

學習分析和組織，益於數學的彈性應用 Heuvel-Panhuizen, Middleton, & Streefland, 1995)。亦可讓學生自己想題與佈題，塑造 (mould) 問題情境，藉此掌握問題情境，讓他們成為評量題的所有者 (owner)，決定受測者能否通過測試 (Streefland and Van den Heuvel-Panhuizen, 1992) 或是購買物的內容等，來控制評量題的困難度 (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)。

### 3. 具訊息性的問題情境

評量題必須具有提供教師有關學生知識、洞察力與技能的最多訊息，訊息性問題情境，使學習過程得以透明化 (transparent)，可支援教師以為引導學生重新發明數學概念。具訊息性的問題情境須：① 對學生而言必須是容易理解的，必須儘可能明確；② 提供學生用自己的說法提出答案的機會；③ 數學化活動儘可能可見 (Van den Heuvel-Panhuizen and Fosnot, 2001)；④ 讓學生自己解決開放式問題，並有系統地闡述答案；⑤ 提供學生在不同的學習階段，用不同的方式解決相同問題的空間；⑥ 提供「正向測驗」 (positive testing)，讓學生展現出他們懂什麼，而非呈現他們還不懂什麼 (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)。

## 六、結論與建議

### (一) 結論

#### 1. 我國數學教育課題

- (1) 我國數學學習意願偏低
- (2) 我國數學表現優劣差距大

#### 2. 數學課程取向

- (1) 接觸數學時數的多寡不是國際評比勝出的決定因素
- (2) 重視「PISA 型學力」與「生活數學」的數學活用
- (3) 同時重視「邏輯思考力」與「直觀力」的數學思維
- (4) 均衡化「水平式數學」與「垂直式數學」的教學

- (5) 重視「數學表達」
- (6) 落實「形成性評量」與「活用題型」
- (7) 意圖活動置於學科內容

## (二) 建議

### 1. 對教育當局者之建議

#### (1) 數學教育改革方向植基於實證研究後設分析

美國布希總統為改善學生的數學，2006 年成立國家數學諮詢委員會，該委員會共參閱 16,000 份研究出版物和政策報告，聽取 110 位公開證言，檢視 160 篇機構與個人的評論以及分析來自 743 位代數教師的調查結果，綜合分析後形成總報告，點出許多不曾被重視的改革重點，為提升數學教育提出許多具體可行的方法，為美國形塑數學教育的改革方向，將未來數學教育改革方向植基於實證研究的後設分析。

#### (2) 根據本土學習現況進行數學課程改革

日本從其國內教育課程實施狀況及國際性學力調查結果，發現學生存有對計算意義理解不夠，而且未能利用已學的知識與技能充分活用於生活與學習的課題，因此，較之學科知識的學習，更重視「社會中能使用的能力」PISA 型的學力觀，自 2007 年起實施的學力調查內容，試題除「知識」外，同時將「活用」列入試題。

#### (3) 根據本土所需提出數學課程改善方向

美國基於社會需要能應用數學思考解決問題的公民，自 1980 年代起重視問題解決，NCTM 1980 年公布的《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議》，將問題解決作為 1980 年代數學教育的核心；數學課程曾被嘲諷「1 呎廣而 1 吋深」，2006 年公布的《課程焦點：追求一致性》，已將重要的數學內容系統化安排，明示各學年數學核心課程內容，使課程得以首尾一貫，並確定每年教什麼樣的關鍵數學技能與知識；鑒於「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果，因此，在學習過程的建議中提出應全面培養學生的概念理解、流暢計算以及問題解決的能力。

#### (4) 致力於提升全民數學素養與學習意願

我國數學教育的課題是如何縮小數學學習優劣差距與提高學習意願，而非僅就增加時數以提高學科能力。芬蘭政府為保持全民的知識和技能水準，將普及教育置於國家政策的中心，1998年《基礎教育法案》指出教育的宗旨在於滿足孩子們天生的求知欲，學校在規劃課程、選擇內容、教材、學習策略、方法和評估方式時，都考慮學生個人的興趣和選擇，而這些須建立於彈性、校本和教師以學生為中心的教學、輔導和補救教學課程的規劃，配合孩子的需要調整指導和教學結構化，以便適合異質性的學生，不將任何一位學生排除而送往其他學校。因此，芬蘭學生學業優劣差距小，學習意願高。

#### (5) 完備配套措施

數學教育的成功，要從根本上改變教學的品質，教師的素質是現實數學教育成功的關鍵，強化師資為其首要，實施如下之配套：(1) 提高教育學程錄取門檻；(2) 增設數學教育諮詢專業；(3) 數學及數學教材教法列為必修；(4) 班級教師和數學教育專家親自到校指導數學教學實習；(5) 尊重教師專業，教師不受定期視察與評核，能自訂課程與自選教材，使教學工作具持續性的優勢等強化師資。

