「中小學課程發展之相關基礎性研究」

區塊研究一整合型研究（二）

子計畫三：臺灣國中小學生數學能力表現之分析與運用

（PISA、TIMSS）

台灣國中小學生數學能力表現之分析與運用

主持人：李源順　　共同主持人：王美娟

研究人員：李美賢　蘇意雯　陳怡仲

P1-17

摘　要

本研究的目的在深度分析 PISA 和 TIMSS 試題中的關鍵概念，並與九七數學課程綱要（教育部，2008）對比，進而對數學課綱要提出有證據性的建言。研究方法為質性分析。信度和效度採三角校正法進行檢核。質性分析發現，建議我國的課程綱要應強調生活語意的內容、應強調數學名詞的語意感覺、應強調量感的教學、應強調學生常犯的迷思概念問題、應強調相對數值的問題。建議添加成人生活經驗問題、建議添加概念的反例問題、建議添加有規律的解答方法的問題、添加逆向思考和逆運算的問題、添加概念溝通的問題、添加正負數的前置概念問題、添加比例型的乘法問題、添加時間縮減的百分率問題、添加圖形放大縮小對面積的影響問題、添加獨立事件的機率問題。建議各年級增加怎樣解題的能力指標、四年級增加空間中全等的指標、四、六年級增加生活中計圖表的報讀和解讀的指標、六年級增加機率的能力指指標。

壹、前言

我國以往對於中小學課程綱要及各學科領域課程綱要、授課時數之擬訂，較爲缺乏系統性的規劃，或缺少證據導向的結論爲依據。甚至在新課程實施之後，才發現職前師資培育並未配合改變，導致產生實施新課程之阻礙（教育部，2008）。另外，由於所擬訂的課程綱要沒有理論依據或研究結果做爲佐證，因此在遭受挑戰或質疑時，也無法提出具有說服力的理由。

再者小學、國中、高中課程規劃分別由不同團隊執行，若未實施統整，可能產生銜接的遺漏或不必要的重覆。因此，教育部（2008）遂提出此一含括小學、國中、高中職學習階段之課程發展研究計畫。

國科會與教育部向來重視我國學生在國際比較中的表現水準。除了從 1999 年開始每年培訓資優學生參與數學的奧林匹亞競賽之外，從 1999 年開始陸續參加以一般學生爲對象的國際數學和科學趨勢研究(Trends International Mathematics and Science Study [TIMSS])和國際學生評量計畫(the Programme for International Student Assessment [PISA])等學生數學學習表現的跨國比較。這些年的參與中，我國已經累積了相當豐富的中小學生學習表現的資料庫，包括 TIMSS 1999 八年級數學、TIMSS 2003 和 TIMSS 2007 的八年級和四年級、以及 PISA 2006 的 15 歲組學習表現的資料。

教育部爲了充分使用這些資料庫的資源，進行進一步深度的分析，充分發揮我國在這些資料庫所做投資的最大效益。於是核定「中小學課程發展之相關基礎性研究」下的整合型計畫「臺灣學生學習表現檢視與課程發展運用」之子計畫，期望利用我國參與的國際性中小學數學評量之資料庫 TIMSS 和 PISA，探討我國中小學學生的數學學習表現與趨勢，做爲未來發展十二年一貫數學新課程之佐證與參據。

貳、研究目的

爲了給我國數學課程綱要有實質證據的建議，本研究擬從評量試題著手分析，解析其相關的能力指標，以及解答每一試題所需的關鍵概念，再依據我國能力指標是否含蓋此一鍵概念的教學，做出適當的分析並提出相關的建言。明確地說，本計畫的具體的目的在深度分析 PISA 和 TIMSS 數學試題中的關鍵概念，並與教育部已修訂的九七數學課程綱要（教育部，2008）對比，進而對數學課綱要提出有證據性的建言。

參、文獻探討

一、TIMSS 數學成就評量

國際教育學習成就評量委員會（The International Association for the Education Achievement, IEA）成立於 1959 年。其目的主要在了解各國學生數學及科學學習成就及其各國文化背景、學習環境、教師因素等影響因子之相關性；同時，對於連續參加的國家可以進行縱向的趨勢比較，以協助參加的國家瞭解其在教育改革或課程改革的成效（林碧珍、蔡文煥，2003）。IEA 在 1995 年之前總共舉辦了三次的國際性數學與科學成就評量，主要的評量對象爲八年級和四年級學生。由於世界各國的熱烈反應，IEA 計畫往後每隔四年辦理一次，並於 1999 年開始將此一評量定名爲「國際數學與科學教育成就趨勢調查(TIMSS)」，並加上施測的西元年。

我國自 1999 年開始參加這項國際評比，當時主要的評量對象爲八年級學生。之後 2003 年和 2007 年也再次參加了四年級與八年級的評量。在 TIMSS 2003 的評量中，八年級的參與國家有 48 個，四年級則有 26 個國家（Martin et al.,2004,p. 6&7）。TIMSS 2007 的參與國家八年級有 50 個國家，四年級則有 37 國 (Mullis, et al., 2008) 。

TIMSS 1999 的數學評量架構主要分爲內容領域和外在表現，內容領域分爲分數、數感、測量、資料呈現、分析與機率、幾何、代數。外在表現分爲知道、使用例行性程序、使複雜性程序、探究與解題、溝通與推理。（Martin, et al., 2000）。TIMSS 2003 的數學評量架構，主要分爲內容和認知兩個層面。在內容領域，分爲數、代數、測量、幾何、資料等五個主題；認知領域分爲知道事實與程序、使用概念、解例行性問題、推理。TIMSS 2007 更進一步的整合主要的內容領域，並分別在四年級和八年級兩個年級提出數學內容領域爲：數、幾何圖形與測量、資料呈現；數、代數、幾何、資料與機率。兩個年級的認知領域分類相同，都是分爲：知道、應用與推理。

我國歷年來在 TIMSS 的數學評量成績都表現不錯。TIMSS 1999 八年級學生的成就是全世界第三名（Mullis, et al., 2000）。在代數的排名爲第一名，在分數與數感及資料呈現分析與機率的排名均爲第三名，在測量與幾何的排名均爲第四名。TIMSS 2003 八年級學生的成就仍居世界第四名，在幾何及代數的排名均爲第三名，在數、測量及統計的排名均爲第四名（張

秋男主編，2005）。TIMSS 2007 八年級學生的成就則位居首位，在數、統計、幾何和代數的排名則分別位居 3. 4, 1, 1 名(Mullis, et al., 2008)。

四年級學生在 TIMSS 2003 世界的排名爲第四名，在數、數型和關係及資料的排名均爲第三名，在測量及幾何的排名均爲第四名（張秋男主編，2005）。四年級學生在 TIMSS 2007 的排名爲第 3 名。至於數、幾何圖形與測量和資料的排名則分別爲第 3, 4, 4 名(Mullis, et al., 2008)。

每當 TIMSS 在收集學生的成就評量的同時，也會收集學生的背景資料，包括學生問卷、教師問卷和學校問卷。希望從這些問卷中探究影響學生學習的因素。同時，TIMSS 爲了讓各國了其評量趨勢，每次都會將一半的試題公布出來讓所有的人了解其評量內容，同時保密一半的試題，做爲之後的評量之用，做爲評量學生的成就趨勢的基準。

本研究從六個線上資料庫：中華民國期刊論文索引、教育論文線上資料庫、國科會研究計畫、全國博碩士論文資訊網及師範校院聯合學位論文系統，搜詢國內 TIMSS 相關研究之文獻，至 97 年 11 月 30 日止，總計 64 篇。發現針對 TIMSS 的資料進行質性研究的只有兩篇，其它幾乎都是量化研究或者報導 TIMSS 的研究結果和進行資料詮釋。少有針對 TIMSS 的試題內容深度分析的研究。

二、PISA 數學素養評量

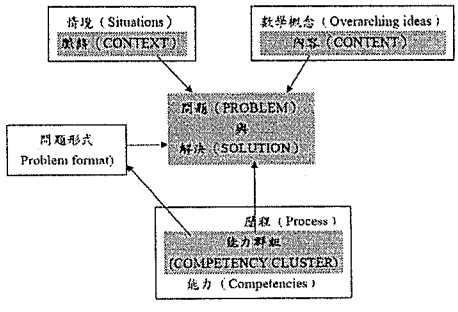
PISA(林煥祥主編 2008)，是由經濟合作暨發展組織(Organization for Economic Co-operation and Develo pment，簡稱 OECD)所委託的計畫，於 1990 年代末期開始對 15 歲學生的數學、科學、及閱讀進行持續、定期的國際性比較研究。每次評量會從數學、科學及閱讀三個領域中選擇一個主要領域，進行深入評量，另外兩個領域仍會進行施測，但涵蓋的面向較少。PISA 2000 年主要領域爲閱讀，2003 年爲數學，2006 年爲科學。我國則於 2006 年第一次參與此項調查計畫，這一年參與的國家共有 57 國。

PISA 與一般調查針對特定學校學科的能力有所不同，在數學方面，PISA 強調數學素養的評量，希望有助於反映未來課程改變爲知識應用取向，而非只是知識的獲取。數學素養之意爲「個體能夠辨認和瞭解數學在世界上所扮演的角色，能夠進行有根據的評斷，並且針對個體在生活中的需求來運用或者投入數學活動，以成爲一個積極的、關懷的、以及反思的國民」。

PISA 企圖清楚地描述並評量出十五歲學生的數學素養(林煥祥主編 2008)。因應這樣的目的，學生的數學知識和技能是根據三個向度來進行評定（詳見 0）：（1）與問題有關的各種數學內容、（2）以數學來連結所觀察到的現象接著進行解題的歷程、（3）做爲題材來源以及問題設計的情境和脈絡。因此，有三個成分是需要被重視的：（1）把問題置於一個脈絡或者情境中。（2）數學的內容必需用來解決問題，並且組織成豐富的想法。（3）爲了連結真實的世界，能力必需要被活化，用數學的能力去解決問題。

我國十五歲組的學生在 PISA2006 的數學評量排名是世界第一名。PISA 在評量學生的同時，也會收集學生問卷、學校問卷，但由於 2006 年評量科學，因此沒有收集數學相關的問卷。

由於 PISA 2006 的研究報告公告不久，因此針對 PISA 進行研究的報告並不多見。同時 PISA 相關研究員告訴研究者，PISA 所公佈的試題，並不是 PISA 正式施測的試題。因此 PISA 的研究結果，並無法與它的試題進行比對。



三、PISA 評量架構

但是 PISA 所公布的試題可以反應 PISA 評量的意圖與方向。因此我們在進行質性分析時，仍將其所公布的試題列爲分析的範圍。

肆、研究規劃

本研究採取的研究方法爲內容分析法。首先由具數學教育專長與教育統計專長的研究成員四人針對逐 TIMSS 和 PISA 試題逐題分析其內容領域、認知領域、九七課程綱要相關分年指標、以及解題時所需要學會的關鍵概念。我們以 TIMSS 2003 的架構進行分析，也就是在內容領域方面，我們以數、測量、幾何、資料（機率和統計）、代數爲分析的依據。在認知領域方面則以知道事實與程序、使用概念、解例行性問題、推理爲分析的依據。

之後將此關鍵概念與民國 100 年要實施的九七年國民中小學數學課程綱要進行比對，解析出 TIMSS 和 PISA 所評量的能力，我國課程綱要是否已呈現。最後，再對課綱提出建言。當然，我們在分析時，也會適時聘請專家學者提供建言，使我們儘可能在 TIMSS 和 PISA 試題的解析中，對課綱提出更貼切的建言。

本研究將關鍵概念所屬的能力指標分爲屬於該年級（四年級、八年級、九年級 – 指 15 歲組）或該年級之前、該年級之後、以及指標未羅列的關鍵概念。當關鍵概念在該年級或該年級之前的能力指標或說明已呈現其相關內容，但學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在該指標之中應再「強調」這類的內容。當關鍵概念的內涵在該年級或之前的能力指標已呈現，但未觸及或說明其內容，同時學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在該指標之中應再「添加」這類的內容。當關鍵概念的內涵在該年級之後的能力指標呈現，或者指力指標未羅列，同時學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在應「增加」這類的能力指標。本研究在比對能力指標時是將所有相關的能力指標與指標之說明一一檢視，務求指標與關概念的妥適性與系統性。

資料分析的信度和效度則採三角校正法檢核之。我們也在不同時間點對同一問題進行分析務求分析的一致性，同時也邀請二位學者同時進行檢核。.

伍、研究結果

本研究針對 TIMSS 和 PISA 試題逐題分析其內容之後，針對能力指標提出應強調、添加或增加的內容分析如下，但限於文章篇幅，試題內容與分析之表格不再加以呈現。

一、強調之內容

（一）強調生活語意的問題

八年級學生在 TIMSS 試題 M012037 的統計圖表問題中，對於問題「有多少學生的成績超過 7 分？」的答對率只有 50.5%，另一個包含 7 分的錯誤選項：10 人卻有 40.7%的學生填答。分析發現這個試題的內涵在我國的能力指標 3-d-01 中已呈現，但學生作答不理想，主要是對生活中「超過」和「以上」語意的混淆。此外四年級 M011017 的試題中，也有 14.9%的學生把「三星期後」的問題，選擇成「第三個星期」的答案。雖然有些語意我國的課程在教學時已不再特別強調，例如「增加 2 倍」和「增加爲 2 倍」,「6 除以 2」和「2 除 6」的問題。

但是 TIMSS 在八年級的試題中仍出現類似的語意的了解的問題。因此我們建議在能力指標「3-d-01 能報讀生活中常見的直接對應（一維）表格。」中強調生活中「超過」和「以上」的語意的差異；在能力指標「2-n-13 能認識年、月、星期、日，並知道某月有幾日、一星期有七天」中強調「三星期後」和「第三個星期」的差異。

我們在生活當中有時候對於「7 分以上」是否包含 7 分的問題；「增加 2 倍」到底是變成來的兩倍或是三倍；可不以說「下降 2 倍」？有些人似乎沒有共識，但它在數學上的意義是很明確的，因此在數學學習過程當中應加以強調。若我國要針對每一個生活語意逐指標建議強調，怕會掛一漏萬。因此我們建議在老師的教學過程中要適當的強調生活中常見的語意的定義。我們期望學生能依據他對中文語意的了解來了解類似的語意問題，而非盲目的背誦語意。

（二）強調數學名詞語意的感覺問題

我們的研究及實務經驗發現，教師在教導數學名詞時，都不強調數學名詞的感覺問題，例如小數的百分位是把一平分成一百等分的感覺，因此有些學童會過度一般化他在整數位值名詞 – 個位、十位、百位 -- 到小數爲個分位、十分位、百分位。所以，有 34.6%的八年級學童在 M022044 的小數問題中把 78.2437 四捨五入到百分位時選擇 78.244。有 13.8%的四年級學生在 M011020 的分數化成小數問題中把 7/10 的答案選擇 0.07。八年級 M022154 的問題是將長方形旋轉成另一長方形，然後要求學生找出它的「旋轉中心」。旋轉中心的名詞，我國在能力指標「4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。」是針對旋轉角提到的名詞，此外再也沒有提到。因此我們建議在「3-n-12 能認識一位小數，並做比較與加減計算。」和「4-n-09 能認識二、三位小數與百分位、千分位的位名，並作比較。」中強調十分位、百分位、千分位的數學名詞的語意的感覺是因爲它代表著十分中的幾分、百分中的幾分的感覺。在「4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。」中強調旋轉中心的語意的感覺，使學生能將此一名詞應用到相關的概念的學習上。

除了上述問題之外，八年級 M022035 的統計圖表報讀，是問「冷卻了 20 度」但有 40.4%的學童選擇「冷卻到 20 度」的答案。八年級 M012037 的統計問題中是問「超過」的語意，但卻有 40.7%的學生填答「以上」的答案。因此若我國要針對每一個數學名詞（或者 TIMSS、PISA 出現的名詞），再一一強調，會掛一漏萬。研究者認爲最重要的就是讓學生能依據他對

中文語意的了解，來學習數學的名詞。把數學名詞和它的數學意涵連結在一起，這樣學生對數學名詞便會更有感覺。如此他面對新的數學名詞，他便可以會意，再配合數學的概念，兩者結合成一個新的知識結構體。他的數學可以學得更好，我們也可以不用再怕那些名詞，我們沒有教過。

（三）強調量感

在 TIMSS 四年級 M012023 的量感問題，有 24.9%的學生用公斤來秤一個蛋的重量，顯示我國學生的量感有待加強。因此建議在能力指標「3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。」強調公斤和公克的量感。當然，有關量感的學習建議教師要多強調「參考量」的概念。通常的參考量是學生生活週遭常見的量的感覺。例如學生的身高大約是 140 公分或 1.4 公尺；一瓶小的瓶裝水大約 600 毫公升；教室的長度大約 8 公尺；…。當學生所熟知的參考量愈多時，他愈能正確的估計量感。當然，我們也可以思考，我們時常用的單位時常是可以用愈接近 1 的整數來表示。因爲愈接近 1 的整數我們愈能掌握。

（四）強調學生易犯的迷思概念問題的釐清

TIMSS 八年級 M012016 問題是要求學生將分數化成小數或者小數化成分數的大小比較問題。學生的答對率只有 60.2%。分析這個問題，學生將分數化成小數再來比較，較爲簡單。同時發現有 22%的學生選擇 2.5<2.25<2.75。這個錯誤符合學者研究的小數大小比較的整數法則的迷思概念：學生把小數當做整數來比較。八年級 M022198 的問題則是小數的大小比較問題，學生的答對率只有 62.5%，且有 29.2%的學生選擇 0.3<0.32<0.332<0.233。其原因比較符合學者研究中分數法則的迷思概念：分割的分數愈多，小數愈小。

因此我們建議在「4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。」和「5-n-08 能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決生活中的問題。」的教學過程中強調小數大小比較中易犯的迷思概念問題的釐清。

TIMSS 四年級 M011025 的面積與周長的問題，有 41.2%的學生將周長的問題選擇了面積的答案。八年級 M012030 只有 25.9%的學生用面積求周長的邊長問題。因此我們建議老師教學時應強調學生的迷思概念。在「3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。」應強調長度和面積的差異。

TIMSS 八年級 M012004 的比例問題，只有 65.5%的學生答對，其餘的學生大都可能犯了使用加法來計算。因此在「7-n-16 能理解比例的意義（以實例說明正比、反比關係的意義）」應強調學生使用加法進行比例計算的迷思概念的釐清。

爲了防止掛一漏萬，我們建議在適當的能力指標上，應強調學生迷思概念的釐清，尤其是研究上已實證的迷思概念。例如，真分數愈乘愈大的迷思概念，…等等。

（五）強調相對數值的問題

八年級 M032557 的問題是三個未知數兩個方程式的問題，它無法把 a,b,c 的值先求出來，再求出 a+2(b+c)的值。這類的問題在某些能力指標中曾經出現過。例如「7-a-06 能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。」但未知數比方程式多的問題的求解，在我國的能力指標中未被強調，僅談到它有無限多解。因此我們建議在「7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。」剛開始建立學生未知數的概念時，能強調我們雖然不知道未知數的值，但是我們仍然可以知道在某些特定情形下的解。

其實這類的問題是一種相對數值的問題。它雖然有無限多解，但是在特定的情況下仍然可以求出它的解。有時候我們的公式也有相似的結果，例如 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ ，無論 θ 的值是多少，它的結果永遠等於 1。例如爸爸和兒子的年齡每年變動，但是它們的差永遠固定。

相對數值的概念，在課程綱要中並未被充分討論它的意義。例如，它的一個特例的值也是對的，$\sin^2 55^\circ+\cos^2 55^\circ$ 也會等於 1。因此它可以用某一特例來求它。但是它有一個危險性，所以最好多找幾個數值來檢驗是否完全相等。當然最好的求解方法是找出已知方程式和求解方程式間的關係，並利用其關係求解

二、添加之內容

（一）添加成人生活經驗的問題

我國的數學課程綱要強調數學與生活連結的問題，同時我們發現大部份強調的問題都是學童生活中的問題。在 TIMSS M032762-4 的題組中是一個不同方案的電話費率問題。在這類的問題中，學童的答對率在 30%以下。因爲這類的問題是成人生活中的問題，學童生活中是無法驗到的。倘若學童能學習這類的問題，也將有助於他將來的生活理財。因此我們建議在

相關的單元中添加成人生活經驗的問題。例如在「5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。」或者「7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。(修 7-a-04)」添加電話費率的問題。

在數學課程綱要中，我們強調學生的學習要連結生活經驗，而學生的生活經驗是有限度的，成年人的生活經驗，並不是他們在學期間可以經驗到的。例如生活中電費的問題、手機費率的問題、計程車計費的問題…等等，雖然是學生生活中會碰到的成年人的問題，但是他們都是沒有機會去解決這些成年人生活中的問題。若我們想培養學生解答問題的能力，讓他成年以後能解決成年人的問題。我們建議在學生時期，相關的單元和能力指標應添加這些成年人會碰到的問題，讓學生有解題的經驗。

（二）添加概念的反例問題

PISA 2006 M505 的問題要求學生說明一統計表爲什麼不能繪成統計圖。M509 是探究機率和比例概念差異的問題。在概念的學習過程中，若學生一直學習正向的概念，他對反向的問題便會失去警惕心，他的概念學習便無法察覺在什麼情況下不能使用，而容易將概念過度一般化。因此學生在學習每一個概念的時候，需要一些反例來突顯正例的重要性。因此我們建議在「6-d-01 添加不能製作長條圖的問題。」添加一些不能繪成統計圖的相關問題。在「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。」添加一些不是機率的概念的相關概念的釐清。相同的，我們也建議在所有概念的能力指標上適時的添加反例的問題來突顯正例的重要性。例如分數概念學習時，平分概念的學習上添加不平分的判別；在加法交換律的學習上，添加減法不能交換的例子。

TIMSS 四年級 M011006 的問題需要讓學生判別平面和曲面，我國學生的答對率只有 61.6%。我國在能力指標「1-s-01 能認識直線與曲線。」中有曲線的介紹，但在「2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面(含簡單立體形體)。」沒有曲面的介紹。它也可以看成不是平面的問題，因此我們建議在 2-s-01 中添加非平面的概念的介紹。

TIMSS 四年級 M031267 的問題需要學生直觀的判斷兩個圖形是否形狀相同（相似）學生的答對率只有 66.0%。我國的能力指標在四年級「4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。」教授平面圖形全等的意義，而到了九年級「9-s-02 能理解多邊形相似的意義。」才教授相似的意義。本研究發現，若針對每一個 TIMSS 或 PISA 的施測問題，我國的能力指標都要添加或

增加該能力指標，那可能會掛一漏萬。研究者認爲在每個單元中添加概念反例的問題，可能可以解決此一問題。例如，在教全等概念的直觀意義時，它是狀況一樣，大小相同。因此我們需要介紹形狀一樣但大小不同的反例，要教大小一樣但形狀不同的反例。學生有了這樣的能力，便能解決 M031267 的問題。

（三）添加有規律的解答方法

四年級 M022227 的題組主要的概念是要求學生從已知的正方形面積中求出邊長或周長。雖然這個問題是求平方根的問題，但是當它要做爲四年級學生可以解答的問題一定是整數邊長的問題。它是課程中由邊長求面積的逆向思考的問題，它只需要學生有規律的去思考邊長是 1,2,3,…的時候正方形面積是 1,4,9,…便可以解答，但我們的學生只有 64.1%可以正確回答。因此我們建議在「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。」的學習過程中，能添加出現這類的問題，讓學生能利用有規律的試錯誤，或者有規律的思考可能的解答，以便解答相類似的問題。

PISA 2006 M510 是一個簡單的排列組合的問題，它只需要學生有規律的進行配對或者用樹狀圖便可以解答問題。因此我們建議在「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。」添加有規律的找尋事件或母群體的問題。

相同的，建議在所有概念的學習上，在適當的時機都能添加或強調有規律的找尋答案，或者有規律的嘗試錯誤的方法。

（四）添加逆向思考和逆運算的問題

八年級 M032046 的問題是給學生最習慣的表示法 $y=3x+2$，要求學生逆運算用不習慣的 y 來表示 x 的問題，我們的學生只有 47.7%的學生答對。此外四年級 M022227 的題組也需要學生運用逆向思考的問題。

逆向思考或運算的問題，在數學的學習上有著非常要的地位。有些逆向的性質仍然成立，有些逆向的性質就會錯誤，例如「正方形的四個邊長都相等」，但「四個邊長都相等的正方形並不一定是正方形」。

但這個概念在我們的能力指標中都已出現，只是沒有逆向思考的問題。M032046 和 M022227 相對應的能力指標中並未見到這樣的內容。因此，我們建議在「7-a-05 能利用移項

法則來解一元一次方程式，並做驗算。」和「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。」應該添加逆向思考和逆運算的問題，同時在所有的數學概念的學習上也應該一致的被強調出來。若我們的老師都知道教一概念時，也應該反問它的逆向問題或概念，老師的教學將會更有條理。若學生了解每一概念都需要思考它的逆向概念或逆向問題，我們的學生可以學得更有感覺，會學得更好。

（五）添加概念溝通的問題

八年級 M022261 的題組問題中，主要是找尋規律的問題，之後寫出「你如何得到答案的理由」。解釋理由的問題學生的答對率 48.9%。八年級 M022002 的問題中，也是一個概念溝通的問題，在這問題中只有 50.3%的學生能了解問題中 K 所代表的意義。

從八二年版開始，我國的課程綱要便開始強調學生建構自己的知識，強調學生能溝通他的數學概念。雖然我國的數學課程綱要列有「連結」的主題，也強調溝通的內涵，但是這類的理念，在課程綱要能力指標的說明中，並未被強調出來。同時學生口述他的數學概念與書寫他的數學概念仍有一段的差距。因爲用講的比較快，用寫的比較花時間，同時要考慮是否能清楚表達的文法問題。因此我們建議在相關的能力指標「6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並驗解的合理性。」中能添加相關的說明，要求學生用書寫的方式解釋他的想法，或說明他的理由。在相關的能力指標「7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。」中要求學生溝通他人所表示出來的式子或者符號的意義。此外，在各概念的學習上也應添加概念溝通的內容，使我國學生習於書寫概念的構通。

（六）添加正負數的前置經驗問題

TIMSS 四年級 M011013 的問題是零下溫度的上升和下降問題。我國學童的答對率只有 60.1%，有 31.7%的學生直接將 5 度和零下 3 度的兩數相減 5-3=2。因爲我國地處亞熱帶，因此不會出現零下的溫度，所以在教材上沒有這類的問題。若我國想要讓學童能解答這類的問題，建議在「3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。」的教材中，可以添加輸贏、比多少、…等等有正負數概念的前置概念的問題，以增加學生的解答經驗，使學生有助於七年級正負數概念的學習。

（七）添加比例型的乘法問題

TIMSS 四年級 M031108 的問題是一種比例型的乘法問題，我國有 20.1%的學童用加法來解題。因爲比例型的問題的單位可以全部相同，它與學生學習累加型的乘法啓蒙概念（不相同的單位）不同，因此學童有沒真正了解問題的情形下，會誤用加法來解題。因此我們建議，在「3-n-04 能熟練三位數乘以一位數的直式計算。」的問題中添加相同單位卻需要用乘法來算的問題，例如比例型的乘法問題。

（八）添加時間縮短的百分率問題

有關 TIMSS 八年級 M022039 時間改變的百分率問題「25 分鐘變成 20 分鐘，縮短的時間百分比」，我國學童的答對率只有 39.7%，且有 47.8%的學童都回答 5%。我們相信學童可能不知道怎麼作答，因此直接用 25-20=5 來作答。有關這類的問題，我國六到八年級能力指標的內容並未出現。但在「5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含百分率、折)。」和「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」分別有百分率和時間的乘除問題。我們認爲這兩個能力指標已經可以含蓋其內涵，只是從未出現這類的問題。因此我們建議在「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」的能力指標中添加時間的改變的百分率問題。

（九）添加圖形放大、縮小對面積的影響問題

PISA 的 M148 試題是有關圖形放大、縮小對面積的影響的問題。而我國的相關能力指標，在「6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。」我們認爲除了了解圖形放大、縮小對於長度、角度之影響外，也應了解對於面積之影響。因此我們建議添加「6-s-02 爲能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度以及面積的影響，並認識比例尺。」

（十）添加獨立事件的機率

PISA 2006 的 M417 是兩個獨立事件的機率問題，然而我國「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。」只是基本的機率問題。兩個獨立事件（或者不同母群體）的機率問題，學生可以很直觀將兩個機率乘起來。因此建議我國課程綱要可以添加類似的問題說明，以引導教科書編列相類似的問題。

二、增加之指標

（一）各年級增加怎樣解題的能力指標

在 TIMSS 和 PISA 的試題中，有許多的推理或解題性知識的問題，例如八年級的 M022008、M032744，四年級 M031347、M031344、M031345，PISA2006 M316 和 M484 的問題。這些問題雜散在各個單元之中，同時學生的答對率不高。雖然我國的能力指標列有「連結」的主題，之內也強調「解非例行性的問題」，但是連結的主題時常被忽視。因此我們建議在各個年級都增加的能力指標，或者要求教科書著者在每一本教科書的最後一個單元加列「怎樣解題」，以增加學生解題的經驗。

（二）四年級增加空間中全等的能力指標

四年級 M012069 的問題是空間形體的旋轉問題。我國學生的答對率只有 57.5%。它是智力測驗常見的問題，可是我國的能力指標在並未出現類似的問題，只有在「4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。」有判別平面圖形的全等問題。因此我們建議在四年級的能力指標中，可以增加一個能力指標「4-s-04 能認識空間圖形全等的意義。」

（三）四、六年級增加生活中統計圖表的報讀和解讀的能力指標

八年級學童在試題 M022035 的曲線統計圖表報讀中，答對率只有 44.7%。TIMSS 四年級 M031333 的問題需要學生報讀兩點高、低溫差的問題，學生的答對率只有 57.1%。此外，我們也發現我們的能力指標編排方式，八年級學童在五、七、八年級是學習統計單元，在六年級是強調長條圖和折線圖製作，以及圓餅圖的報讀與製作。在四年級則報讀長條圖和折線圖，完全沒有出現曲線圖的內容。由於生活中仍會出現曲線圖的報讀，因此我們建議在四年級的能力指標中修改 4-d-01 和 4-d-02 爲「能報讀生活中常用的統計圖表」。

此外 PISA M150 也是曲線圖表的報讀和解讀問題。M525 則是統計圖表的報讀和解讀問題。因爲統計圖表的解讀問題，有時候會涉及比率問題，因此我們建議將 6-d-03 能報讀生活中常用的圓形圖，並能整理生活中的資料，製成圓形圖。」一分爲二：「6-d-03 能報讀和解讀生活中常用的統計圖(包含圓形圖、曲線圖、...)。」和「6-d-04 能整理生活中的資料，製成圓形圖。」。

（四）六年級增加機率的能力指標

2003 年八年級 M032271 的問題、M022252 的問題是機率的問題。機率的問題，在八二年版和九年一貫暫行綱要中，六年級都要進行教學，但是在九年一貫課程綱要和 97 年的課綱

中都已被刪除。此一問題的答題學生當時還就讀暫綱之前的版本，因此答對率尚可 77.2%。可是現在學習九年一貫課程綱要的學生在八年級之前已沒有機率的問題。再者研究者今年在某縣市進行國小數學科展的評審時，六年級學生在做「猜 1 到 100 之間的數，用中位數的方法是最好的方法」的問題，發現學生只知道他是算 1 到 100 被猜中的次數的平均數，他並不知道機率的概念。

機率的問題在日常生活中是一個常見的問題，但它不是平均數的概念，不是比例的概念，同時相關的國際評量仍然會施測，因此我們考量整個能力指標的編排精神，建議我國課程綱要在六年級時，可以增加機率相關概念的能力指標。

陸、討論與啓示

一、討論

雖然我國歷年來在 TIMSS 和 PISA 的成就或素養表現都非常優異，但是從 TIMSS 和 PISA 的個別試題表現，仍有許多試題的表現不如理想。因此值得進行質性分析。

在質性分析方面，我們依據 TIMSS 和 PISA 的試題內容，以及學生的答題情形，建議我國課程綱要應強調的指標內容有：應強調生活語意的內容、應強調數學名詞的語意感覺、應強調量感的教學、應強調學生常犯的迷思概念問題、應強調相對數值的問題。

應添加的指標內容有：建議添加成人生活經驗問題、建議添加概念的反例問題、建議添加有規律的解答方法的問題、添加逆向思考和逆運算的問題、添加概念溝通的問題、添加正負數的前置概念問題、添加比例型的乘法問題、添加時間縮減的百分率問題、添加圖形放大縮小對面積的影響問題、添加獨立事件的機率問題。

應增加的能力指標有：各年級增加怎樣解題的能力指標、四年級增加空間中全等的指標、四、六年級增加生活中計圖表的報讀和解讀的指標、六年級增加機率的能力指指標。

二、啓示

從 TIMSS 和 PISA 試題的質性分析，讓我們找到一些我國課程綱要能力指標在舖陳和說明時應強調或添加、增加的內容。其中主要的內容是應讓我國教師更了如何進行教學，例如

- 應教導我們的學生用他的語文能力去了解數學名詞和數學的概念，應用對比的語法讓學生了解關鍵詞的差異；

- 應教導概念的正例和反例，使學生的概念能建構得更完整，知道什麼時候可以用，什麼時候不能用；
- 應強調營造數學感的教學，尤其是量感的教學；
- 應重視學生常犯的迷思概念的學習，甚至運用診斷教學策略破除學生的迷思概念；
- 應教導學生有規律的思考問題，強調溝通和解題性知識或推理的問題，讓我們的學生學得能力而非不能活用的知識。

上述這些內容，在我國近年來的數學教育研究上，已有許多的實證證據。例如營造數學感和診斷教學的理念，林福來(1997)早已提出。強調有規律的思考問題、溝通和解題則是美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, 1989)提出的理念，同時也獲得數學教育界的認同。李源順、林福來、呂玉琴和陳美芳(2008)則在其制定的「小學教師數學教學發展標準」強調關鍵概念和正、反例的教學。因此若我國能力指標在撰寫上能多參考數學教育研究上的證據，教師在教學時能多留意數學教育上的研究資料，我國學生的數學學習可以學得更好。

參考文獻

林煥祥主編(2008)。**臺灣參加 PISA 2006 成果報告**。行政院國家科學委員會計畫編號：NSC 95-2522-S-026-002。

林碧珍、蔡文煥（2003）。四年級學生在國際教育成就調查試測的數學成就表現。國立新竹師範學院數學教育系。**科學教育月刊，258**，2-20。

張秋男、邱美虹、方泰山、李田英、洪志明、洪有情、楊文金、林陳涌、譚克平、張永達、曹博盛和林碧珍（2005）。**國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003**。國科會 NSC 93-2511-S-003-001。

教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。引自 http://www.edu.tw/eje/content.aspx?site_content_sn=15326。

Martin, M.O., Gregory, K.D. & Stemler S.E.(ed.) (2000). **TIMSS1999 International Technical Report.** Chestnut Hill, MA: Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., and Chrostowski, S. J. (2004). **TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International**

Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Foy, P.; Olson, J.F.; Preuschoff, C.; Erberber, E.; Arora, A.; Galia , J.(2008). **TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA' s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades.** TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

國家教育研究院籌備處《研習資訊》雙月刊電子期刊

第 26 卷第六期專論：【學生學科能力品管機制】

臺灣學生在 TIMSS 的數學表現及其啟示

李源順（臺北市立教育大學數學資訊教育學系教授）

王美娟（臺北市立教育大學數學資訊教育學系副教授）

蘇意雯（臺北市立教育大學數學資訊教育學系助理教授）

陳怡仲（臺北市立教育大學數學資訊教育學系碩士班）

P1-16

摘　　要

本研究的目的在利用 TIMSS 數學資料庫，深度分析 TIMSS 試題中的關鍵概念，並與教育部已修訂的九七課程綱要對比，進而對九七課綱要提出可以考慮的建言。研究方法爲質性分析法。信度和效度採三角校正法來檢核。研究發現，我國的課程綱要可以考慮是否在能力指標的說明中強調生活語意的內容、數學名詞的語意感覺、量感的教學、學生常犯的迷思概念問題、相對數值的問題。可以考慮是否在能力指標的說明中添加成人生活經驗問題、概念的反例問題、有規律的解答方法的問題、逆向思考和逆運算的問題、概念溝通的問題、正負數的前置概念問題、比例型的乘法問題、時間縮減的百分率問題、獨立事件的機率問題。可以考慮是否增加下列能力指標：在各年級增加怎樣解題的能力指標、四年級增加空間中全等的指標、四、六年級增加生活中計圖表的報讀和解讀的指標、六年級增加機率的能力指指標。

壹、前言

近十多年來，我國在國科會與教育部的支持下，積極參與國際數學教育成就評比。1999 年參加八年級學生爲研究對象的國際數學和科學趨勢研究(Trends International Mathematics and Science Study [TIMSS])，2003 和 2007 年也持續參加八年級和四年級的 TIMSS 研究。這幾次的國際評比中，我國學童在國際上的表現令人滿意，成績都在前四名。同時 TIMSS 資料庫中也公布了一些研究結果和試題，這些研究結果和試題潛藏著國際上重視或者強調的內涵，若我們能夠進一步進行解析，便可以做爲我國數學教育的借鏡，尤其供教育部已修訂的九七課程綱要（教育部，2008）的參考。因此本文的目的在對於 TIMSS 的公開試題進行深入解析，希望能對我國的教師進行數學教學，甚至編訂未來課程綱要時有一些啓發。

貳、TIMSS 數學評量

一、TIMSS 沿革

國際教育學習成就評量委員會（The International Association for the Education Achievement, IEA）成立於 1959 年，目的在了解各國學生數學及科學學習成就及其各國

文化背景、學習環境、教師因素等影響因子之相關性；同時，對連續參加的國家進行縱向的趨勢比較，以協助參加的國家瞭解其在教育改革的成效（林碧珍、蔡文煥，2003）。IEA 於 1970 年舉行第一次國際數學與科學教育成就調查(The First International Mathematics and Science Studies[FIMSS])，當時共有 19 個國家參與。1980 年再次舉行第二次國際數學與科學教育成就調查（The Second International Math and Science Studies[SIMSS]），則有 24 個國家參與。1995 年舉行第三次國際數學與科學教育成就研究（Third International Mathematics and Science Study[TIMSS], Martin & Kelly(eds), 1996），共有 45 個國家參與。在此之前，台灣並未參與調查研究。

由於世界各國對 TIMSS 的熱烈反應，IEA 計畫往後每隔四年辦理一次，並於 1999 年舉辦了第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查（the Third International Mathematics and Science Study Repeat[TIMSS-R], 羅珮華，2000），同時之後的評量皆定名為「國際數學與科學教育成就趨勢調查(TIMSS)」。TIMSS 1999 的調查對象為八年級學生，包含台灣在內，共有 38 個國家/地區參加。

台灣參與 TIMSS 1999 的籌畫與執行是由國立台灣師範大學科學教育中心負責。之後國立台灣師範大學科學教育中心也持續負責台灣參加 TIMSS 2003 及 TIMSS 2007 的調查研究相關事務，此時參加的年級則有四年級與八年級的評量調查。TIMSS 2003（Martin et al., 2004）參與八年級評量的有 48 個國家，四年級的則有 26 個國家。TIMSS 2007(Mullis, et al., 2008)參與八年級評量的有 50 個國家，四年級的則有 37 個國家。

二、TIMSS 的數學評量架構

由於篇幅所限，有關 TIMSS 的評量架構，我們僅探討台灣參與的幾次評量架構。歷年來 TIMSS 的數學評量架構都分為兩個領域。TIMSS 1999（Martin, et al., 2000）的數學評量架構的第一個領域為包含分數與數感、測量、資料呈現、分析與機率、幾何以及代數等五個內容領域，其試題分布分別為 38%, 15%, 13%, 13%, 22%。第二個領域為包含知道、使用例行性程序、使複雜性程序、探究與解題、以及溝通與推理等五個外在表現，其試題分布分別為 19%, 23%, 24%, 31%, 2%。

TIMSS 2003(Mullis, et.al., 2001)的數學評量架構，在內容領域方面，分為數、代數、

測量、幾何、資料等五個主題，4 年級和 8 年級的試題分布則分別爲 40%, 15%, 20%, 15%, 10%，以及 30%, 25%, 15%, 15%, 15%。認知領域分爲知道事實與程序、使用概念、解例行性問題、推理等四個面向。4 年級和 8 年級的試題分布則分別爲 20%, 20%, 40%, 20%，以及 15%, 20%, 40%, 25%。

TIMSS 2007(Mullis, et.al., 2005)的數學評量架構把四年級和八年級的內容領域分開來了，4 年級的內容領域分爲數、幾何圖形與測量、資料呈現等三個主題，試題分布分別爲 50%, 35%, 15%。8 年級則分爲數、代數、幾何、資料與機率等四個主題，試題分布分別爲 30%, 30%, 20%, 20%。但兩個年級的認知領域則相同，都分爲知道、應用與推理等三個面向。4 年級和 8 年級的試題分布則分別爲 40%, 40%, 20%，以及 35%, 40%, 25%。

從近三次的評量架構發現，在內容領域方面，不管在 4 年級或 8 年級，數的主題都是評量的重點，之後 4 年級則是幾何與測量，8 年級則是代數。在認知領域方面，基本的知道事實與程序、使用概念、解例行性問題是 4 年級和 8 年級的評量重點，但隨著年級愈高，評量推理的百分比從 20%提高到 25%。

三、我國在 TIMSS 數學評量的排名

台灣八年級學生在 TIMSS 1999（Mullis, et al., 2000）的數學評量成績在 38 個參與國家/地區中，排名第三，僅次於新加坡和韓國，香港排名第四。若從統計的角度看，新加坡的成績獨領群國，與其他國家的評量成績都有顯著差異，而我國和韓國與香港在第二群，彼此間沒有顯著差異，且與第五名的日本有顯著差異。若從內容領域分析，台灣的代數排名爲第一名，分數與數感及資料呈現分析與機率的排名均爲第三名，在測量與幾何的排名均爲第四名。

TIMSS 2003（張秋男主編，2005）的數學評量成績，台灣八年級學生 48 個參與國家／地區中排名第四，僅次於新加坡、韓國和香港。若從統計的角度看，新加坡的成績仍然獨領群國，與其他國家的評量成績都有顯著差異，而我國和韓國與香港在第二群，彼此間沒有顯著差異，且與第五名的日本有顯著差異。若從內容領域分析，台灣八年級學生在幾何及代數的排名均爲第三名，在數、測量及統計的排名均爲第四名。至於四年

級學生在 26 個參與國家／地區中，排名也是第四，次於新加坡、香港和日本。韓國的四年級學生則沒有參與評量。若從統計的角度看，新加坡的成績仍然獨領群國，與其他國家的評量成績都有顯著差異，香港在第二群與其他國家有顯著差異，而我國和日本在第三群，與其他國家有顯著差異。若從內容領域分析，數、數型和關係及資料的排名均爲第三名，在測量及幾何的排名均爲第四名。

TIMSS 2007(Mullis, et al., 2008) 的評量，台灣八年級學生在 50 個參與國家／地區中排名第一。若從統計的角度看，我國與第二、三名的韓國和新加坡的成績沒有顯著差異，且獨領群國，而其後的香港和日本則在第二群彼此間沒有顯著差異，但與其他國家有顯著差異。若從內容領域分析，臺灣八年級學生在數、統計、幾何和代數的排名則分別位居 3. 4, 1, 1 名。四年級學生在 37 個參與國家／地區中，排名第三，僅次於香港和新加坡。韓國的四年級學生則沒有參與評量。若從統計的角度看，香港和新加坡的成績沒有顯著差異，且獨領群國，而我國在第二群，且與第四名的日本有顯著差異。至於數、幾何圖形與測量和資料的排名則分別爲第 3, 4, 4 名。

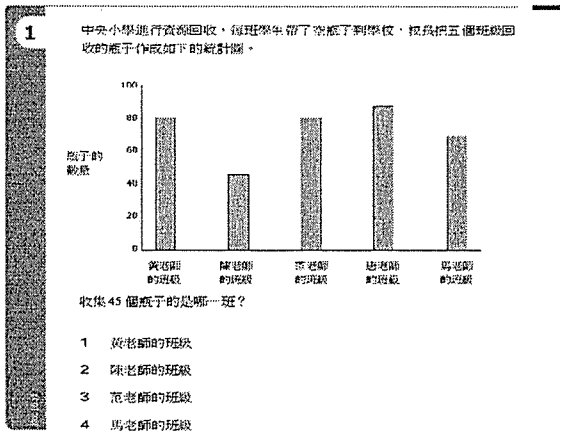
從三次的 TIMSS 評量發現，我國八年級和四年級學生大都在第二領先群，但八年級學生在 TIMSS 2007 年變成在第一領先群，顯示八年級學生的成績，在國際間有好的進展。

參、TIMSS 試題的次級分析

我們從中華民國期刊論文索引、教育論文線上資料庫、國科會研究計畫、全國博碩士論文資訊網及師範校院聯合學位論文系統等五個資料庫搜尋國內有關 TIMSS 數學評量的相關文獻，查詢時間至 97 年 11 月 30 日止，發現總計 64 篇。其中針對 TIMSS 的資料進行質性研究的只有兩篇，其它幾乎都是量化研究或者報導 TIMSS 的研究結果和進行資料詮釋，少有針對 TIMSS 的試題內容進行深度分析的研究。因此我們採用內容分析法針對 TIMSS 2003 的數學評量試題進行深度分析，試圖了解台灣學生表現欠佳的原因，做爲我國教師教學或者修訂課程綱要的建議。

在試題分析的過程中，我們針對其內容領域、認知領域以及解題時所需要學會的關鍵概進行解析，並且了解這些關鍵概念是否被羅列在民國 100 年要實施的九七年國民中

小學數學課程綱（教育部，2008）中，以做爲提出數學教學或綱要修訂的建言基礎。所謂的關鍵概念是指在解答此一試題過程中，具關鍵性的概念，了解此一概念便能順利解答或者避免不必要的迷思。至於內容領域與認知領域則以 TIMSS2003 所提的架構爲主。資料分析的信度和效度則採三角校正法檢核之。我們在不同時間點對同一問題進行分析，同時也邀請多位學者同時進行解析與檢核。圖一是本文分析的一個例子。本文因篇幅所限無法將相關的題目與答對率等相關資訊一一羅列，有興趣的讀者可以在 http://www.sec.ntnu.edu.tw/ NSC/TIMSS/TIMSS-2003.htm 找到相關的資料。



M01_01.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：Bar graph: which shows 45 bottles?
正確答案：B

M011009

國家 / 選項	台灣 (N=784)	香港 (N=773)	日本 (N=756)	新加坡 (N=1122)	國際平均
A	1.7%	0.3%	0.4%	0.6%	5.1%
B*	96.6%	98.1%	96.9%	98.1%	82.8%
C	0.6%	0.9%	0.7%	0.4%	4.0%
D	0.0%	0.3%	0.3%	0.5%	2.2%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料 – 資料表徵	解例行性問題	4-d-01 能報讀生活中資料的統計圖，如長條圖、折線圖與圓形圖等。	1. 認識生活中常用的統計圖； 2. 運用等分概念估算出長條圖對應的數據。

圖一　內容分析架構

一、強調生活語意的問題

八年級學生在 TIMSS 試題 M012037 的統計圖表問題中，對於問題「有多少學生的成績超過 7 分？」的答對率只有 50.5%，另一個包含 7 分的錯誤選項：10 人卻有 40.7% 的學生填答。分析發現這個試題的內涵在我國的能力指標 3-d-01 中已呈現，但學生作答不理想，主要是對生活中「超過」和「以上」語意的混淆。此外四年級 M011017 的試題中，也有 14.9%的學生把「三星期後」的問題，選擇成「第三個星期」的答案。雖然有些語意我國的課程在教學時已不再特別強調，例如「增加 2 倍」和「增加爲 2 倍」，「6 除以 2」和「2 除 6」的問題。但是 TIMSS 在八年級的試題中仍出現類似的語意的

了解的問題。因此我們建議在能力指標「3-d-01 能報讀生活中常見的直接對應（一維）表格。」的說明中可以考慮強調生活中「超過」和「以上」的語意的差異；在能力指標「2-n-13 能認識年、月、星期、日，並知道某月有幾日、一星期有七天」的說明中可以考慮強調「三星期後」和「第三個星期」的差異。

我們在生活當中有時候對於「7 分以上」是否包含 7 分的問題；「增加 2 倍」到底是變成來的兩倍或是三倍；可不以說「下降 2 倍」？有些人似乎沒有共識，但它在數學上的意義是很明確的，因此在數學學習過程當中應加以強調。若我國要針對每一個生活語意逐指標建議強調，怕會掛一漏萬。因此我們建議在老師的教學過程中要適當的強調生活中常見的語意的定義。我們期望學生能依據他對中文語意的了解來了解類似的語意問題，而非盲目的背誦語意。

二、強調數學名詞語意的感覺問題

試題分析發現，有 34.6%的八年級學童在 M022044 的小數問題中把 78.2437 四捨五入到百分位時選擇 78.244。有 13.8%的四年級學生在 M011020 的分數化成小數問題中把 7/10 的答案選擇 0.07。八年級 M022154 的問題是將長方形旋轉成另一長方形，然後要求學生找出它的「旋轉中心」。旋轉中心的名詞，我國在能力指標「4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。」是針對旋轉角提到的名詞，此外再也沒有提到。因此我們建議在「3-n-12 能認識一位小數，並做比較與加減計算。」和「4-n-09 能認識二、三位小數與百分位、千分位的位名，並作比較。」的說明中可以考慮強調十分位、百分位、千分位的數學名詞的語意的感覺是因爲它代表著十分中的幾分、百分中的幾分的感覺。在「4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。」的說明中可以考慮強調旋轉中心的語意的感覺，使學生能將此一名詞應用到相關的概念的學習上。

我們的研究及實務經驗發現，教師在教導數學名詞時，都不強調數學名詞的感覺問題，例如小數的百分位是把一平分成一百等分的感覺，因此有些學童會過度一般化他在整數位值名詞－個位、十位、百位…到小數爲個分位、十分位、百分位。若我國要針對每一個數學名詞一一強調，會掛一漏萬，因此研究者認爲最重要的就是讓學生能依據他對中文語意的了解，來學習數學的名詞。把數學名詞和它的數學意涵連結在一起，這樣學生對數學名詞便會更有感覺。以後當他面對新的數學名詞時，便可以會意，再配合

數學的概念，兩者結合成一個新的知識結構體。如此一來，學生的數學可以學得更好，教師也可以不用再擔心那些沒有教過的名詞。

三、強調量感

在 TIMSS 四年級 M012023 的量感問題，有 24.9%的學生用公斤來秤一個蛋的重量，顯示我國學生的量感有待加強。因此建議在能力指標「3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。」的說明中可以考慮強調公斤和公克的量感。當然，有關量感的學習建議教師要多強調「參考量」的概念。通常的參考量是學生生活週遭常見的量的感覺。例如學生的身高大約是 140 公分或 1.4 公尺；一瓶小的瓶裝水大約 600 毫公升；教室的長度大約 8 公尺；...。當學生所熟知的參考量愈多時，他愈能正確的估計量感。

四、強調學生易犯的迷思概念問題的釐清

TIMSS 八年級 M012016 問題是要求學生將分數化成小數或者小數化成分數的大小比較問題。學生的答對率只有 60.2%。分析這個問題，學生將分數化成小數再來比較，較爲簡單。同時發現有 22%的學生選擇 2.5<2.25<2.75。這個錯誤符合學者研究的小數大小比較的整數法則的迷思概念：學生把小數當做整數來比較。八年級 M022198 的問題則是小數的大小比較問題，學生的答對率只有 62.5%，且有 29.2%的學生選擇 0.3<0.32<0.332<0.233。其原因比較符合學者研究中分數法則的迷思概念：分割的分數愈多，小數愈小。

因此我們建議在「4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。」和「5-n-08 能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決生活中的問題。」的說明中可以考慮強調小數大小比較中易犯的迷思概念問題的釐清。

此外 TIMSS 四年級 M011025 的面積與周長的問題，有 41.2%的學生將周長的問題選擇了面積的答案。八年級 M012030 只有 25.9%的學生用面積求周長的邊長問題。因此我們建議老師教學時應強調學生的迷思概念。在「3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。」的說明中可以考慮強調長度和面積的差異。

TIMSS 八年級 M012004 的比例問題，只有 65.5%的學生答對，其餘的學生大都可能犯了使用加法來計算。因此在「7-n-16 能理解比例的意義（以實例說明正比、反比關係的意義）」的說明中可以考慮強調學生使用加法進行比例計算的迷思概念的釐清。

爲了防止掛一漏萬，我們建議在適當的能力指標上，應強調學生迷思概念的釐清，尤其是研究上已實證的迷思概念。例如，真分數愈乘愈大的迷思概念，…等等。

五、強調相對數值的問題

八年級 M032557 的問題是三個未知數兩個方程式的問題，它無法把 a,b,c 的值先求出來，再求出 a+2(b+c)的值。這類的問題在某些能力指標中曾經出現過。例如「7-a-06 能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。」但未知數比方程式多的問題的求解，在我國的能力指標中未被強調，僅談到它有無限多解。因此我們建議在「7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。」剛開始建立學生未知數的概念時，能強調我們雖然不知道未知數的值，但是我們仍然可以知道在某些特定情形下的解。

其實這類的問題是一種相對數值的問題。它雖然有無限多解，但是在特定的情況下仍然可以求出它的解。有時候我們的公式也有相似的結果，例如$\sin^2\theta+\cos^2\theta$，無論$\theta$的值是多少，它的結果永遠等於 1。例如爸爸和兒子的年齡每年變動，但是它們的差永遠固定。

相對數值的概念，在課程綱要中並未被充分討論其意義。例如，以前述例子$\sin^2\theta+\cos^2\theta$來說，它的一個特例的值也是對的，$\sin^2 55°+\cos^2 55°$也會等於 1。因此可以用某一特例來求解。但是這樣會有危險性，所以最好多找幾個數值來檢驗是否完全相等。當然最好的求解方法是找出已知方程式和求解方程式間的關係，並利用其關係求解。

六、添加成人生活經驗的問題

我國的數學課程綱要強調數學與生活連結的問題，同時我們發現大部份強調的問題都是學童生活中的問題。在 TIMSS M032762-4 的題組中是一個不同方案的電話費率

問題。在這類的問題中，學童的答對率在 30%以下。因爲這類的問題是成人生活中的問題，學童生活中是無法驗到的。倘若學童能學習這類的問題，也將有助於他將來的生活理財。因此我們建議在相關的單元中添加成人生活經驗的問題。例如在「5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。」或者「7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。(修 7-a-04)」的說明中可以考慮添加電話費率的問題。

在數學課程綱要中，我們強調學生的學習要連結生活經驗，而學生的生活經驗是有限度的，成年人的生活經驗，並不是他們在學期間可以經驗到的。例如生活中電費的問題、手機費率的問題、計程車計費的問題...等等，雖然是學生生活中會碰到的成年人的問題，但是他們都是沒有機會去解決這些成年人生活中的問題。若我們想培養學生解答問題的能力，讓他成年以後能解決成年人的問題。我們建議在學生時期，相關的單元和能力指標應添加這些成年人會碰到的問題，讓學生有解題的經驗。

七、添加概念的反例問題

TIMSS 四年級 M011006 的問題需要讓學生判別平面和曲面，我國學生的答對率只有 61.6%。我國在能力指標「1-s-01 能認識直線與曲線。」中有曲線的介紹，但在「2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面(含簡單立體形體)。」沒有曲面的介紹。它也可以看成不是平面的問題，因此我們建議在 2-s-01 的說明中可以考慮添加非平面的概念的介紹。

TIMSS 四年級 M031267 的問題需要學生直觀的判斷兩個圖形是否形狀相同(相似)學生的答對率只有 66.0%。我國的能力指標在四年級「4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。」教授平面圖形全等的意義，而到了九年級「9-s-02 能理解多邊形相似的意義。」才教授相似的意義。本研究發現，若針對每一個 TIMSS 的施測問題，我國的能力指標都要添加該能力指標，那可能會掛一漏萬。研究者認爲在每個單元中添加概念反例的問題，可能可以解決此一問題。例如，在教全等概念的直觀意義時，它是狀況一樣，大小相同。因此我們需要介紹形狀一樣但大小不同的反例，要教大小一樣但形狀不同的反例。學生有了這樣的能力，便能解決 M031267 的問題。

八、添加有規律的解答方法

四年級 M022227 的題組主要的概念是要求學生從已知的正方形面積中求出邊長或周長。雖然這個問題是求平方根的問題，但是當它要做爲四年級學生可以解答的問題一定是整數邊長的問題。它是課程中由邊長求面積的逆向思考的問題，它只需要學生有規律的去思考邊長是 1,2,3,…的時候正方形面積是 1,4,9,…便可以解答，但我們的學生只有 64.1%可以正確回答。因此我們建議在「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。」的說明中可以考慮添加這類的問題，讓學生能利用有規律的嘗試錯誤，或者有規律的思考可能的解答，以便解答相類似的問題。

相同的，建議在所有概念的學習上，在適當的時機都能添加或強調有規律的找尋答案，或者有規律的嘗試錯誤的方法。

九、添加逆向思考和逆運算的問題

八年級 M032046 的問題是給學生最習慣的表示法 y=3x+2，要求學生逆運算用不習慣的 y 來表示 x 的問題，我們的學生只有 47.7%的學生答對。此外四年級 M022227 的題組也需要學生運用逆向思考的問題。

逆向思考或運算的問題，在數學的學習上有著非常要的地位。有些逆向的性質仍然成立，有些逆向的性質就會錯誤，例如「正方形的四個邊長都相等」，但「四個邊長都相等的正方形並不一定是正方形」。

但這個概念在我們的能力指標中都已出現，只是沒有逆向思考的問題。M032046 和 M022227 相對應的能力指標中並未見到這樣的內容。因此，我們建議在「7-a-05 能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。」和「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。」的說明中可以考慮添加逆向思考和逆運算的問題，同時在所有的數學概念的學習上也應該一致的被強調出來。若我們的老師都知道教一概念時，也應該反問它的逆向問題或概念，老師的教學將會更有條理。若學生了解每一概念都需要思考它的逆向概念或逆向問題，我們的學生可以學得更有感覺，會學得更好。

十、添加概念溝通的問題

八年級 M022261 的題組問題中，主要是找尋規律的問題，之後寫出「你如何得到答案的理由」。解釋理由的問題學生的答對率 48.9%。八年級 M022002 的問題中，也是一個概念溝通的問題，在這問題中只有 50.3%的學生能了解問題中 K 所代表的意義。

從八二年版開始，我國的課程綱要便開始強調學生建構自己的知識，強調學生能溝通他的數學概念。雖然我國的數學課程綱要列有「連結」的主題，也強調溝通的內涵，但是這類的理念，在課程綱要能力指標的說明中，並未被強調出來。同時學生口述他的數學概念與書寫他的數學概念仍有一段的差距。因爲用講的比較快，用寫的比較花時間，同時要考慮是否能清楚表達的文法問題。因此我們建議在相關的能力指標「6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並驗解的合理性。」的說明中可以考慮添加相關的說明，要求學生用書寫的方式解釋他的想法，或說明他的理由。在相關的能力指標「7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。」的說明中可以考慮要求教師讓學生溝通他人所表示出來的式子或者符號的意義。此外，在各概念的學習上也應添加概念溝通的內容，使我國學生習於書寫概念的溝通。

十一、添加正負數的前置經驗問題

TIMSS 四年級 M011013 的問題是零下溫度的上升和下降問題。我國學童的答對率只有 60.1%，有 31.7%的學生直接將 5 度和零下 3 度的兩數相減 5-3=2。因爲我國地處亞熱帶，因此不會出現零下的溫度，所以在教材上沒有這類的問題。若我國想要讓學童能解答這類的問題，建議在「3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。」的說明中可以考慮添加輸贏、比多少、…等等有正負數概念的前置概念的問題，以增加學生的解答經驗，使學生有助於七年級正負數概念的學習。

十二、添加比例型的乘法問題

TIMSS 四年級 M031108 的問題是一種比例型的乘法問題，我國有 20.1%的學童用加法來解題。因爲比例型的問題的單位可以全部相同，它與學生學習累加型的乘法啓蒙概念（不相同的單位）不同，因此學童有沒真正了解問題的情形下，會誤用加法來解題。

因此我們建議，在「3-n-04 能熟練三位數乘以一位數的直式計算。」的說明中可以考慮添加相同單位卻需要用乘法來算的問題，例如比例型的乘法問題。

十三、添加時間縮短的百分率問題

有關 TIMSS 八年級 M022039 時間改變的百分率問題「25 分鐘變成 20 分鐘，縮短的時間百分比」，我國學童的答對率只有 39.7%，且有 47.8%的學童都回答 5%。我們相信學童可能不知道怎麼作答，因此直接用 25-20=5 來作答。有關這類的問題，我國六到八年級能力指標的內容並未出現。但在「5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含百分率、折)。」和「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」分別有百分率和時間的乘除問題。我們認爲這兩個能力指標已經可以含蓋其內涵，只是從未出現這類的問題。因此我們建議在「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」的能力指標的說明中可以考慮添加時間的改變的百分率問題。

十四、各年級增加怎樣解題的能力指標

在 TIMSS 的試題中，有許多的推理或解題性知識的問題，例如八年級的 M022008、M032744，四年級 M031347、M031344、M031345 的問題。這些問題雜散在各個單元之中，同時學生的答對率不高。雖然我國的能力指標列有「連結」的主題，之內也強調「解非例行性的問題」，但是連結的主題時常被忽視。因此我們建議在各個年級都增加的能力指標，或者要求教科書著者在每一本教科書的最後一個單元加列「怎樣解題」，以增加學生解題的經驗。

十五、四年級增加空間中全等的能力指標

四年級 M012069 的問題是空間形體的旋轉問題。我國學生的答對率只有 57.5%。它是智力測驗常見的問題，可是我國的能力指標在並未出現類似的問題，只有在「4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。」有判別平面圖形的全等問題。因此我們建議在四年級的能力指標中，可以考慮是否增加一個能力指標「4-s-04 能認識空間圖形全等的意義。」

十六、四、六年級增加生活中統計圖表的報讀和解讀的能力指標

八年級學童在試題 M022035 的曲線統計圖表報讀中，答對率只有 44.7%。TIMSS 四

年級 M031333 的問題需要學生報讀兩點高、低溫差的問題，學生的答對率只有 57.1%。此外，我們也發現我們的能力指標編排方式，八年級學童在五、七、八年級是學習統計單元，在六年級是強調長條圖和折線圖製作，以及圓餅圖的報讀與製作。在四年級則報讀長條圖和折線圖，完全沒有出現曲線圖的內容。由於生活中仍會出現曲線圖的報讀，因此我們建議可以考慮是否在四年級的能力指標中修改 4-d-01 和 4-d-02 爲「能報讀生活中常用的統計圖表」。

十七、六年級增加機率的能力指標

2003 年八年級 M032271 的問題、M022252 的問題是機率的問題。機率的問題，在八二年版和九年一貫暫行綱要中，六年級都要進行教學，但是在九年一貫課程綱要和 97 年的課綱中都已被刪除。此一問題的答題學生當時還就讀暫綱之前的版本，因此答對率尚可 77.2%。可是現在學習九年一貫課程綱要的學生在八年級之前已沒有機率的問題。再者研究者今年在某縣市進行國小數學科展的評審時，六年級學生在做「猜 1 到 100 之間的數，用中位數的方法是最好的方法」的問題，發現學生只知道他是算 1 到 100 被猜中的次數的平均數，他並不知道機率的概念。

機率的問題在日常生活中是一個常見的問題，但它不是平均數的概念，不是比例的概念，同時相關的國際評量仍然會施測，因此我們考量整個能力指標的編排精神，建議我國課程綱要在六年級時，可以考慮是否增加機率相關概念的能力指標。

肆、討論

雖然我國歷年來在 TIMSS 的成就或素養表現都非常優異，但是從 TIMSS 的個別試題表現，仍有許多試題的表現不如理想。因此值得進行質性分析。

在質性分析方面，我們依據 TIMSS 的試題內容，以及學生的答題情形，建議我國課程綱要能力指標的說明中可以考慮是否強調下列問題：生活語意的內容、數學名詞的語意感覺、量感的教學、學生常犯的迷思概念問題、相對數值的問題。

能力指標的說明中可以考慮添加下列問題：成人生活經驗問題、概念的反例問題、有規律的解答方法的問題、逆向思考和逆運算的問題、概念溝通的問題、正負數的前置概念問題、比例型的乘法問題、時間縮減的百分率問題、獨立事件的機率問題。

同時可以考慮是否增加下列的能力指標：各年級增加怎樣解題的能力指標、四年

級增加空間中全等的指標、四、六年級增加生活中計圖表的報讀和解讀的指標、六年級增加機率的能力指指標。

我們之所以用「可以考慮」一詞，主要是考量到現在中小學的數學教學時數比六十四年版時期少，但現今的要進行教學的內容和六十四年版相仿，同時現在是大眾教育，所有的人都可以就讀中小學，不像以前有一些人無法就讀。因此老師是否能在更少的時間下，又去強調從 TIMSS 試題分析所得的問題，學生是否能因此而受惠，是我們不敢直言之因。

我們雖然沒有實足的證據，但是從我們的研究經驗，若教師能持續的進行我們從 TIMSS 試題的質性分析中，得出的下列建議中的教學，我們相信我們的老師可以把所有的指力指標教授完畢，我們的學生可以把數學學得更好，學生會學到數學的能力。例如

- 應教導我們的學生用他的語文能力去了解數學名詞和數學的概念，應用對比的語法讓學生了解關鍵詞的差異；
- 應教導概念的正例和反例，使學生的概念能建構得更完整，知道什麼時候可以用，什麼時候不能用；
- 應強調營造數學感的教學，尤其是量感的教學；
- 應重視學生常犯的迷思概念的學習，甚至運用診斷教學策略破除學生的迷思概念；
- 應教導學生有規律的思考問題，強調溝通和解題性知識或推理的問題，讓我們的學生學得能力而非不能活用的知識。

上述這些內容，在我國近年來的數學教育研究上，已有許多的實證證據。例如營造數學感和診斷教學的理念，林福來(1997)早已提出。強調有規律的思考問題、溝通和解題則是美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, 1989)提出的理念，同時也獲得數學教育界的認同。李源順、林福來、呂玉琴和陳美芳(2008)則在其制定的「小學教師數學教學發展標準」強調關鍵概念和正、反例的教學。因此若我國能力指標在撰寫上能多參考數學教育研究上的證據，教師在教學時能多留意數學教育上的研究資料，相信我國學生的數學學習可以學得更好。

伍、參考文獻

李源順、林福來、呂玉琴和陳美芳(2008)。小學教師數學教學發展標準之探究：學者的觀點。*科學教育學刊，16(6),* 627-650。

林福來(1997)。*教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法(1/3)*。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告。

林碧珍、蔡文煥（2003）。四年級學生在國際教育成就調查試測的數學成就表現。國立新竹師範學院數學教育系。*科學教育月刊，258*，2-20。

張秋男(主編)（2005）。*國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003*。國立台灣師範大學科技教育中心。

教育部（2008）。*國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域*。http://www.edu.tw/eje/content.aspx?site_content_sn=15326。

羅珮華（2000）。「第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查」之抽樣設計。*科學教育月刊，235*，14-20。

Martin, M.O., Kelly, D.L.(eds)(1996). ***Third International Mathematics and Science Study Technical Report Volume I: Design and Development.*** Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston College.

Martin, M.O.; Gregory, K.D.; Stemler, S.E.(2000). ***TIMSS 1999 Technical Report.*** International Study Center Lynch School of Education Boston College.

Mullis, I., Martin, M. O., Gonzalez, E.J., Gregory, K. D., Garden, R. A., O'Connor, K. M., Chrostowski, S.J., and Smith, T. (2000) ***TIMSS 1999 International Mathematics Report. : Findings from IEA' s Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade.*** Chestnut Hill, MA: Boston College.

Mullis, I. S, Martin, M.O., Smith, T.A, Garden, R.A, Gregory, K.D, Gonzalez, E.J, Chrostowski, S.J & O'conner, K.M. (2001). ***TIMSS Assessment Framework and specification 2003, 2 ed.*** International Study Center. Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I.V.S; Martin, M.O.; Gonzalez, E.J.; Chrostowski, S.J.(2004). ***TIMSS 2003 International Mathematics Report.*** TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Ruddock, G.J.; O' Sullivan, C.Y.; Arora, A.; Erberber, E.(2005). ***TIMSS 2007 Mathematics Famework.*** TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Foy, P.; Olson, J.F.; Preuschoff, C.; Erberber, E.; Arora, A.; Galia , J.(2008). ***TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA' s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades.*** TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

NCTM.(1989). ***Curriculum and evaluation standards for school mathematics.*** National Council of Teachers of Mathematics，Reston，VA：Author.

