教育部審定

國·民·中·學

數 學

第5冊

國家教育研究院
教育部國審字第0978號

目 錄 contents

第 1 章

相似三角形

1-1 縮放

「痛！……」

剛在尼羅河水中浸過水的泰利斯，正躺在河岸上享受美麗的陽光。只是冷冽的河水刺激他的右膝，錐心的痛一陣一陣，這是在老家米利都專心仰望夜空群星時，不小心掉到井裡造成的舊傷。

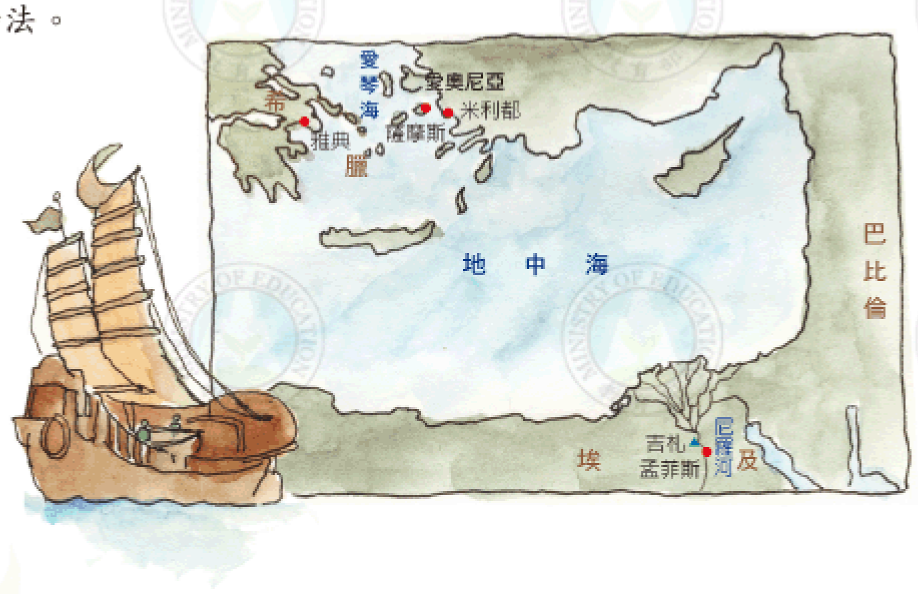
他將兩腳相疊，減輕疼痛後，腦中開始思考著那個薩摩斯商人的挑戰。

愛遊歷的泰利斯在東行旅途上，恰巧遇到巴比倫人的內亂，就隨緣轉道來到他曾經駐足的埃及。這許多年來，由於外敵亞述人的衰亡，現在埃及頗有中興氣象，到孟菲斯的這一路上一片欣欣向榮，也因此才結識這位交遊廣闊的薩摩斯商人。由於這位富商久仰泰利斯曾預言日食的名聲，便熱情邀泰利斯參加宅中的晚宴。

誰知昨晚，就在滿廳賓客的面前，他突然問了泰利斯一個問題：

「我們要怎麼知道吉札的金字塔有多高？」

這位朋友問得唐突，但泰利斯並不以為忤，畢竟他正是以好問、善思考而知名的。只是這問題他一時無法回答，亂想了一夜，卻仍沒想出具體可行的辦法。



腦袋沒有靈感，泰利斯搖晃著慢慢乾了的雙腳，好玩的用腳比著遠方那座讓他煩惱的金字塔，好像要踩扁它似的。他瞇著左眼，努力讓拇趾尖和金字塔尖重疊。比著比著，他突然靈光閃現，有了一個隱隱約約的想法。就這樣，整個下午泰利斯在河畔皺著眉，沈思著如何給出一個讓大家驚豔的說法。

這一天晚上，泰利斯回到似乎沒有中止過的盛宴，發表他的解答：

「當我的影子和身高同長時，金字塔的影長就是金字塔的塔高。」

簡潔而直觀的回答，一下擊中在座許多名士的心坎。在眾人歡呼的吆喝聲中。薩摩斯商人走向前，誠摯的挽著他的手，高聲當眾說：

「各位，來自米利都的泰利斯，他無愧我希臘賢人的美名。」

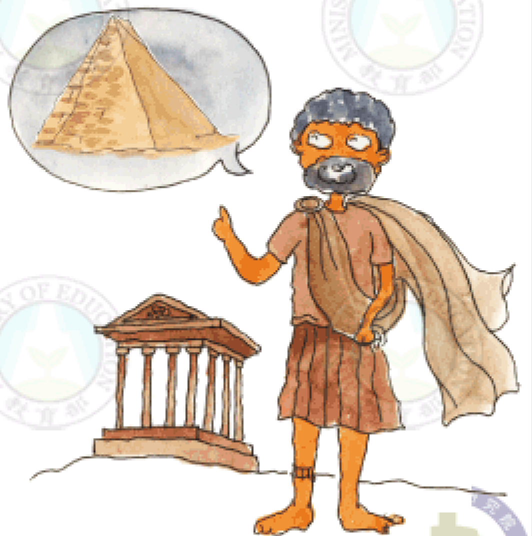
夜半時分，這位聰明的薩摩斯人引導泰利斯瀏覽宅中的庭院，談著薩摩斯島年輕英才畢達哥拉斯的故事、聊著愛琴海岸繁榮的愛奧尼亞，也質問實際丈量金字塔影子的疑難。泰利斯毫不藏私的告訴這位益友，自己藉由觀察腳尖和塔尖重疊所得出的隱約想法。

兩人互道晚安後，泰利斯仰天深深吸了一口氣。在這個知識迸發交擊的夜晚，星空中的銀河顯得格外明亮，而芳鄰的友情、美味的葡萄酒更是令人陶陶然。

「嘿！小心！水溝啊！」……

*　　*　　*

米利都的泰利斯（Thales of Miletus，西元前625～547年，約當春秋中期）號稱是有文字記載以來的第一位科學家與哲學家，也是有賢人之名的實踐家。強調以這個世界的知識來理解我們存身的宇宙，而不依靠神祇或超自然的力量。例如他認為「水是萬物的本原」，並以此解釋整個世界的結構與運行。

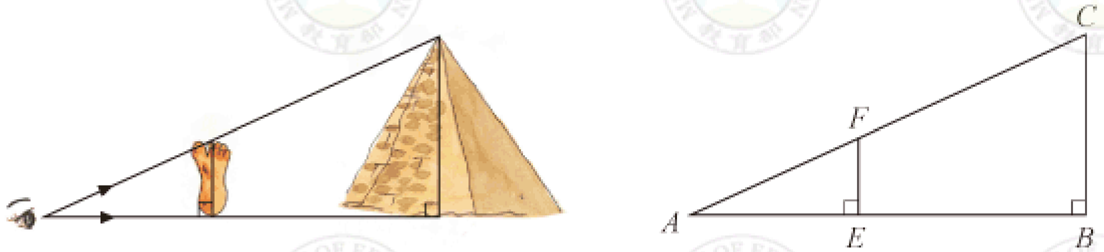


泰利斯的想法

如果用一棵樹代替金字塔，泰利斯對商人的說法，可以用圖1-1來表示。他想像太陽的光是平行射入，因此與地面形成的夾角相同，當身高與影長相同時，∠1正好是45°，因此∠2也是45°。由於這兩個三角形都是等腰直角三角形，所以樹高正好等於樹影長。

圖 1-1

圖1-2(a)是泰利斯從腳趾所觀察到的靈感示意圖，可以重新畫成圖1-2(b)：



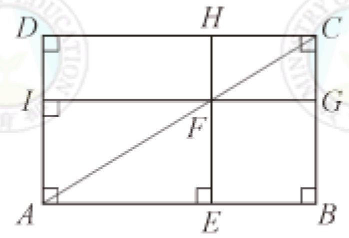
(a) (b)

圖 1-2

泰利斯隱約的想法大概可以描述如下：從$\overline{AE}$、$\overline{EF}$再加上什麼樣的資訊，就足以判斷$\overline{BC}$的長度呢？為了解決這個問題，讓我們先做底下的「動動腦」。

動・動・腦

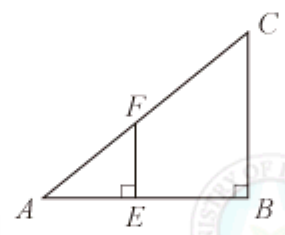
如右圖，$ABCD$為一矩形，若在對角線$\overline{AC}$上任取一點F，說明四邊形$ABGI$和四邊形$AEHD$的面積相等。



例 1 Example

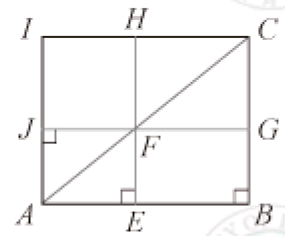
如右圖，有兩個直角三角形△AEF和△ABC，試說明這兩三角形的三邊成比例，即

$\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AF}$



解題說明

將△ABC複製一份，如右圖拼成一個矩形$ABCI$。



由「動動腦」知道

矩形$AEHI$的面積＝矩形$ABGJ$的面積

由於 矩形$AEHI$面積$=\overline{AE}\cdot\overline{AI}=\overline{AE}\cdot\overline{BC}$

矩形$ABGJ$面積$=\overline{AB}\cdot\overline{BG}=\overline{AB}\cdot\overline{EF}$

因此$\overline{AE}\cdot\overline{BC}=\overline{AB}\cdot\overline{EF}$，即$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{EF}$。

至於要說明斜邊的比，就要應用畢氏定理。設上面比例的比值為r，

即 $\overline{AB}=r\overline{AE}$，$\overline{BC}=r\overline{EF}$

由畢氏定理得

$$\overline{AC}=\sqrt{(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2}=\sqrt{(r\overline{AE})^2+(r\overline{EF})^2}$$

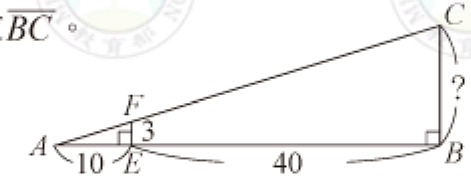
$$=\sqrt{r^2(\overline{AE}^2+\overline{EF}^2)}=r\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EF}^2}=r\overline{AF}，$$

由上述可知$\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AF}$。

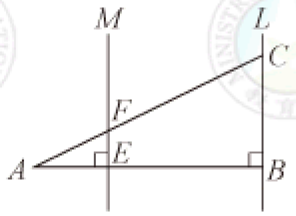
這個比例關係，可以幫泰利斯解決他的問題。

隨．堂．練．習

1. 如右圖，$\overline{AE}=10$，$\overline{EB}=40$，$\overline{EF}=3$，求$\overline{BC}$。



2. 如右圖，已知$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=3$，且直線$L$和$M$都垂直於$\overline{AB}$。在$M$上任找一點$F$，作$\overleftrightarrow{AF}$交$L$於$C$，則$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$是不是一定也是3？



縮放的意義與性質

圖1-2讓我們聯想到電影院放映影片時，放映機將影像從小小的底片放映到大銀幕的情形。也很像下圖中我們常玩的手影遊戲。

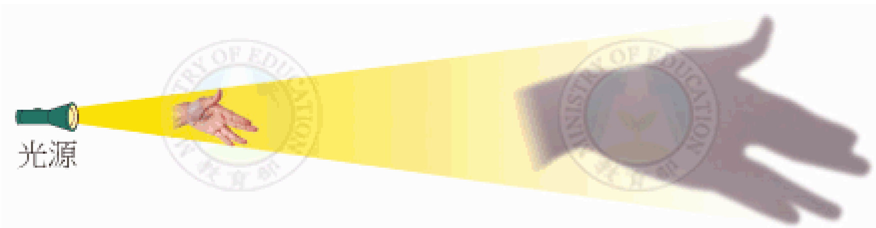


圖 1-3

在手影遊戲中，我們注意到手靠近光源會讓影像變大（圖1-3），手離開光源，則會讓影像變小（圖1-4）。

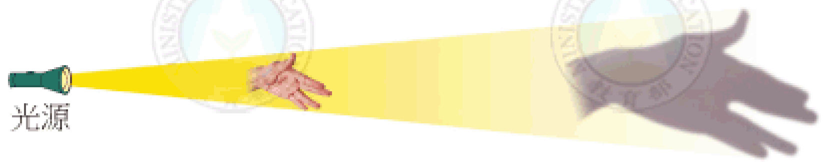


圖 1-4

由這樣的類比，再加上前面的「動動腦」，提供我們一種靈感，來定義一種稱為縮放的操作，我們希望藉由這個操作，能夠說明平常大家熟悉的平面圖形縮小和放大的原理。

在平面上找一點O，扮演光源的角色，任意取一點A，如圖1-5，取$\overrightarrow{OA}$上的一點A'，使得

$$\overline{OA'}:\overline{OA}=3:1\text{（也就是}\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=3\text{或}\overline{OA'}\text{是}\overline{OA}\text{的3倍）}$$

