

用，校長可以利用擴音器與學生及老師聯絡，但很少使用(Malaty,2006)。

(5) 教師工作具持續性

芬蘭教師工作的持續性(the continuity of teacher's work)有兩項優勢：(1) 選擇教學為終生的職業及(2) 極少換校。芬蘭年輕人記得小學放學時和老師握手、擁抱，所以多數小學實習教師 (Primary School Teacher students) 會以教小學新生為其選擇，決定投入教職的要素是情感因素而非薪水(Malaty,2006)。

(6) 各種不同的發展數學教育的努力

芬蘭在數學教育上的主要問題是缺乏具備數學專長的小學教師，3-4 學分的數學及數學教育是必修，另可選 1-2 門學科作為主修，或選修教育研究，但數學一直都不是熱門的選擇。1992 年 Joensuu 大學的根本變革前，只有少於 2% 的學生選擇數學作為專業，然目前在 Joensuu 大學，數學是小學師資培訓課程中，最熱門的其中一項主修科目，有超過 80% 的學生主修數學(15 學分)，其中一半的人修 35 學分，再取得中學數學教師的資格。係由於 Joensuu 大學的「師範學校 (Normal School)」在數學的教學實習期間，會有班級老師和大學的數學教育家到師範學校的小學擔任監督人，這種監督包含備課的監督，會要求學生教數學要比教科書更有系統，且將重點放在理解和使用探索策略。

1990 年組織的數學社團在 1990 年代前半期，擴展到在職教育，由社團所出版的材料和教師手冊，都為教師的工作提供了幫助。歷經了 20 年一直沒有幾何課本後，1995 年，數學社團出版高中的幾何課本了 (Malaty, 2006)。

(三) 荷蘭

1. 荷蘭現實數學課程沿革

自 1960 年代末起，荷蘭數學教育採用「現實數學教育(Realistic Mathematics Education, RME)」，相對於此，無論是我國或是芬蘭、日本的數學教育都深受美國數學教育的影響，荷蘭數學教育沒受到美國 1960 年代早期的「新數學」的影響，

歸功於 Freudenthal，係由於 Freudenthal 沒有抵制抽象概念，而且他確信抽象概念應與現實基礎連結，由學生在指導下自行發明數學，並經由精心挑選學生所熟悉的實際問題來增進理解(Case, 2005：378)，因此以荷蘭現實數學教育發展的歷程，探討荷蘭現實數學教育的沿革。

(1) 做數學

荷蘭的數學課程最大特色在於現實主義數學教育的理念和實踐，Utrecht 大學的 Freudenthal 研究所發展的現實數學教育課程在過去 30 年已經成為荷蘭國家標準 (Case, 2005：374-375)，已蔚為國際數學教育的一個基本趨勢。荷蘭現實數學教育 (Realitic Mathtmatcs Education，RME)，主要來自於 Freudenthal「數學是人類的活動」(mathematics as a human activity) 的哲學理念，該「活動」主要包括：尋找問題與組織論點(subject matter)、解題的活動(Freudenthal，1971，1973)，基此，主張從「做數學(doing mathematics)」學習數學。目前荷蘭中學展開的全國性現實數學教育改革，與美國的 NCTM (2000) 強調學校數學教育的基本原則的《學校數學的原則和標準 (Principles and Standards for School Mathematics)》改革路線相似 (Case, 2005：374)，憑藉其小面積和僅有的 16 萬人口，荷蘭能夠轉換本身成為改變數學教育的全國性實驗室，荷蘭人似乎提前完成改革。

(2) 從真實世界的脈絡著手學習

Freudenthal 主張「學生不是學習『數學』，而是學習『數學化』」，強調「數學來自於現實生活，將其再利用於現實生活」以及「學生經由自己熟悉的現實生活，自行發現和理出數學結論」，自 1970 年代起呼籲數學應該與現實連結，貼近孩童的生活經驗，由數學概念的實體現象教孩子學習數學 (Freudenthal, 1983；周玉秀，2006：4)。1980 年的荷蘭，只有 5% 的課本可以說是趨向現實數學教育，但到了 1990 年，則有 75% 的課本是現實數學(Case, 2005 引自 Streefland & Leen ed, 1991)，多數的學校都在使用以現實數學教育理念編寫的數學課程，讓學生從自己熟悉的生活發現數學概念，再將學到的數學概念運用到現實生活 (何淑真，2003)。RME 營造豐富的學習環境，讓學生主動學習，取代講授式的知識傳遞，配合學生非正式的