「中小學課程發展之相關基礎性研究」

區塊研究一整合型研究（二）

子計畫三：臺灣國中小學生數學能力表現之分析與運用

（PISA、TIMSS）

台灣國中小學生數學能力表現之分析與運用

整合型研究（二）主持人：陳麗華　教授

子計畫三主持人：李源順　　共同主持人：王美娟

研究人員：李美賢　蘇意雯　陳怡仲

中　華　民　國　九十八　年　十一　月　二十二　日

目錄

壹、 前言.....1
貳、 研究目的.....1
參、 文獻探討.....2
一、 TIMSS 沿革.....2
二、 TIMSS 歷年的數學評量架構.....3
(一)、 TIMSS 1999 評量架構.....3
(二)、 TIMSS 2003 評量架構.....4
(三)、 TIMSS 2007 評量架構.....4
三、 我國 TIMSS 數學評量的排名.....5
四、 國內 TIMSS 相關研究.....6
五、 PISA 的沿起.....7
六、 PISA 的數學評量架構.....8
七、 我國 PISA 2006 數學評量的排名.....8
八、 國內 PISA 相關研究.....9
肆、 研究方法.....9
伍、 研究結果.....10
一、 TIMSS 量化分析 -- 學生數學能力表現、趨勢與影響因素.....10
(一)、 依資料庫分類.....10
(二)、 依報告者身分分類.....11
(三)、 依研究地區分類.....12
(四)、 依年份及年級分類.....12
(五)、 依資料運用分類.....13
(六)、 依研究方法分類.....14
(七)、 依是否運用 TIMSS 數據資料分類.....15
(八)、 依背景變項分析.....15
1、 表現趨勢.....15
2、 世界因素.....19
3、 國家因素.....20
4、 學校因素.....21
5、 教師因素.....21
6、 家庭因素.....22
7、 個人特質.....22

(九)、 其他相關研究.....25
1、 資料庫的統計分析方法研發.....25
2、 特殊對象與數學成就.....25
二、 PISA 量化分析結果.....26
(一)、 世界排名.....26
(二)、 數學各題表現.....27
(三)、 問卷調查結果.....28
三、 質性分析 -- 對未來課綱內容的具體建議.....32
(一)、 強調之內容.....32
1、 強調生活語意的問題.....32
2、 強調數學名詞語意的感覺問題.....34
3、 強調量感.....36
4、 強調學生易犯的迷思概念問題的釐清.....37
5、 強調相對數值的問題.....39
(二)、 添加之內容.....40
1、 添加成人生活經驗的問題.....40
2、 添加概念的反例問題.....43
3、 添加有規律的解答方法.....46
4、 添加逆向思考和逆運算的問題.....47
5、 添加概念溝通的問題.....48
6、 添加正負數的前置經驗問題.....50
7、 添加比例型的乘法問題.....51
8、 添加時間縮短的百分率問題.....52
9、 添加圖形放大、縮小對面積的影響問題.....53
10、 添加獨立事件的機率.....54
(三)、 增加之指標.....55
1、 各年級增加怎樣解題的能力指標.....55
2、 四年級增加空間中全等的能力指標.....65
3、 四、六年級增加生活中統計圖表的報讀和解讀的能力指標.....66
4、 六年級增加機率的能力指標.....71
(四)、 有待研究的問題.....72
1、 時間的換算問題.....72
2、 畫記的比較問題.....73

3、 角度的加減計算問題.....74
陸、 討論與啓示.....75
一、 討論.....75
(一)、 量化分析.....75
(二)、 質性分析.....76
二、 啓示.....76
柒、 參考文獻.....77

台灣國中小學生數學能力表現之分析與運用

摘　　要

本研究的目的在利用 PISA 和 TIMSS 等資料庫，分析台灣國中小學生數學能力表現、趨勢與影響因素；並且深度分析 PISA 和 TIMSS 試題中的關鍵概念，並與教育部已修訂的九七課程綱要（教育部，2008）對比，進而對九七課綱要提出有證據性的建言。研究方法分爲量化分析和質性分析。信度和效度採三角校正法來檢核。量化分析發現，我國學生的成就或素養表現都前列世界前茅，但是對數學的態度和自信心則遠低於歐美國家，造成這個結果的成因則有待深入研究。同時影響學生學習的因素有學生個人的因素、教師的因素、家長的因素、學校的因素、其至國家的經驗因素都會影響學生的學習。質性分析發現，建議我國的課程綱要應強調生活語意的內容、應強調數學名詞的語意感覺、應強調量感的教學、應強調學生常犯的迷思概念問題、應強調相對數值的問題。建議添加成人生活經驗問題、建議添加概念的反例問題、建議添加有規律的解答方法的問題、添加逆向思考和逆運算的問題、添加概念溝通的問題、添加正頁數的前置概念問題、添加比例型的乘法問題、添加時間縮減的百分率問題、添加圖形放大縮小對面積的影響問題、添加獨立事件的機率問題。建議各年級增加怎樣解題的能力指標、四年級增加空間中全等的指標、四、六年級增加生活中計圖表的報讀和解讀的指標、六年級增加機率的能力指指標。

P1-83

台灣國中小學生數學能力表現之分析與運用

壹、前言

我國以往對於中小學課程綱要及各學科領域課程綱要、授課時數之擬訂，較為缺乏系統性的規劃，或缺少證據導向的結論為依據。甚至在新課程實施之後，才發現職前師資培育並未配合改變，導致產生實施新課程之阻礙（教育部，2008）。另外，由於所擬訂的課程綱要沒有理論依據或研究結果做為佐證，因此在遭受挑戰或質疑時，也無法提出具有說服力的理由。

再者小學、國中、高中課程規劃分別由不同團隊執行，若未實施統整，可能產生銜接的遺漏或不必要的重覆。因此，教育部（2008）遂提出此一含括小學、國中、高中職學習階段之課程發展研究計畫。

國科會與教育部向來重視我國學生在國際比較中的表現水準。除了從 1999 年開始每年培訓資優學生參與數學的奧林匹亞競賽之外，從 1999 年開始陸續參加以一般學生為對象的國際數學和科學趨勢研究(Trends International Mathematics and Science Study [TIMSS])和國際學生評量計畫(the Programme for International Student Assessment [PISA])等學生數學學習表現的跨國比較。這些年的參與中，我國已經累積了相當豐富的中小學生學習表現的資料庫（詳見表一）。

教育部為了充分使用這些資料庫的資源，進行進一步深度的分析，充分發揮我國在這些資料庫所做投資的最大效益。於是核定「中小學課程發展之相關基礎性研究」下的整合型計畫「臺灣學生學習表現檢視與課程發展運用」之子計畫，期望利用我國參與的國際性中小學數學評量之資料庫 TIMSS 和 PISA，探討我國中小學學生的數學學習表現與趨勢，做為未來發展十二年一貫數學新課程之佐證與參據。

表一 TIMSS、PISA 資料庫的資料年份與主題

年份 資料庫	1999	2001	2003	2005	2006	2007
TIMSS	小四數學 國二數學		小四數學 國二數學			小四數學 國二數學
PISA					十五歲學生 數學素養	

貳、研究目的

明確地說，本計畫的具體的目的在彙整與統合目前使用 TIMSS 和 PISA 等數學資料庫所做的國內外相關研究成果，利用 PISA 和 TIMSS 等資料庫，分析台灣國中小學生數學能力表現、趨勢與影響因素；並且深度分析 PISA 和 TIMSS 試題中的關鍵概念，

並與教育部已修訂的九七課程綱要（教育部，2008）對比，進而對九七課綱要提出有證據性的建言。

參、文獻探討

一、TIMSS 沿革

國際教育學習成就評量委員會（The International Association for the Education Achievement, IEA）成立於 1959 年，由歐、美學者推動。其目的主要在於瞭解各國學生數學及科學學習成就及其各國文化背景、學習環境、教師因素等影響因子之相關性；同時，對於連續參加的國家可以進行縱向的趨勢比較，以協助參加的國家瞭解其在教育改革或課程改革的成效（林碧珍、蔡文煥，2003）。自 1960 年以來，IEA 爲了瞭解各國學生的學業表現，計畫長期追蹤調查學生學業成就表現（Walker, 1976）。IEA 於 1970 年舉行第一次國際數學與科學教育成就調查，共有 19 個國家參與。經過十年後，於 1980 年舉行第二次國際數學與科學教育成就調查（SIMSS），有 24 個國家參與。

其後，IEA 於 1990 年開始推動進行「第三次國際數學與科學教育成就研究（Third International Mathematics and Science Study, 簡稱 TIMSS）」，此次的研究重點在比較學生的數學和科學成就。IEA 自 1990 至 1993 年先進行課程分析、調查項目及測驗工具發展、取樣設計、試測等研究工作，於 1994-1995 年正式進行調查工作，共有 41 個國家參與，共計有五個年級的學生：國小三年級和四年級、國中一年級和二年級、高中三年級，超過 50 萬名學生參加測驗（Robitaille et a.l, 1993; Beaton et al., 1996）。

參與 1995 年 TIMSS 調查的共有四十二個國家/地區參加，不過台灣並未參與此次的調查之中（吳琪玉，2004）。由於世界各國對 TIMSS 的熱烈反應，IEA 計畫往後每隔四年辦理一次，並於 1999 年開始改名爲「國際數學與科學教育成就趨勢調查(Trends in International Mathematics and Science Study, 簡稱 TIMSS)」。

IEA 在 1999 年舉辦了第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查（the Third International Mathematics and Science Study Repeat，簡稱 TIMSS-R 或稱 TIMSS 1999），主要是爲了追蹤各國家學生在 TIMSS 1995 是國小四年級的學生到了 1999 年升上國中二年級時，數學與科學的學習成就及態度是否有所變化，並評估各國八年級學生的學習成就而推動之。TIMSS 1999 的調查對象爲 13 歲群，包含台灣在內，共有三十八個國家/地區參加，台灣參與測驗的爲八年級生，成績表現相當出色，科學學習成就平均成績的國際排名爲第一；數學總平均成績排名爲第三（羅珮華，2000；洪志明，2001）。

我國是從 1999 年開始參加這項國際評比，計畫的籌畫與執行是以國立台灣師範大學理學院研究人員爲主要班底，並結合國立台北教育大學、國立新竹教育大學、台北市立教育大學的研究人員；以國立台灣師範大學科學教育中心爲工作平台，支援各項所需之人力及物力。之後也陸續參加了 2003 年及 2007 年的調查研究。

2003 年的國際數學與科學教育成就趨勢調查，我國這次同時參加了四年級與八年級的測驗調查，這是我國國小四年級學生第一次參加的國際性測驗。在此次的調查中，參與八年級測驗的有 48 個國家，四年級的則有 26 個國家（Martin et al.,2004,p. 6&7）。由此可以看出，TIMSS 的數學與科學教育成就調查已被許多國家認同，並且各國都希望透過這樣的調查能了解自己的國家在全球的教育概況中，學生的成就趨勢以及表現情形。

TIMSS 2007 是調查國小四年級與八年級（國中二年級）之學生數學與科學學科學習成就，評估他們能否掌握參與社會所需的知識與技能，並比較各參與地區或國家的教育成效，其調查結果可作爲我國數學與科學教育研究與實施之參考。四年級的參與國家有 37 國，八年級則有 50 個國家 (Mullis, et al., 2008) 。

二、TIMSS 歷年的數學評量架構

(一)、TIMSS 1999 評量架構

TIMSS 1995 的測驗架構是從學習內容（content）、外在表現（performance expectations）、觀點與立場（perspectives）三方面（Robitaille, 1992），來蒐集學生在學習數學三個面向課程中的概念、過程、態度資料，然後在各分類項目之下再分別制訂完整的架構細目，藉以發展測驗和問卷內容，用來研究學生成就本質和學生自己的特性、他們受教的課程、老師的教學方法、教室和學校資源等。

TIMSS 1999 採用 TIMSS 1995 的測驗架構然後稍做修改，其數學評量架構主要分爲內容領域和外在表現，各部分的試題所佔的百分比分佈情形如表二（Martin, et al., 2000）。

表二 TIMSS 1999 數學試題分佈情形

內容領域	百分比
分數與數感	38%
測量	15%
資料呈現、分析與機率	13%
幾何	13%

代數	22%
外在表現	百分比
知道	19%
使用例行性程序	23%
使複雜性程序	24%
探究與解題	31%
溝通與推理	2%

註（譯自 TIMSS 1999 International Mathematics Report 第 319 頁）。

(二)、TIMSS 2003 評量架構

TIMSS 2003 的數學評量架構，主要可分爲內容和認知兩個層面。在數學的內容領域，分爲數、代數、測量、幾何、資料等五個主題；認知領域分爲知道事實與程序、使用概念、解例行性問題、推理。表三爲各主題在各年級所佔的百分比：

表三 TIMSS 2003 數學評量架構主要分類

	百分比	
內容領域	四年級	八年級
數	40%	30%
代數*	15%	25%
測量	20%	15%
幾何	15%	15%
資料	10%	15%
認知領域	四年級	八年級
知道事實與程序	20%	15%
使用概念	20%	20%
解例行性問題	40%	40%
推理	20%	25%

*四年級的代數內容領域又稱爲模式（patterns）、等式（Equations）、關係（Relations）等。（譯自 TIMSS 2003 Mathematics Famework 第 9 頁）。

(三)、TIMSS 2007 評量架構

TIMSS 2007 的內容架構是依賴 TIMSS 2003 的架構，TIMSS 2007 更進一步的整合

主要的內容領域，並分別在四年級和八年級兩個年級提出數學內容領域爲：數、幾何圖形與測量、資料呈現；數、代數、幾何、資料與機率。兩個年級的認知領域分類相同，都是分爲：知道、應用與推理。表四爲各主題在各年級所佔的百分比：

表四 TIMSS 2007 數學評量架構

四年級內容領域	百分比
數	50%
幾何圖形與測量	35%
資料呈現	15%
八年級內容領域	百分比
數	30%
代數	30%
幾何	20%
資料與機率	20%

	百分比	
認知領域	四年級	八年級
知道	40%	35%
應用	40%	40%
推理	20%	25%

註（譯自 TIMSS 2007 Mathematics Famework 第 14 頁）。

三、我國 TIMSS 數學評量的排名

台灣學生僅有國中二年級學生參與 TIMSS 1999 的測驗。從 TIMSS 1999 的成績分析統計結果得知，在參與的 38 個國家（或地區）中，在數學方面的前五名依序爲新加坡、韓國、台灣、香港和日本（Mullis, et al., 2000）。此外，在內容領域的代數排名爲第一名，在分數與數感及資料呈現分析與機率的排名均爲第三名，在測量與幾何的排名均爲第四名。TIMSS 2003 的調查對象包括國小四年級及國中二年級學生，於 2001 年開始相關的試務工作，我國學童表現仍然優異，國中二年級學生在數學方面的總成績位居所有參加國之第四名，在幾何及代數的排名均爲第三名，在數、測量及統計的排名均爲第四名（張秋男主編，2005）。TIMSS 2007 我國的總成績位居首位，在數、統計、幾何和代數的排名則分別位居 3. 4, 1, 1 名(Mullis, et al., 2008)。三次成績詳細的排名如表五：

表五 我國國二學生在 TIMSS 的數學成就表現

1999年排名	數學總排名 3

	分數與數感	測量	資料呈現分析與機率	幾何	代數
	3	4	3	4	1
2003年排名	數學總排名 4				
	數	測量	統計	幾何	代數
	4	4	4	3	3
2007年排名	數學總排名 1				
	數		統計	幾何	代數
	3		4	1	1

TIMSS 2003 的調查，我國學童表現仍然優異，國小四年級學生在數學方面的總排名爲第四名，在各內容領域裡，數、數型和關係及資料的排名均爲第三名，在測量及幾何的排名均爲第四名（張秋男主編，2005）。TIMSS 2007 的調查，四年級學生的排名前進一名，爲第 3 名。至於數、幾何圖形與測量和資料的排名則分別爲第 3, 4, 4 名(Mullis, et al., 2008)。如表六：

表六 我國小四學生在 TIMSS 的數學成就表現

2003年排名	數學總排名 4				
	數	數型和關係	測量	幾何	資料
	3	3	4	4	3
2007年排名	數學總排名 3				
	數	幾何圖形與測量			資料
	3	4			4

四、國內 TIMSS 相關研究

本研究透過文獻分析法（Document Analysis），並從以下五個線上資料庫搜尋國內過去 TIMSS 相關文獻。本研究將分散各處的文獻資料，經過分析後歸納在一起，比較各種文獻的異同正誤，並且分析歷史事件淵源、原因、背景、影響及其意義等，以便解釋。

資料庫包括：中華民國期刊論文索引、教育論文線上資料庫、國科會研究計畫、全

國博碩士論文資訊網及師範校院聯合學位論文系統等。研究者並依其發表屬性分爲「期刊類」、「計畫類」與碩士學位「論文類」三種，查詢時間至 97 年 11 月 30 日止，總計 64 篇，詳如表七。

表七 資料庫 * 研究領域

	資料庫	研究領域				
		數學	數學與科學	數學與閱讀	其他	總計
期刊類	中華民國期刊論文索引	16	5		1	22
	教育論文線上資料庫	2	2		0	4
	小計	18	7		1	26
計畫類	國科會研究計畫	7	10	1		18
	小計	7	10	1		18
論文類	全國博碩士論文資訊網	16	3			19
	師範校院聯合學位論文系統	1	0			1
	小計	17	3			20
總計		42	20		1	64

至於詳細的研究文獻分析，將在研究結果中進一步解析。

五、PISA 的沿起

PISA(The Program for International Student Assessment，簡稱 PISA，林煥祥主編 2008)，是由經濟合作暨發展組織(Organization for Economic Co-operation and Development，簡稱 OECD)所委託的計畫，於 1990 年代末期開始對 15 歲學生的數學、科學、及閱讀進行持續、定期的國際性比較研究。每次評量會從數學、科學及閱讀三個領域中選擇一個主要領域，進行深入評量，主要領域的測驗時間較長、題目較多、內容較爲深入，另外兩個領域仍會進行施測，但測驗時間較短、涵蓋的面向較少；PISA 2000 年主要領域爲閱讀，2003 年爲數學，2006 年爲科學。台灣於 2006 年第一次參與此項調查計畫，這一年進行施測的國家共有 57 國，各國接受評量的學生數大約在 4500 至 10000 位學生之間，由 OECD 組織審查學生資格、確認參與研究的總人數，並經由評量中心進行分區、不同學制的抽樣工作，台灣此次接受評量的學生共計 8815 人。

PISA 與一般調查針對特定學校學科的能力有所不同，尤其有助反映未來課程改變爲知識應用取向，而非只是單方面的知識獲取。由於相信學生在知識及技能上的準備是

未來國家社會及經濟人力資源的重要指標之一。因此 PISA 提供的學生資訊及國家間的比較，對於研究者、政策制定者、教育者、家長及學生都有非常之價值。

六、PISA 的數學評量架構

在 PISA 主要測驗—閱讀、數學、科學及問題解決，PISA2006 以科學素養爲調查主軸，佔 70%。測驗問題中有選擇題、簡答題、亦有非傳統結構式的題型，使學生可有更多樣的回答。測驗外有學生問卷和學校問卷，調查下列有關內容：包括學生及家庭背景:包含經濟，社會和文化的資源。學生的生活:如學習態度，習慣，校園生活，家庭環境。學校:學校的資源，公私立金費來源，決策過程，學校員工。學校教學:教學的結構及方法，班級大小，家長參與程度。個人學習:自我規範的策略、動機和目標、個人規範認知機制、行爲控制策略、不同的學習狀況、學習風格及合作學習之社會技能。學習與教學:學生動機、素養之自信、對於學業成就學習策略之影響。資訊科技:接觸機會、使用的機會、使用的地點、自信及態度、學習內容。教育背景：包括過去背景:留級、中輟、轉校；現在背景:學科課程、學科程度；未來職業:期待的教育程度、30 歲時的期待職業。

在數學評量方面，PISA 運用了數學素養的概念來描述學生提出、解決及解釋各式各樣牽涉到數量、空間、機率或是其他數學概念的問題情境時，能有效進行分析、推理以及溝通的能力。透過 Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006（OECD, 2006），OECD 國家建立了用來比較 PISA 中參與國之間數學表現的指導方針，並定義數學素養爲「個體能夠辨認和瞭解數學在世界上所扮演的角色，能夠進行有根據的評斷，並且針對個體在生活中的需求來運用或者投入數學活動，以成爲一個積極的、關懷的、以及反思的國民」。

由於 PISA 2003 數學爲主軸，因此，數學的部份以 PISA 2003 的調查爲基準，PISA 2003 的平均分數設定爲 500 分，以此分數爲參照點，進行 PISA 2006 的數學表現比較，未來此類的比較中，此參照點將會持續使用。PISA 2003 與 PISA 2006 的差異在於 PISA 2006 在數學領域的測驗時間比 PISA 2003 還要短，PISA 2006 的測驗時間只有 120 分鐘，而 PISA 2003 則進行了 210 分鐘。PISA 2003 的試題分配及涵蓋面較廣，因此可以針對數學素養進行知識和技能的深度分析，而 PISA 2006 的主軸是科學，數學部份主要著眼於整體表現。

七、我國 PISA 2006 數學評量的排名

我國十五歲組的學生在 PISA2006 的數學評量排名是世界第一名。

八、國內 PISA 相關研究

由於 PISA 2006 的研究報告公告不久，因此針對 PISA 進行研究的報告並不多見。同時 PISA 相關研究員告訴研究者，PISA 所公佈的試題，並不是 PISA 正式施測的試題。因此 PISA 的研究結果，並無法與它的試題進行比對。

但是 PISA 所公布的試題可以反應 PISA 評量的意圖與方向。因此我們在進行質性分析時，仍將其所公布的試題列爲分析的範圍。

肆、研究方法

本研究採取的研究方法有量化分析和內容分析法。首先我們深度解讀 TIMSS 和 PISA 等資料庫的網站、出版品，以了解其宗旨與資料庫的結構、相關研究等基要資訊，同時將進一步蒐集、彙整與統合目前使用這些資料庫所做的國內外相關研究成果，以呈現研究現況與趨勢，釐清其優點與缺點，以作爲執行本研究之基礎。

在量化分析方面，本計畫除了建構分析概念的架構、指標、統計模型與方法之外，也和各相關子計畫共同討論是否可以形成共同的分析概念架構、指標、統計模型與方法。同時也將適時邀請相關的數學教育學者或教育實務工作者，進行焦點團體的激盪。此後，定期向整合型計畫報告本計畫的成果。

將根據研議出來的分析架構與統計模型與方法，抽取各資料庫中的 DATA，進行統計分析與結果解讀。同時，將視各資料庫特有的性質、結構與變項，進行個殊性的分析，以提供更多元角度來了解學生的學習表現情形。

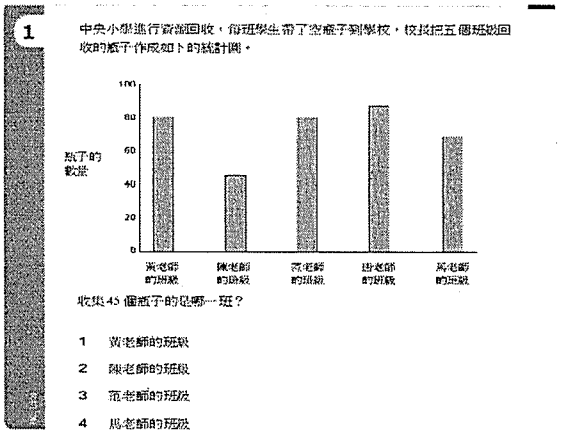
在內容度分析方面，我們針對 TIMSS 和 PISA 試題進行關鍵概念的深度分析，並了解這些關鍵概念是否內蓋於現行課程綱要或教科書之中，做爲提出數學課程綱要的建言基礎。

本研究所採取的內容分析法，主要是質性分析，首先針對逐 TIMSS 和 PISA 試題逐題分析其內容領域、認知領域以及解題時所需要學會的關鍵概念。我們以 TIMSS 2003 的架構進行分析，也就是在內容領域方面，我們以數、測量、幾何、資料（機率和統計）、代數爲分析的依據。在認知領域方面則以知道事實與程序、使用概念、解例行性問題、推理爲分析的依據。

之後將此關鍵概念與民國 100 年要實施的九七年國民中小學數學課程綱要進行比對，解析出 TIMSS 和 PISA 所評量的能力，我國課程綱要是否已呈現(如下圖一)。最後，再對課綱提出建言。當然，我們在分析時，也會適時聘請專家學者提供建言，使我們儘

可能能在 TIMSS 和 PISA 試題的解析中，對課綱提出更貼切的建言。

資料分析的信度和效度則採三角校正法檢核之。我們在不同時間點對同一問題進行分析，同時也邀請多位學者同時進行解析與檢核。



M01_01.

考題領域：Mathematics (Data)

考題內容：Bar graph: which shows 45 bottles?

正確答案：B

M011009

國家 / 選項	台灣 (N=784)	香港 (N=773)	日本 (N=756)	新加坡 (N=1122)	國際平均
A	1.7%	0.3%	0.4%	0.6%	5.1%
B*	96.6%	98.1%	96.9%	98.1%	82.8%
C	0.6%	0.9%	0.7%	0.4%	4.0%
D	0.0%	0.3%	0.3%	0.5%	2.2%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料 – 資料表徵	解例行性問題	4-d-01 能報讀生活中資料的統計圖，如長條圖、折線圖與圓形圖等。	1. 認識生活中常用的統計圖； 2. 運用等分概念估算出長條圖對應的數據。

圖一　內容分析架構

伍、研究結果

一、TIMSS 量化分析 -- 學生數學能力表現、趨勢與影響因素

本研究從六個線上資料庫：中華民國期刊論文索引、教育論文線上資料庫、國科會研究計畫、全國博碩士論文資訊網及師範校院聯合學位論文系統，搜詢國內 TIMSS 相關研究之文獻，至 97 年 11 月 30 日止，總計 64 篇。並依資料庫、研究地區、年份及年級、資料運用、研究方法、是否運用 TIMSS 數據資料、研究背景變項等因素進行量化分析。其中，對課程綱要的建言最為重要的研究背景變項分為「世界因素」、「國家因素」、「學校因素」、「教師因素」、「家庭因素」和「個人特質」等六類。由於 PISA2006 的官方報告在 2008 年才公開，因此到目前為止研究較少。但本研究也正試圖利用上述的研究背景變項解析那些因素對學生學習的影響因子較為重要。

(一)、依資料庫分類

期刊類是由期刊由中華民國期刊論文索引及教育論文線上資料庫查詢，共 26 篇；計畫類是由國科會研究計畫資料庫查詢，共 18 篇；碩士論文是由全國博碩士論文資訊

網及師範校院聯合學位論文系統查詢，共 20 篇。若綜合各資料庫之研究，在數學領域方面有 42 篇，數學與科學領域方面有 20 篇，數學與閱讀領域方面有 1 篇，其他領域（探討有關 TIMSS 1999 的抽樣方法）有 1 篇。總計 64 篇。詳如表八。

在期刊類 24 篇中，以數學領域方面的篇數最多，共有 18 篇；數學與科學領域方面有 7 篇，其他領域有 1 篇。在計畫類 18 篇中，數學與科學領域方面篇數最多，共有 10 篇；在數學領域方面有 7 篇、數學與閱讀領域方面有 1 篇。在論文類 19 篇中，以數學領域方面最多，共有 17 篇；在數學與科學領域方面有 3 篇。

表八 資料庫 * 研究領域

	資料庫	研究領域				
		數學	數學與科學	數學與閱讀	其他	總計
期刊類	中華民國期刊論文索引	16	5		1	22
	教育論文線上資料庫	2	2		0	4
	小計	18	7		1	26
計畫類	國科會研究計畫	7	10	1		18
	小計	7	10	1		18
論文類	全國博碩士論文資訊網	16	3			19
	師範校院聯合學位論文系統	1	0			1
	小計	17	3			20
總計		42	20		1	64

(二)、依報告者身分分類

研究者將國內文獻依其報告者身分分爲二類：若爲國立台灣師範大學科學教育中心公佈之訊息乃歸屬爲「官方報導」；其他則歸爲「國內學者的研究」。

官方報導在數學領域有 4 篇，在數學與科學領域有 6 篇，共有 10 篇；國內學者的研究在數學領域方面有 38 篇、在數學與科學領域有 14 篇、數學與閱讀領域和其他方面各有 1 篇，共有 54 篇。總計爲 64 篇，詳如表九。

表九　　官方報導或學者研究 * 研究領域

	研究領域				總計
	數學	數學與科學	數學與閱讀	其他	
官方報導	4	6	0	0	10

國內學者的研究	38	14	1	1	54
總計	42	20	1	1	64

(三)、依研究地區分類

研究者將國內文獻依其研究地區分類：若僅以台灣學生爲研究或報導對象者，歸類爲「台灣」；若研究或報導對象除了台灣學生之外，尚有與其他國家學生做比較者，歸類爲「國際比較」；若尚未授權公開查詢者，歸類爲「待查」；若無法依研究地區歸類者則歸類爲「其他」。

以探討臺灣學生參加 TIMSS 測驗相關問題的篇數最多，在數學領域方面有 24 篇，數學與科學領域方面有 5 篇，數學與閱讀領域方面有 1 篇，共 30 篇；其次，國際比較之相關研究，在數學領域方面有 15 篇，數學與科學領域方面有 14 篇，共 29 篇。另外，林妙香（2007）與張芳全（2007c）二篇尚未授權公開查詢，故列爲待查；羅珮華（2000）報導 TIMSS 1999 抽樣設計方法與另二篇國立臺灣師範大學科學教育中心（2005），爲 TIMSS 2003 國小四年級與國中二年級數學測驗試題之中文翻譯，故歸類爲其他。詳如表十。

表十 研究地區 * 研究領域

		研究領域				總計
		數學	數學與科學	數學與閱讀	其他	
研究地區	台灣	24	5	1	0	30
	國際比較	15	14	0	0	29
	待查	1	1	0	0	2
	其他	2	0	0	1	3
總計		42	20	1	1	64

(四)、依年份及年級分類

研究者將國內文獻利用 TIMSS 資料做相關研究者依其 TIMSS 測驗年份，分別有 TIMSS 1995 有 1 篇；TIMSS 1999 有 14 篇；TIMSS 2003 有 41 篇；TIMSS 2007 有 2 篇；其他是跨年度資料研究者有 6 篇。

其中，以 TIMSS 2003 的 41 篇數最多，且以八年級爲研究對象的篇數最多，有 23 篇；以四年級爲研究對象有 11 篇；同時以四年級和八年級爲研究對象有 6 篇。其次，爲 TIMSS 1999 的 14 篇，其中也是以八年級爲研究對象的篇數最多，有 12 篇。詳如表

十一。

表十一　Timss 年 * 研究年級 * 研究領域

		研究領域				總計
Timss年	研究年級	數學	數學與科學	數學與閱讀	其他	
TIMSS 1995	四年級	1				1
	小計	1				1
TIMSS 1999	八年級	8	4		0	12
	四年級和八年級	0	1		1	2
	小計	8	5		1	14
TIMSS 1995, 1999	八年級		1			1
	小計		1			1
TIMSS 2003	四年級	10	0	1		11
	八年級	16	7	0		23
	四年級和八年級	4	2	0		6
	待查	0	1	0		1
	小計	30	10	1		41
TIMSS 1995, 1999, 2003	八年級		1			1
	小計		1			1
TIMSS 1999, 2003	四年級	1	0			1
	八年級	0	2			2
	四年級和八年級	0	1			1
	小計	1	3			4
TIMSS 2007	四年級	2				2
	小計	2				2
總計		42	20	1	1	64

(五)、依資料運用分類

研究者將國內文獻依其資料運用分類：若由 TIMSS 主辦機構所發表的書籍或資料，歸類爲「原始資料分析」；若利用 TIMSS 主辦機構所公佈的資料另外做統計分析者，歸類爲「資料二次分析」；若除了將資料做統計分析外，尚有進行其他相關的研究，歸類爲「資料應用研究」；若僅就 TIMSS 主辦機構所公佈的資料作全釋或表達個人看法者，歸類爲「資料詮釋」；無法依前述屬性歸類者，則列爲「其他」。

其中，資料應用研究的篇數最多，在數學領域方面有 19 篇，數學與科學領域方面有 8 篇，共 27 篇；其次為資料二次分析，在數學領域方面有 13 篇，數學與科學領域方面有 6 篇，數學與閱讀領域齊其他方面各有 1 篇，共 20 篇；原始資料分析在數學領域方面有 3 篇，數學與科學領域方面有 6 篇，共 9 篇；資料詮釋和其他的篇數，分別有 4 篇及 1 篇。無法依此屬性歸類者，有 2 篇。詳如表十二。

表十二　資料運用 * 研究領域

		研究領域				總計
		數學	數學與科學	數學與閱讀	其它	
資料運用	原始資料分析	3	6	0	0	9
	資料二次分析	13	6	1	0	20
	資料應用研究	19	8	0	0	27
	資料詮釋	5	0	0	1	6
	其他	2	0	0	0	2
總計		42	20	1	1	64

(六)、依研究方法分類

研究者將國內文獻依其研究方法分為「研究類」和「非研究類」二類。其中研究類再細分為「質性研究」、「量化研究」與「質性與量化研究」三類。而非研究類中僅屬資料報導者，則列為「報導」。

其中，以量化研究的篇數最多，在數學領域方面有 30 篇，數學與科學領域方面有 20 篇，數學與閱讀領域與其他方面各有 1 篇，共 52 篇；質性與量化研究有數學領域 5 篇；而質性研究和非研究類的報導僅在數學領域，分別有 2 篇和 5 篇。詳如表十三。

表十三　研究方法 * 研究領域

		研究領域				總計
		數學	數學與科學	數學與閱讀	其他	
研究類	質性研究	2	0	0	0	2
	量化研究	30	20	1	1	52
	質性與量化研究	5	0	0	0	5
非研究類	報導	5	0	0	0	5
總計		42	20	1	1	64

(七)、依是否運用 TIMSS 數據資料分類

在國內學者的研究（54 篇）且屬於研究類（59 篇）的研究中，研究者依其是否運用 TIMSS 數據資料分析，再進一步細分爲「運用 TIMSS 數據資料」和「外延的研究」二類，分別有 41 篇和 10 篇，總計 51 篇，詳如表十四。

表十四　是否運用 TIMSS 的數據資料 * 研究領域

	研究領域				總計
	數學	數學與科學	數學與閱讀	其他	
運用TIMSS數據內的研究	26	14	1	1	41
外延的研究	9	0	0	1	10
總計	35	14	1	1	51

(八)、依背景變項分析

研究者蒐集國內有關 TIMSS 的相關研究彙整，依其研究探討問題的背景變項分爲「表現趨勢」、「世界因素」、「國家因素」、「學校因素」、「教師因素」、「家庭因素」和「個人特質」等六類。茲將本研究所蒐集文獻之背景變項及各文獻之重要研究結果，歸納整理如下：

1、表現趨勢

值得注意的是，若將學生的數學分層，我國 TIMSS 四年級學生成績分布不會比世界排名領先的國家分散（如圖二），但是在 TIMSS 八年級的成績則比世界排名領先的國家分散（如圖三）。

Country		Average Scale Score	2003 to 2007 Difference	1995 to 2007 Difference	Mathematics Achievement Distribution
Hong Kong SAR					
	2007	607 (3.6)			
1	2003	575 (3.2)	32 (4.8) ▲		
	1995	557 (4.0)		50 (5.4) ▲	
Singapore					
	2007	599 (3.7)			
	2003	594 (5.6)	5 (6.7)		
	1995	590 (4.5)		9 (5.9)	
Chinese Taipei					
	2007	576 (1.7)			
	2003	564 (1.8)	12 (2.5) ▲		
Japan					
	2007	568 (2.1)			
	2003	565 (1.6)	4 (2.6)		
	1995	567 (1.9)		1 (2.8)	