這時我們說A'是以O為中心將A縮放3倍的結果，或者說，A'是**由O將A縮放3倍**的點。在縮放時，中心點O固定不動。

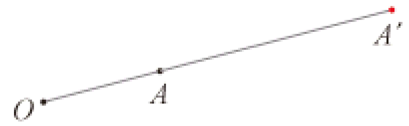


圖 1-5

有了縮放的想法，就可以討論由O將平面圖形縮放的問題，底下先討論線段的情形。

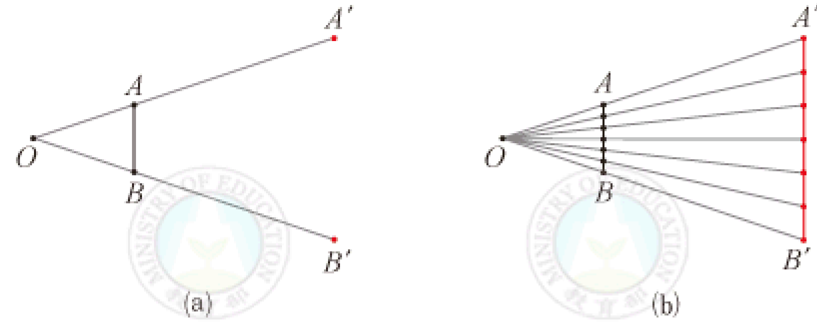
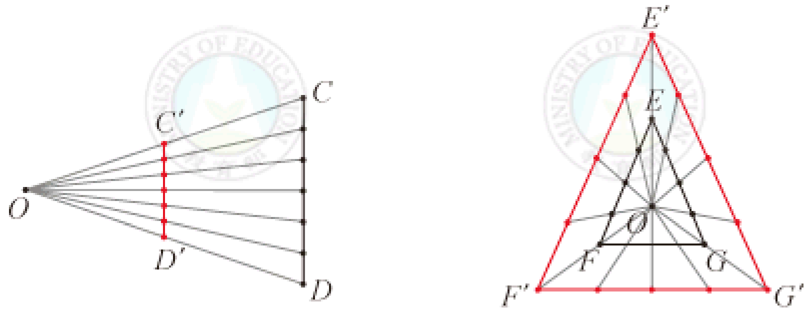


圖 1-6

如圖1-6(a)，$\overline{AB}$為一線段，A'、B'是由O將A、B分別縮放3倍所得到的點。如果在$\overline{AB}$上多取一些點（如圖1-6(b)中$\overline{AB}$上的黑點），並取由O將這些點縮放3倍後的對應點（如圖1-6(b)中的紅點），會發現這些對應點好像都在$\overline{A'B'}$上。也就是說，$\overline{A'B'}$似乎就是由O將$\overline{AB}$縮放3倍的結果。

在圖1-7中，還可以看到其他類似的結果：



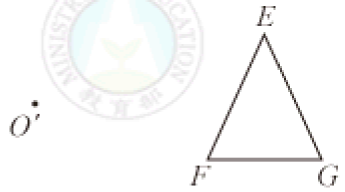
$\overline{C'D'}$似乎是由O將$\overline{CD}$縮放$\frac{1}{2}$倍的結果。

$\triangle E'F'G'$似乎是由O將$\triangle EFG$縮放2倍的結果。

圖 1-7

隨・堂・練・習

如下圖，如果在$\triangle EFG$外部取O'點，請同學模仿上述過程，畫出由O'將$\triangle EFG$縮放2倍後的大致圖形。



由前面的例子與練習可以感覺到，無論將線段縮放3倍或$\frac{1}{2}$倍，結果看起來依然是一條線段。另外圖1-7中的$\angle E$、$\angle F$、$\angle G$看起來也分別和$\angle E'$、$\angle F'$、$\angle G'$相等。簡言之，任取一個正數k，將圖形由O縮放k倍應該有下列性質：

(1) 直線變成直線。若縮放前後的直線是相異兩直線，則此兩直線平行。

(2) 線段變成線段，且縮放後的線段長為原線段長的k倍。

(3) 角度保持不變。

我們先說明(1)和(2)。任意取一條直線L，假設O不在L上，取P為O在L上的垂足，如圖1-8。

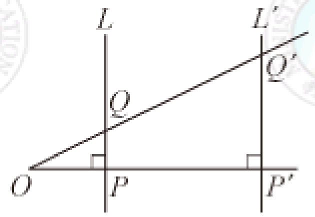


圖 1-8

以縮放3倍為例，我們在$\overrightarrow{OP}$上取一點P'，使得

$$\overline{OP'}：\overline{OP}=3：1$$

過P'作直線L'與$\overleftrightarrow{OP}$垂直（即$L'/\!/L$），我們希望說明L'就是L經由O縮放3倍後的圖形，也就是說，L上任一點由O縮放3倍後的對應點都會落在L'上。

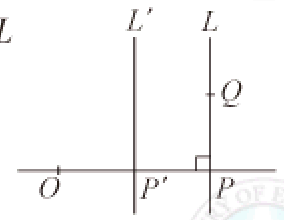
在L上任取一點Q，作$\overrightarrow{OQ}$交L'於Q'，由例1中泰利斯的想法，知道

$$\overline{P'Q'}：\overline{PQ}=\overline{OQ'}：\overline{OQ}=\overline{OP'}：\overline{OP}=3：1$$

換句話說，Q由O縮放3倍的點就是Q'。這表示L上任取一點，再由O縮放3倍後的點都正好落在L'上。同樣的道理，L'上任取一點都是L上某一點由O縮放3倍的結果。這樣我們就說明了，由O將L縮放3倍的圖形就是L'，而且$L'/\!/L$。這說明了上述的性質(1)。

隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{OP}\perp L$，$\overline{OP'}：\overline{OP}=\frac{1}{2}：1$。$L'$是過$P'$平行於$L$的直線。模仿上面的過程，說明由$O$將$L$縮放$\frac{1}{2}$倍時，會將$Q$點送到$L'$上的一點$Q'$，且$\overline{P'Q'}：\overline{PQ}=\frac{1}{2}：1$。



由上面的說明，可以發現由O將直線縮放k倍後的結果仍然是直線，並且平行於原來的直線，這就解釋了性質(1)。

同學們是否注意到，第11頁的討論也同時說明$\overline{P'Q'}$：$\overline{PQ}=3$：1，也就是說$\overline{P'Q'}$是$\overline{PQ}$的3倍長，這是性質(2)的特例。性質(2)的一般情形，都可以利用這一點來說明，如圖1-9，$\overline{Q'R'}$都是由O將$\overline{QR}$縮放3倍的結果，由圖1-9可知$\overline{Q'R'}$：$\overline{QR}=3$：1。

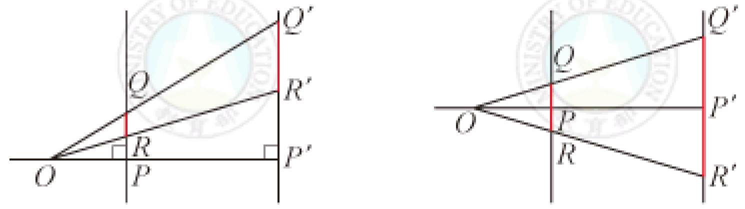
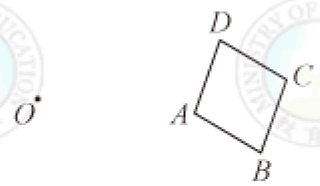


圖 1-9

例2 Example

如右圖，有一邊長為1的菱形$ABCD$，試以O點為中心，畫出$ABCD$縮放2倍的圖形，並討論該圖形是否為菱形？



解題說明

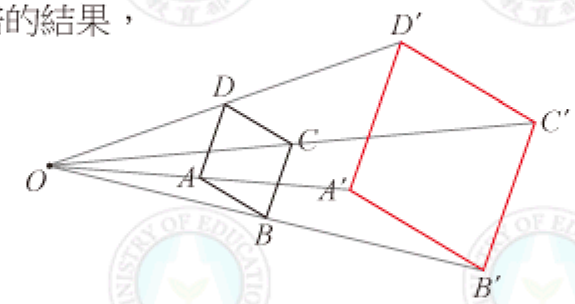
由上面的說明知道，任一線段縮放後仍然是線段。因此，若要畫出四邊形$ABCD$縮放2倍的圖形，只要先畫出四個頂點縮放後的點，再用線段連接，就是四邊形$ABCD$縮放後的圖形。底下的四邊形$A'B'C'D'$即為所求。

由於$A'B'C'D'$是由O將$ABCD$縮放2倍的結果，

所以 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\times2=1\times2=2$

同理 $\overline{B'C'}=\overline{C'D'}=\overline{D'A'}=2$

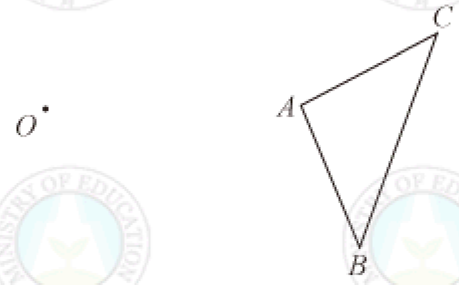
因此新的四邊形$A'B'C'D'$是一菱形。



另一個方法是先畫出D'點，然後作過D'和$\overline{AD}$平行的線，此線和$\overrightarrow{OA}$會交於點A'。依照同樣的步驟，可以依序畫出另兩個頂點B'和C'。

隨・堂・練・習

如下圖，有一$\triangle ABC$，且$\overline{AB}=\overline{AC}=2$，以$O$為中心畫出$\triangle ABC$縮放$\frac{1}{2}$倍的圖形，並討論該圖是否為等腰三角形？

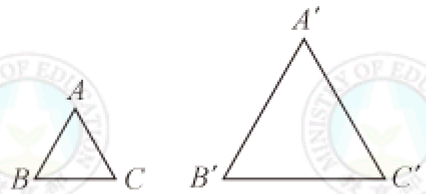


各位可能已經發現縮放前後，直線會變成直線的性質，以及線段長度縮放固定倍率的性質，都和中心點的位置無關。

例3 Example

說明正三角形縮放2倍的圖形仍然是正三角形。

解題說明



如右圖，若$\triangle ABC$為一正三角形，而$\triangle A'B'C'$是它縮放2倍的圖形。

由前述性質(2)知，無論中心點O在哪裡，都有

$\overline{A'B'}=2\overline{AB}$，$\overline{B'C'}=2\overline{BC}$，$\overline{C'A'}=2\overline{CA}$

因為$\triangle ABC$是正三角形，

因此 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

所以 $\overline{A'B'}=\overline{B'C'}=\overline{C'A'}$

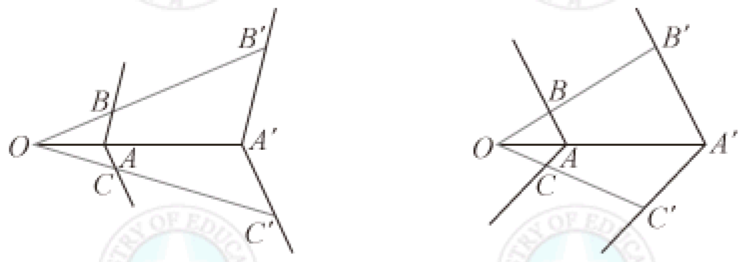
即$\triangle A'B'C'$是正三角形。

隨．堂．練．習

有一直角三角形△ABC，∠B為直角，三邊長是3、4、5。將△ABC縮放3倍後得到對應的△$A'B'C'$，求此三角形的三邊長。此新三角形是否為直角三角形？

在上一個隨堂練習中，我們得用直角三角形的特殊性質才能說明∠B縮放後的∠B'也是直角。這是因為我們還沒說明性質(3)，也就是縮放前後的對應角保持不變。

給定平面上一點O，任取一個角∠BAC，且A點不是O點，由O將∠BAC的圖形縮放3倍的情況如圖1-10(a)、(b)。



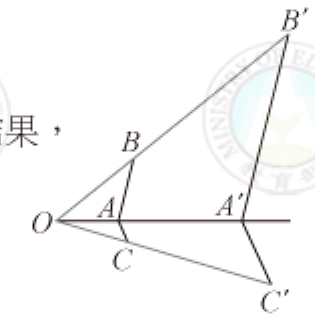
(a)　(b)

圖 1-10

我們用例4說明圖1-10(a)的情形，圖1-10(b)情況類似，留給同學作隨堂練習。

例 4 Example

如右圖，∠$B'A'C'$是由O將∠BAC的圖形縮放3倍的結果，試說明∠BAC=∠$B'A'C'$。



解題說明

標示∠1、∠2、∠3、∠4如右圖。

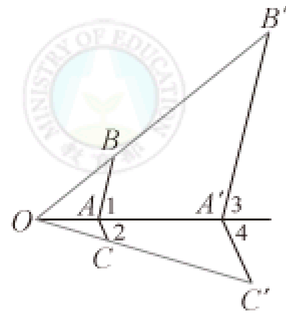
由於$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{A'B'}$，$\overleftrightarrow{AC}//\overleftrightarrow{A'C'}$，