知識，引導他們重新發明，使之達到更高階的理解層次(Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)，教學從真實世界的情境中出發，學生根據真實世界的素材，在視覺化下發現規則，粹取數學概念形成基模，再經由同儕間和師生間的說明、討論、賞析等相互質疑與反思的過程，以及一般化的過程，發展成更完整的概念，進而形成數學概念 (de Lange, 1996)。

(3) 水平式及垂直式數學化並重

Freudenthal(1968)認為在數學教育的焦點不在於將數學視為一個封閉的系統，而是一種活動，一種數學化的過程(Van den Heuvel-Panhuizen, 2000：3)，針對 Freudenthal 所提出的數學化，Treffers (1978, 1987)進一步闡述，將數學化分為「水平式的數學化 (horizontal mathematization)」與「垂直式的數學化 (vertical mathematization)」(Gravemeijer, & Terwel, 2000：782)，視該二種數學化型式是組織與構建的活動，「水平式數學化」過程，係藉由數學工具來組織和解決現實生活情境的問題，從現實世界的問題轉化為數學問題或轉化為已知的數學模型，首先將問題以圖式化與形象化手段的數學方式陳述，進而發現規律、關係和結構，或從不同的問題中辨識其同構的本質；「垂直式數學化」過程，重視數學系統本身的重組再構的過程：以式子表達關係、證明規則、彙整模型、完備模型、形成新的數學概念、建立一般化理論等。

Freudenthal (1905-1990) 的最後一本書(指 1991 年版)，接受 Treffers(1978 年獲得博士學位，指導教授即為 Freudenthal)將數學化分為水平式及垂直式的新觀點，視水平式數學化為從生活的世界進入到符號的世界，而視垂直式數學化為在符號世界的探討，並視水平式及垂直式這兩種數學化形式的價值相等，認為水平式及垂直式的數學化，適用於各種層次的數學活動(Van den Heuvel-Panhuizen,2003：12)，但荷蘭數學教育深受 Freudenthal 的強烈影響，實際參與 RME 的理論發展及實踐的 Panhuizen 指出 1985~2000 年的 15 年間荷蘭的數學教育比較重視與現實的連結，重視水平式的數學化勝於垂直式(Van den Heuvel-Panhuizen,2000：2)。

(3) 以學生有意義的方式著手解題

荷蘭的數學教育改革被視為「現實(realistic)」並不僅只是因為與真實世界連結，而是因為 RME 提供學生可以想像的問題情境。荷蘭文的「想像」是「zich REALISEren」，強調讓某些事在你心中成真，由此產生 RME 這個名稱。將問題呈現給學生時，可取自真實世界，但非必要，只要在學生的心中是真實的，無論是童話的幻想世界，甚至是能提供適當情境的數學正式世界，都是合適的情境(Van den Heuvel-Panhuizen,2000：4；Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers,2005：288)。

Gravemeijer(1994)及 de Lange(1996)沿循學習從脈絡著手，進一步闡述水平式數學化的過程：(1) 從學生熟悉方式著手；(2) 以能幫助自己了解的方式描述問題；(3) 操弄相關特徵；(4) 經由基模化(schematizing)與問題情境關係的說明，使得自己對問題更了解；(5) 逐漸發展成更正式的語言；(6) 內化等的過程學習數學。強調以對學生而言較有意義的非正式數學語言的描述與訊息的辨識著手，相對地比較容易解題，再發展成更正式的語言，學生再運用已有的知識與技能去發現未知的規律、關係和結構將符號與策略運用於另一脈絡問題，熟練所學的數學語言。

2. 荷蘭數學課程內涵

(1) 數學教育目標

荷蘭將目標分為「跨學科目標(Cross-curricular attainment targets)」與「學科目標」。

1) 跨學科目標

跨學科目標的旨在於發展或加強一般的技能，是任何一門學科都應指向的目標，是課程目標的核心。小學階段的跨學科目標包括：① 工作態度；② 按計劃工作；③ 運用多種學習策略；④ 自我認識(Self-image)；⑤ 社會行為；⑥ 新媒介(New media)。中學階段的跨學科目標則包括：① 跨學科議題(Cross-disciplinary themes)；② 學會做；③ 學會學習；④ 學會溝通；⑤ 學會反思學習過程；⑥ 學會思考未來(Peschar, & van der Wal, 2001:13-14)。

2) 主要核心目標

① 小學

荷蘭小學的數學教育的主要核心目標如下 (Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008a : 8) :

A. 數學洞察力(insight)與運算

- (A) 學生學習使用數學語言。
- (B) 學生學習解決實際(practical)與正式的算術及數學的問題，並能明確提出論點(argumentation)。
- (C) 學生學習使用方法解決算術/數學的問題，並能評估解決方案。