圖二　TIMSS 四年級學生數學成績分佈

Country		Average Scale Score	2003 to 2007 Difference	1999 to 2007 Difference	1995 to 2007 Difference	Mathematics Achievement Distribution
Chinese Taipei						
	2007	598 (4.5)				
	2003	585 (4.6)	13 (6.4) ▲			
	1999	585 (4.0)		13 (5.9) ▲		
Korea, Rep. of						
	2007	597 (2.7)				
⋈	2003	589 (2.2)	8 (3.1) ▲			
	1999	587 (2.0)		10 (3.4) ▲		
	1995	581 (2.0)			17 (3.4) ▲	
Singapore						
	2007	593 (3.8)				
	2003	605 (3.6)	−13 (5.2) ▼			
	1999	604 (6.3)		−12 (7.2)		
	1995	609 (4.0)			−16 (5.6) ▼	
Hong Kong SAR						
†	2007	572 (5.8)				
†	2003	586 (3.3)	−14 (6.6) ▼			
†	1999	582 (4.3)		−10 (7.2)		
	1995	569 (6.1)			4 (8.4)	
Japan						
	2007	570 (2.4)				
	2003	570 (2.1)	0 (3.1)			
	1999	579 (1.7)		−9 (2.9) ▼		
	1995	581 (1.6)			−11 (2.8) ▼	

圖三　TIMSS 八年級學生數學成績分佈

在我國學生對數學學習的正向態度與自信心方面，調查發現無論 TIMSS 四年級、八年級學生的排名都在 36 名之後，遠低於國際平均（PISA2006 並沒有對數學的態度與自信心進行調查）（如圖四、圖五、圖六、圖七）。顯示我國學生的成就表現雖佳，但對數學的態度和自信心則表現負向。

四年級學生對數學的正向態度指標 (PATM) 的趨勢分析

國家/地區	平均成績(排序)	高 PATM			中 PATM			低 PATM		
		2007 百分比(標準誤)	平均成績	1999-2007 差異	2007 百分比(標準誤)	平均成績	1999-2007 差異	2007 百分比(標準誤)	平均成績	1999-2007 差異
1 香港	438(27)	90(0.9)	450(3.7)	00	6(0.6)	415(9.0)	00	4(0.5)	415(10.2)	00
國際平均	500(19.5)	72(0.2)	483(0.6)		14(0.1)	457(1.1)		14(0.1)	454(1.3)	
17 新加坡	599(2)	71(0.8)	610(3.5)	-15(1.1) ▼	14(0.6)	575(5.9)	5(0.8) ▲	15(0.6)	575(5.6)	11(0.7) ▲
19 德國	525(12)	70(0.9)	534(2.7)	00	16(0.6)	520(3.7)	00	14(0.7)	509(3.6)	00
21 挪威	473(25)	68(1.2)	478(3.1)	-4(2.1)	15(0.6)	470(5.1)	1(1.1)	18(1.0)	462(3.7)	3(1.6) ▲
22 瑞典	503(18)	67(1.2)	505(2.8)	00	16(0.7)	501(3.2)	00	17(1.0)	497(4.1)	00
23 香港	607(1)	67(1.3)	619(3.5)	-5(1.8) ▼	15(0.7)	588(4.2)	-2(1.2)	19(1.1)	579(5.1)	7(1.5) ▲
24 澳洲	516(14)	66(1.4)	525(3.6)	-7(1.7) ▼	16(0.8)	512(4.6)	3(1.0) ▲	18(1.1)	494(5.1)	4(1.2) ▲
25 美國	529(11)	66(0.8)	535(2.7)	-8(1.4) ▼	16(0.5)	526(3.0)	3(0.8) ▲	18(0.6)	517(2.5)	5(1.0) ▲
26 紐西蘭	492(23)	66(1.0)	499(2.6)	-5(1.6) ▼	18(0.8)	485(3.8)	3(1.2) ▲	17(0.8)	484(3.3)	3(1.2) ▲
31 奧地利	505(17)	62(1.0)	513(2.0)	-5(1.7) ▼	16(0.7)	499(4.1)	1(1.1)	22(0.9)	492(2.9)	4(1.3) ▲
32 日本	568(4)	62(1.4)	584(2.4)	-1(1.8)	21(0.8)	547(3.3)	-1(1.2)	17(1.0)	543(4.4)	3(1.2) ▲
33 蘇格蘭	494(22)	59(1.3)	497(2.7)	--	18(0.8)	496(3.5)	--	24(1.1)	490(3.9)	–
34 荷蘭	535(9)	56(1.4)	540(2.7)	-5(2.0) ▼	17(0.9)	531(3.6)	3(1.2) ▲	27(1.3)	528(3.4)	3(1.9)
35 丹麥	523(13)	55(1.8)	526(3.0)	00	24(1.0)	521(3.4)	00	21(1.4)	523(3.1)	00
36 台灣	576(3)	50(1.2)	595(2.4)	00	21(0.8)	563(3.2)	00	29(0.9)	555(2.9)	00 50

圖四　TIMSS 四年級學生對數學的態度表現

四年級學生對學習數學的自信心指標 (SCM) 的趨勢分析

國家/地區	平均成績(排序)	高 SCM					中 SCM					低 SCM				
		2007 百分比(標準誤)	平均成績		2003-2007 差異		2007 百分比(標準誤)	平均成績		2003-2007 差異		2007 百分比(標準誤)	平均成績		2003-2007 差異	
1瑞典	503(16)	77 (0.9)	514	(2.4)	0	0	19 (0.8)	407	(4.5)	0	0	5 (0.4)	459	(5.2)	0	0
2奧地利	505(17)	70 (0.8)	524	(1.9)	0	0	22 (0.8)	470	(2.6)	0	0	8 (0.5)	445	(5.5)	0	0
3德國	525(12)	70 (0.9)	548	(2.1)	0	0	21 (0.7)	493	(3.5)	0	0	10 (0.5)	468	(4.5)	0	0
4丹麥	523(13)	70 (1.1)	540	(2.5)	0	0	23 (1.0)	493	(3.5)	0	0	7 (0.6)	469	(5.8)	0	0
5挪威	473(25)	69 (0.8)	490	(2.7)	5	(1.2) ⮝	24 (0.8)	441	(3.8)	-3	(1.2) ⮟	7 (0.4)	429	(7.1)	-1	(0.7)
8美國	529(11)	67 (0.8)	551	(2.4)	13	(1.1) ⮝	22 (0.6)	493	(2.8)	-17	(0.9) ⮟	10 (0.4)	478	(3.1)	3	(0.5) ⮝
9蘇格蘭	494(22)	67 (1.1)	511	(2.4)	3	(1.4) ⮝	24 (1.0)	472	(3.5)	-2	(1.3)	9 (0.6)	450	(5.3)	-1	(0.8)
10荷蘭	535(9)	66 (1.0)	551	(2.5)	0	(1.4)	22 (0.9)	511	(3.1)	-1	(1.3)	12 (0.7)	489	(4.2)	1	(0.9)
14英格蘭	541(7)	64 (1.0)	566	(3.0)	5	(1.5) ⮝	26 (0.8)	507	(3.7)	-4	(1.3) ⮟	10 (0.7)	483	(5.0)	-1	(0.9)
15澳洲	516(14)	64 (1.3)	542	(2.8)	0	(1.6)	26 (0.9)	480	(3.8)	1	(1.2)	10 (0.8)	457	(6.7)	-1	(1.1)
國際平均	500(19.5)	57 (0.2)	500	(0.6)			32 (0.2)	449	(0.8)			11 (0.1)	429	(1.2)		
24紐西蘭	492(23)	52 (0.7)	527	(2.3)	13	(1.3) ⮝	37 (0.7)	465	(2.6)	-19	(1.2) ⮟	11 (0.5)	438	(4.8)	7	(0.6) ⮝
28新加坡	599(2)	46 (1.2)	639	(3.0)	-3	(2.0)	35 (0.8)	580	(3.8)	-1	(1.3)	19 (0.8)	544	(4.9)	3	(1.2) ⮝
29香港	607(1)	46 (1.0)	634	(3.7)	6	(1.5) ⮝	38 (1.0)	588	(3.6)	-3	(1.3) ⮟	16 (0.7)	574	(4.6)	-3	(1.1) ⮟
32日本	568(4)	45 (1.1)	602	(2.4)	6	(1.4) ⮝	36 (0.9)	553	(2.9)	-5	(1.2) ⮟	20 (0.7)	522	(3.1)	-1	(1.1)
35台灣	576(3)	36 (1.0)	612	(2.1)	-5	(1.3) ⮟	37 (0.8)	566	(2.7)	-2	(1.2)	27 (0.8)	542	(2.7)	7	(1.1) ⮝
36葉門	224(36)	35 (1.5)	261	(7.4)	0	0	52 (1.6)	225	(5.8)	0	0	13 (1.0)	210	(9.6)	0	56

圖五　TIMSS 四年級學生對數學的自信心表現

八年級學生對數學的正向態度指標 (PATM) 的趨勢分析

國家/地區	平均成績(排序)	高 PATM			中 PATM			低 PATM		
		2007 百分比(標準誤)	平均成績	1999-2007 差異	2007 百分比(標準誤)	平均成績	1999-2007 差異	2007 百分比(標準誤)	平均成績	1999-2007 差異
1阿爾及利亞	387(39)	83(0.7)	394(2.2)	◊◊	10(0.5)	364(3.9)	◊◊	7(0.5)	357(3.8)	◊◊
16新加坡	593(3)	60(1.0)	615(3.6)	-7(1.5) ▼	20(0.6)	575(5.3)	1(1.0)	20(0.8)	545(5.4)	6(1.1) ▲
國際平均	500(12.5)	54(0.2)	471(0.6)		21(0.1)	441(0.7)		26(0.1)	428(0.7)	-
29香港	572(4)	47(1.2)	603(5.5)	-9(1.6) ▼	22(0.9)	566(6.4)	-2(1.1)	31(1.2)	532(7.3)	11(1.4) ▲
33美國	508(9)	41(0.8)	524(2.9)	-11(1.4) ▼	24(0.5)	511(3.3)	2(0.8) ▲	35(0.8)	490(3.3)	9(1.2) ▲
35英格蘭	513(7)	40(1.4)	532(5.7)	-25(1.9) ▼	25(0.9)	515(6.1)	6(1.2) ▲	35(1.5)	495(4.9)	19(1.8) ▲
36瑞典	491(15)	39(1.1)	517(2.9)	◊◊	24(0.6)	488(2.9)	◊◊	37(1.1)	470(2.7)	◊◊
39台灣	598(1)	37(1.2)	657(3.7)	-8(1.6) ▼	18(0.6)	605(5.1)	-4(0.8) ▼	45(1.4)	547(4.6)	12(1.7) ▲
40挪威	469(21)	37(1.1)	488(2.4)	◊◊	24(0.6)	474(2.6)	◊◊	39(1.1)	451(2.1)	◊◊
42澳洲	496(14)	34(1.3)	521(6.2)	--	27(0.8)	498(3.7)	--	39(1.2)	476(4.1)	--
43蘇格蘭	487(17)	33(1.0)	502(4.5)	◊◊	29(0.8)	490(4.1)	◊◊	38(1.0)	476(4.1)	◊◊
44韓國	597(2)	33(0.9)	650(2.9)	3(1.1) ▲	23(0.6)	600(3.4)	-12(0.9) ▼	44(0.9)	558(3.1)	8(1.3) ▲
46日本	570(5)	30(1.1)	609(3.7)	-1(1.5)	30(1.0)	567(3.0)	-4(1.2) ▼	40(1.2)	543(2.5)	5(1.6) ▲
48斯洛伐尼亞	501(12)	25(1.1)	520(4.3)	--	22(0.7)	507(3.0)	--	53(1.1)	353(9.4)	--

51

圖六　TIMSS 八年級學生對數學的態度表現

八年級學生對學習數學的自信心指標 (SCM) 的趨勢分析

國家/地區	平均成績(排序)	高 SCM			中 SCM			低 SCM		
		2007 百分比(標準誤)	平均成績	2003-2007 差異	2007 百分比(標準誤)	平均成績	2003-2007 差異	2007 百分比(標準誤)	平均成績	2003-2007 差異
1以色列	463(24)	58(1.0)	486(4.1)	0(1.5)	29(0.9)	432(5.3)	-1(1.3)	12(0.7)	417(7.2)	1(1.0)
7美國	508(9)	53(1.0)	537(2.5)	2(1.3)	28(0.7)	487(3.2)	-1(0.9)	19(0.7)	462(3.0)	-1(1.0)
8英格蘭	513(7)	53(1.4)	543(4.9)	6(2.1) ▲	32(1.0)	494(4.7)	-2(1.6)	15(0.8)	457(5.5)	-4(1.3) ▼
11挪威	469(21)	50(0.8)	505(2.1)	4(1.4) ▲	31(0.7)	450(2.1)	-1(1.1)	19(0.7)	415(2.2)	-2(1.1) ▼
12瑞典	491(15)	49(1.0)	528(2.6)	1(1.6)	35(0.7)	468(2.4)	-1(1.2)	16(0.6)	438(3.6)	0(1.1)
6蘇格蘭	487(17)	53(1.3)	515(4.0)	1(2.0)	33(1.0)	456(3.6)	1(1.4)	14(0.7)	442(4.6)	-1(1.2)
20澳洲	496(14)	45(1.2)	539(4.8)	-5(2.1) ▼	35(0.8)	472(4.1)	5(1.3) ▲	19(0.9)	445(3.7)	0(1.5)
國際平均	500(12.5)	43(0.2)	492(0.6)		37(0.1)	433(0.6)		20(0.1)	412(0.7)	
30新加坡	593(3)	41(1.0)	638(3.3)	2(1.3)	34(0.9)	572(4.6)	0(1.1)	25(0.8)	547(4.7)	-2(1.0)
42香港	572(4)	30(1.1)	622(5.1)	1(1.4)	40(1.0)	562(6.7)	2(1.2)	30(0.7)	539(5.8)	-2(1.1) ▼
43韓國	597(2)	29(0.8)	668(2.6)	-2(1.1)	34(0.7)	606(3.1)	-2(1.0) ▼	38(0.8)	536(2.8)	4(1.2) ▲
46台灣	598(1)	27(1.1)	674(3.7)	1(1.5)	27(0.7)	610(5.0)	-3(1.0) ▼	46(1.2)	547(4.4)	2(1.6)
48日本	570(5)	17(0.6)	638(3.9)	0(0.9)	35(0.8)	588(2.9)	-3(1.1) ▼	48(0.8)	535(2.6)	2(1.3) ▲

57

圖七　TIMSS 八年級學生對數學的自信心表現

2、世界因素

本研究所定義的「世界因素」是以 TIMSS 的相關資料，將台灣與其他國家做國際比較的研究。

我國在各次參與歷屆 TIMSS 的數學測驗成績均表現相當優異。研究顯示在 49 個參與 TIMSS 2003 調查的國家或地區中，我國的國二和小四學生的數學總平均成績排名都是第四，表現極為優異（國科會，2003；林碧珍和蔡文煥，2005b）。臺灣小四學生的整體數學排名，與第三名的日本並無顯著性的差異，但與排名第一的新加坡、及第二名的香港則有顯著性的差異。雖然國際排名第四，但臺灣學生的數學成就表現分佈圖接近於均稱的常態分配，並無雙峰的現象產生（林碧珍和蔡文煥，2005b）。

從 TIMSS 1999 和 TIMSS 2003 的研究均發現，各國經濟發展情形與學生的科學和數學學習成呈正相關（羅珮華，2003；江芳盛，2007）。而 TIMSS 1999 的研究顯示台灣是位於中度教育資源國家，我國學生在學業上的成就（科學、數學成績）並不亞於高度教育資源國家的平均值，甚至高於高度教育資源國家的平均值，但就教育指標來說，生師比、中等教育在學率不及高度教育資源國家（鄭心怡，2004）。

東亞（台灣、日本、韓國）與西方（美國、英國、加拿大）六國在 TIMSS 1999 的八年級學生對數理科的重要性、難易度、成就歸因、努力程度、興趣、成就評估等方面，與學生的數理成績均有明顯差異（王秀槐，2001）；同樣探討東方國家（台灣、南韓）和西方國家（澳洲、賽普勒斯）影響八年級學生數學成就高、低的因素，在 TIMSS 2003 的研究卻發現並沒有因文化而產生差異，但是數學態度在每一個國家，都是區辨高低分群的最有力變項。（陳嘉成，2003，2007）。然而，在 TIMSS 2003 的研究探討有關東方（新加坡、香港、日本、台灣）與西方（荷蘭、美國及澳大利亞）國小四年級學生的課堂、課後學習、數學興趣、自信與數學成就之關係也發現：東方國家的小四學生其數學成就和數學興趣高於西方國家的學生，但是數學自信顯著低於西方國家的學生（吳文瑜，2008）。

國內學者將台灣與美國或歐洲地區國家（包括俄羅斯聯邦、立陶宛、荷蘭、拉脫維亞、比利時）的 TIMSS 2003 資料做比較，研究發現**家庭資源、社會背景、教師品質、學生特質、教室情境、課堂學習、課後學習、數學興趣、數學自信等均是影響國小四年級數學成就的重要因素**（蘇一如，2007；楊蓓芬，2008）。對台灣與美國八年級學生而言，則是在家庭資源、家庭背景、學校教學與學生心理特質影響數學成就因素皆有顯著

差異存在（許惠卿，2007）。

有關八年級學生家庭作業與數學成就之間關係，研究發現台灣八年級學生在數學成就、完成數學時間比美國及日本還高，但是在課堂中寫數學作業則比日本與美國少（張芳全，2007a）。另外，家庭作業與課後補習爲九國/地區（新加坡、南韓、香港、日本、俄羅斯、美國、蘇格蘭和義大利等）八年級學生共通的課後學習方式，但其對學業成就的影響力，會隨著國家/地區不同而有差異（喬麗文，2007）。

就台灣、香港、日本和新加坡四個國家或地區而言，八年級學生的校園安全觀感對學習成就具有影響力，且學生對學校感到越安全，其學習成就越高；校園安全中最常見的問題爲「嘲弄」；最少見的問題爲「排擠」。（蔡佳燕，2007）。

從 TIMSS 2003 的 28 國八年級學生資料分析發現，科學與數學在不同國家的學生有不同程度的「互補」與「相對」觀點（邱美秀，2006）。

綜合以上國際比較之文獻，影響台灣與其他各國學生之數學成就差異的各種因素，可能會因文化差異或各國經濟發展能力情形而有所不同，但是各國的經濟發展能力確實是影響各國學生學業成就差異的重要因素。國家經濟能力愈好的國家，學生的學業成就表現似乎也愈好；東亞學生的成績比西方的成績好可能是因爲東方國家重視數理學科，課程內容的難易度較高。這些現象顯示各國的國家經濟發展能力和東西方文化價值觀，均可能是影響數理成績與其學習信念的重要因素。然而，台灣的學童數學成就雖高，但是對數學的興趣或是學習信心卻偏低，這是家長和教育當局必須要關切的問題。

3、國家因素

本研究所定義的「國家因素」是從學生作答情況、評量內容和國內課程等面向來探究影響成就表現的可能因素，主要的研究發現如下：

從台灣學生參與 TIMSS 1999 的作答情況發現，我國多數的八年級學生對於數學知識與運算技巧可以瞭解和使用，但較缺乏與生活經驗相連結與數學溝通的能力（洪瑞鎂，2001）。根據 TIMSS 2003 數據探討影響台灣四年級的數學成就的可能因素，發現學生的答題表現不佳的可能主要原因是他們沒有學過這些概念，而且我國幾何課程相較於國際間的幾何課程進度較爲緩慢；此外，我國學生可能對於評量的形式（選擇題、填充題）或評量的內容（操作性的圖卡）不熟悉，題目本身命題不適當、題目的語意不清，**題目的情境不合台灣國情文化、解題時忽略真實情境的考量等，都可能是影響生生答題表現的可能因素**（林碧珍和蔡文煥，2003；吳慈紋，2008；方敬慈，2008）。

綜合以上文獻，發現學生答題情形不理想的原因，可能是還沒學過、對於評量的題型不熟悉，或是較缺乏與生活經驗相連結所致。

4、學校因素

本研究所定義的「學校因素」是有探討學校、教師和學生問卷中與學校議題相關的變項，例如：在校學習時間、校園安全、學校經營等。

分析 TIMSS 1999 國際報告中，學生每日的學習時間與學生數學成就有績顯著相關（羅珮華，2003）。台灣地區南、北區域之國民中學績效頗高，且並不因爲所屬地區而有差異（劉春初，2004）。

分析 TIMSS 2003 學校問卷所發現，校園安全問題的發生與否，在學生的學習成就上有差異存在，未遭受過問題行爲的學生，其學習成就高於曾遭受過問題行爲的學生（蔡佳燕，2007）。在控制學生背景因素的影響後，有效的領導效能會提升八年級學生的數學表現（2401 李懿芳和江芳盛，2008）。依各校長所估計其學生來自富裕家庭所占的百分比而言，如果有較多家境富裕者就讀之學校，其學生在數學方面的整體平均表現有愈高的趨勢（譚克平，2005a、2005b、2006a、2006b）。

綜合以上文獻可知，在校學習時間、校園安全與學校經營等，都可能是影響數學成就的重要因素。

5、教師因素

本研究所定義的「教師因素」是有探討學校、教師和學生問卷中與教師議題相關的變項，例如：教師年資、最高學歷、如何使用教科書等。

運用 TIMSS 2003 的資料發現，對我國八年級學生而言，不同教學方式對數學成就表現的影響方式，亦有所不同（余民寧，2006）。教學策略、教學氣氛與評量層是教師效能的良好指標；教師效能越強，學生的數學學習成就越高（楊伯軒，2008）。教師知覺的領導效能對學生成就產生的影響，勝過由行政人員評比的效能之影響（李懿芳和江芳盛，2008）。

綜合以上文獻可知，教學方式與策略、教師效能與知覺等，都可能是影響數學成就的重要因素。

6、家庭因素

本研究所定義的「家庭因素」是有探討家庭背景變項，例如：出生地、是否常說國語、家中書本量、家中設備、父母最高學歷等。

影響臺灣與美國學生數學成就因素以家庭資源最大（蘇一如，2007）。**家庭教育資源（家長教育程度與家中藏書量）、自我教育期望與學生之學習成就有正相關**（蔡佳燕，2007）。台灣模式的家庭資源與學生心理特質對數學成就具有正向顯著影響關係（許惠卿，2007）。「家中藏書」的區辨效果，整體而言僅次於「數學態度」（陳嘉成，2007）。學生的家中教育資源，會影響學生的數學態度與教師效能，進而影響數學學習成就（楊伯軒，2008）。

國內學者僅有林佩蓉（2008）探討造成台灣國小四年級的新移民子女與非新移民子女的數學成就差異因素。她的究發現：非新移民子女的數學成就高於新移民子女，不但在統計上達顯著差異，在教育上亦達顯著差異。

綜合以上文獻可知，家庭是影響學業成就的重要因素。其中是否常說國語、家中書本量、家中設備、父母最高學歷等，都可能是影響數學成就的因素。

7、個人特質

本研究所定義的「個人特質」屬個人背景變項，例如：性別、個人心理特質、課後學習、家庭作業、學習時間等。

(1)、性別與數學成就

國內學者利用 TIMSS 的相關資料探究有關不同性別在數學學業成就上是否會有差異的研究。男女在答題表現上並沒有顯著差異；**影響學生學習成就的因素在數學方面相關係數最高的是「自評在數學的表現」**（吳琪玉，2005）。性別並非影響數學成就的主要因素；台灣八年級學生的性別也未影響數學成就的趨勢（曹博盛，2005）。臺灣的國小四年級男女學生在數學成就的表現也無顯著性差異（林碧珍和蔡文煥，2005b）。國小四年級男生的數學自信、學習興趣、學習能力優於女學生；但影響學生數學成就因素仍是以家庭資源最大，其次爲學校因素、最後爲學生學習特質（蘇一如，2007）。

國內學者以台灣的國小四年級學生立意取樣，分別運用 TIMSS 1995 數學試題、TIMSS 2003 和 TIMSS 2007 數學評量架構之自編試題施測，均發現我國國小四年級數學成就在性別間沒有顯著差異（徐美英，2000；蔡嘉宮，2006；周素芳，2008；蔡志隆，

2008）。

綜合以上文獻可知，不同性別的數學成就沒有顯著差異。此結果與國內大多數的數學教育在性別變項上的研究結果可以相呼應。

(2)、個人心理特質與數學成就

國內學者利用 TIMSS 2003 的資料，許多研究發現有關個人心理特質（例如：數學態度、數學學習信心、自我教育期望、數學成就動機、數學評價等）會影響八年級學生的數學學業成。

對於喜歡數學與否的看法有偏向負面的趨勢；臺灣學生對於數學學習相當缺乏自信心（曹博盛，2005）。「數學態度」在每一個國家，都是區辨高低分群的最有力變項（陳嘉成，2007）。**台灣模式的家庭資源與學生心理特質對數學成就具有正向顯著影響關係，其中以學生心理特質因素影響最大**（許惠卿，2007）。**影響力多寡依序爲自我教育期望、家中藏書量、家長教育程度和校園安全觀感**（蔡佳燕，2007）。學生的成就動機、自我效能與數學評價是學生數學態度的良好指標；學生的數學態度越佳，其數學學習成就越高；數學態度對數學成就的影響力最大，家中教育資源次之，教師效能的影響力最小（楊伯軒，2008）。個體的期望—能力信念與價值之間存有正向關係；個體的期望—能力信念對其數學成就具有正向影響（林志哲，2007a、2007b）。

綜合以上文獻可知，個人對自我的期望或判斷，會影響數學學習動機與學習信心，進而影響數學成就，而且成正相關。

(3)、課後學習與數學成就

國內學者利用 TIMSS 的問卷資料發現，台灣、南韓、澳洲與賽普勒斯四個國家發現，**「額外課程」在區辨高低分群上，東西方有截然不同的影響力，在台灣與韓國典型區別函數係數是正值**（陳嘉成，2007）。家庭作業與課後補習爲新加坡、南韓、香港、日本、俄羅斯、美國、蘇格蘭和義大利等九國/地區八年級學生共通的課後學習方式，但其對學業成就的影響力，會隨著國家/地區不同而有差異（喬麗文，2007）。課後學習活動（補習）對小四學生的數學成就不具有影響力（吳文瑜，2008）。

以學生家庭文化資本、學校教學因素(例如數學課以方程式與函數來解說關係的頻率、以小組討論頻率、數學課與生活結合頻率)、課後因素(包括學生寫數學課時間、課外補習時間)、學生特質因素建立潛在自變項，對學生數學成就(包括算數、幾何、代數、測量與資料處理五個面向)設定爲潛在依變項都有正向顯著影響，在這些變項之中又以

學生特質影響力最大，而課後因素影響力最小（張芳全，2005, 2006a, 2006b, 2006c）。

台灣的國二男女生在校外的活動類型之時間有明顯不同，同時在不同數學成就組別在校外活動類型與時間亦有不同，這可以作爲家長及學校在關心及輔導學生的參考（張芳全，2007b）。

綜合以上文獻可知，課後補習對台灣學生的數學成就不具影響力；而參與校外活動的類型可能會影響數學成就。

(4)、家庭作業與數學成就

國內學者利用 TIMSS 的資料，探究有關家庭作業（例如：課堂檢討數學作業頻率、課堂寫作業頻率、學生花在家庭作業時間、學生完成數學作業時間等）與數學學業成就的關係發現：台灣在學生數學成就、完成數學時間比美國及日本還高，但是在課堂中寫數學作業則比日本與美國少；台灣、美國及日本的國二不同組別的學生花在寫家庭作業時間與完成數學作業時間數沒有顯著影響數學成就。這代表這三個國家的資料顯示家庭作業並不一定可以提高學生數學成就（張芳全，2007a）。**在國小四年級，學生數學家庭作業完成時間與學生數學學習成就爲負相關；教師指派數學家庭作業頻率與學生數學學習成就之間爲正相關，但並不顯著；在國中二年級，學生數學家庭作業完成時間與教師指派數學家庭作業頻率，對學生數學學習成就皆有正向的影響**（洪川富，2008）。

綜合以上文獻可知，教師指派數學家庭作業頻率與完成作業時間有可能會影響數學成就。

(5)、學習時間與數學成就

國內學者利用 TIMSS 的資料，探究有關學習時間（例如：每年上課日數、每天平均在校時數、每天學習時間等）與數學學業成就的關係：由 TIMSS 1999 的調查結果顯示，在平時（上學的日子）裡，我國國二學生花在數學學習的時間爲每天 0.7 小時，顯著低於國際平均值每天 1.1 小時；有 31%的學生在課餘沒有花時間在數學的學習上（洪志明，2001）。國家經濟能力對學生的科學和數學學習成就有正相關；經濟能力較強國家群，學生的科學與數學成就平均成績比經濟能力較弱國家群學生高；但是經濟能力較強國家群，學生的每日課後讀書時數與每日學習時數，顯著低於經濟能力較弱國家群（羅珮華，2003）。

綜合以上文獻可知，學生在校的學習時間與數學成就表現可能有關。

(九)、其他相關研究

1、資料庫的統計分析方法研發

以 TIMSS 1999 實作評量試題在國內試行，其結果除可作國際比較以瞭解台灣八年級學生的數學學習成就與操作數學實作評量的能力與其在國際間的相對地位外，並可藉由結構方程模式的統計分析方法（Structure Equations Modeling, SEM）技術建構較易瞭解之關連模式，可研究台灣國小學生之多元化數學性向與實作評量之間的關係（楊志堅，2000）。同樣以結構方程模式的統計分析方法，證實所提出的理論模式具有良好的適配度（楊伯軒，2008）。

從跨學科的角度，針對 TIMSS 1995 年、1999 年、2003 年資料庫中的科學與數學領域，來分析經濟與教育環境指標對各國科學與數學學習成就的影響程度，並比較影響科學與數學學習成就因素的模型是否具有不變性的特質，亦期望能建立一套獲國際評比資料驗證的理論模型架構（張芳全，2006a，成果暫不公開）。以數學和科學成就同時預測數學和科學自我概念，其路徑係數皆能符合 I/E 模式之預測，數學（科學）成就對數學（科學）自我概念有正面預測力，而數學（科學）成就對科學（數學）自我概念則有抑制效果（簡晉龍、任宗浩和張淑婷，2008）。

從跨資料庫的角度，針對 TIMSS 2003 和 PISA 2003 的資料庫爲分析對象，研究發現，影響數學學習成就的因素結構模型是均等的，亦即，TIMSS 2003 的台灣資料、TIMSS 2003 的台灣資料與 TIMSS 2003 的香港資料之間、TIMSS 2003 的香港資料與 PISA 2003 的香港資料之間，在因素結構模型中的因素負荷量、因素共變數矩陣、測量誤差上均無顯著差異，此即表示跨資料庫間，亦具有相同的表現結果（余民寧，2005）。

2、特殊對象與數學成就

利用 TIMSS 2003 已公開的數學試題與學生問卷，立意取樣育幼機構與一般家庭的八年級學生，研究發現查臺北市育幼機構因爲安置年齡最早，且安置時間最長，加上育幼機構的家中同住人數接近一般家庭，爲家庭式機構教養的模式，其數學學習成就最高，並與臺北市一般家庭學童的數學成就無顯著差異；新竹縣育幼機構因爲知名度高，課輔志工人數與社會資源豐富，數學學習成就顯著高於新竹縣一般家庭學童。研究結果顯示若能及早安置與補救，育幼機構學童也能和一般家庭學童有相同的表現，甚至更好（邱仕凱，2007）。

分析 TIMSS 2003 台灣地區國小四年級的數學學習成就的資料，發現：在使用語言

的調查方面，新移民子女在家中使用國語的頻率低於非新移民子女；在家中設備方面，新移民子女家中擁有電算器、電腦、書桌及字典的百分比及家中藏書量皆低於非新移民子女；新移民子女參加課後補習的頻率高於非新移民子女；新移民子女的數學自信、數學學習興趣普遍低於非新移民子女；非新移民子女的數學成就高於新移民子女，不但在統計上達顯著差異，在教育上亦達顯著差異（林佩蓉，2008）。

綜合以上文獻可知，學童本身的家庭背景可能會影響數學成就。但是，國內學者僅有邱仕凱（2007）和林佩蓉（2008）分別是以育幼學童和新移民子女爲研究對象，國內相關研究對於特殊學童的關注仍是較缺乏。

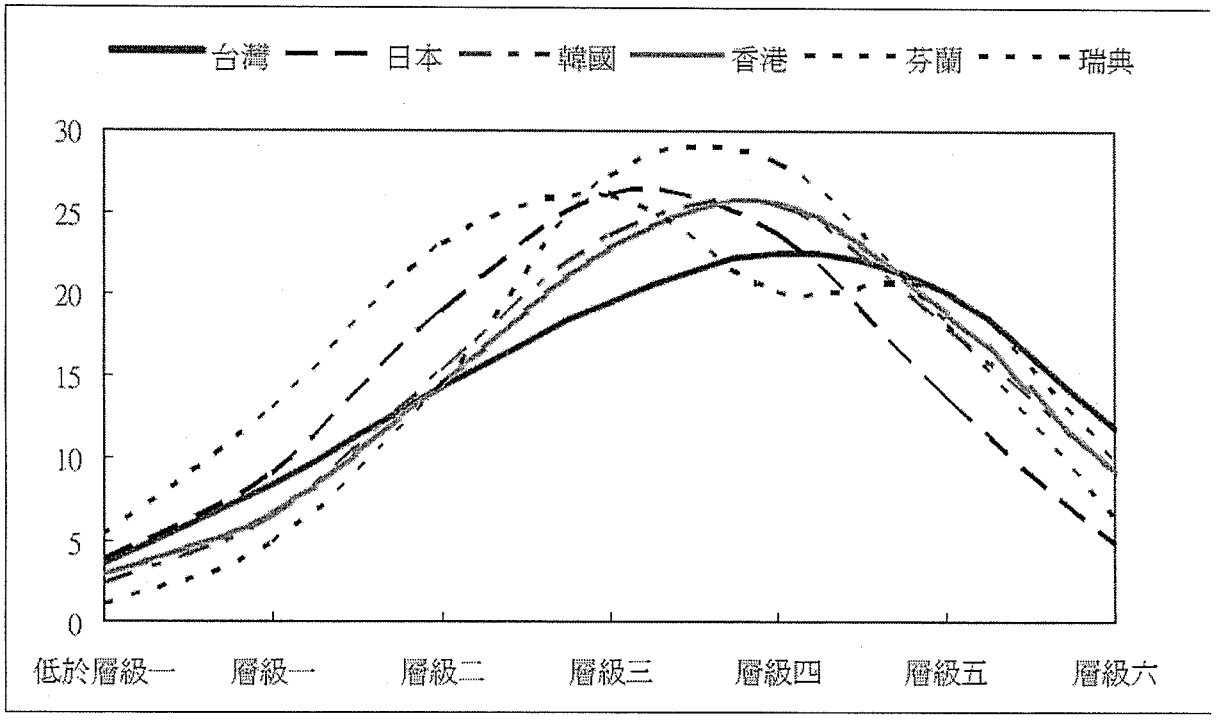
二、PISA 量化分析結果

由於 PISA 2006 的資料和結果報告才公布不久，因此我們沒有找到學者的相關研究資料。加上 PISA 並沒有公布它的部份試題，因此我們只能以其已公布的結果進行初步的結果分析。

