

辯，採納各方回饋、爭辯與反省的意見後，2000年提出的《學校數學的原則和標準》，具體指出K-2、3-5、6-8、9-12等四階段的數學教學的內容、方法和要求。2002年《沒有落後學生法案》發現各州設定的每學年目標及內容並不一致，因此，2006年公布《課程焦點：追求一致性》，明示各學年數學核心課程內容。2008年由數學教育家、認知學家和數學家組成的國家數學諮詢委員會，根據可用數據，進行詳細分析，提出應當全面培養學生的概念理解、流暢計算以及問題解決的能力(NMAP, 2008)。

我國97年(2008年)公布，預計100學年度實施的「國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域」，以如下方式呈現我國數學課程綱要：「1.第一階段(國小一至二年級)：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形之認識。……(國民教育司，2009a：4)」，雖有「我們希望課程目標的達成，可以培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學生欣賞數學的態度及能力(國民教育司，2009a：4)」，並指出能力目標的重要性(國民教育司，2009a：1-3)，但是只以「知識技能目標」方式呈現，而將能力目標隱於一般的論述之中，易引起我國只重視「知識技能目標」之誤解，宜以數學課程總目標或以核心目標方式，提綱挈領指出「知識技能目標」與「能力目標」而非隱於論述中。

相對於此，我國溯自1952年版的小學目標「2.指導兒童解決日常生活中關於數的問題，培養其理解思考的能力。」(教育部，1948a)，1952年版的中學目標「4.培養以簡馭繁以已知推未知之能力。」(教育部，1952b)或是芬蘭、荷蘭、日本、美國等國的數學課程目標，都將「知識技能目標」與「能力目標」呈現於數學課程總目標或以核心目標方式呈現。

(三) 數學課程取向

1. 重視「PISA型學力」與「生活數學」之數學應用

「問題解決」被視為一種增進思考技能的手段，「問題解決」並不只是學習數

學的目標，也是主要的手段 (NCTM, 2000: 52)。芬蘭自 1985 年一直將「問題解決」列為課程總體目標之一，從小一開始安排「問題解決」課程 (FNBE, 1985、1994、2004)，1990 年起，芬蘭同時重視「日常生活數學」，在就學之初甚至學前教育就成為一項普遍的活動 (Malaty, 2009)，「日常生活數學」使芬蘭因此在 PISA2003 及 2006 分居第二 (Malaty, 2007: 420-421)；荷蘭現實數學教育教父 Freudenthal 自 1970 年代起呼籲數學與現實連結 (Freudenthal, 1983)，指出數學教學不能只侷限於形式符號與邏輯體系，主張「學生不是學習『數學』，而是學習『數學化』」，應提供學生現實世界中的具體問題，讓學生運用數學知識、技能以及數學思維，經由觀察、分析與比較，以及類比、歸納的過程中，發現未知的規律、關係與結構，進而形成數學概念，強調數學與現實連結的荷蘭在 PISA2003 及 2006 分居第四與第五 (OECD, 2007)，也有不錯的表現；日本從其國內教育課程實施狀況及國際性學力調查結果，發現學生計算基礎與基本知識與技能的紮根情形良好，但存有對計算意義理解不夠等以及未能利用已學的知識與技能充分活用於生活與學習的課題 (文部科学省, 2007a、2007b)，小學階段增設「數學的活動」領域，從 1 年級開始增列「數量關係」，中學階段由現行的「數與式」、「圖形」、「數量關係」3 領域，改為「數與式」、「圖形」、「函數」、「資料的活用」4 領域，將其中的「數量關係」改為「函數」，增設「資料的活用」(文部科学, 2008b、2008f)，較之學科知識的學習，更重視「社會中能使用的能力」PISA 型的學力觀 (中原忠男, 2008)；美國基於社會需要能應用數學思考解決問題的公民，自 1980 年代起重視問題解決，NCTM 1980 年公布的《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議》，將問題解決作為 1980 年代數學教育的核心 (NCTM, 1980)。