所以　∠1=∠3　同位角相等

　　　∠2=∠4　同位角相等

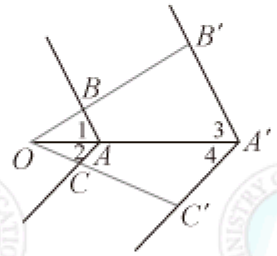
因此　∠1+∠2=∠3+∠4

即　　∠BAC=∠$B'A'C'$



隨．堂．練．習

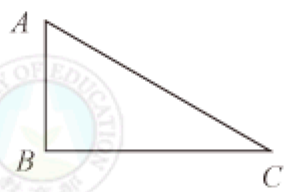
如右圖，∠$B'A'C'$是由O將∠BAC的圖形縮放3倍的結果，說明∠BAC=∠$B'A'C'$。



以上的說明對任意縮放倍率k都是正確的（其中$k>0$），因此就說明了性質(3)，也就是說，縮放前後的角度保持不變。注意到這個縮放時角度不變的性質，也和中心點O的位置沒有關係。由於中心點的位置不會影響直線，線段以及角的縮放性質，因此以後談圖形的縮放時，通常會把中心點略而不提。

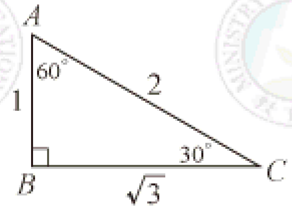
隨．堂．練．習

如右圖，畫出將△ABC縮放2倍後的圖形。



動．動．腦

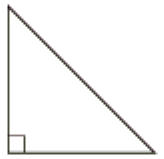
以不同的兩個中心點將右圖的△ABC縮放2倍後，得到的兩個三角形會全等嗎？



例 5 Example

有一△ABC的三內角分別為50°、60°、70°。

問右邊的三角形可不可能是△ABC經過縮放後的圖形？



解題說明

因為△ABC經過縮放後的圖形，仍然是一個三內角為50°、60°、70°的三角形。而右邊的三角形是一個直角三角形，有一個內角是90°。所以此三角形不可能是△ABC縮放後的圖形。

隨．堂．練．習

說明任一矩形經過縮放後，仍然是矩形。

由上述可以注意到，縮放k倍後的圖形，和我們在日常生活中所談的圖形放大或縮小是一樣的。當$k>1$時，縮放k倍後的圖形就是將原圖形放大為k倍的圖形；而在$0<k<1$時，縮放k倍後的圖形就是原圖形縮小為k倍的圖形；至於$k=1$時，圖形則完全沒有變動。

在日常生活或科學上，我們經常用到放大或縮小的概念，例如我們常將喜愛的照片放大；影印機可以將文件放大或縮小；上課時可以利用投影機將圖片放大以方便講解；透過顯微鏡可以放大微小的生物以利觀察等等（圖1-11）。

圖 1-11

相片中或顯微鏡下的影像都是原物的縮小或放大，雖然大小和實物不同，但由於形狀相同，並不妨礙我們對這些景象或物體的理解，反而有助於觀察。如果我們還能知道放大或縮小的倍率，更能協助做實際的應用，例如泰利斯測量金字塔高度就是一種應用（也可參考48頁例11）。

另外一種典型的應用是地圖，我們可以利用地圖來估計兩地的距離。例如，圖1-12是一張比例尺為「1：5000000」的臺灣地圖，表示此圖是將實際地理位置依此比例縮小而成，亦即地圖上任兩地的距離與兩地實際距離的比為1：5000000。換句話說，地圖上1公分的距離相當於實際距離50公里。例如以直尺在地圖量得臺北市到高雄市的距離約為6公分，則兩地距離約為6×50公里，即300公里。

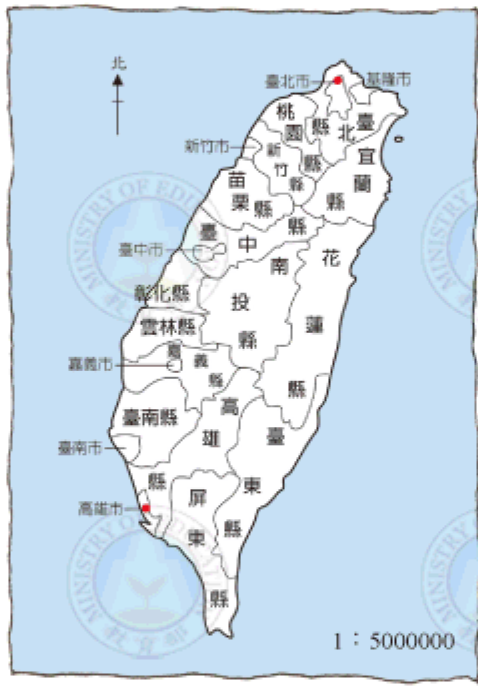


圖 1-12

相似形

由於圖形縮放時，角度保持不變，長度則依等比例放大或縮小某個倍數。因此，在放大或縮小後，圖形的形狀會保持一樣，只是大小不同而已。在數學上，若一個圖形經過縮放後，和另外一個圖形全等，則稱這兩個圖形**相似**。如圖1-13的兩個四邊形就是相似圖形，請見底下的說明。

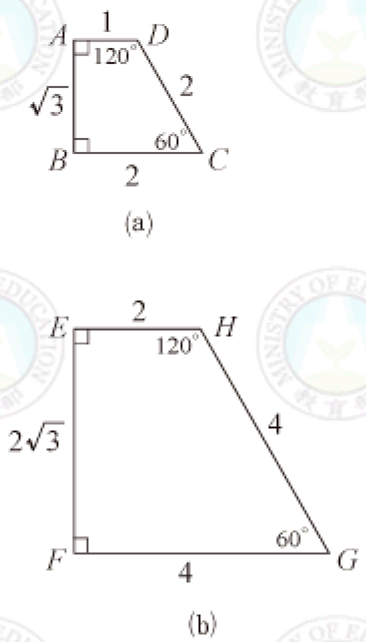


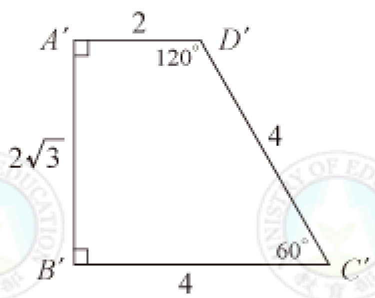
圖 1-13

例6 Example

試判斷圖1-13的四邊形$ABCD$和$EFGH$是否相似？

解題說明

右圖是將四邊形$ABCD$縮放2倍後的四邊形$A'B'C'D'$。其內角與原來四邊形$ABCD$的內角相同，而對應邊長則是原圖形邊長的2倍。比較$A'B'C'D'$和$EFGH$，可知兩圖形的邊角對應相等。所以四邊形$A'B'C'D' \cong$四邊形$EFGH$，因此$ABCD$和$EFGH$相似。



四邊形$ABCD$相似於$EFGH$，通常記成

$$\text{四邊形}ABCD \sim \text{四邊形}EFGH$$

其中符號「～」讀作「相似於」。

例6的相似關係中，A、B、C、D的對應點分別是E、F、G、H，因此

$$\angle A=\angle E，\angle B=\angle F，\angle C=\angle G，\angle D=\angle H$$

稱為**對應角相等**。

同樣的，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$的對應邊分別是$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HE}$。由於$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HE}$分別是$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$的2倍，所以

$$\overline{EF}:\overline{AB}=\overline{FG}:\overline{BC}=\overline{GH}:\overline{CD}=\overline{HE}:\overline{DA}$$

這個關係式稱為**對應邊成比例**。利用連比，也可以將上式寫成

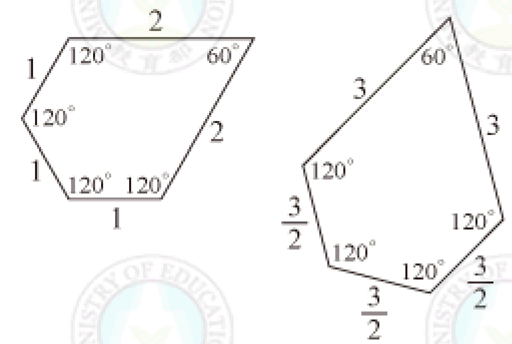
$$\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}:\overline{HE}=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DA}$$

因此，由圖形縮放的性質，我們知道**若兩個四邊形相似，則它們的對應角相等，而且對應邊成比例。**

而由例6的說明知道，上面的性質反過來也會成立，也就是說，**若兩個四邊形的對應角相等，而且對應邊成比例，則這兩個四邊形相似**。對於其他多邊形，上面的相似形性質也都成立。

隨．堂．練．習

如右圖，判斷此兩五邊形是否相似？

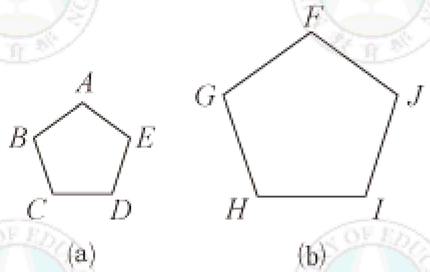


例7 Example

說明任意兩個正五邊形相似。

解題說明

如右圖，任取兩個正五邊形。



由於正五邊形的內角都是 $(\frac{180\times3}{5})^\circ=108^\circ$，

因此這兩個正五邊形的對應角相等。

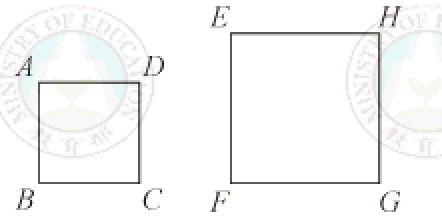
又因為每個正五邊形的五邊均等長，所以

$$\overline{FG}:\overline{AB}=\overline{GH}:\overline{BC}=\overline{HI}:\overline{CD}=\overline{IJ}:\overline{DE}=\overline{JF}:\overline{EA}$$

亦即對應邊成比例，因此這兩個正五邊形相似。

隨．堂．練．習

說明任意兩個正方形相似。

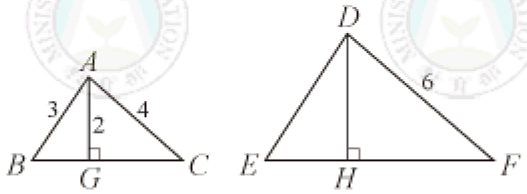


由上面的討論知道：

任意兩個正 n 邊形皆相似。

例8 Example

如右圖，$\triangle ABC\sim\triangle DEF$，其中 A、B、C 的對應點分別為 D、E、F。已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{AG}=2$，$\overline{DF}=6$，求 $\overline{DE}$ 和 $\overline{DH}$。



解題說明

因為 $\triangle ABC\sim\triangle DEF$，所以 $\triangle DEF$ 全等於 $\triangle ABC$ 的縮放圖形，

其縮放的倍數等於

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

因此 $\overline{DE}$ 是 $\overline{AB}$ 的 $\frac{3}{2}$ 倍，亦即

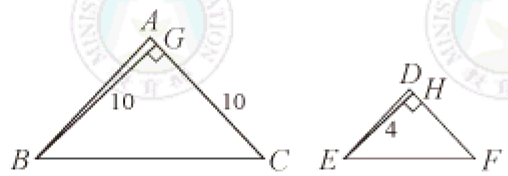
$$\overline{DE}=\overline{AB}\times\frac{3}{2}=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

由於 $\overline{AG}\perp\overline{BC}$，所以經過縮放後，其對應邊也會互相垂直，所以 $\overline{DH}$ 就是 $\overline{AG}$ 的對應邊，因此

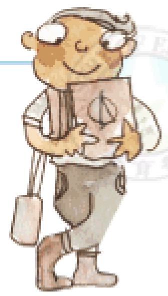
$$\overline{DH}=\overline{AG}\times\frac{3}{2}=\overset{1}{\cancel{2}}\times\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}}=3$$

隨．堂．練．習

如右圖，$\triangle ABC\sim\triangle DEF$，其中 A、B、C 的對應點分別為 D、E、F。已知 $\overline{BG}=10$，$\overline{CG}=10$，$\overline{AG}=1$，$\overline{EH}=4$，求 $\overline{DH}$ 和 $\overline{HF}$。



摘要



1. 任何直線經縮放後，仍為一直線。
2. 任一條直線經縮放後，若不是同一直線，則兩線互相平行。
3. 一線段經縮放r倍後，其長度為原線段的r倍。
4. 一角經縮放後，角的度數保持不變。
5. 若一圖形經縮放後，會和另一圖形全等，則稱這兩個圖形相似。
6. 兩多邊形相似，則其對應角相等、對應邊成比例。反之，若兩多邊形的對應角相等、對應邊成比例，則此兩多邊形相似。