(一)、世界排名

台灣於 2006 年首次參加 PISA 國際評量計畫，在 57 個參與計畫的國家中，台灣數學平均成績排名第一，平均成績爲 549 分（S.E.=4.1）。而 57 個國家的數學平均分數爲 498 分，數學能力平均表現前四名的國家依序爲：台灣(549 分, s.e.=4.1)、芬蘭(548 分, s.e.=2.3)、香港(547 分, s.e.=2.7)、韓國(547 分, s.e.=38)，這四個國家在數學素養平均表現上並沒有達到統計上的顯著差異。然而台灣學生的數學成績分佈卻是四個國家中變異最大的，顯示台灣學生的成績差異幅度最大，亦即相較於其他三個國家，台灣 15 歲學生的數學表現有較大的個別差異。變異最小的國家爲芬蘭，亦即芬蘭國內學生的數學素養差距不大。若依照數學成績由低至高，將學生表現分爲一至六的層級（如圖八），相較於芬蘭、香港、與韓國，台灣學生在高數學素養（第六層級）及低數學素養（第一層級）的比例明顯高於其他國家，尤其台灣學生最高層級的比例爲 11.8%，居各國之冠；在第五層級以上（607 分以上）的學生比例爲 31.9%，顯著地高出香港(27.7%)、韓國(27.1%)、芬蘭(24.4%)以及 OECD 的平均比例 13.5%甚多；在最低層級的學生比例亦達 3.6%，也高出香港(2.9%)、韓國(2.3%)、與芬蘭(1.1%)。值得注意的是，芬蘭學生在兩個極端表現的比例明顯低於其他國家，且芬蘭大部分學生的數學素養都集中在中間層級。反觀台灣學生的表現，位在中間層級的比例遠低於這三個國家，在最高與最低兩個極端層級的學生比例高於其他國家。因此，縮短國內學生之間的個別差異，探究造成國內學生個別差異的原因（如城鄉差距等），以提升較低層級的學生素養，是未來台灣教

育發展需要努力達到的目標之一。



圖八　PISA2006 學生成績分層

(二)、數學各題表現

由於 PISA2006 是以科學爲主要評量的領域，因此數學評量的比重較少，此次 PISA 共有 13 種題本，數學部分有四個群組(clusters)，以 M1~M4 表示，每個群組各有 12 題，故此次 PISA 的數學試題共有 48 題，每種群組出現四次、亦即共有四個題本含括 M1 群組、四個題本納入了 M2 的試題…以此類推。受測題目分佈如表十五所示，從表一中可以得知，有三種題本未包含數學試題、有四種題本僅包含一個群組（12 題）數學試題，剩下六個題本則是含括了兩個群組（24 題）的數學試題；故台灣總受測學生 8815 人中，僅 6777 人接受數學方面的評量。

表十五　數學試題分佈表及各題本受測學生

題本編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數學群組 I		M3	M1	M2			M2	M1	M2	M3	M4	M1	M1
數學群組 II			M4	M3			M4	M2		M4			M3
數學總題數	0	12	24	24	0	0	24	24	12	24	12	12	24
受測學生數(台灣)	680	687	679	673	678	680	671	673	676	686	685	676	668

在接受數學評量的 6777 爲學生中，各題的答對率如表十六所述，其中第 4、5、27、44 題爲部分給分的計分方式。若是部分答對的學生，則是給予 0.5 的比重，故全部 48 題中，有 3/4 的題目答對率超過 50%，僅有 3 題（6.25%）答對率低於 30%。而這些題

目內容、難度及所需要的能力，則需進一步的資料才能夠作分析，因目前尚無法取得這方面的資料，故僅以答對率呈現數學試題的分佈概況。

表十六　PISA 2006 數學各題的答對率

Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答題人數	2696	2694	2696	2696	2696	2696	2724	2714	2696	2696	2696	2724
答對率	81.68	59.32	68.40	54.19	12.20	60.50	61.42	66.69	95.03	85.94	39.84	70.15

Item	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
答題人數	2724	2724	2714	2695	2696	2714	2696	2696	2696	2724	2696	2714
答對率	51.73	34.88	58.84	54.77	60.13	55.27	85.87	30.71	67.58	93.36	54.12	77.08

Item	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
答題人數	2710	2714	2696	2708	2696	2724	2724	2714	2724	2724	2724	2696
答對率	21.88	82.28	47.96	51.88	78.41	71.00	75.07	83.12	58.77	62.85	50.48	76.97

Item	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
答題人數	2724	2719	2696	2714	2674	2696	2696	2695	2714	2714	2714	2696
答對率	48.60	46.49	51.08	95.73	45.03	77.56	84.35	22.41	53.24	62.82	33.68	36.42

(三)、問卷調查結果

從學生問卷結果我們可以發現，學生的對於數學的學習時間、家裡常說的語言是否爲國語、以及家裡是否擁有較多與學習相關的資源、甚或是家庭經濟條件的差異，都會造成學生數學表現的差異，並達到統計上的顯著相關（顯著水準爲 0.05）。詳細探究其中的細目可以發現：台灣受測學生中有 73.08%的家庭慣常用的語言爲國語，22.2%爲台語，僅有 0.59%的家庭爲客家話。雖然樣本中學生家庭講客語及台語的人數不多，但這樣的人口比例似乎也反映了台灣目前的現況。從 PISA2006 的數學成績與家庭慣用語言的結果可知，**家庭中慣常說國語的學生平均成績（565 分）顯著地高於非國語的學生。**這樣的差距已達統計上的顯著差異，但家裡說台語（515 分）及客家話（504 分）的兩個族群學生在數學上的平均成績並無顯著差異，詳細情形如表十七所示。

表十七　PISA2006 數學素養平均成績及標準誤（依家庭常說的語言分類）

你在家裡最常說哪種語言	% (S.E.)	Mean (S.E.)
1.國語	73.08 (1.46)	565 (3.69)

2.台語	22.2 (1.33)	515 (6.24)
3.客家話	0.59 (0.07)	504 (13.13)
4.原住民語	0	0
5.英語	0	0
6.其他	0	0
7. missing	4.12 (0.36)	473 (9.8)

此外，家庭中與學習相關的物品越多，將有助於提升學生的學習素養。從學生問卷可得，**家庭書籍的多寡與學生的數學平均成績有顯著相關，且達 0.05 的顯著水準**。從表十八可以發現，家裡的藏書越多、學生學習表現有越佳的趨勢，但家庭書籍超過 200 本與超過 500 本，學生的數學素養則無顯著差異。反倒是家庭書籍在 0-10 本、11-25 本、26-100 本、101-200 本以及超過 200 本之間數學的平均素養有顯著的差異。其中表中的 c 皆爲 missing 之意。

表十八　PISA2006 數學素養平均成績及標準誤（依家庭中書籍多寡分類）

你家有多少本書籍	% (S.E.)	Mean (S.E.)
1.0-10 本	14.36 (0.76)	468 (6.79)
2.11-25 本	19.86 (0.60)	525 (4.63)
3.26-100 本	32.54 (0.54)	557 (3.44)
4.101-200 本	14.90 (0.49)	579 (4.05)
5.201-500 本	11.31 (0.44)	604 (4.05)
6.超過 500 本	6.74 (0.34)	602 (5.33)
7. missing	0.30 (c)	c (c)

在家庭學習與環境方面可知，**受測者家裡具備與學習相關的資源將有助於數學能力的提升**。如表十九所示，從家裡有哪些物品的問卷中可知，除了是否擁有自己的房間與數學學習表現沒有相關外，受測學生中，若擁有自己書桌、安靜的讀書空間、以及用來做學校功課的電腦、或是具備教育方面的電腦軟體、自己專用的計算機、可協助完成學校功課的叢書等，數學成就表現皆顯著地高於沒有這些資源的學生。而各類別中學生數學平均分數的差異以及各族群的標準誤。此外，沒有洗碗機的家庭，學生的數學平均素養優於有洗碗機的家庭，這部分的問卷可能僅能當作家庭經濟狀況的一個參考指標。

另外 PISA 的學生問卷有一項是以家庭中電子器材（電視、電腦、行動電話）以及汽車數量，來量度家庭經濟狀況與學習成就的關係。從表二十的分析可知，**家中擁有三個或更多電視的學生，數學素養表現顯著低於家中沒有電視或是有一、兩台電視的學**

生。因此，家中擁有電視的數量超過某個限度，可能會干擾學生的學習狀況。此外，家中擁有三台或是更多汽車的學生，其數學表現亦顯著的低於家中只有一台及兩台汽車的學生，且和家中沒有汽車的學生在數學素養方面的表現沒有顯著差異。亦即，家中擁有一台或兩台汽車的學生，其數學表現顯著的優於家中沒有汽車或汽車數量多於三台的學生。在電腦的數量方面，呈現電腦數量越多、平均數學成就顯著越高的趨勢。

表十九　PISA2006 數學素養平均成績及標準誤（依家庭中是否具備上述物品分類）

在你家中有下列哪些東西	Mean (S.E.)		
	是	否	Missing
1.讀書用的書桌	553 (3.94)	487 (7.28)	c
2.你自己的房間	550 (4.37)	550 (4.11)	457 (22.45)
3.安靜的讀書空間	556 (3.86)	527 (5.49)	483 (23.93)
4.可以用來做學校功課的電腦	556 (3.73)	499 (8.23)	464 (21.54)
5.教育方面的電腦軟體	565 (3.55)	535 (5.04)	491 (15.62)
6.可以連結上網際網路	553 (3.72)	511 (11.09)	459 (22.62)
7.自己專用的計算機	557 (3.80)	531 (5.16)	455 (17.77)
8.古典文學讀物	576 (3.36)	509 (4.93)	449 (17.85)
9.詩、詞集	573 (3.37)	513 (5.36)	456 (20.73)
10.藝術作品	564 (3.76)	529 (4.65)	468 (21.14)
11.可協助完成學校功課的叢書	564 (3.49)	512 (5.56)	455 (19.06)
12.字典（辭典）	552 (3.96)	454 (10.90)	c
13.洗碗機	539 (4.67)	557 (4.18)	492 (18.16)
14.錄影機、VCD 或 DVD 放映機	552 (3.96)	526 (8.09)	476 (27.65)

表二十　PISA2006 數學素養平均成績及標準誤（依家庭電子器材與汽車數量分類）

下列各項物品你家擁有的數量	Mean (S.E.)			
	沒有	一個	兩個	三個或更多
行動電話	529 (12.51)	516 (7.22)	552 (6.42)	552 (4.03)
電視	550 (15.58)	553 (5.81)	552 (4.04)	542 (4.31)
電腦	482 (14.48)	545 (4.31)	558 (3.92)	571 (4.22)
汽車	527 (5.89)	554 (3.99)	558 (4.84)	535 (6.60)

在數學學習時間方面，如表二十一所示，呈現學習時間越長，平均數學成就越高的趨勢，但學生每週學習時間超過四小時後，則無顯著的差異。在數學課後補習方面，沒有補習的學生，數學成就顯著的高於補習時間少於兩個小時的學生，但低於補習時間超

過兩小時以上的學生。此外，每週課後補習時間兩小時以上的學生，無論補習時間介在2-4 小時、或是 4-6 小時、甚或是 6 小時以上，其數學成就皆無顯著的差異。但值得注意的是，每週課後補習時間超過六小時以上的學生，其數學成就表現的變異卻最大。顯示對於一部份的學生，課後長時間的補習，有增強的效用，但對於某些學生卻會造成反效果。但整體而言，每週花四小時以上投入在數學上面，平均表現皆優於低於四小時的學生。

表二十一　PISA2006 數學素養平均成績及標準誤（依數學各項學習時間分類）

一星期之中，通常花多少時間學習數學？	Mean (S.E.)					
	沒有	每週少於 2 小時	每週 2-4 小時	每週 4-6 小時	每週 6 小時以上	Missing
1.我學校的數學正規課程	437 (8.44)	463 (6.53)	525 (5.94)	589 (3.3)	596 (2.95)	419 (7.78)
2.數學的課後補習	526 (4.75)	513 (5.97)	596 (3.59)	591 (4.74)	590 (10.75)	496 (13.29)
3.我自己自修數學或完成數學作業	467 (5.21)	542 (4.31)	594 (3.73)	609 (4.62)	615 (8.52)	498 (12.59)

從學校環境的角度來看，可以發現**愈都市化的環境，學生的平均數學成就愈高，且其數學的表現有顯著的差異**。另外，在能力分班的議題上，則是所有學科能力分班與完全沒有能力分班的學習成就沒有顯著的差異，但這兩種學習環境下學生的平均數學素養卻顯著的優於某些學科能力分班的學校（見表二十二）。

表二十二　PISA2006 數學素養平均成績及標準誤（依學校所在區域分類）

何者敘述最符合貴校目前的所在位置	% (S.E.)	Mean (S.E.)
少於 3000 人的鄉村	0.61 (0.37)	486(50.34)
介於 3,000-15,000 人的小型城鎮	7.32 (2.54)	482 (15.7)
介於 15,000-100,000 人的大型城鎮	26.49 (2.91)	537 (7.33)
介於 100,000-1,000,000 人的城市	43.49 (3.28)	554 (8.27)
超過 1,000,000 人以上的大型城市	22.09 (2.01)	579 (7.72)
貴校針對高中一年級學生之政策為何？	**% (S.E.)**	**Mean (S.E.)**
所有學科能力分班	7.71 (1.58)	580 (14.48)
某些學科能力分班	18.07 (2.65)	521 (8.55)

沒有能力分班	67.22 (3.05)	556 (5.49)
Missing	6.99 (2.15)	523 (22.62)
貴校針對高中一年級學生之政策爲何？	% (S.E.)	Mean (S.E.)
班級內所有學科能力分組	0.49 (0.49)	565 (4.06)
班級內某些學科能力分組	30.33 (2.95)	538 (9.22)
班級內沒有能力分組	65.92 (3.21)	556 (5.87)
Missing	3.25 (1.34)	524 (22.82)

三、質性分析 -- 對未來課綱內容的具體建議

本研究針對 TIMSS 和 PISA 試題逐題分析其內容領域、認知領域以及解題時所需要學會的關鍵概念，之後據此與民國 100 年要實施的九七年國民中小學數學課程綱要進行比對，解析出 TIMSS 和 PISA 所評量的能力，我國課程綱要是否已呈現。關鍵概念可以分爲概念建構時的關鍵概念，以及概念建構之後的一般化（或者公式）的關鍵概念。此二種關鍵概念正可以提供老師教學時，先強調念建構的關鍵概念，然後在適當時機會再讓學生把概念抽象化爲一般化的關鍵概念。

關鍵概念所屬的能力指標也可分爲屬於該年級（四年級、八年級、九年級）、該年級之前、該年級之後、以及指標未羅列的關鍵概念。當關鍵概念的內涵在該年級之前的能力指標已呈現其相關內容且學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在該指標之中應再「強調」這類的內容。當關鍵概念的內涵在該年級之前的能力指標已呈現，但未觸及其內容，同時學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在該指標之中應再「添加」這類的內容。當關鍵概念的內涵在該年級之前的能力指標均未呈現，同時學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在應「增加」這類的能力指標。

(一)、強調之內容

1、強調生活語意的問題

八年級學生在試題 M012037 的統計圖表問題中答對率只有 50.5%，另一個錯誤答案 C：10 人卻有 40.7%的學生填答（如圖九）。分析發現這個試題的內涵在我國的能力指標 3-d-01 中已呈現，但學生作答不理想，主要是對生活中「超過」和「以上」語意的混淆。此外四年級 M011017 的試題（如圖十）中，也有 14.9%的學生把「三星期後」的問題，選擇成「第三個星期」的答案。雖然有些語意我國的課程在教學時已不再特別強調，例如「增加 2 倍」和「增加爲 2 倍」，「6 除以 2」和「2 除 6」的問題。但是 TIMSS 在八年級的試題中仍出現類似的語意的了解的問題。因此我們建議在能力指標「3-d-01

能報讀生活中常見的直接對應（一維）表格。」中強調生活中「超過」和「以上」的語意的差異；在能力指標「2-n-13 能認識年、月、星期、日，並知道某月有幾日、一星期有七天」中強調「三星期後」和「第三個星期」的差異。同時也在適當的能力指標中強調生活中常見的語意的定義。當然，我們期望學生能依據他對中文語意的了解來了解類似的語意問題，而非盲目的背誦語意。

7

下表顯示一班學生的測驗成績（滿分為 10 分）。

測驗分數	計數符號欄	次數（人）
4	/	1
5	///	3
6	///// /	6
7	//	2
8	////	4
9	///	3
10	/	1

問該班有多少學生的成績超過 7 分？

a 2

b 8

c 10

d 12

e 20

M01_07.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：Test score frequency table
正確答案：B

M012037

國家 / 選項	台灣 (N=904)	香港 (N=827)	日本 (N=806)	韓國 (N=885)	新加坡 (N=993)	國際平均
A	5.0%	6.7%	5.1%	0.9%	9.4%	19.9%
B*	50.5%	48.1%	44.3%	85.4%	63.4%	48.8%
C	40.7%	41.4%	45.5%	12.5%	24.4%	19.6%
D	2.7%	2.4%	3.4%	0.6%	1.3%	2.9%
E	1.2%	0.9%	0.6%	0.3%	0.9%	2.9%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料 -- 資料說明	理解	1-d-02 能將紀錄以統計表呈現並說明。 3-d-01能報讀生活中常見的直接對應（一維）表格。	1. 統計圖表的報讀 2. 超過 7 分並不包含 7 分 3. 資料相加

圖九　統計圖表的報讀的語意問題

5 以下是十二月份的月曆

十二月						
星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

妹妹的生日是十二月 2 日星期四，從生日那天算起的三個星期後她要出去旅遊。請問她哪一天要去玩呢？

1 十二月 16 日

2 十二月 21 日

3 十二月 23 日

4 十二月 30 日

M01_05.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：When is Mary's trip?
正確答案：C

M011017

國家 / 選項	台灣 (N=784)	香港 (N=773)	日本 (N=756)	新加坡 (N=1122)	國際平均
A	14.0%	13.6%	8.7%	12.2%	13.5%
B	7.0%	5.4%	5.6%	8.8%	11.0%
C*	74.5%	76.3%	83.1%	74.8%	64.4%
D	3.2%	4.6%	0.8%	4.0%	5.5%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量 - 工具、方法和公式	解例行性問題	2-n-13 能認識「年」、「月」、「星期」、「日」，並知道「某月有幾日」、「一星期有七天」。	1.知道一星期有七天、乘法累加概念、日期的點算、加法；2.了解星期四到下星期三爲一星期(星期的週期概念)。

圖十　日期報讀的語意問題

2、強調數學名詞語意的感覺問題

我們的研究及實務經驗發現，教師在教導數學名詞時，都不強調數學名詞的感覺問題，例如小數的百分位是把一平分成一百等分的感覺，因此有些學童會過度一般化他在整數位值名詞 – 個位、十位、百位 -- 到小數爲個分位、十分位、百分位。所以，有 34.6%的八年級學童在 M022044 的小數問題（如圖十一）中把 78.2437 四捨五入到百分位時選擇 78.244。有 13.8%的四年級學生在 M011020（如圖十二）的分數化成小數問題中把 7/10 的答案選擇 0.07。

10 下列哪一個數字是 78.2437 以四捨五入法取近似值到百分位的結果？

a 100

b 80

c 78.2

d 78.24

e 78.244

M03_10.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Decimal rounded to nearest hundredth
正確答案：D

M022044

國家 / 選項	台灣 (N=886)	香港 (N=628)	日本 (N=802)	韓國 (N=886)	新加坡 (N=1004)	國際平均
A	3.3%	23.7%	1.7%	0.3%	9.0%	5.0%
B	2.1%	7.7%	3.4%	1.8%	3.2%	5.8%
C	10.3%	14.8%	22.7%	4.2%	7.2%	13.9%
D*	49.3%	28.7%	54.2%	87.9%	54.4%	47.1%
E	34.6%	24.2%	17.0%	5.7%	25.2%	23.2%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念

數一 分數與小數	使用概念	4-n-09 能認識二、三位小數與百分位、千分位的位名，並作比較。 6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。	一、利用數的位值概念知道百分位數的位置。 二、用四捨五入法取近似值至某一位值要以位值的下一位來做判斷是否進位。

圖十一　四捨五入到百分位的問題

8　$\frac{7}{10}$ 可表示爲下面哪一個數？

1　70

2　7

3　0.7

4　0.07

M01_08.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Fraction to decimal
正確答案：C

M011020

國家 / 選項	台灣 (N=784)	香港 (N=773)	日本 (N=756)	新加坡 (N=1122)	國際平均
A	2.8%	6.7%	16.6%	0.7%	29.3%
B	8.3%	9.3%	15.7%	0.5%	10.8%
C*	74.2%	77.7%	60.2%	95.2%	43.2%
D	13.8%	6.3%	4.0%	2.3%	8.7%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數-分數與小數	知道事實與程序	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	知道小數的定義，例：7/10=0.7

圖十二　分數化成小數的問題

3　用 250 公撮 (毫升) 的瓶子，來裝 400 公升的水，可以裝多少瓶？

a　16

b　160

c　1600

d　16000

M04_03.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：250 ml bottles filled by 400 liters
正確答案：C

M022005

國家 / 選項	台灣 (N=687)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
A	22.4%	18.3%	19.3%	26.9%	13.0%	17.1%
B	26.1%	24.8%	31.6%	27.6%	10.8%	25.7%
C*	41.0%	47.2%	43.5%	41.0%	67.8%	39.4%
D	9.9%	8.9%	5.2%	4.2%	7.5%	11.2%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量—屬性與單位	知道事實與步驟	3-n-15 能認識容量單位「公升」、「毫公升」(簡稱「毫升」)及其關係，並做相關的實測、估測與計算。(同 3-n-14) 4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。	一、知道毫升與公升的關係 二、包含除的觀念並運用整數的除法來解決問題

圖十三　公升與毫公升的語意問題

此外，八年級 M022154 的問題是將長方形旋轉成另一長方形，然後要求學生找出它的旋轉中心。旋轉中心的名詞，我國在能力指標「4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。」是針對旋轉角提到的名詞，此外再也沒有提到。八年級 M022035 的統計圖表報讀（如圖四十四），是問「冷卻了 20 度」但有 40.4%的學童選擇「冷卻到 20 度」的答案。八年級 M012037 的統計問題中是問「超過」的語意，但卻有 40.7%的學

生填答（如圖九）「以上」的答案。

因此我們建議在「3-n-12 能認識一位小數，並做比較與加減計算。」和「4-n-09 能認識二、三位小數與百分位、千分位的位名，並作比較。」中強調十分位、百分位、千分位的數學名詞的語意的感覺是因爲它代表著十分中的幾分、百分中的幾分的感覺。在「4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。」中強調旋轉中心的語意的感覺，使學生能將此一名詞應用到相關的概念的學習上。

若我國要針對每一個數學名詞（或者 TIMSS、PISA 出現的名詞），再一一強調，會掛一漏萬。研究者認爲最重要的就是讓學生能依據他對中文語意的了解，來學習數學的名詞。把數學名詞和它的數學意涵連結在一起，這樣學生對數學名詞便會更有感覺。如此他面對新的數學名詞，他便可以會意，再配合數學的概念，兩者結合成一個新的知識結構體。他的數學可以學得更好，我們也可以不用再怕那些名詞，我們沒有教過。

3、強調量感

在 TIMSS 四年級 M012023（如圖十四）的量感問題，有 24.9%的學生用公斤來秤一個蛋的重量，顯示我國學生的量感有待加強。因此建議在能力指標「3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。」強調公斤和公克的量感。當然，有關量感的學習建議教師要多強調「參考量」的概念。通常的參考量是學生生活週遭常見的量的感覺。例如學生的身高大約是 140 公分或 1.4 公尺；一瓶小的瓶裝水大約 600 毫公升；教室的長度大約 8 公尺；…。當學生所熟知的參考量愈多時，他愈能正確的估計量感。當然，我們也可以思考，我們時常用的單位時常是可以用愈接近 1 的整數來表示。因爲愈接近 1 的整數我們愈能掌握。

9 下列何種單位最適合用來秤出一個蛋的重量？

1 公分
2 毫公升
3 公克
4 公斤

M02_09.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：Units to measure mass of egg
正確答案：C

M012023

國家 / 選項	台灣 (N=795)	香港 (N=791)	日本 (N=733)	新加坡 (N=1111)	國際平均
A	3.3%	8.7%	2.4%	4.6%	8.0%
B	3.3%	6.6%	1.3%	1.9%	5.9%
C*	68.3%	78.0%	90.8%	82.3%	68.9%
D	24.9%	6.5%	4.5%	10.7%	13.2%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量	知道事實與程序	3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。	1.認識「1 公斤＝1000 公克」的關係；2.日常生活常見用品的重量估測。 量感—讓學生知道生活中習慣的單位(通常用較小

圖十四　重量的量感問題

4、強調學生易犯的迷思概念問題的釐清

TIMSS 八年級 M012016（如圖十五）問題是要求學生將分數化成小數或者小數化成分數的大小比較問題。學生的答對率只有 60.2%。分析這個問題，學生將分數化成小數再來比較，較爲簡單。同時發現有 22%的學生選擇 C：2.5<2.25<2.75。這個錯誤符合學者研究的小數大小比較的整數法則的迷思概念：學生把小數當做整數來比較。八年級 M022198（如圖十六）的問題則是小數的大小比較問題，學生的答對率只有 62.5%，且有 29.2%的學生選擇 0.3<0.32<0.332<0.233。其原因比較符合學者研究中分數法則的迷思概念：分割的分數愈多，小數愈小。

因此我們建議在「4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。」和「5-n-08 能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決生活中的問題。」的教學過程中強調小數大小比較中易犯的迷思概念問題的釐清。

TIMSS 四年級 M011025（如圖十七）的面積與周長的問題，有 41.2%的學生將周長的問題選擇了面積的答案。八年級 M012030（如圖十八）只有 25.9%的學生用面積求周長的邊長問題。因此我們建議老師教學時應強調學生的迷思概念。在「3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。」應強調長度和面積的差異。

TIMSS 八年級 M012004（如圖十九）的比例問題，只有 65.5%的學生答對，其餘的學生大都可能犯了使用加法來計算。因此在「7-n-16 能理解比例的意義（以實例說明正比、反比關係的意義）」應強調學生使用加法進行比例計算的迷思概念的釐清。

爲了防止掛一漏萬，我們建議在適當的能力指標上，應強調學者已熟知的學生的迷思概念的釐清。例如，真分數愈乘愈大的迷思概念，…等等。

4　下列各組數對中，若要 2.25 比第一個數大，但比第二個數小，應選哪一組？

a　1 和 2

b　2 和 $\frac{5}{2}$

c　$\frac{5}{2}$ 和 $\frac{11}{4}$

d　$\frac{11}{4}$ 和 3

M02_04.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Pair of numbers bracketing 2.25
正確答案：B

M012016

國家 / 選項	台灣 (N=888)	香港 (N=836)	日本 (N=798)	韓國 (N=888)	新加坡 (N=1002)	國際平均
A	5.3%	7.6%	6.1%	3.0%	3.7%	7.5%
B*	60.2%	60.8%	54.8%	76.9%	70.8%	50.8%
C	22.0%	18.0%	24.1%	11.1%	14.9%	19.1%
D	12.1%	12.9%	12.6%	8.5%	8.7%	15.7%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數 小數與分數	知道事實與步驟	3-n-10 能認識一位小數，並作比較與加減計算。 4-n-07 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與非帶分數的整數倍的計算。 5-n-05 能用通分作簡單異分母分數的比較與加減。 5-n-08 能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決生活中的問題。	分數和小數的互換 假分數和帶分數的互換 異分母的大小比較 一位小數和二位小數的大小比較(整數法則的迷思概念，2.5<2.25<2.75)

圖十五　分數和小數互換的大小比較問題

13 下列哪一組數是由最大的數依序排到最小的數？

a 0.233， 0.3， 0.32， 0.332

b 0.3， 0.32， 0.332， 0.233

c 0.32， 0.233， 0.332， 0.3

d 0.332， 0.32， 0.3， 0.233

M02_13.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Decimals ordered greatest to least
正確答案：D

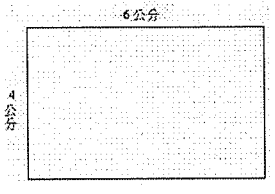
M022198

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=798)	韓國 (N=883)	新加坡 (N=1002)	國際平均
A	5.2%	3.6%	16.9%	20.2%	4.2%	10.7%
B	29.2%	21.8%	24.2%	17.1%	14.3%	29.2%
C	2.9%	1.9%	4.7%	3.5%	2.4%	10.4%
D*	62.5%	72.1%	53.4%	58.9%	78.7%	44.1%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數—分數與小數	使用概念	4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。	一、 小數比較大小須從最高位值比較易陷入小數位值的迷失概念。

圖十六　小數的大小比較問題

9 長方形的長為 6 公分寬為 4 公分，它的四周圍的長度稱為此長方形的周長。



下列何者是長方形的周長？

1 6+4

2 6x4

3 6x4x2

4 6+4+6+4

M03_09.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：Perimeter of rectangle
正確答案：D

M011025

國家 / 選項	台灣 (N=780)	香港 (N=782)	日本 (N=720)	新加坡 (N=1111)	國際平均
A	2.2%	2.4%	3.3%	1.2%	11.8%
B	41.2%	16.2%	55.8%	4.1%	22.3%
C	13.9%	18.1%	14.5%	1.1%	9.9%
D*	42.3%	62.4%	25.4%	93.4%	51.1%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量	解例行性問題	3-s-02 能認識周長，並實測周長。 3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。	1.知道長方形的周長=6+4+6+4 或 =6×2+4×2。

圖十七　面積與周長的迷思（一）

6

用一條 20 公分長的鐵線可以做成一個長方形，如果長方形的寬是 4 公分，請問它的長是多少？

a　5 公分

b　6 公分

c　12 公分

d　16 公分

M03_06.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：Length of rectangle from width / perimeter
正確答案：B

M012030

國家 / 選項	台灣 (N=888)	香港 (N=827)	日本 (N=802)	韓國 (N=886)	新加坡 (N=1004)	國際平均
A	25.9%	28.9%	17.9%	27.1%	11.3%	27.8%
B*	62.0%	62.0%	65.2%	61.8%	81.1%	37.6%
C	4.5%	4.2%	8.1%	5.4%	4.4%	12.3%
D	7.2%	4.5%	8.3%	5.7%	3.0%	18.8%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量—工具、技巧與公式	解例行性問題	2-a-04 能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。 4-a-04 能用中文簡記式表示長方形和正方形的面積公式與周長公式。	一、了解長方形的周長爲長與寬之和的兩倍，進行逆運算。 二、假設未知數，列出一元一次方程式並利用移項法則，等量公理解出未知數。

圖十八　面積與周長的迷思（二）

4

麗明繞跑道走 4 圈所用的時間，恰巧是嘉嘉走 3 圈所用的時間。
問嘉嘉走完 12 圈時，麗明走了多少圈？

a　9

b　11

c　13

d　16

M01_04.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Laps run by Carol and Alice from ratio
正確答案：D

M012004

國家 / 選項	台灣 (N=904)	香港 (N=827)	日本 (N=806)	韓國 (N=885)	新加坡 (N=993)	國際平均
A	11.7%	21.1%	2.4%	27.0%	6.0%	13.0%
B	7.9%	4.0%	2.4%	8.6%	4.0%	8.7%
C	14.8%	13.4%	26.5%	13.5%	15.0%	28.8%
D*	65.6%	61.4%	68.3%	50.9%	74.9%	47.5%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數 比、比例、百分比	解例行性問題	7-n-16 能理解比例的意義（以實例說明正比、反比關係的意義）。 7-n-17 能熟練比例式的基本運算（含 a:b=c:d⇔a/b=c/d； a:b=c:d⇔ad=bc； a:b=c:d⇔a=bk，c=dk； a/b=c/d⇔ad=bc； a/b=c/d⇔a=bk，c=dk；比的化簡）。	一、 以括符或文字符號代表數。 二、 理解比例式的意義、利用比值相等、等值分數或是內項乘積等於外項乘積的方法解出比例式中的未知數或括符

圖十九　比例的迷思

5、強調相對數值的問題

八年級 M032557 的問題(圖二十)是三個未知數兩個方程式的問題，它無法把 a,b,c 的值先求出來，再求出 a+2(b+c)的值。這類的問題在某些能力指標中曾經出現過。例如「7-a-06 能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。」但未知數比方程式多的問題的求解，在我國的能力指標中未被強調，僅談到它有

無限多解。因此我們建議在「7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。」剛開始建立學生未知數的概念時，能強調我們雖然不知道未知數的值，但是我們仍然可以知道在某些特定情形下的解。

其實這類的問題是一種相對數值的問題。它雖然有無多解，但是在特定的情況下仍然可以求出它的解。有時候我們的公式也有相似的結果，例如$\sin^2\theta+\cos^2\theta$，無論$\theta$的值是多少，它的結果永遠等於 1。例如爸爸和兒子的年齡每年變動，但是它們的差永遠固定。

相對數值的概念，在課程綱要中並未被充分討論它的意義。例如，它的一個特例的值也是對的，$\sin^2 55°+\cos^2 55°$也會等於 1。因此它可以用某一特例來求它。但是它有一個危險性，所以最好多找幾個數值來檢驗是否完全相等。當然最好的求解方法是找出已知方程式和求解方程式間的關係，並利用其關係求解。

3

若$a+2b=5$且 c=3，則$a+2(b+c)$的值是多少？

答：_____

M10_03
考題領域：Mathematics (Algebra)
考題內容：The value of a + 2 times (b plus c)

M032557

國家 / 選項	台灣 (N=902)	香港 (N=819)	日本 (N=806)	韓國 (N=891)	新加坡 (N=995)	國際平均
10	56.6%	55.9%	37.4%	64.0%	58.4%	22.4%
70	10.9%	11.7%	17.7%	11.2%	17.0%	15.6%
79	20.9%	24.7%	33.5%	21.7%	21.5%	40.0%
99	11.6%	7.7%	11.4%	3.1%	3.0%	22.0%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數－代數表徵	推理	7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。	一、對於代數式中有括號的部份利用分配律優先展開。 二、學生習慣於三個未知數須三個方程式才能求解的問題，很少進行三個未知數兩個方程式的問題解答。(強調) 三、利用二組特殊解來求值。

圖二十　三個未知數二個方程式的求值問題

(二)、添加之內容

1、添加成人生活經驗的問題

我國的數學課程綱要強調數學與生活連結的問題，同時我們發現大部份強調的問題都是學童生活中的問題。在 TIMSS 2003 的問題中 M032762-4 的題組（如圖二十一）中是一個不同方案的電話費率問題。在這類的問題中，學童的答對率在 30%以下。因爲這類的問題是成人生活中的問題，學童生活中是無法驗到的。倘若學童能學習這類的問題，也將有助於他將來的生活理財。因此我們建議在相關的單元中添加成人生活經驗的問題。例如在「5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。」或者「7-a-03

能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。(修7-a-04)」添加電話費率的問題。

在數學課程綱要中，我們強調學生的學習要連結生活經驗，而學生的生活經驗是有限度的，成年人的生活經驗，並不是他們在學期間可以經驗到的。例如生活中電費的問題、手機費率的問題、計程車計費的問題…等等，雖然是學生生活中會碰到的成年人的問題，但是他們都是沒有機會去解決這些成年人生活中的問題。若我們想培養學生解答問題的能力，讓他成年以後能解決成年人的問題。我們建議在學生時期，相關的單元和能力指標應添加這些成年人會碰到的問題，讓學生有解題的經驗。

電話方案

說明：第 7 題、第 8 題、第 9 題是有關於電話方案的問題。

貝蒂、英明和小玉剛搬到瑞蘭市，他們都想安裝電話。他們從電話公司拿到兩種不同通話費率方案的資料。

他們必須每個月付電話費，且他們每分鐘通話的費率是不同的。費率的計算是和他們在白天或晚上使用電話的時間，以及他們所選擇付費的方案有關。兩個方案都包含免費通話時間。底下表格是兩種方案的細節

方案	月租費	每分鐘費率		每月免費通話時間(分鐘)
		白天 (上午 8 點至下午 6 點)	晚上（下午 6 點至隔天上午 8 點）	
方案 A	20 zeds	3 zeds	1 zed	180
方案 B	15 zeds	2 zeds	2 zeds	120

7 貝蒂每月通話不超過 2 小時，那一個方案對她來說較便宜？

較便宜的方案

請依據兩個方案的月租費和每月免費通話時間來解釋你的答案。

M10_07
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：Phone Plans Least expensive plan for Betty

M032762

國家 / 選項	台灣 (N=902)	香港 (N=819)	日本 (N=806)	韓國 (N=891)	新加坡 (N=995)	國際平均
20	26.6%	27.8%	49.2%	39.6%	39.6%	21.4%
10	5.9%	4.6%	3.7%	5.5%	4.1%	6.0%
70	47.9%	55.5%	32.2%	42.4%	44.4%	32.4%
71	14.8%	9.6%	10.5%	8.3%	8.8%	13.7%
79	1.6%	1.3%	1.9%	2.6%	1.8%	13.3%
99	3.2%	1.2%	2.5%	1.6%	1.2%	13.2%

繼續電話方案的題目

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
統計—資料詮釋	推理	3-d-01 能報讀生活中常見的表格。	一、能判讀資料中對月租費的免費通話的優惠，對於本題不超過 2 小時的通話，較便宜的方案必為月租費較低的方案。

電話方案（繼續）

8 英明在晚上時段每個月通話 5 小時。兩個方案各花費他每個月多少錢？請寫出你的算法。

方案 A 的每個月花費：　　*zeds*

方案 B 的每個月花費：_____*zeds*

M032762

M10_08.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：Phone Plans Cost of plans for Frank.