總之，自 1980 年美國公布《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議》以來，無論是芬蘭、荷蘭或是日本，迄今都將「問題解決」作為數學教育的核心，並將數學活用列為目標。1990 年起，芬蘭重視「日常生活數學」，在就學之初甚至學前教育就成為一項普遍的活動，重視社會中能使用的能力的「PISA 型學力」以及與生活連結的「生活數學」已成趨勢，我國自國民政府治台後的 1952 年版至 1990 年版

的小學總體目標(教育部, 1952、1962a、1968a、1975、1993、2000), 以及中學的總體目標自 1962 年版至 1990 年版, 僅 1983、1985 年版未納入(教育部, 1962b、1968b、1972、1983a、1985、1994、2000), 無論中小學早已重視形成數學問題與解決數學問題的能力, 反而於 2003 年版只是「學習應用問題的解題方法」(教育部, 2003c: 22), 2008 年版雖有「懂得利用推論去解決數學問題, 包括理解和解決日常問題, 以及在不熟悉解答方式時, 懂得自尋解決問題的途徑」(教育部國民教育司, 2009a: 1), 卻隱含於一般論述之中。

2. 兼顧「邏輯思考力」與「直觀力」之數學思維

芬蘭數學課程的核心任務中列有「提供經驗做為理解數學概念與結構的基礎」, 以及「找出現象間的相似處、相異處、規律和因果關係」的目標(FNBE, 2004b:158、161); 荷蘭小學主要核心目標列有「學生學習解決實際與正式的算術及數學的問題, 並能明確提出論點」, 同時重視洞察力(insight), 強調估算及利用靈巧方法 (clever ways)與縮減或多或少的標準程序的方式進行計算(Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008a:5), 中學也強調經由洞察力的推估調整計算結果(Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008b: 2); 日本小學數學課程目標強調培養對日常的事象能推估(見通しをもつ)及邏輯思考 (文部科學省, 2008a: 35)。

培養邏輯思考能力常見於數學目標之中, 但無論是芬蘭、荷蘭或是日本的數學科目標中, 除列有邏輯思考能力的培養外, 強調以直觀形象後的發現, 先行預估推測, 再邏輯思考、判斷、表達與反思, 同時重視邏輯思考能力與直觀力, 相對於此, 我國雖指出「直觀讓學生能從根本上, 擺脫數學形式規則的束縛, 豐富學童在抽象層次上的想像力與觀察能力, 這二者是兒童數學智能發展中的重要指標。」(教育部國民教育司, 2009a: 2), 但隱於一般的論述, 未明列於目標之中。

3. 均衡「水平式數學化」與「垂直式數學化」教學方式

芬蘭的「問題解決」與「日常生活數學」的數學課程, 使芬蘭在 PISA 獲得成功, 然而芬蘭存有「中學畢業的數學程度無法滿足高中所需」的課題。芬蘭 1980-1990

最具代表的領導人物 Erkki Pehkonen 認為學校的數學並非真正的數學，而是綜合性的教育科目 (Malaty 2006:422 引自 Pehkonen & Zimmermann, 1990:10)。因此，自 1995 年起，數學課程目標朝向課程的均衡設計除了繼續強調「問題解決」及「日常生活數學」外，也將「數學思維」和「數學結構」列為新課程的基本要素 (FNBE, 2004b; Malaty, 2007: 424)；荷蘭數學教育深受 Freudenthal 的強烈影響，重視水平式的數學化勝於垂直式 (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000: 2)，但在 Freudenthal 的 1991 年版的最後一本書，接受 Treffers 將數學化分為水平式及垂直式的觀點，視水平式及垂直式這兩種數學化形式的價值相等，並認為水平式及垂直式的數學化，適用於各種層次的數學活動 (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 12)，而不再獨尊水平式數學化 (Freudenthal, 1991)，由重視與現實連結的水平式數學化，朝向兼具水平式與垂直式數學化，並視此二種數學化形式的價值相等 (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 12)，強調現實的基礎上，同時重視數學內外部的連結；日本 1989 年版開始重視學習過程及培養能主動因應社會變化的能力與態度 (教育情報ナショナルセンター, 1989a、b、c)，2008 年版小學數學課程目標「主動地應用於生活與學習的態度」(文部科學省, 2008a: 35)，中學數學課程目標「培養主動活用、思考及判斷的態度」(文部科學省, 2008e: 40)，仍重視能力與態度的培養外，視數量形的基礎/基本知識與技能是生活與學習的基盤，強調依照發展與學年階段編排螺旋式課程，重視基礎/基本知識與技能的紮根 (文部科學省, 2008b: 4)；美國歷經「須具備純熟的數學運算練習才能引出真正的概念理解」，或「須先理解數學概念才能進行有意義的數學運算」的論辯，國家數學諮詢委員會根據可用的龐大數據，進行分析後，於 2008 年指出「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果 (NMAP, 2008:13)，並在學習過程的建議中提出應當全面培養學生的概念理解、流暢計算以及問題解決的能力 (NMAP, 2008: 20)。