1-1 自我評量

1. 下面的敘述對的打「○」，錯誤的打「×」。

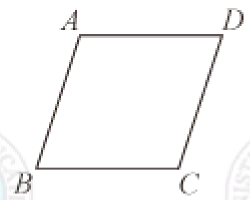
( ) (1) 將直線L縮放3倍後的圖形，會因為中心點O的位置不同，而不能判別出它是不是一直線。

( ) (2) 將一線段縮放2倍後的線段，其長度不會隨中心點O的位置改變而不同。

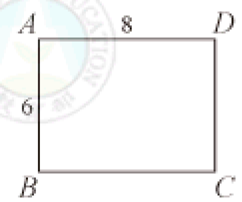
( ) (3) 可找到某中心點O，將一非正方形的矩形縮放成正方形。

( ) (4) 非正方形的菱形不可能縮放成正方形。

2. 如右圖，有一平行四邊形$ABCD$，將$ABCD$縮放$\dfrac{3}{2}$倍後得一四邊形$A'B'C'D'$。說明$A'B'C'D'$也是平行四邊形。



3. 如右圖，有一矩形$ABCD$。若將此矩形縮放成矩形$A'B'C'D'$，且對角線$\overline{B'D'}$長為25，求
(1) $A'B'C'D'$的周長 (2) $A'B'C'D'$的面積。



1-2 相似三角形

由1-1節我們知道，如果要判別兩個三角形是否相似，就要檢驗三對應角是否相等，以及三對應邊是否成比例。但在本書第四冊討論全等三角形時提到，如果要判別兩三角形是否全等，並不需要檢驗所有的邊角對應條件。同樣的，要判別相似三角形時，其實也只需要部分的邊角關係即可。這是本節要討論的主題之一。

三角形相似性質

首先，我們利用ASA全等性質來說明如何判斷兩個三角形相似。

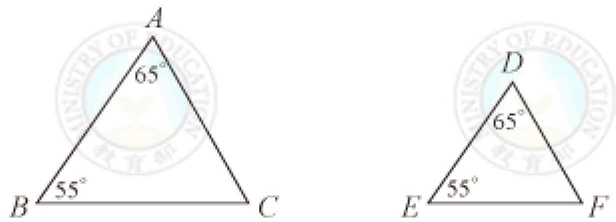


圖 1-14

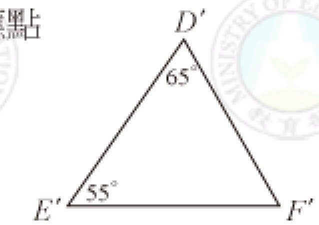
例1 Example

如圖1-14，有兩個三角形，其中$\angle A=\angle D=65^\circ$，$\angle B=\angle E=55^\circ$，說明$\triangle ABC\sim\triangle DEF$。

解題說明

既然要說明兩三角形相似，因此可以想想要將$\triangle DEF$縮放幾倍，才會和$\triangle ABC$全等。

從圖1-14來看，由於對應角要相等，因此D、E的對應點必須是A、B，換句話說，$\overline{AB}$應該就是$\overline{DE}$的對應邊，因此$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$就是縮放的倍數，我們用$r$表示$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$。現將$\triangle DEF$縮放$r$倍，得$\triangle D'E'F'$如右圖。



因為　$\overline{D'E'}=r\overline{DE}=\overline{AB}$。

且　　$\angle D'=\angle D=\angle A=65^\circ$

　　　$\angle E'=\angle E=\angle B=55^\circ$

所以　$\triangle D'E'F'\cong\triangle ABC$　　ASA全等性質

這表示$\triangle DEF$縮放r倍後和$\triangle ABC$全等，

因此$\triangle ABC\sim\triangle DEF$。

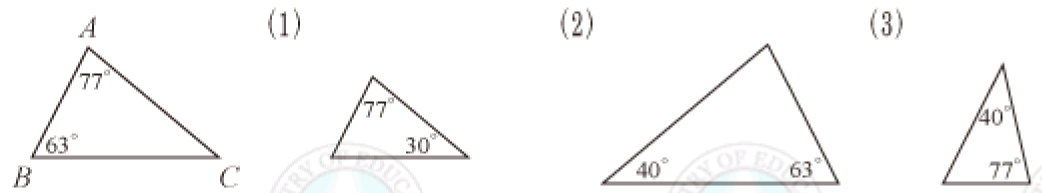
由例1可知

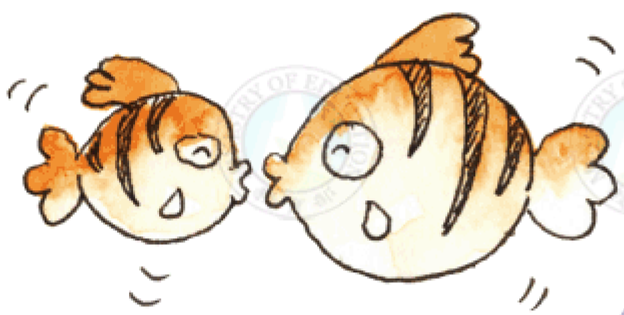
若兩三角形中兩組對應角相等，則此兩三角形相似。

這個性質稱為**AA相似性質**。由於三角形三內角和為180°，因此若兩個三角形中有二組角對應相等，則最後一組角也會自動相等。

隨・堂・練・習

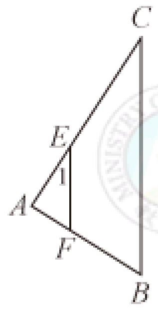
下圖中哪些三角形與$\triangle ABC$相似？





例2 Example

如右圖，已知$\angle 1=\angle C$，$\overline{BC}=20$，$\overline{AB}=10$，$\overline{AF}=3$，$\overline{AE}=5$，求$\overline{EF}$和$\overline{AC}$。



解題說明

因為　$\angle 1=\angle C$

　　　$\angle A=\angle A$

所以　$\triangle AEF\sim\triangle ACB$　AA相似性質

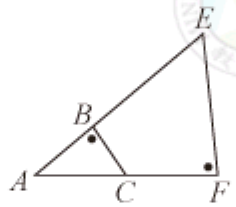
因此　$\overline{EF}:\overline{CB}=\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{AF}:\overline{AB}=3:10$　對應邊成比例

即　　$\overline{EF}=\dfrac{3}{10}\overline{CB}=\dfrac{3}{10}\times 20=6$

　　　$\overline{AC}=\dfrac{10}{3}\overline{AE}=\dfrac{10}{3}\times 5=\dfrac{50}{3}$

隨・堂・練・習

如右圖，$\triangle AEF$中$\angle ABC=\angle AFE$，且C為$\overline{AF}$的中點。若$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=12$，求$\overline{AE}$。



接著，我們要利用SAS全等性質，討論另外一個相似性質。

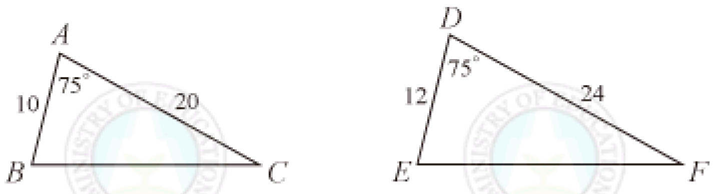


圖 1-15

例3 Example

如圖1-15，有兩個三角形，$\angle A=\angle D=75^\circ$，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=20$，$\overline{DE}=12$，$\overline{DF}=24$，說明$\triangle ABC\sim\triangle DEF$。

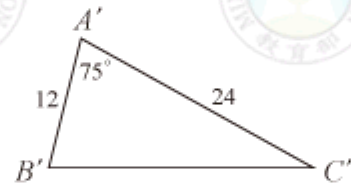
解題說明

依照圖1-15所給的條件，我們觀察到$\angle A$和$\angle D$的兩邊長成比例：

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{DF}=5:6$

也就是說，$\angle D$兩邊長是$\angle A$兩對應邊長的$\dfrac{6}{5}$倍。

現將$\triangle ABC$縮放$\dfrac{6}{5}$倍後得$\triangle A'B'C'$，如右圖。



因為　$\overline{A'B'}=\dfrac{6}{5}\overline{AB}=\overline{DE}$

　　　$\overline{A'C'}=\dfrac{6}{5}\overline{AC}=\overline{DF}$

　　　$\angle A'=\angle A=\angle D$

所以　$\triangle A'B'C'\cong\triangle DEF$　SAS全等性質

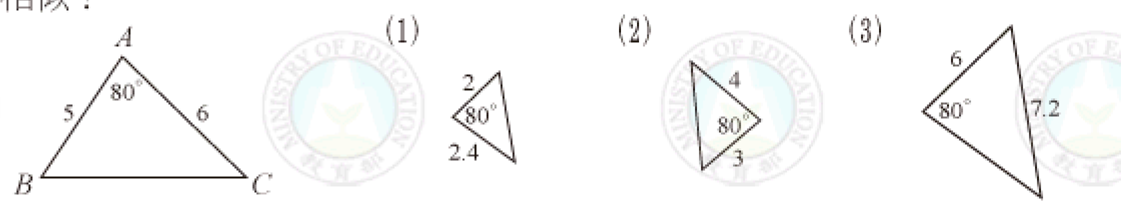
因此　$\triangle ABC\sim\triangle DEF$

由例3可知下述性質成立，此性質稱為**SAS相似性質**。

> **兩三角形若有一組角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則此兩三角形相似。**

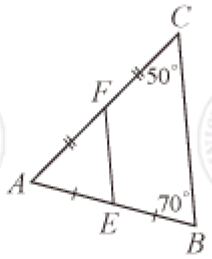
隨・堂・練・習

若只用SAS相似性質，試判斷(1)、(2)、(3)三個三角形中，哪一個和$\triangle ABC$相似？



例 4 Example

如右圖△ABC中，E、F分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點。已知∠B＝70°，∠C＝50°，求∠AEF和∠AFE。



解題說明

由於E、F為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點，所以

$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{AF}:\overline{AC}=1:2$

又　∠A＝∠A

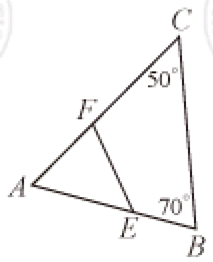
所以　△AEF～△ABC　SAS相似性質

因此　∠AEF＝∠B＝70°　對應角相等

∠AFE＝∠C＝50°　對應角相等

隨．堂．練．習

如右圖，△ABC中$\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的一半長，求∠AEF和∠AFE。



最後，要討論由SSS全等性質所得到的相似性質。

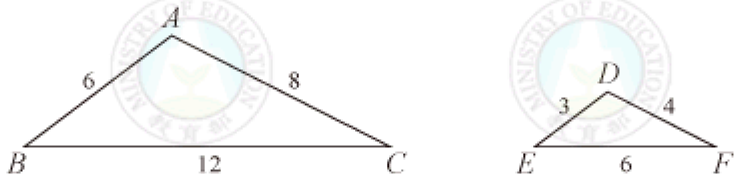


圖 1-16

例 5 Example

如圖1-16，有兩三角形，依照圖中邊長的條件，說明△ABC～△DEF。

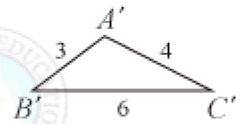
解題說明

依照圖1-16所給的條件，我們觀察到這兩個三角形的三組對應邊成比例：

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AC}:\overline{DF}=2:1$

將△ABC縮放$\frac{1}{2}$倍後得△$A'B'C'$，如右圖。則

$\overline{A'B'}=\overline{DE}$，$\overline{B'C'}=\overline{EF}$，$\overline{A'C'}=\overline{DF}$，



得　△$A'B'C'$≅△DEF　SSS全等性質

因此　△ABC～△DEF

由例5可知底下性質成立，此性質稱為**SSS相似性質**。

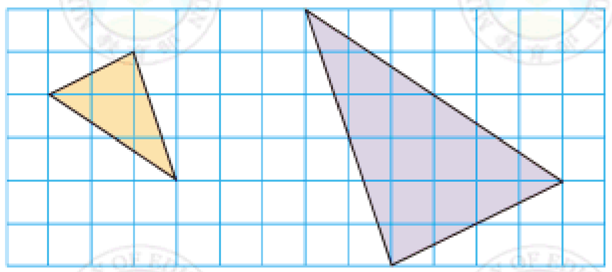
若兩三角形中三組對應邊成比例，則此兩三角形相似。

SSS相似性質中三對應邊成比例的條件，也可寫成連比的形式：

$$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{DE}:\overline{EF}:\overline{DF}$$

