的價值、態度和行為
 - PA10.能公正、一致的對待學生，關心學生當作學習者的發展
 - PA11.能給與有特殊學習需求的學生更多的支持或挑戰
 - PA12.能尋求校內資源的協助獲得成長的機會
 - PA13.能適時的協助同儕，使同儕在有自尊、有挑戰性的環境下獲得成長的機會
 - PA14.與同儕評論教學實務時，能與理論做連結
 - PA15.對學校有認同感，為學校的榮譽盡心盡力
 - PA16.能夠敏感、有效率的和家長或監護人溝通，以幫助學生成長
 - PA17.能和師資培育機構配合教導職前教師之學習
 - PA18.具有為國家和社會貢獻的責任感

二、教師證照取得管道

本節試圖探討美國、日本、中國、芬蘭、新加坡以及香港等之小學教師證照取得管道，進而探討如何確保小學教師具有數學教學專業知能。

(一) 美國

本節試圖分析美國最為普遍採用且被視為客觀公正的教師資格考試體系的 Praxis Series，瞭解該教師資格考試體系的特色如何？如何測試？以及測試內容如何等之性質與實施方式。

1. Praxis Series之功能

隨著教師專業化的需求，如何進行客觀且適切的評量，構建一個客觀評估國小準教師的數學教學專業知能的標準化測試體系，業已為時勢所需。美國俄亥俄州於 1825 年首創教師資格證書制度，而由美國教育測驗中心(Educational Testing Service, ETS) 主導的「Praxis Series」標準化教師資格考試體系則將教師