## 2. 對課程修訂者之建議

### (1) 教學時數用於解決本土課題

亞洲國家學生以較長的數學學習時間換取高成就的傾向，然而從國際評比結果可以得知數學教學時數不是勝出的唯一決定因素。日本雖大幅增加數學教學時數，但強調教學時數用於充分確保基礎/基本知識與技能的反覆學習，以及利用於活用數量形相關知識與技能於實際場面等的時間，以培養思考力與表達力等，進而促使實感理解的喜悅及學習的意義。我國的課題是如何縮小數學學習優劣差距與提高學習意願，而非僅就增加時數提高學科能力，教學時數宜用於解決本土課題，以達數學表現的質高且均，並引發數學學習「正向態度」與提高數學「自信心」。

### (2) 根據數學課程發展取向釐清數學課程基盤

數學課程架構除了重視前後學年階段目標的數學邏輯順序，以及各學年教學內

容的核心外，最重要的是指出數學課程的基盤，根據數學課程發展取向，如圖 3，本研究認為基盤宜植基於：「數學邏輯思考」、「數學直觀掌握」、「數學溝通表達」，不僅是「垂直式數學化」還需「水平式數學化」，評量範圍不僅是「知識」還包括「活用」與「評量指導一體化」。

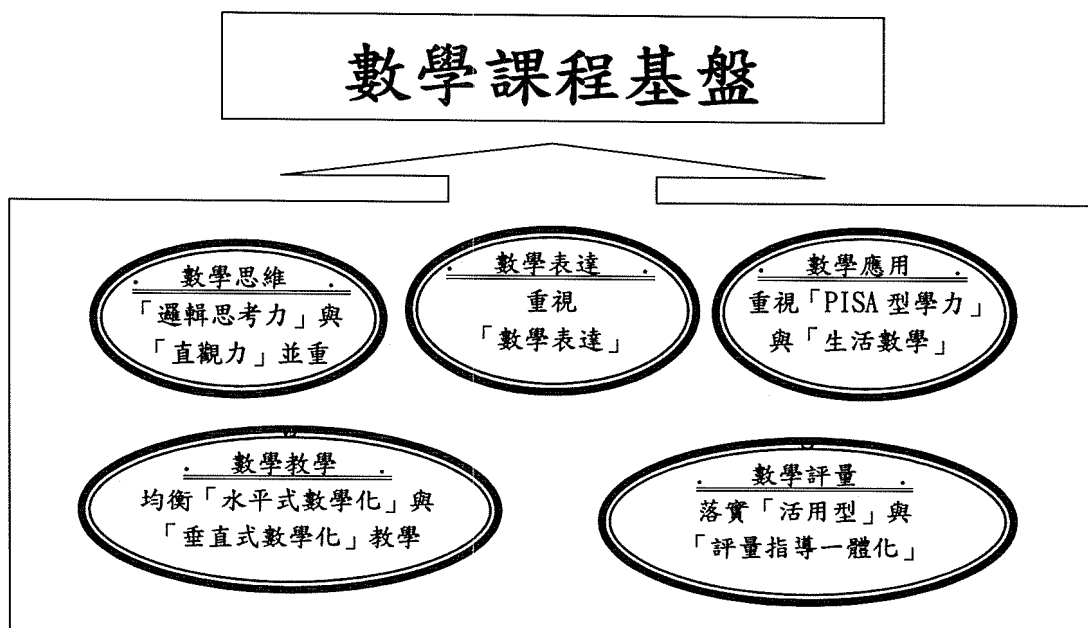


圖 3：數學課程基盤

### (3) 數學課程總目標提綱挈領指出意圖目標

2008 年版數學課程綱要，明列「知識技能目標」而將「能力目標」等意圖目標隱於一般的論述之中，易引起我國只重視「知識技能目標」之誤解，宜以數學課程總目標或以核心目標方式，提綱挈領指出「知識與技能目標」、「數學思考與表達目標」、「解決問題目標」及「情感與態度目標」等意圖課程的目標，以為數學課程導向的明顯依據。

## 3. 對教育現場之建議

### (1) 提高學習意願

#### 1) 重視數學價值及信念轉變

日本針對 PISA 排名的節節後退，以及 TIMSS 國際評比中，小四生及八年級生對「數學自信心」，排名倒數第一的現象，強調經由欣賞數學與培養活用數學的態

度，感受數學學習的意義及有用性，增進對數學價值的理解，讓學生充分感受數學的力量，激發學生學好數學的動機；美國的研究發現由注重「個人能力」轉為「努力能變得更棒」的信念，有助於對數學學習的投入。