隨．堂．練．習

下圖中的兩個三角形是否相似？



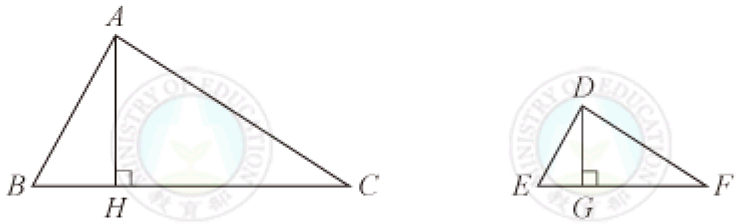


圖 1-17

底下討論相似三角形的面積關係。如圖1-17，假設△ABC相似於△DEF，也就是說，△ABC縮放r倍的圖形全等於△DEF，其中$\overline{BC}:\overline{EF}=1:r$，亦即$\overline{EF}=r\overline{BC}$。由於$\overline{BC}$的對應邊是$\overline{EF}$，因此就如同20頁例8的說明，$\overline{BC}$上的高$\overline{AH}$的對應邊就是$\overline{EF}$上的高$\overline{DG}$，所以$\overline{DG}=r\overline{AH}$。計算兩三角形面積比如下：

$$\triangle ABC\text{面積}:\triangle DEF\text{面積}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AH}}{2}:\frac{\overline{EF}\times\overline{DG}}{2}$$

$$=\frac{\overline{BC}\times\overline{AH}}{2}:\frac{(r\times\overline{BC})(r\times\overline{AH})}{2}=1:r^2$$

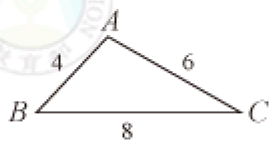
$$=\overline{BC}^2:\overline{EF}^2$$

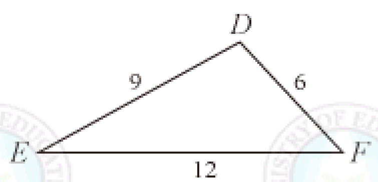
由此可得

兩相似三角形面積的比為對應邊平方的比。

例 6 Example

如右圖，有兩三角形△ABC和△DEF，求△ABC面積：△DEF面積。





解題說明

觀察兩三角形的邊長，得

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\overline{DF}:\overline{FE}:\overline{ED}=2:4:3$

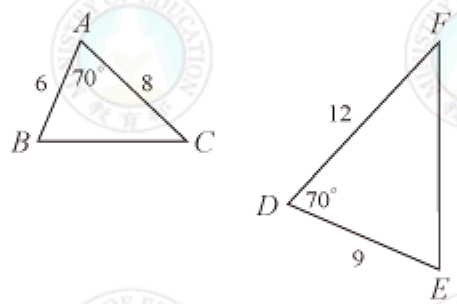
所以　△ABC～△DFE　SSS相似性質

因此　△ABC面積：△DEF面積

$=\overline{AB}^2:\overline{DF}^2=4^2:6^2=16:36=4:9$

隨・堂・練・習

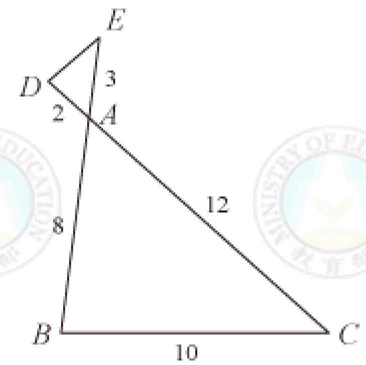
如右圖，有兩三角形△ABC與△DEF，求△ABC面積：△DEF面積。



接下來要舉幾個例子，說明如何應用上面所討論的各種相似性質。

例 7 Example

如右圖，$\overline{BE}$和$\overline{CD}$交於A，$\overline{AD}=2$，$\overline{AE}=3$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=10$，求$\overline{DE}$。



解題說明

因為　$\overline{AD}:\overline{AB}=1:4=\overline{AE}:\overline{AC}$，

且　$\angle DAE=\angle BAC$　對頂角相等

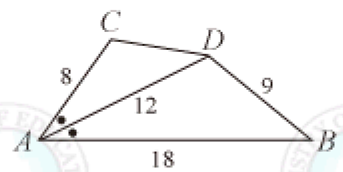
所以　△ADE～△ABC　SAS相似性質

因此　$\overline{DE}:\overline{BC}=1:4$　對應邊成比例

將$\overline{BC}=10$代入，得$\overline{DE}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$。

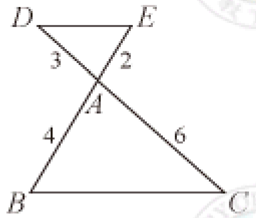
隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{AD}$是$\angle CAB$的角平分線，$\overline{AB}=18$，$\overline{BD}=9$，$\overline{AD}=12$，$\overline{AC}=8$，求$\overline{CD}$。



當我們利用SAS相似性質或SSS相似性質，來判別兩個三角形相似後，要記得所有的對應角都相等。下面例8說明它的應用。

例8 Example



如右圖，$\overline{BE}$和$\overline{CD}$交於A點，$\overline{AD}=3$，$\overline{AE}=2$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$，說明$\overline{DE}/\!/\overline{BC}$。

解題說明

因為 $\overline{AD}:\overline{AC}=1:2=\overline{AE}:\overline{AB}$

且 $\angle DAE=\angle CAB$ 　對頂角相等

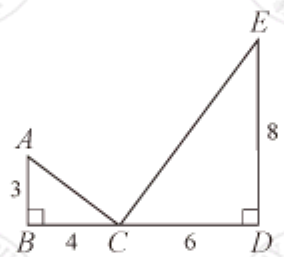
所以 $\triangle DAE\sim\triangle CAB$ 　SAS相似性質

因此 $\angle DEA=\angle CBA$ 　對應角相等

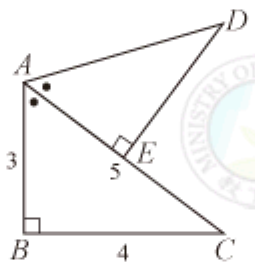
所以 $\overline{DE}/\!/\overline{BC}$ 　內錯角相等

隨・堂・練・習

如右圖，B、C、D在同一直線上，求$\angle ACE$。



例9 Example



如右圖，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=5$，E為$\overline{AC}$的中點，$\angle BAC=\angle EAD$，求$\overline{DE}$。

解題說明

因為 $\angle B=\angle AED=90^\circ$，$\angle BAC=\angle EAD$

故 $\triangle ABC\sim\triangle AED$ 　AA相似性質

又因為 $\overline{AE}=\dfrac{5}{2}$ 　E為$\overline{AC}$中點

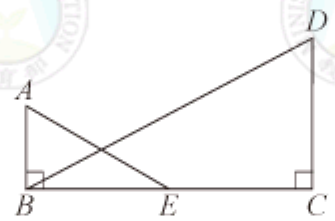
所以 $\overline{ED}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{AB}=\dfrac{5}{2}:3$ 　對應邊成比例

因此 $3\overline{ED}=\dfrac{5}{2}\overline{BC}$

得 $\overline{ED}=\overline{BC}\times\dfrac{5}{6}=4\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{10}{3}$

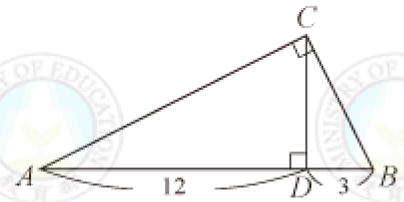
隨・堂・練・習

如右圖，有兩個直角三角形$\triangle ABE$與$\triangle BCD$，其中$\angle A=\angle D$，E是$\overline{BC}$的中點，求$\overline{BD}:\overline{AE}$。



直角三角形中有一個常用的相似性質，如例10所示。

例10 Example



如右圖，直角三角形ABC中，$\angle ACB=90^\circ$，$\overline{CD}$是斜邊上的高，已知$\overline{AD}=12$，$\overline{BD}=3$。

(1) 以AA相似性質說明 $\triangle ACD\sim\triangle CBD$。

(2) 求$\overline{CD}$。

解題說明

(1) 因為 $\angle ACD+\angle A=90^\circ$ 　$\angle D$是直角

且 $\angle B+\angle A=90^\circ$ 　$\angle ACB$是直角

所以 $\angle ACD=\angle B$

又知 $\angle ADC=\angle CDB=90^\circ$

因此 $\triangle ACD\sim\triangle CBD$ 　AA相似性質

(2) 在(1)的相似關係中，$\triangle ACD$中的A、C、D分別對應於$\triangle CBD$中的C、B、D。

所以 $\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{BD}$ 對應邊成比例

即 $12:\overline{CD}=\overline{CD}:3$

得$\overline{CD}^2=36$，因此$\overline{CD}=6$。

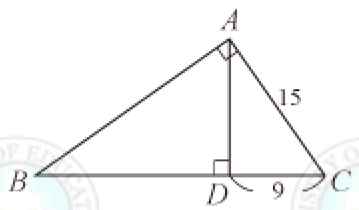
動・動・腦

例10中，$\triangle ABC$會和$\triangle ACD$、$\triangle CBD$相似嗎？

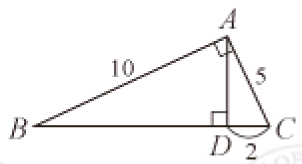
由上可知，直角三角形斜邊上的高會將此直角三角形分割成兩個直角三角形，這兩個直角三角形和原直角三角形都相似。

隨・堂・練・習

1. 如右圖，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AD}$為$\overline{BC}$上的高，$\overline{AC}=15$，$\overline{DC}=9$，求$\overline{BC}$。

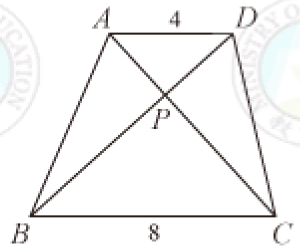


2. 如右圖，可不可能有一個$\triangle ABC$，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AD}$為$\overline{BC}$上的高，且$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=5$，$\overline{DC}=2$？



例11 Example

如右圖，有一梯形$ABCD$，其中$\overline{AD}//\overline{BC}$。求$\triangle APD$面積：$\triangle BPC$面積。



解題說明

由於 $\angle APD=\angle CPB$ 對頂角相等

$\angle ADP=\angle CBP$ 內錯角相等

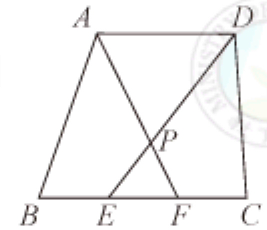
所以 $\triangle APD\sim\triangle CPB$ AA相似性質

因為 $\overline{AD}:\overline{BC}=4:8=1:2$

所以 $\triangle APD$面積：$\triangle CPB$面積$=1^2:2^2=1:4$

隨・堂・練・習

如右圖，四邊形$ABCD$為一梯形，其中$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AD}=10$，$\overline{BC}=15$，若已知$E$、$F$三等分$\overline{BC}$，求(1) $\overline{DP}:\overline{PE}$。(2) $\triangle APD$面積：$\triangle EFP$面積。



摘要

1. 三角形相似性質有AA相似性質、SAS相似性質、SSS相似性質。
2. 兩相似三角形面積的比為對應邊平方的比。

1-2 自我評量

1. 在△ABC與△DEF中，下列哪個條件，可確定△ABC與△DEF相似。（可確定的打「○」，不能確定的打「×」。）

（　　）(1) $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$。

（　　）(2) $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle F$。

（　　）(3) $\angle A=\angle D$，$\angle C=\angle E$。

（　　）(4) $\angle A=\angle D$，$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}$。

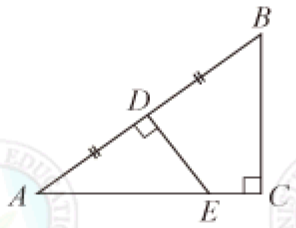
（　　）(5) $\angle A=\angle D$，$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{DF}$。

（　　）(6) $\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AC}:\overline{DF}=\overline{DE}:\overline{AB}$。

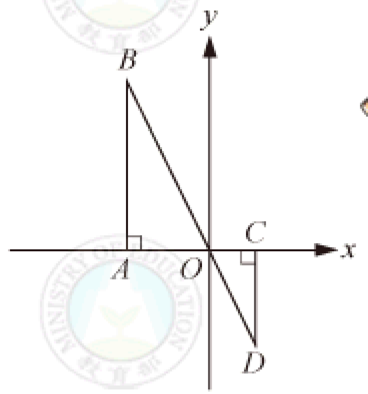
2. 如右圖，$\angle C=90^\circ$，$\overline{DE}$是$\overline{AB}$的中垂線。

(1) △ADE是否與△ACB相似？

(2) 若$\overline{AB}=40$，$\overline{AC}=32$，求$\overline{DE}$。



3. 如右圖，B、O、D三點在同一直線上，B點坐標為$(-5, 12)$，$\overline{CD}=6$，試求D點坐標。



1-3 相似形的應用

無論在數學上或生活上，相似三角形都有許多的應用，前述泰利斯測量金字塔的方法就是一個例子。能夠活用相似三角形的性質，是學習幾何的重要項目之一。首先，我們先討論相似三角形在數學上的應用。

平行與比例的關係

圖1-18中，$\overline{DE}//\overline{BC}$，$\overline{DE}$把$\overline{AB}$截成$\overline{AD}$與$\overline{DB}$兩線段，也把$\overline{AC}$截成$\overline{AE}$與$\overline{EC}$兩線段，底下要討論$\overline{AD}:\overline{DB}$與$\overline{AE}:\overline{EC}$的關係。