M032763

國家 / 選項	台灣 (N=902)	香港 (N=819)	日本 (N=806)	韓國 (N=891)	新加坡 (N=995)	國際平均
20	17.6%	15.5%	18.7%	15.3%	27.4%	5.8%
10	3.6%	7.8%	5.8%	2.9%	3.5%	1.6%
11	8.6%	4.3%	6.1%	5.4%	5.0%	3.2%
79	58.2%	66.6%	58.5%	67.9%	59.0%	68.0%
99	12.1%	5.8%	10.8%	8.5%	5.1%	21.5%

繼續電話方案的題目

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
統計—資料詮釋	解例行性問題	3-d-01 能報讀生活中常見的表格。 5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。(修5-n-01)	一、先將通話時間減去月租費中免費的通話時間，將剩餘的時間換算爲分的單位。對照統計表中的計費價格，將其相乘，最後再加上月租費。

電話方案（繼續）

9 小玉採用方案 B，且她一個月的電話費是 75 *zeds*，那麼她一個月的通話時間是多少分鐘？寫出你的算法。

通話時間_____

M032764

M10_09.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：Phone Plans Minutes talk by Darlene

國家 / 選項	台灣 (N=902)	香港 (N=819)	日本 (N=806)	韓國 (N=891)	新加坡 (N=995)	國際平均
20	20.0%	21.4%	19.5%	22.3%	27.6%	6.2%
10	1.0%	5.0%	4.1%	2.6%	1.1%	2.3%
11	1.1%	1.6%	1.0%	0.2%	1.1%	0.4%
12	7.1%	10.6%	5.9%	10.7%	17.7%	5.7%
79	52.5%	49.5%	52.5%	53.1%	44.8%	55.6%
99	18.4%	11.9%	17.0%	11.1%	7.6%	29.9%

電話方案部分結束

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
統計—資料詮釋	解例行性問題	3-d-01 能報讀生活中常見的表格。 7-a-03能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。(修7-a-04)	電話費中扣除掉月租費的部份，再除以每分的通話費，最後再加上120分鐘，則爲全部的通話時間。 將通話時間設爲未知數，並根據題列出一個一元一次方程式，並解出未知數。

【15+2(X-120)=75】

圖二十一　電話費率的問題

2、添加概念的反例問題

PISA 2006 M505（如圖二十二）的問題要求學生說明一統計表爲什麼不能繪成統計圖。M509（如圖二十三）是機率和比例概念差異的問題。在概念的學習過程中，若學生一直學習正向的概念，他對反向的問題便會失去警惕心，他的概念學習便無法察覺在什麼情況下不能使用，而容易將概念過度一般化。因此學生在學習每一個概念的時候，需要一些反例來突顯正例的重要性。因此我們建議在「6-d-01 添加不能製作長條圖的問題。」添加一些不能繪成統計圖的相關問題。在「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。」添加一些不是機率的概念的相關概念的釐清。相同的，我們也建議在所有概念的能力指標上適時的添加反例的問題來突顯正例的重要性。例如分數概念學習時，平分概念的學習上添加不平分的判別；在加法交換律的學習上，添加減法不能交換的例子。

TIMSS 四年級 M011006（如圖二十四）的問題需要讓學生判別平面和曲面，我國學生的答對率只有 61.6%。我國在能力指標「1-s-01 能認識直線與曲線。」中有曲線的介紹，但在「2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面(含簡單立體形體)。」沒有曲面的介紹。它也可以看成不是平面的問題，因此我們建議在 2-s-01 中添加非平面的概念的介紹。

TIMSS 四年級 M031267（如圖二十五）的問題需要學生直觀的判斷兩個圖形是否形狀相同（相似）學生的答對率只有 66.0%。我國的能力指標在四年級「4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。」教授平面圖形全等的意義，而到了九年級「9-s-02 能理解多邊形相似的意義。」才教授相似的意義。本研究發現，若針對每一個 TIMSS 或 PISA 的施測問題，我國的能力指標都要添加或增加該能力指標，那可能會掛一漏萬。研究者認爲在每個單元中添加概念反例的問題，可能可以解決此一問題。例如，在教全等概念的直觀意義時，它是狀況一樣，大小相同。因此我們需要介紹形狀一樣但大小不同的反例，要教大小一樣但形狀不同的反例。學生有了這樣的能力，便能解決 M031267 的問題。

M505：廢棄物

問題 1: 廢棄物 M505Q01 - 019

爲了做環境的回家功課作業，學生收集了幾種廢棄物所需分解時間的資料：

廢棄物種類	分解時間
香蕉皮	1－3 年
橘子皮	1－3 年
瓦楞紙箱	0.5 年
口香糖	20－25 年
報紙	幾天
塑膠杯	超過 100 年

有一位學生想用長條圖來表示這個調查結果。

寫出一個理由解釋爲何長條圖不適合用來表示這個結果。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	推理	6-d-01 能整理生活中的資料，並製成長條圖。	了解長條圖如何繪製 知道資料變異太大，不適於用長條圖表示 知道某些類別的分解時間不確定，也不適合用長條圖表示

圖二十二　不能繪製統計圖的問題

M509：地震

問題 1: 地震 M509Q01

有一個節目報導關於地震和其發生頻率，同時也討論地震的可預測性。

一個地質學家提到：

「未來的 20 年內，在 Zed 這個城市發生地震的機會是三分之二」

以下哪一個敘述最能夠反映出這個地質學家的意思？

A　因爲 $\frac{2}{3}\times 20=13.3$，所以在 Zed 這個城市從現在經過 13～14 年將會發生一次地震。

B　因爲 $\frac{2}{3}$ 大於 $\frac{1}{2}$，所以我們可以確定在未來 20 年內將會發生一次地震。

C　未來 20 年內，在 Zed 這個城市發生地震比沒有發生地震的可能性大。

D　我們不能判斷未來會發生什麼事，因爲沒有人可以確定何時會有地震發生。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	推理	9-d-05 能在具體情境中認識機率	機率意義的了解

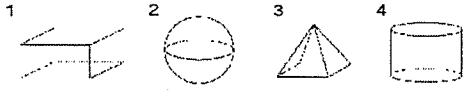
的概念。	機率和比例的差異

圖二十三　機率和比例差異的問題

2

錐體的表面有一部份是平的，有一部份是彎曲的。

下面哪一個形體的表面也是有一部份是平的，一部份是彎曲的？



M03_02.
考題領域：Mathematics (Geometry)
考題內容：Which has flat and curved surface?
正確答案：D

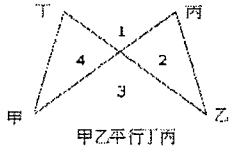
M011006

國家 / 選項	台灣 (N=780)	香港 (N=782)	日本 (N=720)	新加坡 (N=1111)	國際平均
A	2.4%	2.0%	4.1%	1.5%	4.6%
B	14.0%	15.1%	12.7%	11.0%	10.6%
C	18.9%	24.0%	32.5%	15.3%	21.4%
D*	61.6%	55.5%	47.8%	71.7%	55.1%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
幾何	知道事實與程序	1-s-01 能認識直線與曲線。 1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。 6-s-05 能認識直圓錐、直圓柱與直角柱	1.了解立體圖形的平面與曲面；2.知道各立體圖形的名稱；3.認識三維形體的二維 表徵的過渡和透視圖的表示法。 2、一部份、平的、彎曲的

圖二十四　平面和曲面的問題

9



甲乙平行丁丙

在上圖中的四個三角中有兩個是形狀相同但大小不同。請把這兩個三角形塗上顏色。

M10_09
考題領域：Mathematics (Geometry)
考題內容：Shade in two triangles of different sizes

M031267

國家 / 選項	台灣 (N=776)	香港 (N=757)	日本 (N=767)	新加坡 (N=1103)	國際平均
10	66.0%	47.5%	62.5%	62.0%	42.7%
70	23.1%	21.2%	28.4%	25.0%	27.9%
71	3.9%	3.8%	4.5%	5.0%	4.2%
79	4.3%	16.8%	1.6%	5.8%	8.2%
99	2.6%	10.7%	2.9%	2.1%	17.0%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
幾何	知道事實與程序	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。 9-s-02 能理解多邊形相似的意義。	能以「對應頂點」、「對應角」與「對應邊」的關係來描述三角形全等的意義。 建議：增加在 4-s-03 能認識平面圖形全等[redacted]的意義。

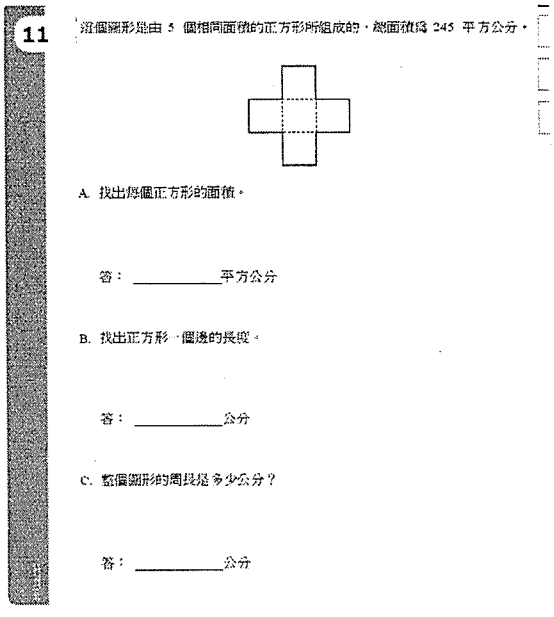
圖二十五　相似圖形的直觀認識

3、添加有規律的解答方法

四年級 M022227（如圖二十六）的題組主要的概念是要求學生從已知的正方形面積中求出邊長或周長。雖然這個問題是求平方根的問題，但是當它要做爲四年級學生可以解答的問題一定是整數邊長的問題。它是課程中由邊長求面積的逆向思考的問題，它只需要學生有規律的去思考邊長是 1,2,3,…的時候正方形面積是 1,4,9,…便可以解答，但我們的學生只有 64.1%可以正確回答。因此我們建議在「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。」的學習過程中，能添加出現這類的問題，讓學生能利用有規律的試錯誤，或者有規律的思考可能的解答，以便解答相類似的問題。

PISA 2006 M510（如圖二十七）是一個簡單的排列組合的問題，它只需要學生有規律的進行配對或者用樹狀圖便可以解答問題。因此我們建議在「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。」添加有規律的找尋事件或母群體的問題。

相同的，建議在所有概念的學習上，在適當的時機都能添加或強調有規律的找尋答案，或者有規律的嘗試錯誤的方法。


11

這個圖形是由 5 個相同面積的正方形所組成的，總面積為 245 平方公分。

A. 找出每個正方形的面積。

答：_____平方公分

B. 找出正方形一個邊的長度。

答：_____公分

C. 整個圖形的周長是多少公分？

答：_____公分

M04_11A.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：5 squares / area of one square

M022227A

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
10	82.5%	87.9%	86.4%	86.8%	88.6%	51.8%
70	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.2%	1.2%
79	13.4%	8.5%	9.7%	10.9%	9.4%	29.0%
99	4.0%	3.7%	3.8%	2.3%	1.9%	18.0%

M04_11B.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：5 squares / length of one side

M022227B

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
10	64.1%	77.5%	41.7%	69.4%	78.0%	27.3%
11	1.2%	0.8%	0.2%	0.9%	2.5%	1.1%
70	0.5%	0.0%	0.7%	0.3%	0.2%	2.9%
71	4.9%	2.9%	5.3%	4.8%	3.5%	6.9%
72	2.7%	1.9%	15.5%	2.9%	2.0%	2.7%
79	19.0%	11.0%	20.7%	15.8%	9.2%	32.0%
99	7.6%	5.9%	15.9%	5.9%	4.7%	27.0%

M04_11C.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：5 squares / perimeter whole figure

M022227C

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
10	47.9%	55.6%	31.6%	48.2%	66.0%	15.8%
11	0.2%	0.4%	0.5%	0.0%	0.3%	0.9%
12	3.2%	2.0%	14.6%	4.5%	5.5%	3.4%
70	5.2%	13.3%	8.6%	4.9%	6.9%	5.4%
71	0.4%	1.3%	1.9%	1.1%	1.5%	1.1%
72	0.8%	0.6%	1.8%	2.6%	0.6%	3.2%
79	31.5%	20.1%	19.4%	30.2%	13.7%	37.7%
99	10.7%	6.8%	21.7%	8.4%	5.4%	32.4%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量—工具、技巧與公式	解例行性問題	3-s-07 能由邊長和角的特性來認識正方形和長方形。	利用點數算出正方形的數目，並利用除法求出一個正方形的面積。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量—工具、技巧與公式	解例行性問題	3-s-07 能由邊長和角的特性來認識正方形和長方形。 4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。	了解正方形的四邊等長，故可利用周長除以 4 得到一邊的長。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量—工具、技巧與公式	解例行性問題	3-s-02 能認識周長，並實測周長。	一、對於組合圖形的周長概念需了解到只計算周圍的長度(學生有可能會計算裡面的長度，周長的迷失概念) 二、可利用點數方式算出幾段相等的邊長，並利用乘法解決問題。

圖二十六　已知面績求邊長的問題

M510：選擇

問題 1: 選擇

M510Q01

在披薩店，你可以拿到一個有兩種配料的基本披薩，這兩種配料是起司和蕃茄；此外，你還可以選擇額外的配料製作自己專屬的披薩，這四種額外的配料如下：橄欖、火腿、蘑菇和臘腸。

雨珊想要點一個有兩種不同額外配料的披薩，有多少種組合是雨珊可以選擇？

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	推理	9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。	語意的了解 知道如何配對

圖二十七　求簡單的排列組合問題。

4、添加逆向思考和逆運算的問題

八年級 M032046 的問題（如圖二十八）是給學生最習慣的表示法 y=3x+2，要求學生逆運算用不習慣的 y 來表示 x 的問題，我們的學生只有 47.7%的學生答對。此外四年級 M022227（如圖二十六）的題組也需要學生運用逆向思考的問題。

逆向思考或運算的問題，在數學的學習上有著非常要的地位。有些逆向的性質仍然成立，有些逆向的性質就會錯誤，例如「正方形的四個邊長都相等」，但「四個邊長都相等的正方形並不一定是正方形」。

但這個概念在我們的能力指標中很少看到，也未被強調。M032046 和 M022227 相對應的能力指標中並未見到這樣的內容。因此，我們建議在「7-a-05 能利用移項法則

來解一元一次方程式，並做驗算。」和「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。」應該添加逆向思考和逆運算的問題，同時在所有的數學概念的學習上也應該一致的被強調出來。若我們的老師都知道教一概念時，也應該反問它的逆向問題或概念，老師的教學將會更有條理。若學生了解每一概念都需要思考它的逆向概念或逆向問題，我們的學生可以學得更有感覺，會學得更好。

5 若 $y = 3x + 2$，下列何者是用 y 來表示 x 的寫法？

a $x = \frac{y-2}{3}$

b $x = \frac{y+2}{3}$

c $x = \frac{y}{3} - 2$

d $x = \frac{y}{3} + 2$

M09_05.
考題領域：Mathematics (Algebra)
考題內容：If y equals 3x plus 2
正確答案：A

M032046

選項＼國家	台灣 (N=902)	香港 (N=829)	日本 (N=814)	韓國 (N=883)	新加坡 (N=1002)	國際平均
A*	47.7%	59.6%	46.1%	52.0%	60.9%	25.6%
B	24.3%	15.8%	30.3%	24.3%	20.3%	33.0%
C	13.7%	13.7%	12.4%	11.4%	8.4%	15.3%
D	13.2%	10.1%	9.8%	11.9%	9.8%	20.1%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數—方程式與公式	使用概念	反函數 7-a-05 能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。	四、利用移項法則或等量公理解題。 五、移項方面等號右邊加 2，移至左邊須改成減 2 六、利用等量除法公理時，留意每一項都要被除(不能忽略常數項) 七、學生習慣用 X 表示 Y，很少用 Y 表示 X。(強調)

圖二十八　用 y 表示 x 的問題

5、添加概念溝通的問題

八年級 M022261（如圖二十九）的題組問題中，主要是找尋規律的問題，之後寫出「你如何得到答案的理由」。解釋理由的問題學生的答對率 48.9%。

八年級 M022002 的問題（如圖三十）中，也是一個概念溝通的問題，在這問題中只有 50.3%的學生能了解問題中 K 所代表的意義。

從八二年版開始，我國的課程綱要便開始強調學生建構自己的知識，強調學生能溝通他的數學概念。雖然我國的數學課程綱要列有「連結」的主題，也強調溝通的內涵，但是這類的理念，在課程綱要能力指標的說明中，並未被強調出來。同時學生口述他的數學概念與書寫他的數學概念仍有一段的差距。因爲用講的比較快，用寫的比較花時間，同時要考慮是否能清楚表達的文法問題。因此我們建議在相關的能力指標「6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並驗解的合理性。」中能添加相

關的說明，要求學生用書寫的方式解釋他的想法，或說明他的理由。在相關的能力指標「7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。」中要求學生溝通他人所表示出來的式子或者符號的意義。此外，在各概念的學習上也應添加概念溝通的內容，使我國學生習於書寫概念的構通。

10 下面三個圖形都被分割成一些全等的小三角形。

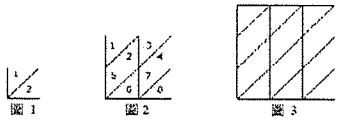


圖 1　圖 2　圖 3

A. 請完成下表。首先，請填入圖 3 中那些全等小三角形的數目，接著，如果依照這些圖的規律畫第 4 個圖，請填入圖 4 的全等小三角形的數目。

圖	小三角形的數量
1	2
2	8
3	
4	

B. 依照這些圖的規律繼續畫到第 7 個圖、圖 7 有幾個全等的小三角形？

答：_____

C. 若依照此規則畫到第 50 個圖，請不要畫出第 50 圖，也不要一個個數其包含的全等小三角形，請找出圖 50 中全等小三角形的數目，並解釋你如何得到答案。

M04_10A.
考題領域：Mathematics (Algebra)
考題內容：Sequence of figures with triangles / fill table

M022261A

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
10	68.6%	71.7%	73.6%	78.3%	74.5%	36.6%
70	18.8%	15.2%	17.0%	13.9%	18.8%	30.2%
71	0.9%	1.0%	2.7%	0.8%	0.7%	6.4%
79	8.3%	7.8%	4.5%	5.8%	4.8%	15.4%
99	3.4%	4.2%	2.1%	1.2%	1.2%	11.4%

M04_10B.
考題領域：Mathematics (Algebra)
考題內容：Sequence of figures with triangles / 7th figure

M022261B

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
10	56.2%	55.8%	55.0%	60.4%	56.5%	22.1%
70	1.1%	1.3%	0.3%	0.4%	0.8%	1.1%
71	1.4%	0.7%	2.4%	3.0%	1.4%	2.3%
79	31.8%	35.4%	33.5%	32.0%	36.4%	47.9%
99	9.5%	6.8%	8.7%	4.1%	4.8%	26.5%

M04_10C.
考題領域：Mathematics (Algebra)
考題內容：Sequence of figures with triangles / 50th figure

M022261C

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
20	2.7%	7.5%	12.2%	12.5%	12.1%	2.6%
21	46.2%	37.6%	31.4%	35.5%	31.7%	11.4%
10	0.4%	1.5%	0.8%	1.3%	0.1%	1.5%
19	0.8%	0.3%	0.7%	0.7%	1.0%	0.5%
70	1.1%	1.0%	1.1%	0.9%	1.5%	1.6%
71	0.7%	1.0%	0.5%	0.1%	1.1%	1.0%
79	22.9%	26.5%	24.9%	34.3%	34.9%	29.3%
99	25.2%	24.6%	28.5%	14.7%	17.6%	52.1%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數—樣式	解例行性問題	6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並驗解的合理性。(同 6-a-04)	畫圖並利用點數的方式進行解題。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數—樣式	解例行性問題	6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並驗解的合理性。(同 6-a-04)	畫圖並利用點數的方式進行解題。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數—樣式	推理	6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並驗解的合理性。(同 6-a-04)	一個正方形 推理出 $2n^2$ 的關係

	8-n-04 能在日常生活中，觀察有次序的數列，並理解其規則性。

圖二十九　數量關係的溝通問題

1

小龍想要找出加起來總和是 84 的三個連續偶數，於是他寫了一個式子：
k + (k + 2) + (k + 4) = 84。這個文字 k 代表什麼呢？

a 三個偶數中的最小的一個

b 中間那一個偶數

c 三個偶數中最大的一個

d 三個偶數的平均數

M04_01.
考題領域：Mathematics (Algebra)
考題內容：Three consecutive even numbers
正確答案：A

M022002

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
A*	50.1%	57.4%	34.1%	46.0%	48.4%	24.7%
B	12.0%	8.8%	15.8%	14.7%	9.7%	17.3%
C	13.5%	13.2%	30.0%	17.7%	14.6%	28.7%
D	23.8%	19.5%	18.9%	20.9%	25.2%	22.1%

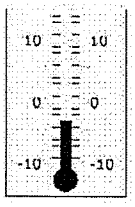
內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數—代數式	解例行性問題	7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。 7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。	一、 知道代數式於題意中所代表的意義。 二、 知道未知數加上正整數後，能比較其大小關係。

圖三十　解釋問題中的意義

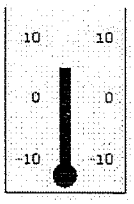
6、添加正負數的前置經驗問題

TIMSS 四年級 M011013（如圖三十一）的問題是零下溫度的上升和下降問題。我國學童的答對率只有 60.1%，有 31.7%的學生直接將 5 度和零下 3 度的兩數相減 5-3=2。因爲我國地處亞熱帶，因此不會出現零下的溫度，所以在教材上沒有這類的問題。若我國想要讓學童能解答這類的問題，建議在「3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。」的教材中，可以添加輸贏、比多少、…等等有正負數概念的前置概念的問題，以增加學生的解答經驗，使學生有助於七年級正負數概念的學習。

2 小慈上學時，溫度計上的顯示是零下 3 度。



在午休時的溫度爲 5 度。



請問氣溫上升了幾度？

1 2 度
2 3 度
3 5 度
4 8 度

M02_02.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：How much did temperature rise?
正確答案：D

M011013

國家 / 選項	台灣 (N=795)	香港 (N=791)	日本 (N=733)	新加坡 (N=1111)	國際平均
A	31.7%	30.9%	15.2%	37.4%	23.9%
B	3.7%	3.9%	4.6%	3.4%	5.2%
C	3.8%	7.2%	8.3%	6.5%	10.7%
D*	60.1%	57.6%	71.1%	52.6%	57.5%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量	知道事實與程序	7-n-04 能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。 7-n-06 能理解負數的特性並熟練數(含小數、分數)的四則混合運算。	1.能認識負數是比零小的數，例如：零下 3 度是指比零度還低 3 度的溫度；2. 能理解 5-(-3)=8。 建議在四年級增加有正負的生活實例問題。(例如：輸贏、)

圖三十一　正負溫度的問題

7、添加比例型的乘法問題

TIMSS 四年級 M031108（如圖三十二）的問題是一種比例型的乘法問題，我國有 20.1%的學童用加法來解題。因爲比例型的問題的單位可以全部相同，它與學生學習累加型的乘法啓蒙概念（不相同的單位）不同，因此學童有沒真正了解問題的情形下，會誤用加法來解題。因此我們建議，在「3-n-04 能熟練三位數乘以一位數的直式計算。」的問題中添加相同單位卻需要用乘法來算的問題，例如比例型的乘法問題。

2 每當阿福收集到 1 個寶特瓶時，美莉就能收集到 3 個，那麼當阿福收集到 9 個寶特瓶時，美莉可以收集到幾個寶特瓶？

1 3
2 12
3 13
4 27

M10_02.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Maria collected soft drink bottles.
正確答案：D

M031108

國家 / 選項	台灣 (N=776)	香港 (N=756)	日本 (N=767)	新加坡 (N=1,103)	國際平均
A	1.8%	6.7%	5.3%	11.4%	19.4%
B	20.1%	12.7%	24.1%	18.4%	24.6%
C	2.7%	5.5%	5.2%	2.4%	4.0%
D*	74.1%	74.3%	65.3%	67.4%	48.7%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數	解例行性問題	2-n-06 能理解乘法的意義，使用×、＝做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。 3-n-04 能熟練三位數乘以一位數的直式計算。	了解「幾的幾倍」是運用乘法，例如：9 的 3 倍是 9×3=27. 建議：在 3-n-04 添加比例型的乘法問題。

圖三十二　比例型的乘法問題

8、添加時間縮短的百分率問題

有關 TIMSS 八年級 M022039 時間改變的百分率問題（如圖三十三），我國學童的答對率只有 39.7%，且有 47.8%的學童都回答 5%。我們相信學童可能不知道怎麼作答，因此直接用 25-20=5 來作答。有關這類的問題，我國六到八年級能力指標的內容並未出現。但在「5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含百分率、折)。」和「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」分別有百分率和時間的乘除問題。我們認爲這兩個能力指標已經可以含蓋其內涵，只是從未出現這類的問題。因此我們建議在「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」的能力指標中添加時間的改變的百分率問題。

8 高速公路通車後，一輛公車從甲地到乙地的時間，由 25 分鐘變爲 20 分鐘。這趟旅程所縮短的時間百分比是多少？

a 4%
b 5%
c 20%
d 25%

M03_08.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Percent decrease in travel time
正確答案：C

M022039

國家 / 選項	台灣 (N=888)	香港 (N=827)	日本 (N=802)	韓國 (N=886)	新加坡 (N=1004)	國際平均
A	5.3%	4.0%	7.9%	5.9%	3.4%	7.1%
B	47.8%	22.2%	46.4%	42.8%	13.8%	45.8%
C*	39.7%	61.0%	38.7%	44.6%	70.2%	31.7%
D	6.1%	11.4%	5.5%	6.1%	11.6%	9.0%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數一 比、比例以及百分率	知道事實與步驟	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。 5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。	一、由縮短的時間透過基準量、比較量的概念轉化爲用分數表徵的比率。 二、將分數表徵的比率，透過分子除以分母或是利用擴分將分母定爲 100，轉化爲百分率。

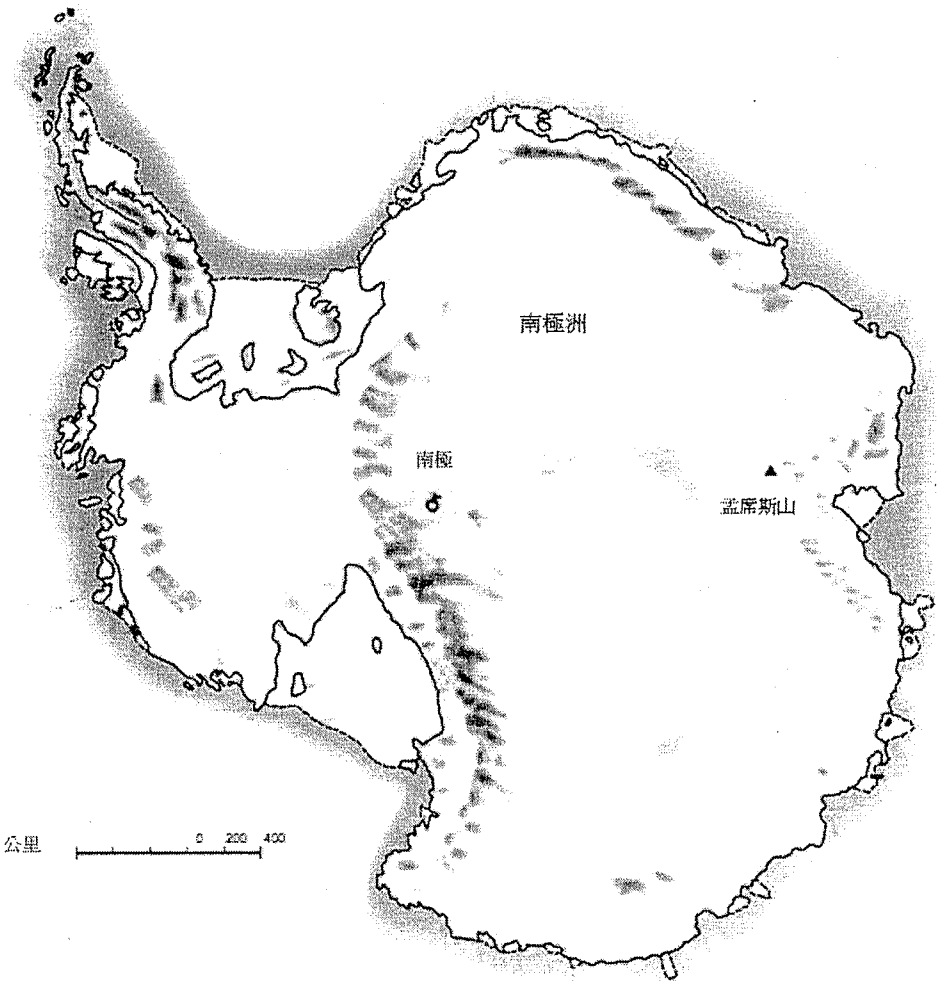
圖三十三　時間的改變的百分率問題

9、添加圖形放大、縮小對面積的影響問題

PISA 的 M148（如圖三十四）試題是有關圖形放大、縮小對面積的影響的問題。而我國的相關能力指標，在「6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。」我們認為除了了解圖形放大、縮小對於長度、角度之影響外，也應了解對於面積之影響。因此我們建議添加「6-s-02 為能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度以及面積的影響，並認識比例尺。」

M148：大陸面積

下圖為南極州地圖。



問題 2: 大陸面積 *P01480*

利用地圖的比例尺，估算出南極洲的面積。

寫出你的作法並解釋你是如何估計的。 (若利用作圖能幫助你估計的話，可直接畫在地圖上。)

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量	推理	6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。 建議 6-s-02 中添加爲能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度以及面積的影響，並認識比例尺。	了解比例尺的意義 能利用一些規則的幾何圖形估計出面積

圖三十四　放大縮小對面積的影響問題

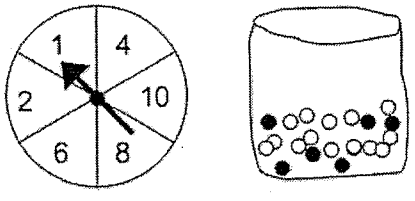
10、添加獨立事件的機率

PISA 2006 的 M417（如圖三十五）是兩個獨立事件的機率問題，然而我國「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。」只是基本的機率問題。兩個獨立事件（或者不同母群體）的機率問題，學生可以很直觀將兩個機率起來。因此建議我國課程綱要可以添加類似的問題說明，以引導教科書編列相類似的問題。

M471：春天園遊會

問題 1: 春天園遊會 *M471Q01*

春天園遊會有一個攤位的遊戲，是先旋轉一個轉盤的指針。如果指針箭頭停在奇數的位置，玩的人就可以從袋子抽出一個彈珠。轉盤和袋子裡的彈珠如下圖所示。



當抽到黑色的彈珠就能得到獎品。小書玩了這個遊戲一次。
請問小書得到獎品的可能性爲何？

A　不可能
B　不太可能
C　大約 50%的可能
D　非常有可能
E　一定可以

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念

資料	推理	9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。	知道停在奇數的機率 知道抽到黑色彈珠的機率 機率的乘法原理運用

圖三十五　不同母群體的獨立事件機率問題

(三)、增加之指標

1、各年級增加怎樣解題的能力指標

在 TIMSS 和 PISA 的試題中，有許多的推理或解題性知識的問題，例如八年級的 M022008（如圖三十六）、M032744（如圖三十七），四年級 M031347（如圖三十八）、M031344（如圖三十九）、M031345（如圖四十），PISA2006 M316（如圖四十一）和 M484（如圖四十二）的問題。這些問題雜散在各個單元之中。雖然我國的能力指標列有「連結」的主題，之內也強調「解非例行性的問題」，但是結連的主題時常被忽視。因此我們建議在各個年級都增加的能力指標，或者要求教科書著者在每一本教科書的最後一個單元加列「怎樣解題」，以增加學生解題的經驗。

4

有一組數列為 7, 11, 15, 19, 23, ... 每次增加 4。另外一組數列為 1, 10, 19, 28, 37, ... 每次增加 9。數字 19 同時出現在兩組數列中。如果這兩組數列一直進行下去，下一個同時出現在第一組和第二組數列的數字是什麼呢？

答: _____

M04_04.
考題領域：Mathematics (Algebra)
考題內容：Numbers in sequence increasing by 4

M022008

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=414)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
10	38.6%	38.9%	46.1%	51.1%	49.5%	31.0%
70	0.5%	1.1%	0.5%	0.5%	7.0%	6.6%
71	4.1%	5.7%	4.3%	4.7%	3.5%	5.1%
79	45.8%	44.6%	41.5%	40.8%	35.6%	40.2%
99	11.0%	9.6%	7.6%	2.9%	4.3%	17.0%

TIMSS 2003 Released Items: Fourth Grade Mathematics

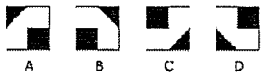
內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數—樣式	推理	8-n-05 能觀察出等差數列的規則性，並能利用首項、公差計算出等差數列的一般項。	第一組等差數列和第二組差數列同時出現的數，公差為二組公差的最小公倍數。 第一個出現的數字為 19 ，利用等差數列公差的概念，下一個數為 19+36=54 學生較少去做二個不同的等差數列去找出共同公差的問題。

圖三十六　兩等差數列的問題

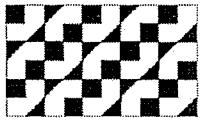
幾何紙牌（繼續）

5

紙牌有四種不同的方式放置於方格中，分別以字母 A、B、C、D 來命名作為識別。



這些字母可以用來形容所鋪紙牌的規律圖案。舉例來說，下圖便可用旁邊方格中的字母描述。

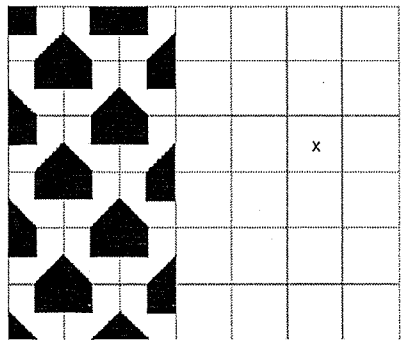


C	A	C	A	C
A	C	A	C	A
C	A	C	A	C

次頁繼續幾何紙牌的題目

幾何紙牌（繼續）

若下列方格中的規律圖案要繼續延伸，則哪一個字母的紙牌可用來標示位置 X？



答：_____

繼續幾何紙牌的題目

M13_05.
考題領域：Mathematics (Algebra)
考題內容：Geometry Tiling Identify cell with letter

M032744

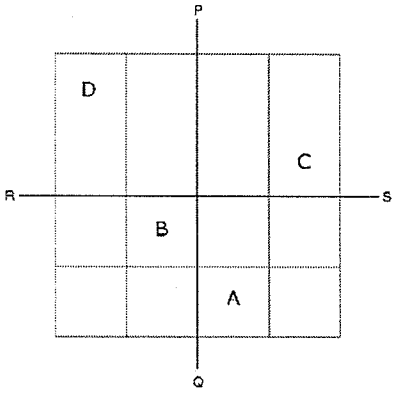
國家 / 選項	台灣 (N=445)	香港 (N=410)	日本 (N=402)	韓國 (N=439)	新加坡 (N=500)	國際平均
10	55.1%	56.6%	72.8%	35.7%	62.5%	32.8%
70	31.4%	25.1%	23.6%	24.3%	24.2%	19.3%
79	3.6%	7.0%	1.2%	5.6%	5.9%	18.8%
99	9.9%	11.4%	2.4%	4.4%	7.4%	29.1%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數—樣式	使用概念	8-n-04 能在日常生活中，觀察有次序的數列，並理解其規則性	一、先排列或繪製圖形，再將圖形轉換爲文字符號，利用符號的規則順序找出答案。

幾何紙牌（續續）

6

繼續使用上面的紙牌作答。在下面的方格中，寫出 A、B、C 或 D，以完成一個以直線 PQ 與直線 RS 爲對稱軸的對稱圖案。並使鋪排的紙牌形成規律圖案。



幾何紙牌的問題結束

M13_06.
考題領域：Mathematics (Geometry)
考題內容：Geometry Tiling - Produce a pattern using letters.