## 2) 以「做數學」替代「學數學」提升數學素養與學習意願

PISA2003 及 PISA2006 都名列第 2 的芬蘭，非考試導向，但國家競爭力都保持前幾名，名列 4、5 的荷蘭，百分之九十的大學生選課時，會選修高等數學，學生不怕數學的原因在於芬蘭與荷蘭的數學教育向來以問題解決為主，重視數學的實際應用，強調「數學來自於現實生活，將其再利用於現實生活」以及「學生經由自己熟悉的現實生活，自行發現和理出數學結論」，1980 年代，荷蘭只有 5% 課本趨向現實數學教育，1990 年代，則有 75% 的課本以現實數學教育理念編寫數學課程，營造豐富的學習環境，讓學生主動學習，從真實世界的情境中出發，學生根據真實世界的素材，在視覺化下發現規則，粹取數學概念形成基模，再經由同儕間和師生間的說明、討論、賞析等相互質疑與反思的過程，以及一般化的過程，發展成更完整的概念，進而形成數學概念。日本 2008 年版的中小學數學課程目標增列「數學的活動」，強調經由數學活動實際感受數學學習的意義及有用性，提高學生學習數學的意願。我國 82 年版數學課程總目標中強調「1. 養成主動地從自己的經驗中，建構與理解數學的概念」，數學學習由「學數學」的過程轉為「做數學」，林福來指出建構式數學因缺乏配套及教師在職訓練，10 年前推動的建構式數學落實教學現場產生很大落差，但現在的學生拚命練習艱澀的題目，可能導致信心缺乏（張錦弘，2007 年 12 月 10 日）。

## 3) 從學生熟悉及有意義的情境著手

荷蘭文的「zich REALISERen」指的是「想像」，荷蘭的數學教育被視為「現實 (realistic)」並不僅只是因為與真實世界連結，而是因為提供學生可以想像的問題情境，將問題呈現給學生時，可取自真實世界，但非必要，只要在學生的心中是真實的，無論是童話的幻想世界，甚至是能提供適當情境的數學正式世界，都是合適的情境，以對學生而言較有意義的非正式數學語言的描述與訊息的辨識著手，相對地

比較容易解題。

#### 4) 感受運用已知引出新知的成就感

荷蘭的數學教育強調由非正式的數學用語經由垂直式數學化的過程，簡化和形式化漸漸發展成更正式的用語，最後以數學的語言或演算法解出，進而發展成更正式的語言，學生再運用已有的知識與技能去發現未知的規律、關係和結構將符號與策略運用於另一脈絡問題，熟練所學的數學語言。日本相對於現行課程小學數學課程目標「主動地應用於生活的態度」的目標，2008 公佈的小學新課程目標不僅只停於「主動地應用於生活的態度」，而增加成為「應用於生活與學習的態度」，強調活用學過的知識與技能創造新知識與技能，安排螺旋式課程，藉由運用已有的知識與技能發現未知的規律、關係和結構，感受引出新知的成就感，提高學習意願。

#### (2) 縮短優劣差距

國際評比中，我國數學表現優異，但我國數學成就高低差距大，由國際評比結果及接觸數學的學習時間比較，可以得知數學教學時數不是數學成就的唯一決定因素，可從「滿足孩子們天生的求知」以及「擅用教學法」改善數學學習。

##### 1) 滿足孩子們天生的求知欲

芬蘭每週數學教學平均僅 2.7 小時，非考試導向，但國家競爭力都保持前幾名，而且學生數學表現質高且均，在於其《基礎教育法案》明文指出：教育的宗旨須滿足孩子們天生的求知欲，讓學生充分自主發展並配合孩子的需要進行調整，以便適合異質性的學生，由於學校照顧每一位學生，得以縮短學生成績優劣的差距。

##### 2) 擅用教學法

教室現場宜擅用以詰問法、清晰教學法、小組協助的個別化學習等教學法，可以改善數學學習，「以學生為中心」，或是「教師主導」的教學方式，何者為宜，都得不到研究的支持，研究並不支持擇其一的教學方式，特定教學方式只有在特定的條件下才能有效發揮作用。美國數學家投入的非營利組織 Project SEED 等 K-12 的課程改革運動，發現教師只負責提問，學生在討論與批判之下，不斷地修正概念，最後由學生自己提出所有的答案的蘇格拉底詰問法，能成功教會低成就學生更高層

次的數學，破除學習發展必需等到大腦成熟到某一程度不可的等候迷思；經常性實施形成性評量能夠改善小學生的數學學習；教師提供解決問題的明確示範，學生參照示範使用於新的學習策略和技能並進行大量練習，而且大聲說出思考過程，以獲得充分回饋的教學方式的清晰教學非適用於所有學生，但有助於文字題及計算有困難的學生，對無能力學習者及一般的班級名列於後三名者也有效；根據診斷測驗結果，形成個別化的問題，由不同能力學生組成相互幫助的小組，並有特別教師指導，以及根據小組及個人兩者表現給予獎賞的學習方式的「小組協助的個別化學習」對概念理解及問題解決的效果雖不明顯，但能夠改善學生的計算技能；「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果。