因為在△ADE、△ABC中，有

$\angle 1=\angle B$　　同位角相等

$\angle A=\angle A$　　共同角

所以由AA相似性質可知，△$ADE\sim$△ABC。

於是由對應邊成比例，得到

$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{DE}:\overline{BC}$

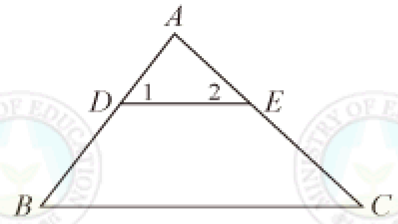
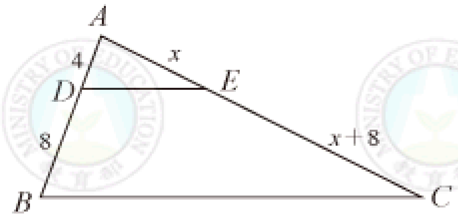


圖1-18

例1 Example

如右圖，△ABC中，D、E在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$邊上，且$\overline{DE}//\overline{BC}$，已知$\overline{AD}=4$，$\overline{BD}=8$，$\overline{AE}=x$，$\overline{CE}=x+8$，求$x$。



解題說明

由圖知$\overline{AB}=4+8=12$，$\overline{AC}=x+x+8=2x+8$。

因為$\overline{DE}//\overline{BC}$，所以由上述性質得

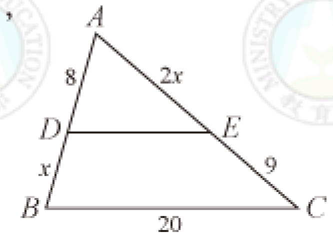
$4:12=x:(2x+8)$

即　$12x=4(2x+8)$

解得　$x=8$

隨．堂．練．習

如右圖，$\triangle ABC$中，$\overline{DE}//\overline{BC}$，已知$\overline{AD}=8$，$\overline{DB}=x$，$\overline{AE}=2x$，$\overline{EC}=9$，$\overline{BC}=20$，求$\overline{AC}$和$\overline{DE}$。



第二冊時，我們學過若$a:b=c:d$，且$a\neq b$，$c\neq d$時，則

$$a:(b-a)=c:(d-c)$$

利用這個性質，整理例1前的比例式$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$，可以得到

$$\overline{AD}:(\overline{AB}-\overline{AD})=\overline{AE}:(\overline{AC}-\overline{AE})$$

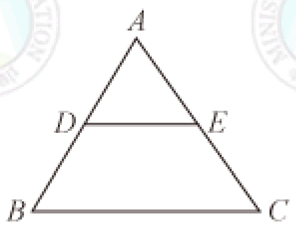
即 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$。

上面的比例式稱為$\overline{AD}$、$\overline{DB}$與$\overline{AE}$、$\overline{EC}$成比例線段。由上面討論可知

平行於三角形一邊的直線截另兩邊成比例線段。

例2 Example

如右圖，D為$\overline{AB}$的中點，過D作$\overline{BC}$的平行線，並交$\overline{AC}$於E，說明E是$\overline{AC}$的中點。



解題說明

因為D是$\overline{AB}$的中點，所以$\overline{AD}=\overline{DB}$，

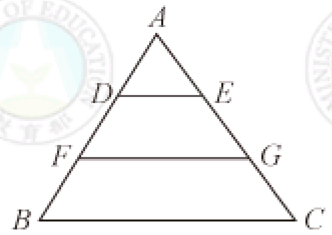
但因為$\overline{DE}//\overline{BC}$，因此

$\overline{AE}:\overline{EC}=\overline{AD}:\overline{DB}=1:1$ 三角形平行線截比例線段

所以$\overline{AE}=\overline{EC}$，即$E$是$\overline{AC}$的中點。

隨．堂．練．習

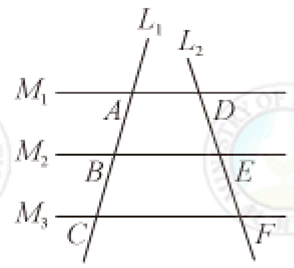
如右圖，$\triangle ABC$中D、F兩點三等分$\overline{AB}$，過D、F作平行於$\overline{BC}$的平行線，分別交$\overline{AC}$於E、G。說明E、G兩點三等分$\overline{AC}$。



動．動．腦

如右圖，有一組互相平行的直線M_1、M_2、M_3，分別交直線L_1於A、B、C，交直線L_2於D、E、F，說明$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$。

（這個性質稱為**平行線截比例線段**）



反過來如圖1-19，如果$\overline{DE}$將$\triangle ABC$的兩邊$\overline{AB}$、$\overline{AC}$截比例線段，即$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$，那麼$\overline{DE}$會平行於$\overline{BC}$嗎？

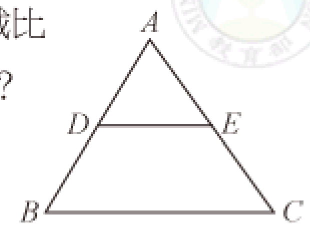


圖1-19

我們在第二冊學過若$a:b=c:d$，則

$$a:(a+b)=c:(c+d)$$

利用這個性質，由比例式$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$，得到

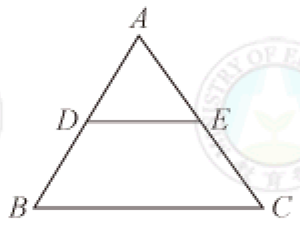
$$\overline{AD}:(\overline{AD}+\overline{DB})=\overline{AE}:(\overline{AE}+\overline{EC})$$

即 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$

例3將利用這個比例式來說明$\overline{DE}$一定會平行於$\overline{BC}$。

例3 Example

如右圖，已知$\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝$\overline{AE}$：$\overline{EC}$，試說明$\overline{DE}$//$\overline{BC}$。



解題說明

由前面說明知道$\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝$\overline{AE}$：$\overline{AC}$。

在△ADE與△ABC中，

由於　$\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝$\overline{AE}$：$\overline{AC}$

以及　∠A＝∠A　**共同角**

所以　△ADE～△ABC　**SAS相似性質**

因此　∠ADE＝∠B

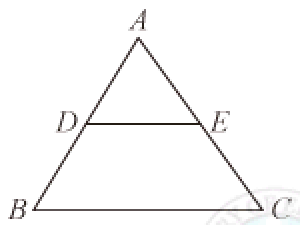
所以　$\overline{DE}$//$\overline{BC}$　**同位角相等**

由上面的說明，可以知道**若一直線將一三角形的兩邊截比例線段，則此直線平行於第三邊**。

例4 Example

如右圖，D、E分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點，

說明⑴$\overline{DE}$//$\overline{BC}$；⑵$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。



解題說明

⑴ 由題意知$\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝1：1＝$\overline{AE}$：$\overline{EC}$，

由例3知$\overline{DE}$//$\overline{BC}$。

⑵ 由例3的解題說明知道

△ADE～△ABC

因此　$\overline{DE}$：$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝1：2　**對應邊成比例**

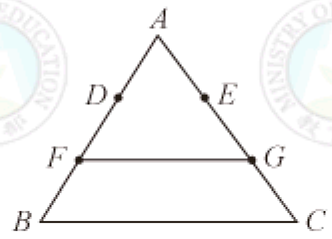
即　$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

例4說明了三角形兩邊中點的連線會平行於第三邊，且其長度為第三邊的一半，這個性質稱為**三角形中點連線性質**。

隨・堂・練・習

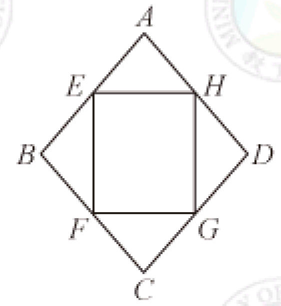
如右圖，D、F三等分$\overline{AB}$，E、G三等分$\overline{AC}$。

說明⑴$\overline{FG}$//$\overline{BC}$，⑵$\overline{FG}=\frac{2}{3}\overline{BC}$。



例5 Example

如右圖，四邊形$ABCD$為一菱形，E、F、G、H為各邊的中點。說明四邊形$EFGH$為一矩形。



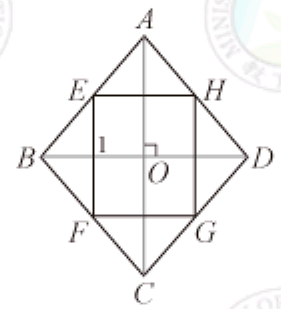
解題說明

如右圖，連接對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$。

得　$\overline{BD}\perp\overline{AC}$　**菱形對角線互相垂直平分**

由題意知　$\overline{EH}$//$\overline{BD}$　**三角形中點連線性質**

同理　$\overline{EF}$//$\overline{AC}$



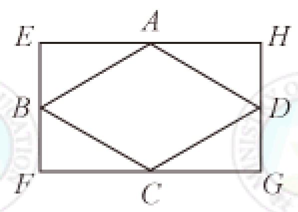
利用兩次平行線同側內角互補的性質，可以知道

∠HEF＝∠1＝∠AOB＝90°

由於四邊形$EFGH$為平行四邊形，因此另外三個內角均為90°，所以$EFGH$為一矩形。

隨・堂・練・習

如右圖，四邊形$EFGH$為矩形，A、B、C、D為其四邊的中點。說明四邊形$ABCD$為菱形。

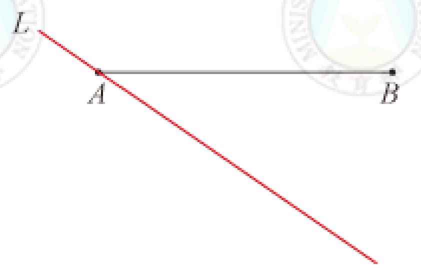
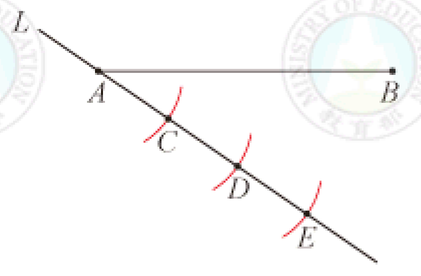
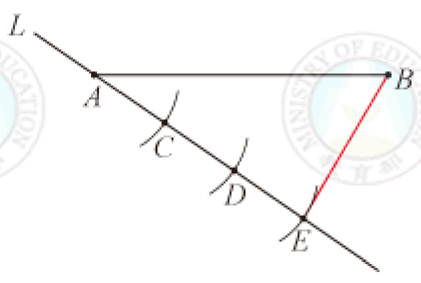
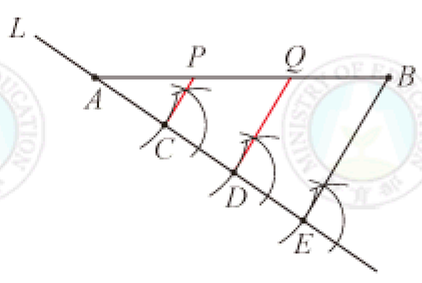


上面的平行線截比例線段性質，可以用來作線段等分的尺規作圖，底下是三等分的例子。

例 6 Example

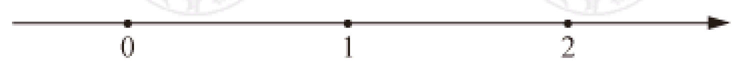
利用尺規作圖，將右圖的$\overline{AB}$三等分。

解題說明

作　　法	作　　圖	說　　明
⑴ 過A作直線L。		L和$\overline{AB}$不重疊。
⑵ 在L上依序取點C、D、E，使$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。		
⑶ 連接$\overline{BE}$。		
⑷ 過點C、D分別作$\overline{BE}$的平行線，交$\overline{AB}$於P、Q，則P、Q即為所求。		由平行線截比例線段性質，知$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}$。

隨・堂・練・習

利用尺規作圖，在下面的數線上標示坐標是$\frac{1}{3}$以及$1\frac{2}{3}$的點。



例6及隨堂練習提供一個方法，可以用尺規作圖將坐標為分數的點標示在數線上。雖然$\frac{1}{3}$不是小數，但仍然可以用幾何的方法，很精準的標出坐標是$\frac{1}{3}$的點。

相似形的應用

泰利斯測量金字塔高的問題是利用相似形理論的典型例子，底下再舉一個測量的例子。

如果不涉水到河的對岸，如何測量河的寬度呢？我們先選擇河對岸岸邊的目標物A，如圖1-20中的大樹。在這一岸的岸邊標出一點B，使$\overline{AB}$垂直於河岸。再沿河岸找兩點C、D，最後從D沿垂直於岸邊的方向找一點E，使得E、C、A在同一直線上（圖1-20）。這麼一來，只要測量$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{ED}$後，就可以計算出河的寬度。底下是一個例子。