M032745

國家 / 選項	台灣 (N=445)	香港 (N=410)	日本 (N=402)	韓國 (N=439)	新加坡 (N=500)	國際平均
20	8.6%	10.4%	14.3%	12.0%	11.3%	4.3%
10	8.6%	3.7%	8.6%	4.9%	6.0%	4.6%
70	5.9%	14.6%	11.9%	6.3%	18.5%	6.4%
79	55.4%	48.9%	50.1%	65.2%	52.2%	47.1%
99	21.5%	22.3%	15.1%	11.6%	12.1%	37.6%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
幾何—對稱與變換	推理	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。 8-s-06 能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。	一、將 ABCD 四張圖卡放入方格中，再利用線對稱的概念畫出其他圖形。

7

某一個電腦俱樂部有 40 位成員，60%的成員是女生。後來再加入 10 個男生，則現在女生佔全部成員的百分比是多少？寫出你的算法。

答：_____

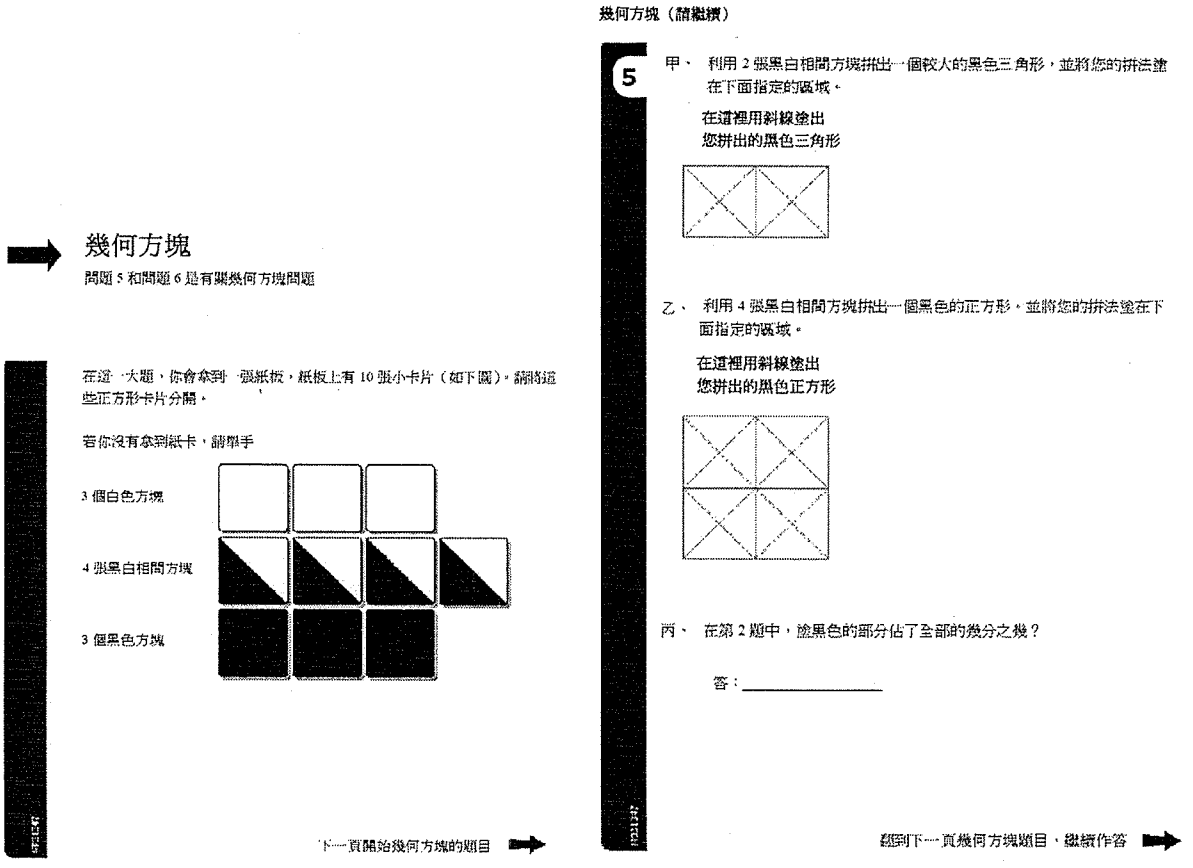
M13_07.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：A computer club had 40 members

M032233

國家 / 選項	台灣 (N=445)	香港 (N=410)	日本 (N=402)	韓國 (N=439)	新加坡 (N=500)	國際平均
20	41.3%	29.5%	16.4%	43.9%	63.8%	12.0%
10	0.2%	2.9%	12.8%	16.8%	2.3%	4.2%
11	0.4%	3.3%	1.0%	0.2%	0.5%	0.4%
12	1.5%	13.7%	4.9%	0.7%	2.8%	2.2%
70	9.5%	5.0%	17.3%	11.1%	4.3%	14.8%
79	34.4%	33.0%	29.4%	23.6%	23.7%	39.4%
99	12.7%	12.6%	18.2%	3.6%	2.5%	26.9%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數—比例、機率與百分率	推理	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)。 7-n-13 能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。	一、部份量、全部量、百分率，知道其中二者，求第三者的問題。(速率也是相類似的問題) 二、如何讓學生學得有感覺。 三、百分率與分數、小數的連結。 四、利用全部量乘以百分率推得部分量，由於全部量增加再重新求百分率。

圖三十七　對稱圖形的解題性知識問題



幾何方塊

問題 5 和問題 6 是有關幾何方塊問題

在這一大題，你會拿到一張紙板，紙板上有 10 張小卡片（如下圖）。請將這些正方形卡片分開。

若你沒有拿到紙卡，請舉手

3 個白色方塊

4 張黑白相間方塊

3 個黑色方塊

下一頁開始幾何方塊的題目

幾何方塊（請繼續）

5

甲、 利用 2 張黑白相間方塊拼出一個較大的黑色三角形，並將您的拼法塗在下面指定的區域。

在這裡用斜線塗出
您拼出的黑色三角形

乙、 利用 4 張黑白相間方塊拼出一個黑色的正方形，並將您的拼法塗在下面指定的區域。

在這裡用斜線塗出
您拼出的黑色正方形

丙、 在第 2 題中，塗黑色的部分佔了全部的幾分之幾？

答：_____

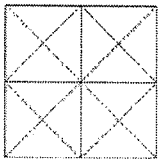
翻到下一頁幾何方塊題目，繼續作答

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
幾何	知道事實與程序	3-s-06 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。 4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。	利用平移、旋轉將兩個直角三角形拼出另一較大的三角形
幾何	知道事實與程序	3-s-06 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。 4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。	知道四個全等的等腰直角組合成正方形。
數	知道事實與程序	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	1.運用四個一樣的等腰直角三角形可合併成一正方形；2.知道部分佔全體的多寡與其表示法。 建議：在 3-s-06 添加拼湊幾何圖形的問題。

6 作出分數

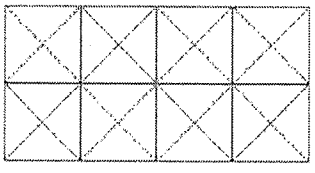
甲、不准使用黑白相間方塊，將 4 張方塊拼出一個正方形使得黑色的部分佔 $\frac{1}{2}$。並將您的拼法塗在下面指定的區域。

在這裡用斜線塗出
您拼出的黑色部分



乙、請用 8 張方塊拼出一個如下圖的長方形，使得黑色部分佔 $\frac{5}{8}$，並將您的拼法塗在下面指定的區域。

在這裡用斜線塗出
您拼出的黑色部分



幾何方塊題目全部完畢

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數	知道事實與程序	3-s-06 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。	1.運用四個一樣的等腰直角三角形可合併成一正方形；2.知道部分佔全體的多寡與其表示法。
數	推理	4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。 4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	建議：在 3-s-06 添加拼湊幾何圖形的問題。 建議：在問題中強調隱含的限制條件及外顯的限制條件。

圖三十八　幾何的拼排問題

數字卡

說明：數字卡包含 43 和 44 兩大題

在這部分，你將會拿到一張印有 0 到 9 的數字卡，如下圖，請將這些數字卡取下來。

假如你沒有拿到數字卡的同學手。

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9

數字卡的題目在下一頁

1

總和為"20"的數字遊戲

小杰與小明這兩個小孩正在玩一個"總和為 20"的遊戲，其規則如下：

總和為"20"規則

抽數字卡：每一個人抽出三張數字卡

加數字卡：每一個人利用這三張數字卡做出一個加法問題，使得算出的總和最接近 20。

例如：假如抽出的數字卡為 1，4 和 5，將數字任意組合後，下面是其中四種可能的方法

$$\begin{array}{r}51\\+4\\\hline 55\end{array} \quad 或 \quad \begin{array}{r}45\\+1\\\hline 46\end{array} \quad 或 \quad \begin{array}{r}15\\+4\\\hline 19\end{array} \quad 或 \quad \begin{array}{r}1\\15\\+4\\\hline 10\end{array}$$

這時玩家應該選擇 $\begin{array}{r}15\\+4\\\hline 19\end{array}$ 因為它的總和 19 最接近 20。

數字卡的題目請翻到下一頁，繼續作答

小杰和小明開始玩遊戲了。

小杰抽出了 2，7，9 三張數字卡、小明抽出了 1，3，6 三張數字卡。

甲、小杰要如何安排三張數字卡做出一個加法問題，才能讓它的總和為最接近 20？記得要寫總和。

乙、小明要如何安排三張數字卡做出一個加法問題，才能讓它的總和最接近 20？記得要寫總和。

丙、小明說：假如我抽到 1，4 和 6，我可以用兩種方法做出總和 20，請告訴我們，小明用哪兩種方法可以做 1、4 及 6 做出總和 20。

第一種方法：

第二種方法：

數字卡的題目請翻到下一頁，繼續作答

M13_01A.

考題領域：Mathematics (Number)

考題內容：Number Tiles Get to 20 using 2, 7, 9

M031344A

國家 / 選項	台灣 (N=391)	香港 (N=383)	日本 (N=362)	新加坡 (N=561)	國際平均
10	38.4%	57.2%	63.7%	45.6%	37.7%
11	0.7%	4.3%	0.8%	3.8%	3.1%
70	0.3%	4.2%	2.7%	0.8%	2.0%
79	24.4%	19.9%	25.5%	37.4%	29.2%
99	6.3%	14.4%	7.3%	12.4%	28.0%

回上一頁

M13_01B.

考題領域：Mathematics (Number)

考題內容：Number Tiles Get to 20 using 1, 3, 6

M031344B

國家 / 選項	台灣 (N=391)	香港 (N=383)	日本 (N=362)	新加坡 (N=561)	國際平均
10	65.0%	47.4%	60.4%	54.8%	39.3%
11	0.4%	3.5%	0.5%	2.3%	1.5%
70	0.0%	2.0%	1.0%	0.2%	1.4%
79	25.2%	32.7%	28.8%	28.7%	27.4%
99	9.4%	14.4%	9.4%	14.0%	30.5%

M13_01C.

考題領域：Mathematics (Number)

考題內容：Number Tiles Get to 20 using 1, 4, 6

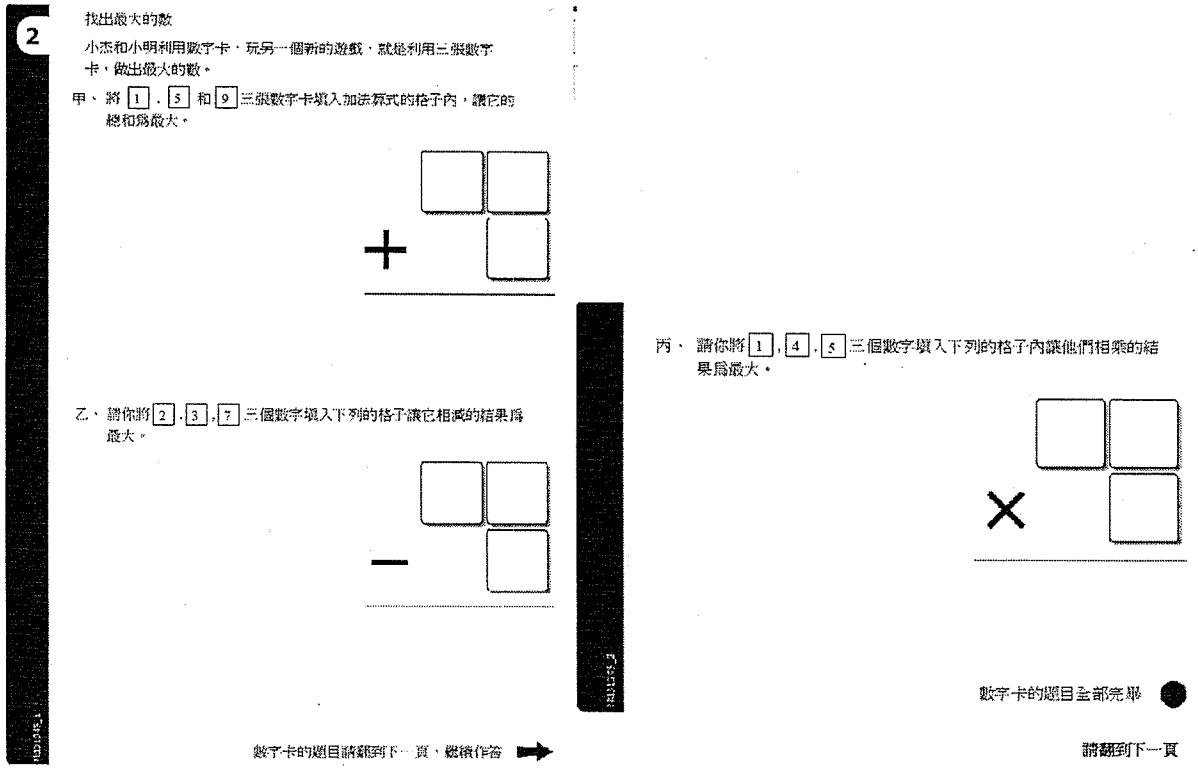
M031344C

國家 / 選項	台灣 (N=391)	香港 (N=383)	日本 (N=362)	新加坡 (N=561)	國際平均
20	65.9%	55.8%	58.1%	64.6%	44.0%
10	5.8%	3.3%	8.3%	5.1%	6.7%
79	17.4%	23.3%	21.6%	19.5%	21.1%
99	10.9%	17.7%	12.0%	10.8%	28.2%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念

數	使用概念	2-n-11 能做簡單的二位數加減估算。	了解「最接近」的語意。 建議：在各個年級增列「怎麼解題」的問題。將 timss 和 pisa 中依據學生學到的數學概念，在適當的年級增加解題性知識的問題。(舉一些例子) 例如本題適合放在四年級。

圖三十九　數感問題（一）



M13_02A.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Number Tiles Largest number (+)

M031345A

國家 / 選項	台灣 (N=391)	香港 (N=383)	日本 (N=362)	新加坡 (N=561)	國際平均
10	64.4%	68.9%	74.5%	70.8%	52.3%
70	31.4%	22.9%	17.1%	23.7%	26.7%
79	1.8%	3.1%	4.2%	3.2%	9.1%
99	2.5%	5.1%	4.3%	2.4%	11.9%

M13_02B.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Number Tiles Largest number (-)

M031345B

國家 / 選項	台灣 (N=391)	香港 (N=383)	日本 (N=362)	新加坡 (N=561)	國際平均
10	62.6%	66.6%	73.4%	69.0%	49.6%
70	0.9%	2.0%	0.8%	1.9%	3.4%
71	31.8%	21.7%	17.2%	23.6%	24.5%
79	2.2%	4.2%	3.8%	3.1%	9.5%
99	2.5%	5.4%	4.8%	2.4%	13.0%

M13_02C.
考題領域：Mathematics (Number)
考題內容：Number Tiles Largest number (X)

M031345C

國家 / 選項	台灣 (N=391)	香港 (N=383)	日本 (N=362)	新加坡 (N=561)	國際平均
10	22.4%	24.1%	34.7%	26.3%	16.5%
70	24.6%	31.9%	22.5%	26.0%	17.2%
71	48.2%	34.0%	32.4%	39.4%	42.9%
79	2.6%	4.3%	5.3%	5.5%	9.6%
99	2.2%	5.6%	5.0%	2.8%	13.8%

Unique ID	MS Block	MS Block Seq	Item Type	Key	Trend	Content Domain	Main Topic	Cognitive Domain
M031345A	M13	02	CR	X	No	Number	Whole numbers	Solving Routine Problems
M031345B	M13	02	CR	X	No	Number	Whole numbers	Solving Routine Problems
M031345C	M13	02	CR	X	No	Number	Whole numbers	Solving Routine Problems

TIMSS 2003 Released Items: Fourth Grade Mathematics

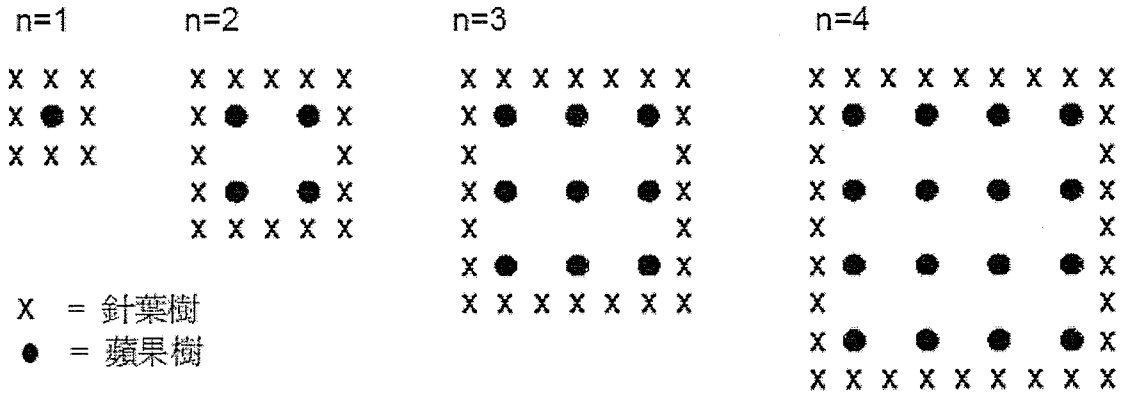
內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數	解例行性問題	2-n-04 能熟練二位數加減直式計算。 2-n-06 能理解乘法的意義，使用×、＝做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。	熟練四則運算。 建議：在各個年級增列「怎麼解題」的問題。將timss 和 pisa 中依據學生學到的數學概念，在適當的年級增加解題性知識的問題。(舉一些例子) 例如本題適合放在四年級。

圖四十　數感問題（二）

M136：蘋果

農夫將蘋果樹種在正方形的果園。為了保護蘋果樹不怕風吹，他在蘋果樹的周圍種針葉樹。

在下圖裡，你可以看到農夫所種植蘋果樹的列數(n)，和蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：



問題 1: 蘋果

M136Q01- 01 02 11 12 21 99

完成下表的空格

n	蘋果樹數	針葉樹數
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數	推理	8-n-04 能在日常生活中，觀察有次序的數列，並理解其規則性。	語意的了解 能做點數並歸納出 n 與蘋果樹數之關係 能做點數並歸納出 n 與針葉樹數之關係

問題 2: 蘋果

M136Q02- 00 11 12 13 14 15 99

你可以用以下的 2 個公式來計算上面提到的蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：

蘋果樹的數量 $= n^2$

針葉樹的數量 $= 8n$

n 代表蘋果樹的列數

當 n 爲某一個數值時，蘋果樹數量會等於針葉樹數量。找出 n 值，並寫出你的計算方法。

.....

.....

.....

.....

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數	解例行性問題	8-a-09 能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義。	能根據題意，列出一元二次方程式並求解。 一 能由方程式的解中選擇合於原問題

	8-a-10 能利用因式分解來解一元二次方程式。 8-a-12 能利用一元二次方程式解應用問題。	的答案。

問題 3: 蘋果 *M136Q03-01 02 11 21 99*

若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？解釋你的想法。

.....

.....

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
代數	推理	7-a-10 能認識常數函數及一次函數。 7-a-12 能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。 9-a-01 能理解二次函數的意義。 9-a-02 能描繪二次函數的圖形。 能力指標中缺乏一次函數與二次函數的圖形與數值比較問題	知道蘋果樹數為n×n，針葉樹數為8×n，兩個公式都有因數n，而蘋果樹有另一個n，n可以越來越大，但針葉樹另一個因數還是8。 知道蘋果樹數是二次函數。針葉樹是線性函數。所以蘋果樹數量會增加的比較快。 用作圖法證明當n＝8之後，n2會大於8n。

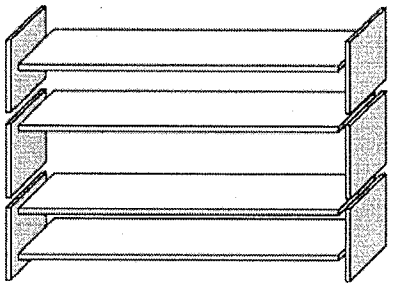
圖四十一　數的規律問題

M484：書架

問題 1: 書架 *M484Q01*

木匠製作一個書架需要以下材料：

4 個長木板，
6 個短木板，
12 個短夾，
2 個長夾和
14 個螺絲。



現在木匠有 26 個長木板，33 個短木板，200 個短夾，20 個長夾和 510 個螺絲，請問木匠可以做幾個書架？

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數	推理	3-n-05 能理解除法的意義，運用÷、＝做橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。 6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。	除法的計算 了解必須要備齊所有材料，因此選取五種材料所能各自做成書架的答案中，最小的一個

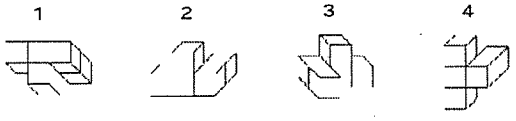
圖四十二　數量關係的問題

2、四年級增加空間中全等的能力指標

四年級 M012069（如圖四十三）的問題是空間形體的旋轉問題。我國學生的答對率只有 57.5%。它是智力測驗常見的問題，可是我國的能力指標在並未出現類似的問題，只有在「4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。」有判別平面圖形的全等問題。因此我們建議在四年級的能力指標中，可以增加一個能力指標「4-s-04 能認識空間圖形全等的意義。」

8 下面的圖形可以任意轉成不同的位置。

請問下面哪一個圖形可能是由上面的圖形轉成的。



M03_08.
考題領域：Mathematics (Geometry)
考題內容：Rotated 3-dimensional figure
正確答案：A

M012069

國家 / 選項	台灣 (N=780)	香港 (N=782)	日本 (N=720)	新加坡 (N=1111)	國際平均
A*	57.5%	43.1%	49.5%	54.4%	42.6%
B	16.1%	18.4%	13.6%	12.8%	19.1%
C	20.4%	31.1%	35.1%	30.0%	28.2%
D	3.5%	6.3%	1.0%	2.3%	4.3%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念

幾何	推理	4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。	1.了解立體圖形的平移、旋轉、反射；2.瞭解空間概念。(在 4-s-03 添加平面圖形的全等操作來推廣至立體圖形。)

圖四十三　空間形體的旋轉問題

3、四、六年級增加生活中統計圖表的報讀和解讀的能力指標

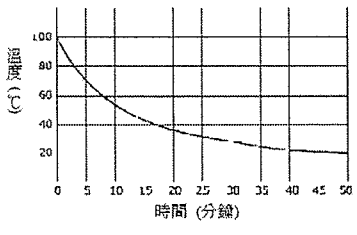
八年級學童在試題 M022035 的統計圖表報讀中(如圖四十四)，答對率只有 44.7%，同時有 40.4%的學童回答 D: 50 分鐘。分析發現，這是一題「冷卻了 20 度」與「冷卻到 20 度」的了解的問題。題意的了解是學童解題中首先必需了解的問題。TIMSS 四年級 M031333（如圖四十四）的問題需要學生報讀高、低溫差的問題，學生的答對率只有 57.1%。此外，我們也發現我們的能力指標編排方式，八年級學童在五、七、八年級是學習統計單元，在六年級是強調長條圖和折線圖製作，以及圓餅圖的報讀與製作。在四年級則報讀長條圖和折線圖，完全沒有出現曲線圖的內容。由於生活中仍會出現曲線圖的報讀，因此我們建議在四年級的能力指標中修改 4-d-01 和 4-d-02 爲「能報讀生活中常用的統計圖表」。

此外 PISA M150（如圖四十五）也是曲線圖表的報讀和解讀問題。M525（如圖四十六）則是統計圖表的報讀和解讀問題。因爲統計圖表的解讀問題，有時候會涉及比率問題，因此我們建議將 6-d-03 能報讀生活中常用的圓形圖，並能整理生活中的資料，製成圓形圖。」一分爲二：「6-d-03 能報讀和解讀生活中常用的統計圖(包含圓形圖、曲線圖、…)。」和「6-d-04 能整理生活中的資料，製成圓形圖。」。

7

一個燒杯的水加熱到沸點後開始冷卻，每隔 5 分鐘記錄一次溫度圖如下。

冷卻曲線



請問杯裏的水，從一開始最先冷卻了 20 度，大約花費多少分鐘？

a 3

b 8

c 37

d 50

M03_07.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：Graph of cooling water
正確答案：A

M022035

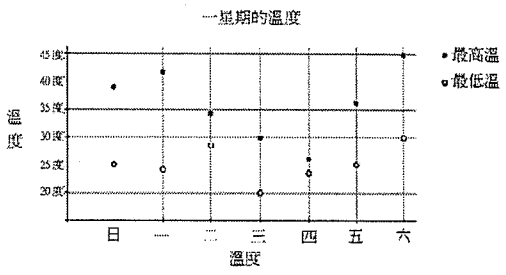
國家 / 選項	台灣 (N=888)	香港 (N=827)	日本 (N=802)	韓國 (N=886)	新加坡 (N=1004)	國際平均
A*	44.7%	25.6%	38.5%	10.9%	53.7%	33.6%
B	6.1%	5.8%	9.3%	4.0%	8.2%	13.4%
C	8.5%	7.8%	3.2%	5.8%	8.5%	12.1%
D	40.4%	60.2%	48.5%	79.2%	29.0%	35.7%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念

統計一 資料詮釋	解例行性問題	3-d-02 能報讀生活中常見的交叉對應（二維）表格。 4-d-01 能報讀生活中常用的長條圖。 4-d-02 能報讀生活中常用的折線圖	1. 「冷卻了 20 度」與「冷卻至 20 度」語意了解。 2. 題意的了解。

圖四十四　曲線的統計圖的報讀問題

6



上面為一星期內每日最高溫與最低溫的圖表。
哪一天的最高溫與最低溫的溫度相差最大？

1 星期一
2 星期四
3 星期五
4 星期六

M13_06.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：High and low temperatures for a week
正確答案：A

M031333

國家 選項	台灣 (N=391)	香港 (N=383)	日本 (N=362)	新加坡 (N=561)	國際平均
A*	57.1%	69.3%	73.3%	47.3%	42.1%
B	7.3%	5.4%	1.8%	7.6%	8.0%
C	4.3%	1.4%	1.6%	8.5%	6.6%
D	28.1%	22.5%	19.7%	34.2%	28.4%

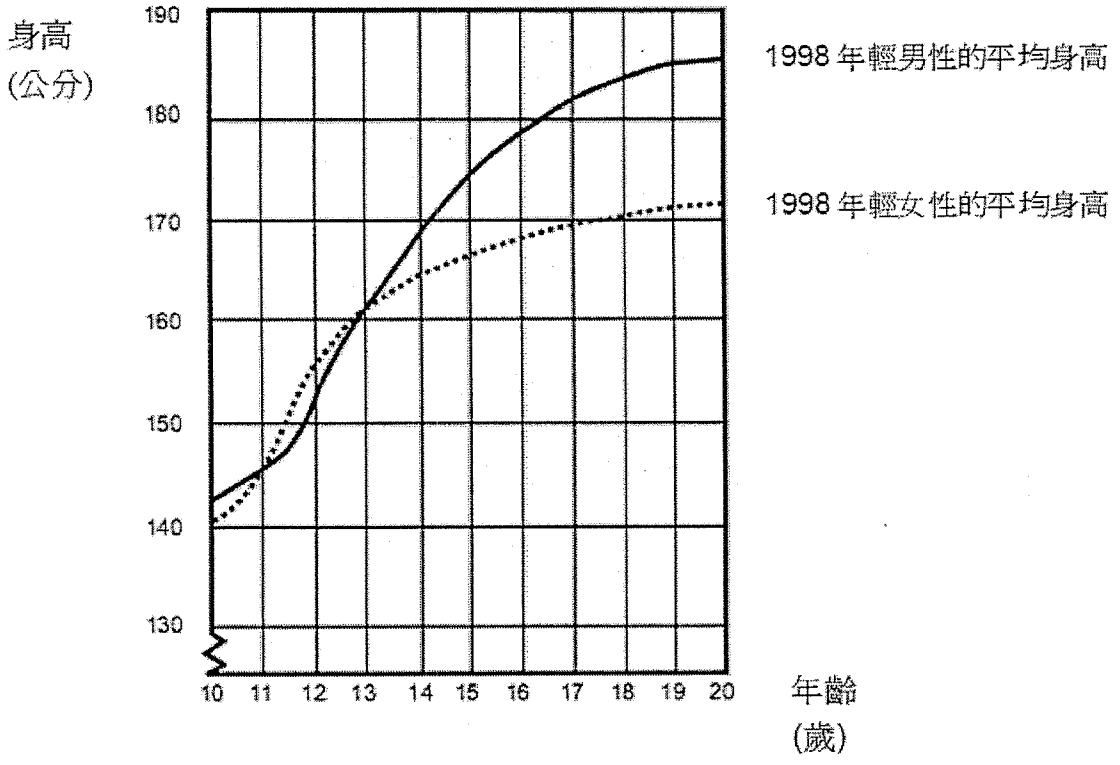
內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	解例行性問題	4-d-01 能報讀生活中常用的長條圖。 4-d-02 能報讀生活中常用的折線圖。	能從圖表中解讀數據。 建議：增加其他類型的統計圖形，及解讀統計圖形。

圖四十五　高低溫差的統計圖問題

M150： 成長

青少年長得更高了

下圖顯示 1998 年荷蘭的年輕男性和女性的平均身高：



問題 1: 成長 *M150Q01- 0 1 9*

自 1980 年以來 20 歲女性的平均身高增加了 2.3 公分，變成 170.6 公分。
則 1980 年 20 歲女性的平均身高是多少？

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
數	知道事實與程序	4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	語意的了解 小數減法的運用

問題 2: 成長 *M150Q02- 00 11 21 22 99*

根據這張圖，平均而言，哪一段時期的女孩身高會比同年齡的男孩高？

.....

.....