數學課程的目標常見獨尊「水平式數學化」或獨尊「垂直式數學化」兩者擇其一，芬蘭面臨「中學畢業的數學程度無法滿足高中所需」的課題，因此除了繼續強調「問題解決」及「日常生活數學」外，也將「數學思維」和「數學結構」列為新

課程的基本要素；荷蘭數學教育深受現實數學教育教父 Freudenthal 的強烈影響，重視水平式的數學化勝於垂直式，Freudenthal 的 1991 年版的最後一本書，接受 Treffers 的觀點，由重視與現實連結的水平式數學化，朝向兼具水平式與垂直式數學化，並視其等價，同時重視數學內外部的連結；日本 1989 年版開始重視學習過程及培養能主動因應社會變化的能力與態度，2008 年版中小學數學課程目標依然重視能力與態度的培養外，視數量形的基礎/基本知識與技能是生活與學習的基盤，同時重視基礎/基本知識與技能的紮根；美國強調「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果(NMAP,2008:13)，建議學習過程的中提出應當全面培養學生的概念理解、流暢計算以及問題解決的能力(NMAP,2008：20)。

總之，數學課程同時兼顧「水平式數學化」及「垂直式數學化」業已成趨勢。我國 89 年版中小學數學目標中除強調「掌握數、量、形的概念與關係」外，同時「重視發展形成數學問題與解決數學問題的能力。」；92 年版「能利用常用數量關係，解決日常生活的問題」，較著重於利用數學所學解決日常生活的問題。相對於此，溯自我國 52 年版小學數學目標「1. 從接觸日常生活中有關數量問題，養成兒童正確數量觀念，了解數量的意義；2. 從處理日常生活中有關數量問題，培育兒童基本數量知識，訓練計算技能；3. 從應用日常生活中有關數量問題，指導兒童了解數量關係，解決數量問題；4. 從接觸、處理、應用日常生活中有關數量問題，輔導兒童發展計算的興趣，實測的技能，以及計算正確迅速的能力和習慣。」業已重視從生活中學習數學。

4. 重視「數學表達」

芬蘭新課程中的核心任務之一是「溝通」，目標中列有「學習利用圖片、具體模型和工具，以書寫或口頭方式證明他們的解法和結論」(FNBE ,2004a:158)、「證明他們的行動和結論，並呈現解法給其他人」(FNBE ,2004a: 161)、「學習明確地表達他們的想法，並證明他們的方法與結論。」(FNBE ,2004a:163)；荷蘭將「學會溝通」列於任何一門學科都應指向的跨學科目標中，而且主要核心目標中列有「明確提出論點」(Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap,2008a：8)、「學生學

會使用適當的數學語言來組織自己的想法，向其他人解釋，並學會理解其他人的數學語言」、「學生學習有系統地描述、組織及視覺化數據，並學習以批判的角度評估數據、表達與下結論」(Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008b : 2)；日本新課程的特色之一在於要求全學科培養溝通能力的「語言力」，強調語言不僅是知的活動（邏輯與思考），同時是溝通及感性與情緒的基盤，數學重視由活用比較、分類、關連等思考的技法，並以歸納思考、演繹思考等方式說明之，小學數學總目標中，列有「培養對日常的事象能推估及邏輯思考，以及表達的能力」(文部科學省，2008a：35)，中學的數學學科目標「學會數學的表達與處理的方法」(文部科學省，2008e：40)，中小學都重視培養數學溝通的能力；美國 1989 公布的《學校數學課程與評鑑標準(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)》五項目標中亦列有「學會數學溝通」的目標 (NCTM,1989)。