B. 數與計算

- (A) 學生學習理解數量、整數、小數、百分比和比例的總體結構及相互關係，並利用於實際情況的算術進行。
- (B) 學生學習迅速在腦海進行至少 100 的整數及其加減 20 的基本運算，並能夠背誦九九乘法表。
- (C) 學生學習計算和估算。
- (D) 學生學習利用靈巧的方法(clever ways)進行加減乘除。
- (E) 學生學習利用紙筆縮減或多或少的標準程序(more or less contracted standard procedures)，進行加減乘除的計算。
- (F) 學生學習利用洞察力(with insight)使用計算機。

C. 測量與幾何

- (A) 學生學習解決簡單的幾何問題。
- (B) 學生學習使用單位和測量方法，進行如時間、金錢、長度、周長、面積、體積、重量、速度和溫度等的測量和計算。

② 中學

荷蘭中學的數學教育的主要核心目標如下 (Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008b : 2) :

A. 核心目標

學生學會使用適當的數學語言來組織自己的想法，向其他人解釋，並學會理解其他人的數學語言。

B. 較低層中學教育核心目標

- (A) 學生學習獨自以及與他人在實際情況中辨別數學，並使用其來解決問題。
- (B) 學生學習建立數學論點並能從中區辨意見(opinions)和主張(allegations)，以及學習尊重他人的思維方式，給予與接受批評。
- (C) 學生學習理解正負數、小數、分數、百分數和比例的結構與一致性(coherence)，並學習運用於有意義的實際情況中。
- (D) 學生學習正確的計算，並經由洞察力的推理與估算、精確地調整之，以及適切地用於特殊情況。
- (E) 學生學習測量，理解度量系統的結構與一致性，並學習以常用的度量單位進行計算。
- (F) 學生學習使用非正式的標記法、概要圖、表格、圖表和公式，以掌握數量和變量間的關係。
- (G) 學生學習利用形狀(forms)與結構於二維與三維空間，創造想像並解釋之，並用其特徵與測量法，進行計算和推理。
- (H) 學生學習有系統地描述、組織及視覺化數據，並學習以批判的角度評估數據、表達與下結論。

(2) 數學教學時數

荷蘭政府並無規定各科課程的時間與範圍，只規定每年的最少教學時數 Education, Audiovisual and Culture Executive Agency. (2008, September : 67)，前兩年平均每週上課時數 22 小時，後六年平均每週 25 小時(Education, Audiovisual and Culture Executive Agency 2009 ,April : 4/10)。

3. 荷蘭數學課程課題

荷蘭 12 年級學生在 TIMSS1995 的數學國際評比中獲得第一名，而荷蘭前 25%

的學生也在參賽國家的前 25% 中名列第一，而這些參與 TIMSS1995 測驗的 12 年級學生，許多在 1980 年代都是使用現實數學的課本(Case, 2005：378)。

荷蘭的一般數學教育，尤其是現實數學教育的數學學習中，學生在現實世界情境中尋找和組織數學要素，解決問題、應用及創造延伸並以單獨或集體方式，向其他人解釋及報告，這種數學學習方法與培養學生的創造力不能分開，遠離了機械式的背誦，或是「未分析問題的本質直接機械式死記硬背」，或「在灌輸中前進（plug-and-chug）」的學習方法。由於現實數學教育目前已是荷蘭的國家標準(Case, 2005：381)，目前老師必備的這些教學技能與 25 年前師資培育的重點大相逕庭，這些障礙可能會限制許多目前從事教學老師的成長。教學內容、教學型態和學生學習的數學教育改革中，荷蘭認為若要繼續保持數學教育的成功，要從根本上改變教學的品質，而其三項要素是教師、教師、教師，教師的素質是現實數學教育成功的關鍵(Case, 2005：381)。

(四) 日本

1. 日本數學課程沿革

日本戰後的數學教育歷經以下幾個時期(林宜臻，2009；清水靜海，2003；教育學研究会，1997)：

(1) 生活單元學習（1947-1957）

第二次世界大戰日本敗戰後，日本教育史上首次的學習指導要領以試案形式登場，告示各級學校的教育課程制訂的基準，要求各校教師自力制訂自校的教育課程(教育情報ナショナルセンター，1947)，昭和 22 年(1947 年)5 月發行《學習指導要領 算數科・數學科編（試案）》設定首次的中小學數學科目標，內含總目標與具體目標。昭和 26 年 12 月發行的《學習指導要領 算數科編（試案）》在目標中再加入「數學與我們的生活」及「數學與教育的一般目標」，各級學校的裁量權大，強調從生活經驗展開數學的學習，同年 11 月公布的《學習指導要領 數學科編（試案）》的數學一般目標中，強調「培養能善用數學所需的數學理解與能力」，以及