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	推理	6-d-03 能報讀生活中常用的圓形圖，並	報讀生活當中的統計圖

能整理生活中的資料，製成圓形圖。

問題 3: 成長 *M150Q03- 01 02 11 12 13 99*

依據上圖說明爲何女孩 12 歲以後身高的增加率會減小。

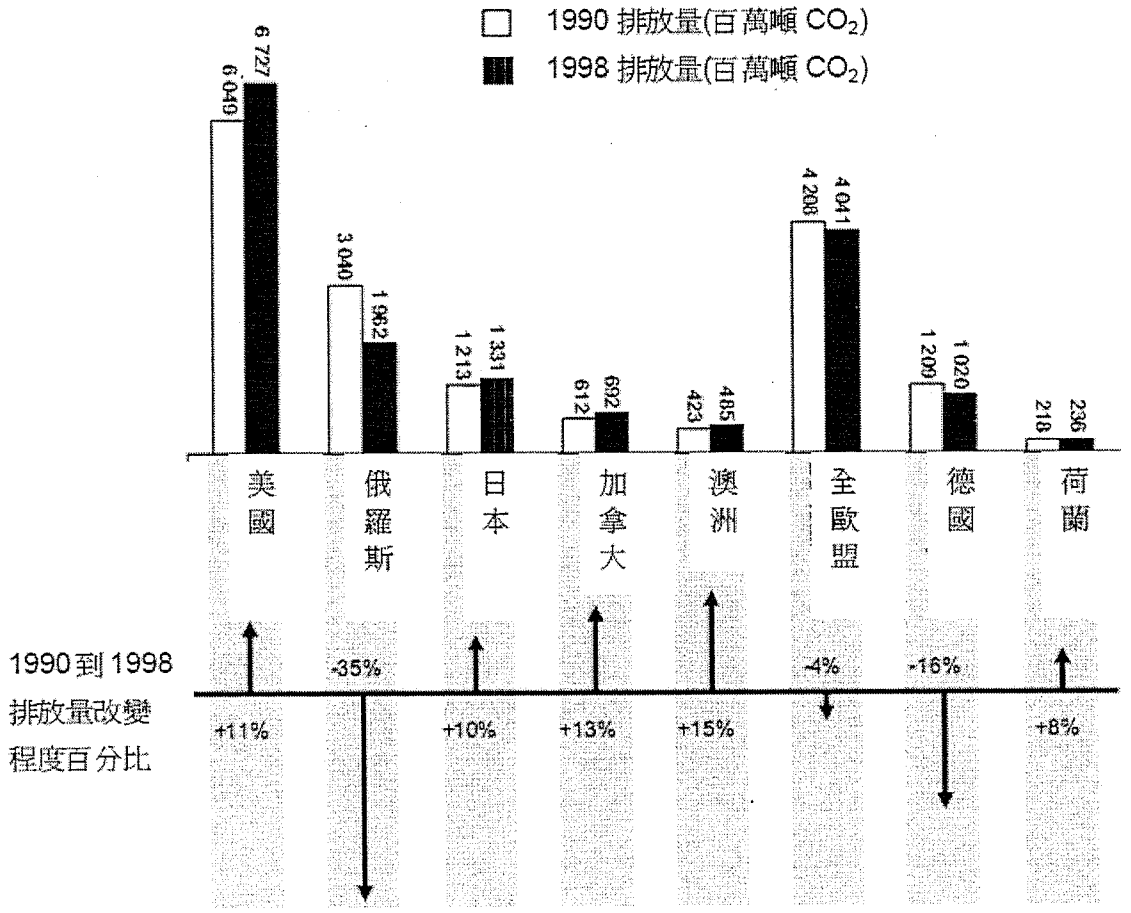
內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	推理	建議於六年級增加統計圖表的解讀，例如增加率。	能解讀統計圖表 察覺到 12 歲以後女生身高曲線斜率的減小 能比較真正的增加高度

圖四十六　曲線的統計圖的報讀與解讀問題

M525：減少二氧化碳(CO_2)濃度

許多科學家害怕大氣中 CO_2 濃度的增加會導致氣候的改變。

下圖顯示幾個國家(或區域)在 1990 年(白色長條)和 1998 年(黑色長條)CO_2 的排放量，以及在 1990 年到 1998 年之間排放量改變程度的百分比(箭頭代表百分比)。



問題 1: 減少CO_2 濃度

M525Q01 - 0 1 2 9

上圖可以看出美國從1990年到1998年CO_2排放量增加了11%。

寫出計算過程說明如何得到11%。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	解例行性問題	5-n-**14** 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。 **6**-d-01 能整理生活中的資料，並	長條圖的解讀 百分比的計算

	製成長條圖。

問題 2: 減少CO_2 濃度 *M525Q02 - 0 1 9*

佩娟分析圖表後，聲稱她發現在排放量改變程度的百分比中有一個錯誤：「德國減少的百分比(16%)大於整個歐盟所減少的百分比(4%)。這是不可能的，因為德國是歐盟的一部分。」

你同意佩娟的說法嗎？給一個解釋來說明你的答案。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	推理	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。 6-d-01 能整理生活中的資料，並製成長條圖。	部分與全體的分析 百分比的了解

問題 3: 減少CO_2 濃度 *M525Q03 - 0 1 2 9*

佩娟和伯凱討論哪一個國家(或區域) CO_2的排放量增加最多。

兩個人從上圖產生不同的結論。

根據這個問題提出兩種「正確」答案，並且解釋你如何得到這些答案。

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	推理	「絕對增加」和「相對增加」	對於「絕對增加」和「相對增加」的了解

圖四十七　統計圖表的解讀問題

4、六年級增加機率的能力指標

2003 年八年級 M032271 的問題（如圖四十八）、M022252 的問題（如圖四十九）是機率的問題。機率的問題，在八二年版和九年一貫暫行綱要中，六年級都要進行教學，但是在九年一貫課程綱要和 97 年的課綱中都已被刪除。此一問題的答題學生當時還就讀暫綱之前的版本，因此答對率尚可 77.2%。可是現在學習九年一貫課程綱要的學生在八年級之前已沒有機率的問題。再者研究者今年在某縣市進行國小數學科展的評審時，六年級學生在做「猜 1 到 100 之間的數，用中位數的方法是最好的方法」的問題，發現學生只知道他是算 1 到 100 被猜中的次數的平均數，他並不知道機率的概念。

機率的問題在日常生活中是一個常見的問題，但它不是平均數的概念，不是比例

的概念，同時相關的國際評量仍然會施測，因此我們考量整個能力指標的編排精神，建議我國課程綱要在六年級時，可以增加機率相關概念的能力指標。

14 某校總共有 1200 個學生（含男生和女生）。隨機抽樣 100 名學生，在此樣本中有 45 個男生。則該校男生的人數最有可能是多少？

a 450

b 500

c 540

d 600

M09_14.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：In a school there were 1200 students
正確答案：C

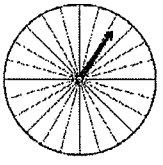
M032271

國家 / 選項	台灣 (N=902)	香港 (N=829)	日本 (N=814)	韓國 (N=883)	新加坡 (N=1002)	國際平均
A	11.2%	9.1%	16.3%	13.0%	9.5%	26.9%
B	6.6%	5.3%	9.3%	7.3%	5.1%	11.0%
C*	77.2%	81.3%	66.1%	75.3%	79.8%	47.4%
D	4.3%	3.8%	6.7%	5.5%	4.0%	9.2%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
統計—不確定性和機率	推理	9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。	一、機率的意義。至國三課程才出現。找出該批學生國小是否有機率課程。

圖四十八　機率的問題（一）

9 下圖是一個分成 24 等分扇形的轉盤。如果旋轉這個箭頭，它落在每個扇形的機率都相等。



這些扇形中有 $\frac{1}{8}$ 是藍色，$\frac{1}{24}$ 是紫色，$\frac{1}{2}$ 是橘色，$\frac{1}{3}$ 是紅色。如果某人轉動這個箭頭，哪一種顏色被指到的機率最小？

a 藍色

b 紫色

c 橘色

d 紅色

M04_09.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：Most likely sector on spinner
正確答案：B

M032252

國家 / 選項	台灣 (N=887)	香港 (N=836)	日本 (N=814)	韓國 (N=873)	新加坡 (N=995)	國際平均
A	2.0%	3.1%	11.4%	8.4%	4.1%	8.4%
B*	85.4%	86.7%	82.0%	78.7%	79.3%	60.4%
C	11.4%	7.3%	5.3%	11.3%	13.2%	19.4%
D	0.7%	2.1%	0.3%	1.1%	3.1%	7.1%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
統計—不確定性(uncertainty)與機率	推理	4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。 5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。 5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。	一、理解機率愈小，所代表的意義爲顏色的比例最低 二、利用通分去比較分數的大小。 三、或是利用分子相同，分母愈大，則該分數愈小，亦可比較出分數大小

圖四十九　機率的問題（二）

(四)、有待研究的問題

1、時間的換算問題

TIMSS 四年級 M031008(如圖五十)的問題是判斷兩個時刻間的時刻問題。雖然 $1\frac{1}{2}$

小時，我國學生在四年級之前尚未學習，也就是此一問題超過學生的學習經驗，但是此一問題只要學生了解一小時=60 分鐘，它至少在 1 小時和 2 小時之間，也就是在 60 分鐘和 120 分鐘之間，便可以找到答案。但是學生的答對率只有 31.9%，有 63.7%的學生選擇超過 120 分鐘的時間。這是研究者所無法理解的。因此這類的問題，有待進行相關的研究來釐清問題所在。

6 小明想看一卷長約$1\frac{1}{2}$小時到 2 小時的影片。請問他應該選擇下列哪一卷呢？

1 59 分鐘的影片
2 102 分鐘的影片
3 121 分鐘的影片
4 150 分鐘的影片

M10_06.
考題領域：Mathematics (Measurement)
考題內容：The length of the film
正確答案：B

M031008

國家 / 選項	台灣 (N=776)	香港 (N=757)	日本 (N=767)	新加坡 (N=1103)	國際平均
A	13.4%	14.4%	10.8%	12.8%	16.4%
B*	31.9%	37.0%	24.7%	46.5%	30.0%
C	34.8%	28.3%	34.2%	20.6%	24.6%
D	18.9%	19.1%	27.0%	19.6%	22.9%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
測量	解例行性問題	4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。	1.知道 1 時＝60 分鐘，1/2 小時=30 分鐘； 2.時間的加減計算問題。 建議：在 4-n-13 添加 1/2 小時=30 分鐘的換算。

圖五十　時間的問題

2、畫記的比較問題

TIMSS 四年級 M031265（如圖五十一）問題是要求學生比較畫記中鉛筆和尺多賣幾枝的問題，我國學生只有 34.9%答對。M031315（如圖五十二）的問題只有 61.4%的學生答對。其原因研究者無法理解。因爲畫記代表的數學生應該沒有問題，兩物的比較問題學生也應該會，那爲什麼會有 65.1%的學生不會做，值得再深入研究。

11 福利社老闆決定查對開學當天所賣的原子筆、鉛筆、橡皮擦、和尺的數量。他將查對的結果記成如下的紀錄。

請問鉛筆比尺多賣出幾枝？

答：_____ 四國比較 更多…

M04_11.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：How many more pencils than rulers sold?

M031265

國家 / 選項	台灣 (N=774)	香港 (N=763)	日本 (N=740)	新加坡 (N=1116)	國際平均
10	34.9%	35.9%	88.7%	69.5%	39.1%
70	9.4%	11.9%	0.8%	11.3%	7.6%
79	54.4%	50.7%%	7.5%	18.3%	40.8%
99	1.3%	1.5%	3.1%	1.1%	12.5%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	解例行性問題	3-d-01 能報讀生活中常見的表格。	了解畫記符號所代表的量。 表格包含一維表格、二維表格。 （建議：在 3-d-01 添加常見畫記符號的表示）

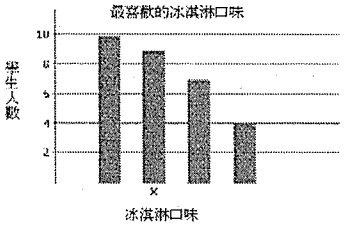
圖五十一　畫記的比較問題（一）

10

最喜歡的冰淇淋口味	學生人數
奶油	IIII
巧克力	卌 卌
草莓	卌 IIII
香草	卌 II

老師問班上 30 個學生最喜歡的冰淇淋口味。上面的表格為老師依照學生的回答所畫記出來的結果。

在下列的長條圖上，標有 x 的長條是哪種口味的冰淇淋？



1 奶油
2 巧克力
3 草莓
4 香草

M10_10.
考題領域：Mathematics (Data)
考題內容：The favorite ice creams of 30 students
正確答案：C

M031315

國家 / 選項	台灣 (N=776)	香港 (N=756)	日本 (N=767)	新加坡 (N=1103)	國際平均
A	5.4%	3.7%	1.7%	2.5%	10.7%
B	27.8%	23.9%	5.0%	12.4%	28.4%
C*	61.4%	64.8%	89.8%	81.5%	47.3%
D	3.5%	5.8%	3.2%	3.2%	5.2%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
資料	使用概念	1-d-02 能將紀錄以統計表呈現並說明。 4-d-01 能報讀生活中常用的長條圖。	能報讀生活中常見的圖表（長條圖、次數分配表）。 在 1-d-02 添加國外的畫記符號。

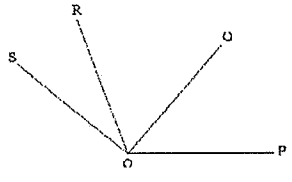
圖五十二　畫記的比較問題（二）

3、角度的加減計算問題

TIMSS 八年級 M022202（如圖五十三）試題主要是角度加計算問題，我國學生應有這種問題的解題經驗，可是為什麼答對率只有 49.3%。這個問題值得研究者持續進行探究。

15

如下圖，∠ POR 的度數是 110°，∠ QOS 的度數是 90°，∠ POS 的度數是 140°。



求 ∠QOR 的度數是多少？

答: _____

M02_15.
考題領域：Mathematics (Geometry)
考題內容：Measure of angle in adjacent angles

M022202

國家 / 選項	台灣 (N=886)	香港 (N=836)	日本 (N=798)	韓國 (N=888)	新加坡 (N=1002)	國際平均
10	49.3%	56.5%	59.8%	63.5%	58.0%	28.1%
70	8.1%	12.2%	13.1%	11.5%	10.1%	8.2%
71	3.1%	2.4%	3.5%	2.7%	0.9%	4.4%
79	36.0%	26.4%	21.2%	21.1%	29.9%	44.3%
99	3.5%	2.5%	2.3%	1.2%	1.2%	15.0%

內容領域	認知領域	相應能力指標	關鍵概念
幾何—直線和角	推理	8-s-01 能認識一些簡單圖形及其常用符號，如點、線、線段、	一、幾何圖形中角度的表示方法。 二、建立角度組合的心像，並減去重複的部分。

射線、角、三角形的符號。	三、對於幾何圖形中，角度彼此間的包含問題，學生平常很少練習。

圖五十三　角度的加法計算問題

陸、討論與啟示

一、討論

(一)、量化分析

從 TIMSS 的量化分析發現，大部份學者利用 TIMSS 的資料進行的研究主要集中在量化的研究上佔 52/64。進行質性分析的佔少數 7/64。學者對 PISA 資料的分析則不多見。

我國歷年來在 TIMSS 和 PISA 的表現都佔世界前茅。八年級學生在 TIMSS1999 是第三名，TIMSS2003 年是第四名，TIMSS2007 是第一名。四年級學生在 TIMSS2003 是第四名，TIMSS2007 是第三名。15 歲學生在 PISA2006 是第一名。顯示我國在這幾年來從八二年版課程、九年一貫課程暫行綱要、九年課程綱要的數學課程變革，對學生的成績的影響有限。

值得注意的是，若將學生的數學分層，我國 TIMSS 四年級學生成績分布不會比世界排名領先的國家分散（如圖二），但是在 TIMSS 八年級的成績則比世界排名領先的國家分散（如圖三），PISA2006 的 15 歲組學生的分層也有比世界各國離散的結果（如圖八）。研究者的實務與研究經驗發現，我國國小教師的教學，在課程改革的過程中，愈來有愈多的教師採用溝通討論的方式進行教學，讓學生有充分的討論與發表機會，而中學教師則因爲教材的難度與抽象化程度加深，因此還是有比較多的教師採用講述教學的方式進行。再者國小的數學課程和日常生活經驗比較相關，而中學的數學就愈抽象化、愈與日常生活無關。因此是數學教材內容或者教師的教學方式，使得我國學童的數學成就因爲愈年長而愈離散的情形，有進一步的研究。

在我國學生對數學學習的正向態度與自信心方面，調查發現無論 TIMSS 四年級、八年級學生的排名都在 36 名之後，遠低於國際平均（PISA2006 並沒有對數學的態度與自信心進行調查）（如圖四、圖五、圖六、圖七）。顯示我國學生的成就表現雖佳，但對數學的態度和自信心則表現負向。研究者與學者的對話發現有些學者認爲亞洲國家的數學教學向來比其他歐美國家難，教師和學生家長對學生的要求較高，時常學生說：「怎麼才考 90 分」，不像歐美國家跟學生說：「不錯，你考 90 分」，因此學生對數學的態度和自信心便會比其他國家偏向負向。至於其確實成因也有待研究。

(二)、質性分析

雖然我國歷年來在 TIMSS 和 PISA 的成就或素養表現都非常優異，但是從 TIMSS 和 PISA 的個別試題表現，仍有許多試題的表現不如理想。因此值得進行質性分析。

在質性分析方面，我們依據 TIMSS 和 PISA 的試題內容，以及學生的答題情形，建議我國課程綱要應強調的指標內容有：應強調生活語意的內容、應強調數學名詞的語意感覺、應強調量感的教學、應強調學生常犯的迷思概念問題、應強調相對數值的問題。

應添加的指標內容有：建議添加成人生活經驗問題、建議添加概念的反例問題、建議添加有規律的解答方法的問題、添加逆向思考和逆運算的問題、添加概念溝通的問題、添加正頁數的前置概念問題、添加比例型的乘法問題、添加時間縮減的百分率問題、添加圖形放大縮小對面積的影響問題、添加獨立事件的機率問題。

應增加的能力指標有：各年級增加怎樣解題的能力指標、四年級增加空間中全等的指標、四、六年級增加生活中計圖表的報讀和解讀的指標、六年級增加機率的能力指指標。

至於有待研究加以了解的問題有：時間的換算問題、畫記的比較問題、角度的加減計算問題。

二、啓示

從 TIMSS 和 PISA 的量化分析發現，我國學生的成就或素養表現都前列世界前茅，但是對數學的態度和自信心則遠低於歐美國家，造成這個結果的成因則有待深入研究。同時影響學生學習的因素太過複雜，例如學生個人的因素、教師的因素、家長的因素、學校的因素、其至國家的經驗因素都會影響學生的學習。至於各種影響因素的影響力有多大，則有待進一步探究。

從 TIMSS 和 PISA 試題的質性分析，讓我們找到一些我國課程綱要能力指標在舖陳和說明時應強調或添加、增加的內容。其中主要的內容是應讓我國教師更了如何進行教學，例如

- 應教導我們的學生用他的語文能力去了解數學名詞和數學的概念，應用對比的語法讓學生了解關鍵詞的差異；
- 應教導概念的正例和反例，使學生的概念能建構得更完整，知道什麼時候可以用，什麼時候不能用；
- 應強調營造數學感的教學，尤其是量感的教學；
- 應重視學生常犯的迷思概念的學習，甚至運用診斷教學策略破除學生的迷思概念；
- 應教導學生有規律的思考問題，強調溝通和解題性知識或推理的問題，讓我們的學

生學得能力而非不能活用的知識。

上述這些內容，在我國近年來的數學教育研究上，已有許多的實證證據。例如營造數學感和診斷教學的理念，林福來(1997)早已提出。強調有規律的思考問題、溝通和解題則是美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, 1989)提出的理念，同時也獲得數學教育界的認同。李源順、林福來、呂玉琴和陳美芳(2008)則在其制定的「小學教師數學教學發展標準」強調關鍵概念和正、反例的教學。因此若我國能力指標在撰寫上能多參考數學教育研究上的證據，教師在教學時能多留意數學教育上的研究資料，我國學生的數學學習可以學得更好。

柒、參考文獻

方敬慈（2008）。*透過教科書分析探討 TIMSS 2003 試測和實測我國國小四年級學生在幾何成就表現*。國立新竹教育大學人資處數學教育碩士班碩士論文，未出版。

比較教育（2000）。TIMSS[第三次國際數學與科學研究]。*比較教育，49*，107-109。

王秀槐（2001）。*從分析 TIMSS 1999 資料出發探討影響我國學生數理學業成就的本土教育觀之研究*。國立臺灣大學師資培育中心。國科會(NSC 90-2511-S-002-023)。

江芳盛（2007）。學生學業成就和國家經濟發展：Heyneman-Loxley 效應的再檢驗。*教育政策論壇，9(3)*，161-176。

余民寧（2005）。*影響科學與數學學習成就因素之國際評比資料分析－總計畫:以 TIMSS 2003、PISA 2003、和 TEPS 跨資料庫比較為例*。國立政治大學教育學系。國科會(NSC 94-2522-S-004-002)。

余民寧（2006）。*他們為什麼不喜歡數學？中學生數學素養之追蹤研究：以 TIMSS 資料分析為例*。國立政治大學教育學系。國科會(NSC 95-2521-S-004-001)。

吳文瑜（2008）。*由 TIMSS 2003 的結果分析四年級學生課堂、課後學習、數學興趣、自信與數學成就之關係：以七國為例*。國立新竹教育大學人資處數學教育碩士班碩士論文，未出版。

吳修廉（2000）。TIMSS 簡介。*測驗統計簡訊，33*，10-22。

吳琪玉（2005）。*探討我國八年級學生在 TIMSS 1999 與 TIMSS 2003 數學與科學之表現*。國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版。

吳慈紋（2008）。*透過教科書分析探討我國小學四年級學生在 TIMSS 2003 試測與實測之測量成就表現*。國立新竹教育大學人資處數學教育碩士班碩士論文，未出版。

呂明欣（2007）。*電腦輔助試題翻譯：以國際數學與科學教育成就趨勢調查為例*。國立政治大學資訊科學學系碩士論文，未出版。

李源順、林福來、呂玉琴和陳美芳(2008)。*小學教師數學教學發展標準之探究：學者的觀點。科學教育學刊，16(6),* 627-650。

李懿芳、江芳盛（2008）。有效的學校領導對數學學習成就之影響：以 TIMSS 2003 台灣調查資料爲例。*教育政策論壇，11(2)*，107-130。

沈青嵩（2006）。*出席 TIMSS Advance (2008)計畫協調會議。*國立臺灣師範大學物理學系(所)。國科會(NSC 95-2517-S-003-010)。

周素芳（2008）。*TIMSS2007 評量架構在台灣國小學童數學成就評量發展模式之應用。*國立臺北教育大學數學教育研究所碩士論文，未出版。

林妙香（2007）。*深度探研 TIMSS 2003 學生數學/科學成就之教育體系背景因素及量化模式。*中央研究院統計科學研究所。國科會。

林志哲（2007a）。期望、價值與數學成就關係之結構方程模式驗證：以 TIMSS 2003 台灣地區資料爲例。*初等教育學刊，27*，71-94。

林志哲（2007b）。以結構方程模式驗證期望、價值與數學成就的關係。國立高學師範大學教育學系，*教育學刊，29*，103-127。

林福來(1997)。*教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法(1/3)。*行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告。

林佩蓉（2008）。*國小四年級新移民學童之家庭背景.數學自信與數學興趣對數學成就的影響-TIMSS 2003 次層次資料分析。*國立臺中教育大學數學教育學系在職進修教學碩士學位班碩士論文，未出版。

林煥祥主編(2008)。*臺灣參加 PISA 2006 成果報告。*行政院國家科學委員會計畫編號：NSC 95-2522-S-026-002。

林碧珍、蔡文煥（2003）。四年級學生在國際教育成就調查試測的數學成就表現。國立新竹師範學院數學教育系。*科學教育月刊，258*，2-20。

林碧珍、蔡文煥（2005a）。TIMSS 2003 國小四年級數學新試題的開發及建構反應試題診斷性編碼系統的製定。*科學教育月刊，280*，51-62。

林碧珍、蔡文煥（2005b）。TIMSS 2003 臺灣國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討。*科學教育月刊，285*，1-38。

林鳳女（2000）。TIMSS。*比較教育，49*，107-109。

邱仕凱（2007）。*北部地區育幼機構八年級學童數學學習成就相關因素之調查研究。*國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版。

邱美秀（2005）。*學生在 TIMSS 不同數學題型上的成就及其與性別、數學學習情意、學習情境的交互作用(1/2)*。國立政治大學教育學系。國科會(NSC 94-2522-S-004-001)。

邱美秀（2006）。*學生在 TIMSS 不同數學題型上的成就及其與性別、數學學習情意、學習情境的交互作用(2/2)*。國立政治大學教育學系。國科會(NSC 95-2522-S-004-001)。

洪川富（2008）。*家庭作業完成時間與頻率對學習成就的影響之研究—TIMSS 2003 台灣數學科資料的階層線性模式*。國立政治大學教育研究所碩士論文，未出版。

洪志明（2001）。我國國二學生課餘學習時間與學習成就之關係，*科學教育月刊，236*，3-13。

洪瑞鎂（2001）。*從「第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查」探究台灣國二學生的數學基本能力*。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文，未出版。

徐美英（2000）。*TIMSS 數學實作評量在台灣之試用探討*。臺中師範學院教育測驗統計研究所碩士論文，未出版。

國立臺灣師範大學科學教育中心（2001）。「第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查」可公布之試題與我國學生的答對率(一)。*科學教育月刊，236*，14-26。

國立臺灣師範大學科學教育中心（2001）。「第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查」可公布之試題與我國學生的答對率(四)。*科學教育月刊，244*，60-67。

國立臺灣師範大學科學教育中心（2005）。TIMSS 2003 國小四年級數學測驗試題。*科學教育月刊，277*，33-45。

國科會（2005）。*近年來我國中、小學生數理科表現升?或降?:國際數學與科學教育成就趨勢調查結果*，276，58-64。

張幼賢 (2006)。*我國參加 TIMSS Advanced 可行性評估*。國立臺灣師範大學數學系(所)。國科會(NSC 95-2517-S-003-003)。

張芳全（2006）。*經濟與教育環境對教育成就影響之探討－以 TIMSS 1995、1999、2003 資料庫跨學科比較為例(I)*。國立臺北教育大學國民教育學系。國科會(NSC 94-2522-S-152-001)。

張芳全（2006a）。*經濟與教育環境對教育成就影響之探討－以 TIMSS 1995、1999、2003 資料庫跨學科比較為例(II)*。國立臺北教育大學國民教育學系。國科會(NSC 95-2522-S-152-002)。

張芳全（2006b）。影響數學成就因素在結構方程式模型檢定：以 2003 年台灣國二生 TIMSS 資料為例。*國立臺北教育大學學報，19(2)*，163-196。

張芳全（2006c）。影響數學成就因素探討－以台灣在 TIMSS 2003 年的樣本為例。*課程與教學季刊，9(3)*，151-179。

張芳全（2007a）。台灣、美國與日本之國二學生家庭作業與數學成就關係比較。*教育資料集刊，34*，285-316。

張芳全（2007b）。臺灣學生的校外活動與數學成就之關係：以 TIMSS 2003 資料爲例。*臺灣教育，647*，31-43。

張芳全（2007c）。*學生數學信念與數學成就關係分析：以 TIMSS 2003 的小四及國二生資料爲例*。國立臺北教育大學教育經營與管理學系(所)。國科會。

張建妤（2006）。*國小四年級學童在 TIMSS 2003 和 PIRLS 2006 的數學和閱讀成就表現*。國科會 (NSC 95-2522-S-008-002)。

張秋男(主編)（2005）。*國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003*。國立台灣師範大學科技教育中心。

張秋男、邱美虹、方泰山、李田英、洪志明、洪有情、楊文金、林陳涌、譚克平、張永達、曹博盛和林碧珍（2003）。*國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003 期中報告（第三年）*。國科會 NSC 92-2511-S-003-016。

張殷榮（2002）。*我國國中學生在 TIMSS-R 中數學學習成就研究(1/2)*。國立臺灣師範大學科學教育中心。國科會(NSC 92-2521-S-003-001)。

張殷榮（2003）。*我國國中學生在 TIMSS-R 中數學學習成就研究(2/2)*。國立臺灣師範大學科學教育中心。國科會(NSC 92-2521-S-003-001)。

張殷榮、羅珮華（1999）。我國參加「第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查」研究工作報導。*科學教育月刊，224*，64-70。

教育部（2008）。*「中小學課程發展之相關基礎性研究」計畫書*。970501 教育部核定版。

教育部（2008）。*國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域*。http://www.edu.tw/eje/content.aspx?site_content_sn=15326。

曹博盛（2005）。TIMSS 2003 臺灣國中二年級學生的數學成就及其相關因素之探討。*科學教育，283*，2-34。

許惠卿（2007）。*影響數學成就因素在結構方程式模型之檢定：以台灣與美國八年級學生 TIMSS 2003 資料爲例*。國立臺北教育大學國民教育學系碩士班碩士論文，未出版。

陳竹村（2003）。TIMSS 1999 台灣名列前茅及可能因素探討。*教育研究月刊，108*，133-146。

陳昭地、張殷榮、洪志明、林陳涌、沈青嵩、傅學海、洪有情（2000）。*第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查。國立臺灣師範大學科學教育中心*。國科會(NSC 87-2511-S-003-058 & 89-2511-S-003-007)。

陳嘉成（2005）。*影響數學學習成就因素之國際比較研究－以 TIMSS 1995、1999、2003 資料庫縱貫面比較爲例*。國立臺灣藝術大學師資培育中心。國科會(NSC 94-2522-S-144-001)。

陳嘉成（2007）。區別高低分群學生數學成就因素的國際比較－以台灣 、南韓 、澳洲與賽普勒斯的 TIMSS 2003 學生背景變項爲例。*測驗學刊，54 (2)*，377-401。

陳穎希 (2008)。從 TIMSS-R 來談數學新、舊教材之分析研究。*政大附中學報，1*，163-174。

陳穎希（2001）。*國中數學新舊教材之比較研究-從第三次國際數學與科學教育成就研究的後續調查來探究*。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。3845

單維彰（2006a）。數．生活與學習--TIMSS 的啓示。*科學月刊，37(4)*，312。

單維彰（2006b）。能力分班與社會關懷。*科學月刊，37(7)*，552。

喬麗文（2007）。*課後學習對國中生數學成就的影響—九國/地區之比較*。暨南國際大學比較教育學系碩士論文，未出版。

楊伯軒（2008）。*探討影響國二學生數學學習成就的因素-以 TIMSS 2003 爲例*。國立臺灣師範大學數學系碩士論文，未出版。

楊志堅（2000）。*由 TIMSS 的學習成就評量與其在台灣的試測結果分析實作評量在評鑑多元智能的功能*。國立臺中教育大學數學教育學系含碩士班。國科會(NSC 89-2511-S-142-005)。

楊蓓芬（2008）。*台灣與歐洲地區小四學生之數學學習成就之國際比較分析：以 TIMSS 2003 爲例*。國立臺北教育大學教育行政碩士在職進修專班碩士論文，未出版。

劉春初（2004）。TIMSS-R 架構與 DEA 分析法的運用－以台灣地區國民中學學校經營效率南北地區比較爲例。*臺東大學教育學報，15(1)*，167-184。

蔡志隆（2008）。*TIMSS 2007 評量架構應用在金門縣國小學童數學成就之調查研究*。國立臺北教育大學教育行政碩士在職進修專班碩士論文，未出版。

蔡佳燕（2007）。*校園安全觀感對學生學習成就之影響：以 TIMSS 2003 資料庫爲例*。暨南國際大學比較教育學系碩士論文，未出版。

蔡嘉宮（2006）。*TIMSS 數學實作評量試題在台灣試行施測結果之分析比較*。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文，未出版。

鄭心怡（2004）。*教育指標與經濟指標對學業成就影響之國際比較：以 TIMSS 爲例*。國立台北師範學院教育政策與管理研究所碩士論文，未出版。

簡晉龍、任宗浩、張淑婷（2008）。跨學科間自我概念與學業成就路徑模式之檢驗一整合模式在數學和科學領域的適用性。*國立台灣師範大學教育心理與輔導學系，教育心理學報，40(1)*，107-126。

羅珮華（2000）。「第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查」之抽樣設計。*科學教育月刊，235*，14-20。

羅珮華（2000）。*「第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查」介紹*。

羅珮華（2003）。從 TIMSS 1999 探討國二學生的學習成就與學習時間及國家經濟能力之關係。*科學教育月刊，256*，3-11。

譚克平（1999）。*東亞地區 TIMSS 資料分析國際研習會*。國立臺灣師範大學科學教育研究所。國科會。

譚克平（2001）。*TIMSS-R 資料分析工作坊*。國立臺灣師範大學科學教育研究所。國科會(NSC 90-2517-S003-003)。

譚克平（2005a）。*TIMSS 2003 調查研究的資料分析(1/2)*。國立臺灣師範大學科學教育研究所。國科會(NSC 94-2522-S-003-004)。

譚克平（2005b）。TIMSS 2003 學校問卷調查的分析。載於張秋男(主編)，*國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003*(165-191 頁)。國科會(NSC 93-2511-S-003-001）。

譚克平（2006a）。*TIMSS 2003 調查研究的資料分析(2/2)*。國立臺灣師範大學科學教育研究所。國科會(NSC 95-2522-S-003-004)。

譚克平（2006b）。TIMSS 2003 學校問卷調查的分析。*科學教育，286*，2-23。【轉載自張秋男主編：國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003 (pp.165-191)】

蘇一如（2007）。*影響國際數學成就因素之比較—以 TIMSS 2003 台灣與美國爲例*。國立台北教育大學教育政策與管理研究所碩士論文，未出版。

Beaton, A. E., Martin, M. Q., Mullis, I. V. S., Gonzalez, E. J., Smith, T. A.,.and Kelly, D. L. (1996) ***Science Achievement in the Middle School Years: IEA' s TIMSS***. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Garden, R. A. and Smith, T. A. (2000) TIMSS Test Development. In Martin et al. (ed.) ***TIMSS1999 International Technical Report***. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Martin, M.O., Gregory, K.D. & Stemler S.E.(ed.) (2000). ***TIMSS1999 International Technical Report.*** Chestnut Hill, MA: Boston College.

Martin, M.O.; Gregory, K.D.; Stemler, S.E.(2000). ***TIMSS 1999 Technical Report.*** International Study Center Lynch School of Education Boston College.

Mullis, I. S, Martin, M.O., Smith, T.A, Garden, R.A, Gregory, K.D, Gonzalez, E.J, Chrostowski, S.J & O'conner, K.M. (2001). ***TIMSS Assessment Framework and specification 2003,*** 2 ed. International Study Center. Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I., Martin, M. O., Gonzalez, E.J., Gregory, K. D., Garden, R. A., O'Connor, K. M., Chrostowski, S.J., and Smith, T. (2000) ***TIMSS 1999 International Mathematics***

Report. : Findings from IEA' s Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Foy, P.; Olson, J.F.; Preuschoff, C.; Erberber, E.; Arora, A.; Galia , J.(2008). ***TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA' s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades.*** TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Ruddock, G.J.; O' Sullivan, C.Y.; Arora, A.; Erberber, E.(2005). ***TIMSS 2007 Mathematics Famework.*** TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Smith, T.A.; Garden, R.A.; Gregory, K.D.; Gonzalez, E.J.; Chrostowski, S.J.; O'Connor, K.M. (2001). ***TIMSS Assessment Frameworks and Specifications 2003.*** International Study Center, Lynch School of Education, Boston College。

NCTM.(1989). ***Curriculum and evaluation standards for school mathematics.*** National Council of Teachers of Mathematics，Reston，VA：Author.

Robitaille, D. F. (1992) ***Third International Mathematics and Science Study: Issues and Ways Overview.***

Robitaille, D.F.(1993) ***Curriculum Frameworks for Mathematics and Science.*** TIMSS Monograph .No.1. Pacific . Educational press, Vancouver, Canada.