以數學語言組織自己的想法、表達與溝通列於數學科目標中，已成趨勢，我國 82 年版「培養以數學語言溝通、討論、講道理和批判事物的精神」(教育部，1993) 及 89 年版「發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。」業已將表達溝通列於目標中 (教育部，2000)。97 年版雖將「數學溝通能力：溝通包括理解與表達兩種能力，所以，數學溝通一方面要能瞭解別人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊；另一方面，也要能以書寫、圖形，或口語的形式，運用精確的數學語言表達自己的意思。」(教育部，2008：2)，但隱於一般的論述之中，未明列於總目標之中。

5. 落實「活用題型」與「形成性評量」

荷蘭自 1960 年代末起，荷蘭數學教育採用「現實數學教育(Realistic Mathematics Education, RME)」，RME 強調評量應如金字塔涵蓋所有數學領域的深度和廣度(De Lange, 1995)，尚須滿足有意義的 (meaningful) 與具訊息性 (informative) 這兩個條件 (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)，強調從有意義的問題情境中學習分析和組織，益於數學的彈性應用(Heuvel-Panhuizen, Middleton, & Streefland, 1995)，指出有意義的評量題必須反映重要的學習目標，並從學生易於接近的、吸引人的、具挑

戰性的，而且值得去解決的觀點出發 (Treffers, 1987)，並且要讓學生清楚知道為何需要針對給定的評量題找出答案 (Gravemeijer, 1982)，讓學生自己想題與佈題，決定購買物的內容等，來控制評量題的困難度 (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)，以及讓學生成為評量題的所有者 (owner)，藉此掌握問題情境 (Streefland and Van den Heuvel-Panhuizen, 1992)。具訊息性的問題情境須：1)對學生而言必須是容易理解的，必須儘可能明確；2)提供學生用自己的說法提出答案的機會；3)數學化活動儘可能可見 (Van den Heuvel-Panhuizen and Fosnot, 2001)；4)讓學生自己解決開放式問題，並有系統地闡述答案；5)提供學生在不同的學習階段，用不同的方式解決相同問題的空間；6)提供「正向測驗」(positive testing)，讓學生展現出他們懂什麼，而非呈現他們還不懂什麼 (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)，指出如何設計有意義且具有訊息性的形成性評量題，提供教師有關學生知識、洞察力與技能的訊息，支援教師以為引導學生重新發明數學概念。

日本自 2007 年起以中三及小六全體為對象(2010 年改採抽測方式)，實施數學及語文的學力調查，「知識」的部份鎖定會影響後續學年學習的內容及生活中活用不可或缺的知識、技能為主；另將「活用」列入試題是一大特色，「活用」則以能將知識、技能等活用於生活中各種場面的能力，以及為解決各種課題的構思及評鑑、改善的能力等之內容為主，重視 PISA 型的學力觀(文部科学省, 2009)。

數學教學評量除反映重要的學習目標，問題情境須具深度和廣度外，從真實世界的脈絡著手評量已成趨勢，強調從有意義的問題情境中學習分析和組織，方裨益於數學的彈性應用(Heuvel-Panhuizen, Middleton, & Streefland, 1995)，具訊息性的形成性評量，方能支援教師以為引導學生重新發明數學概念。

6. 意圖活動方式置於學科內容

無論是我國或芬蘭、荷蘭、日本、美國學科內容除了一般常見的學科內容「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」外，也將如下內容強調於學科內容中：如芬蘭的「思考技能與方法」；荷蘭的「數學洞察力與運算」與「數學語言的溝通」；日本的「算數的活動」、「資料的活用」，以及我國的「連結」。將意圖

的活動置於學科內容，可提醒教學者或教科書編寫者等，非僅讓學生「學數學」還要讓學生「做數學」、「思考數學」，不僅是「垂直式數學化」還需「水平式數學化」。