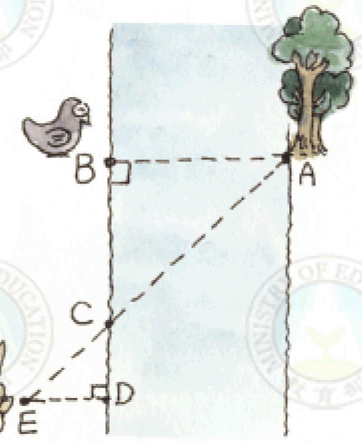


圖1-20

例7 Example

如圖1-20，若$\overline{BC}=10$公尺，$\overline{CD}=2$公尺，$\overline{ED}=5$公尺，求$\overline{AB}$。

解題說明

由圖1-20，得$\triangle EDC \sim \triangle ABC$。 AA相似性質

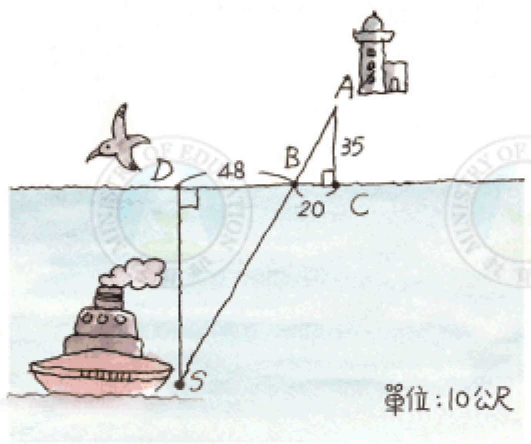
因此 $\overline{AB}:\overline{ED}=\overline{BC}:\overline{DC}$

即 $\overline{AB}:5=10:2$

得 $\overline{AB}=25$（公尺）

隨・堂・練・習

在一平直的海岸線旁，有一船隻停在S處，某觀測員將測量所得的各項數據繪製成右圖的草圖，其中C、D為海岸線上的兩點，B為$\overline{AS}$與$\overline{CD}$交點，試求該船與岸邊的距離。



如圖1-21，在打撞球時，我們可以觀察到當球碰到撞球檯邊反彈時，球的入射角$\angle 1$會等於反射角$\angle 2$。這是打撞球時會用到的原理。

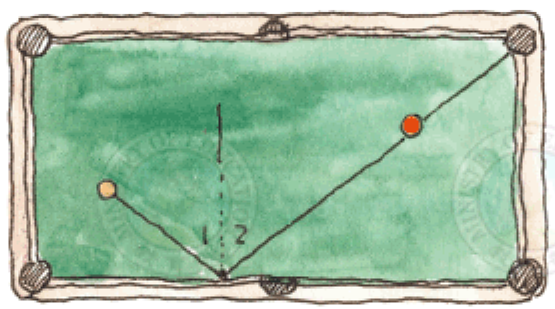
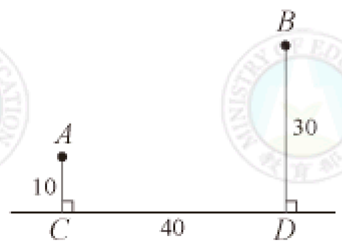


圖1-21

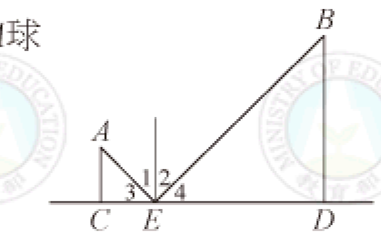
例8 Example

如右圖，A、B兩球在距離撞球檯邊10、30的位置，$\overline{CD}=40$。問將A球瞄準撞球檯邊的哪一點，才可使A球反彈後擊中B球？



解題說明

如右圖，假設從A球瞄準$\overline{CD}$邊上的E點，可以使A球反彈後擊中B球，則入射角$\angle 1=$反射角$\angle 2$，



因此 $\angle 3=\angle 4$

又 $\angle C=\angle D=90^\circ$

所以 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$ AA相似性質

因此 $\overline{CE}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{BD}=10:30=1:3$ 對應邊成比例

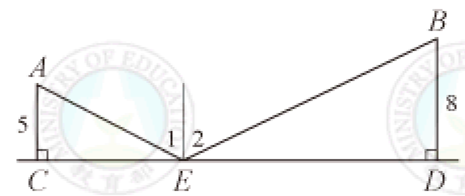
但因 $\overline{CD}=40$

所以 $\overline{CE}=40\times\dfrac{1}{1+3}=40\times\dfrac{1}{4}=10$

與C距離為10的E即為所求之點。

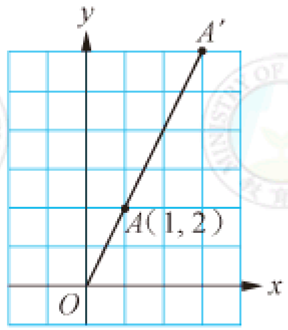
隨・堂・練・習

如右圖，A、B到$\overline{CD}$的距離分別為5、8，其中$\overline{CD}=26$。若欲在$\overline{CD}$上取一點E，使得$\triangle ACE \sim \triangle BDE$，且$A$的對應點是$B$，求$E$的位置。



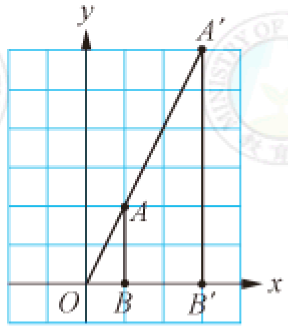
例 9 Example

如右圖，在坐標平面上，以$O(0, 0)$為中心，將$\overline{OA}$縮放3倍得$\overline{OA'}$。已知A的坐標為$(1, 2)$，求A'的坐標。



解題說明

作過A、A'的鉛直線分別交x軸於B、B'，如右圖。



由AA相似性質，知$\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$。因此

因此　$\overline{OB'} : \overline{OB} = \overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{OA'} : \overline{OA} = 3 : 1$

因為　$\overline{OB} = 1$，$\overline{AB} = 2$

所以　$\overline{OB'} = \overline{OB} \times 3 = 3$，$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times 3 = 6$

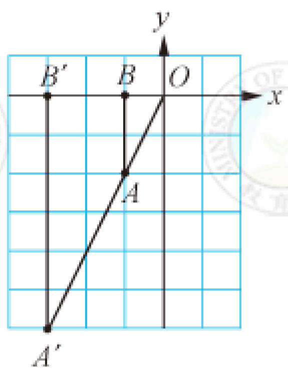
所以A'的坐標為$(3, 6)$。

隨．堂．練．習

在坐標平面上，以O為中心，將$\overline{OA}$縮放5倍得$\overline{OA'}$。若A的坐標為$(1.5, 2)$，求A'的坐標。

例 10 Example

在坐標平面上，以O為中心，將$\overline{OA}$縮放3倍得$\overline{OA'}$。若A為$(-1, -2)$，求A'的坐標。



解題說明

作過A、A'的鉛直線交x軸得B和B'，

則$\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$。　AA相似性質

因此　$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{OB'} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OA} = 3 : 1$　對應邊成比例

因為　$\overline{OB} = 1$，$\overline{AB} = 2$

所以　$\overline{OB'} = \overline{OB} \times 3 = 3$，$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times 3 = 6$

由於A'在第三象限，得

A'的坐標為$(-\overline{OB'}, -\overline{A'B'}) = (-3, -6)$。

隨．堂．練．習

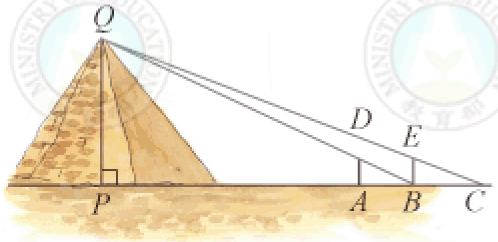
在坐標平面上，以O為中心，將$\overline{OA}$縮放3倍得$\overline{OA'}$。若A的坐標為$(1, -2)$，求A'的坐標。

在本章一開頭的故事裡，薩摩斯商人曾經向泰利斯質疑如何去實際測量金字塔的影長，這是因為金字塔的形狀是正錐體，要測得金字塔的影長有實際的困難，需要更深入的想法。

底下我們要敘述一個方法來解決這個困難，三國時代的數學家劉徽曾經在海島算經中，用這個方法測量海島上的山峰高度。

例11 Example

如右圖，設金字塔高為$\overline{PQ}$，我們拿一根2公尺的標尺，垂直豎立在A點上，測得$\overline{AB}=6$公尺，現將標尺移到B點，再測得$\overline{BC}=6.09$公尺。求金字塔高$\overline{PQ}$。



解題說明

由直角三角形的相似形原理知道

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \quad \triangle ADB\sim\triangle PQB$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} \quad \triangle BEC\sim\triangle PQC$$

其中$\overline{AD}=\overline{BE}=2$。現設$\overline{PA}=x$，則由題意知

$$\frac{2}{\overline{PQ}}=\frac{6}{x+6}=\frac{6.09}{x+6+6.09}$$

由第二個等號知

$$6x+36+\cancel{6\times6.09}=6.09x+\cancel{6\times6.09}$$

即 $0.09x=36$

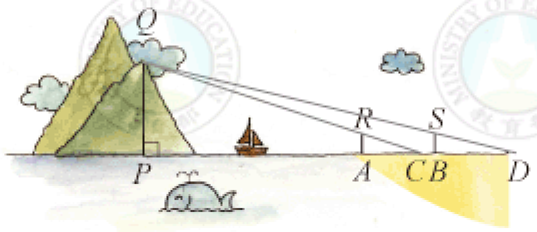
故得 $x=400$

因此 $\overline{PQ}=2\times\frac{400+6}{6}=\overset{1}{\cancel{2}}\times\frac{406}{\underset{3}{\cancel{6}}}\fallingdotseq135$（公尺）

答：金字塔高約為135公尺。

隨．堂．練．習

仿照例11，從海岸上使用2公尺的標尺測量某海島山峰之海拔高度。若已知$\overline{AC}$為3公尺，$\overline{BD}$為3.5公尺，且$\overline{AB}$為200公尺，求$\overline{PQ}$和$\overline{AP}$。

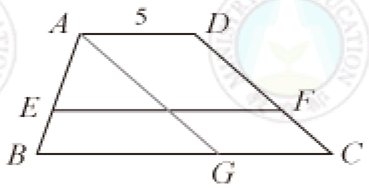


摘要

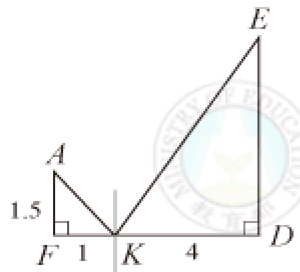
1. 平行於三角形一邊的直線截另兩邊成比例線段。
2. 若一直線將一三角形的兩邊截比例線段，則此直線平行於第三邊。

1-3 自我評量

1. 如右圖，梯形$ABCD$中$\overline{AD}//\overline{BC}$，$E$、$F$分別在$\overline{AB}$、$\overline{CD}$上，且$\overline{EF}//\overline{AD}$，若$\overline{AD}=5$，$\overline{EF}=11$，$\overline{BC}=14$，求$\overline{AE}$：$\overline{EB}$的比值。（提示：過$A$作$\overline{AG}//\overline{CD}$）



2. 東佑想知道升旗台上旗桿$\overline{DE}$的高度，東佑站在F處，與旗桿底D點的距離為 5 公尺（如右圖所示）。東佑在$\overline{FD}$上位於自己前方1公尺的K處平放一面鏡子，透過光的反射正好看到了旗桿桿頂。若東佑眼睛到腳的高度為1.5公尺（即$\overline{AF}$），試求旗桿桿頂的高度。（提示：入射角＝反射角）

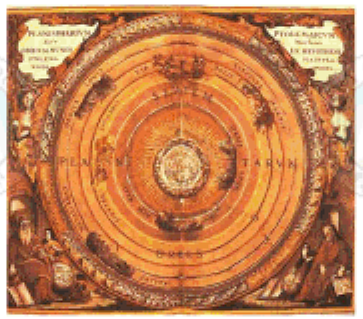


3. 如右圖，一樹木經陽光照射在地上的影長2.8公尺，同一時刻，身長1.5公尺的知儀在地面上的影長為1公尺，求此樹的高度。

第2章

2-1 圓

自古以來，圓形被視為最完美的幾何圖形，因此許多古文明或宗教，經常用圓形作為完美的模式或象徵（圖2-1）。


天文學家托勒密相信宇宙包含很多星層。


西方人常在天使或聖人頭後放置代表光明的圓。


佛教也常以圓形作為神聖的象徵。

圖2-1

大家認為圓形完美，是因為圓有豐富的對稱性。例如將圓繞著圓心旋轉，圓的形狀並沒有變化，也就是說從任何角度來看，圓都一樣。這正是車輪是圓形的原因，因為這樣才能保持車身的穩定與舒適（圖2-2）。


圖2-2

也因為這個特性，圓的大小形狀完全由半徑所決定。一個圓只要圓心和半徑確定後，這個圓就完全確定了。由圓的定義，我們知道

圓內的點和圓心的距離小於半徑；
圓外的點和圓心的距離大於半徑。

例 1 Example

坐標平面上有一以 $O(0, 0)$ 為圓心，半徑為10的圓，下列哪些點在圓內？哪些點在圓上？哪些在圓外？

(1) $A(-6, 8)$ (2) $B(0, -20)$ (3) $C(4, 5)$

解題說明

(1) 由兩點距離公式，得

$$\overline{OA}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$$

所以 A 在圓上。

(2) 由於 O、B 都在 y 軸上，

$$\overline{OB}=|0-(-20)|=20$$

因為20大於半徑10，所以 B 在圓外。

(3) 由兩點距離公式，得

$$\overline{OC}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$$

因為 $(\sqrt{41})^2=41<100=10^2$

所以 $\sqrt{41}$ 小於半徑10，即 C 在圓內。

隨・堂・練・習

坐標平面上有一以 $O(1, 1)$ 為圓心的圓，半徑為5。下列哪些點在圓內？哪些在圓上？哪些在圓外？

$A(1, 2)$、$B(-2, -3)$、$C(0, 5)$、$D(5, 5)$

弦心距

圓的完美性質也表現在圓的線對稱性質。從小學的摺紙經驗知道，任何一條直徑都是圓的對稱軸。因此圓的對稱軸比正多邊形多得多（圖2-3）。當我們討論圓的幾何性質時，要記得線對稱是一個很有用的工具。

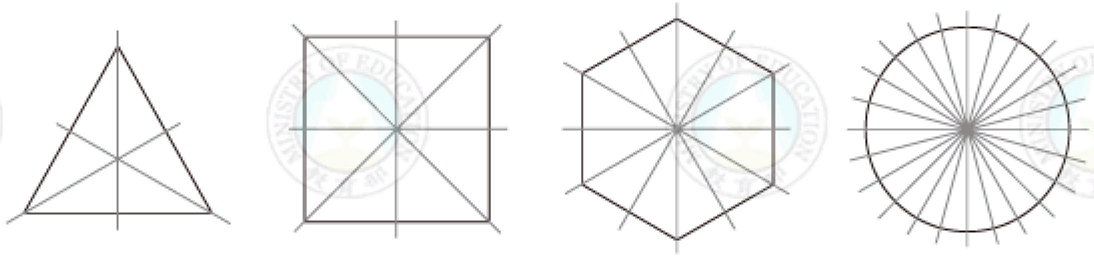


圖2-3

舉例來說，任意給定圓O上的一條弦$\overline{AB}$，我們可以將圖形轉成如圖2-4的樣子，作圓心O到$\overline{AB}$的垂線L，由於L是圓O的對稱軸，並且圓O和$\overleftrightarrow{AB}$在L兩側的交點分別是A、B，所以A和B是對稱於L的對稱點，因此L是$\overline{AB}$的垂直平分線。也就是說

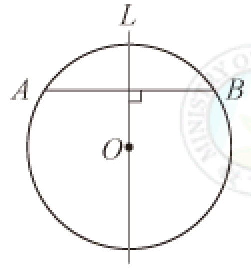


圖2-4

圓上垂直於弦的半徑必平分此弦。

但是由於一弦只有一條垂直平分線，所以也可知

圓上一弦的垂直平分線必通過圓心。

這個性質，有一個最直接的應用。

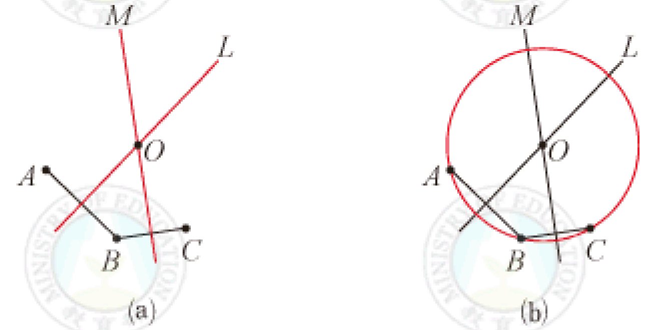
例2 Example

如右圖，不在同一直線上的三點A、B、C，求過此三點的圓。

解題說明

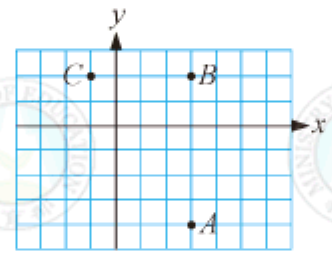
基本想法是，如果A、B、C在一圓上，則$\overline{AB}$與$\overline{BC}$是該圓的弦，但因為圓上一弦的中垂線必會通過圓心，所以$\overline{AB}$和$\overline{BC}$的中垂線應該交於此圓的

圓心。利用上面的想法，作$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的中垂線L、M，並且交於O點，如下圖(a)。由於L和M為中垂線，所以$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，因此以$O$為中心，半徑為$\overline{OA}$作圓即為所求，如下圖(b)。



隨・堂・練・習

如右圖，坐標平面上有三點$A(3,-4)$、$B(3,2)$、$C(-1,2)$，求過此三點的圓的圓心坐標，並繪出此圓。



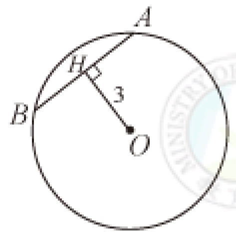
平面上若有一些點在同一直線上，則稱這些點**共線**；如果有一些點在同一圓上，則稱這些點**共圓**。因此例2的結論可以說成

若平面上三點不共線，則此三點必共圓。

動・動・腦

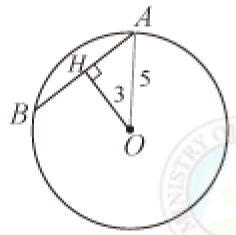
若三點不共線，可不可能有兩個圓同時通過此三點？

例 3 Example



如右圖，有一半徑為5的圓 O，$\overline{AB}$ 為一弦，若 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$，且 $\overline{OH}=3$，求 $\overline{AB}$。

解題說明

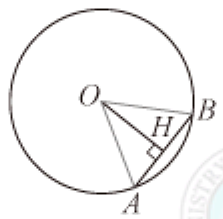


連接半徑 $\overline{OA}$，$\overline{OA}=5$。由於△OHA 為直角三角形，

因此 $\overline{AH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ 　畢氏定理

所以 $\overline{AB}=4\times2=8$ 　H 為 $\overline{AB}$ 中點

隨．堂．練．習



如右圖，有一半徑為5的圓，$\overline{AB}$ 為一弦，若 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$，且 $\overline{AB}=5$，求 $\overline{OH}$、$\angle AOB$、$\angle AOH$。

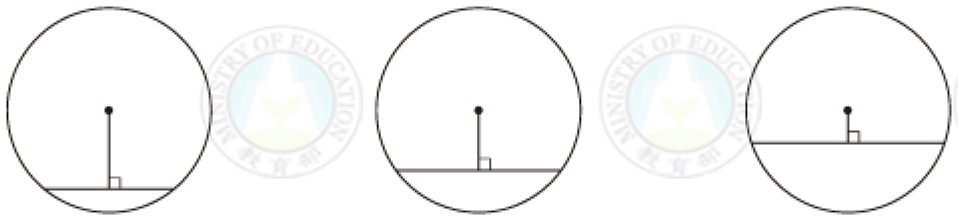


圖2-5

圓心到一弦的距離稱為**弦心距**。由圖2-5可以發現弦越長，則弦心距越小；弦越短，則弦心距越大。

由例題3可知，圓的半徑 r、弦心距 d、弦長 t 三者之間有底下的關係：

$$r^2=d^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2$$

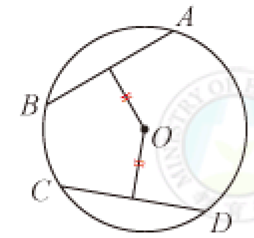
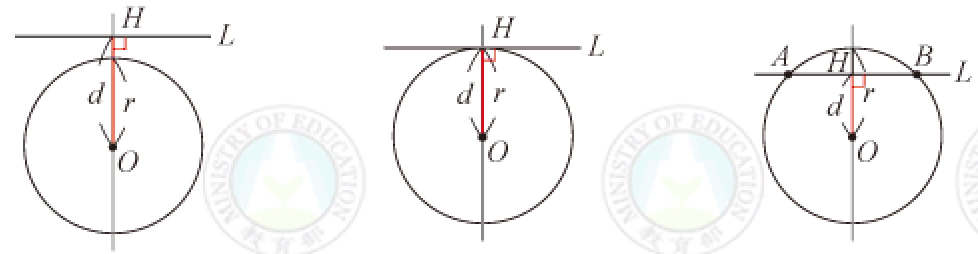


圖2-6

由於圓的半徑 r 是固定的，因此上述的數量關係，很清楚告訴我們若兩弦的的弦心距相等，則此兩弦等長，如圖2-6中 $\overline{AB}=\overline{CD}$。反之，若兩弦等長，弦心距也必相等。

圓與直線

類似的想法，也可以用來討論平面上一直線 L 和一圓 O 的相互關係。如圖2-7，取圓心 O 到 L 的垂足 H，比較圓心 O 到 L 的距離 $\overline{OH}=d$ 和半徑 r 的大小，可以分成下面三種情形來討論：



(a) $d>r$ 　(b) $d=r$ 　(c) $0\le d<r$

圖2-7

(1) $d>r$：由於 L 上任一點到 O 的距離以 $\overline{OH}=d$ 為最短，因此 L 上任一點到 O 的距離都比 r 大，這表示直線 L 上的點都落在圓的外部，因此 L 和圓 O 沒有任何交點（圖2-7(a)）。

(2) $d=r$：由於 $\overline{OH}=r$，這表示 H 是圓 O 上的一點。和(1)一樣，除了 H 之外，L 上其他點與 O 的距離都大於 $\overline{OH}=r$，因此都落在圓 O 的外部（圖2-7(b)）。換句話說，L 和圓 O 只交於一點 H，且 $\overline{OH}\perp L$，這樣的直線 L 稱為圓 O 在 H 點的**切線**，H 點稱為**切點**。

(3) $0\le d<r$：這表示 H 落在圓 O 的內部，如圖2-7(c)，此時 L 和圓 O 交於兩點 A、B。這時稱 L 是圓 O 的**割線**，而且 L 和圓 O 交出一弦 $\overline{AB}$。

我們用d和r的關係來表示直線與圓的位置關係，如圖2-8。注意到切線是很特殊的情況（即$d=r$），除了這個情況，大部分直線和圓的關係不是交於兩點（$0\leq d<r$），就是不相交（$d>r$）。

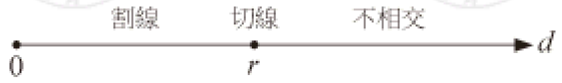
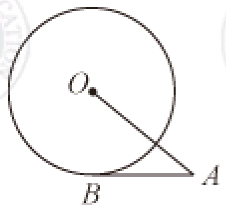


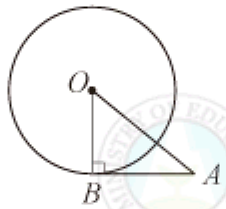
圖2-8

例 4 Example



如右圖，有一半徑為16的圓O，A為圓外一點，$\overline{OA}=20$，若$\overline{AB}$和圓相切於B點，求$\overline{AB}$。

解題說明

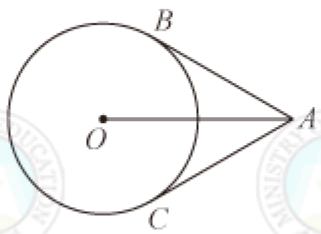


連接$\overline{OB}$，由於$\overline{AB}$和圓O相切於B點，所以$\overline{OB}\perp\overline{AB}$。

由畢氏定理得

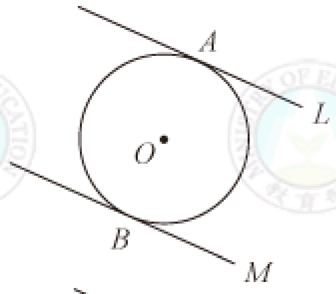
$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{20^2-16^2}=\sqrt{144}=12$$

隨．堂．練．習



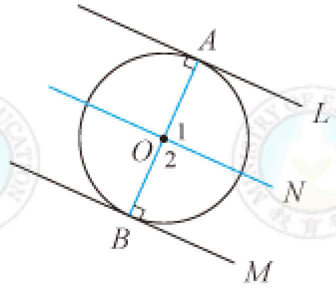
如右圖，有一半徑為1的圓，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別切圓O於B、C，若$\overline{OA}=2$，求$\overline{AC}$、$\overline{AB}$。

例 5 Example



如右圖，L、M為圓O的切線，其切點分別為A、B，若$L//M$，說明$\overline{AB}$為圓O的直徑。

解題說明



如右圖，連接$\overline{OA}$和$\overline{OB}$，

由於L切圓O於A點，M切圓O於B點，

所以$\angle A=90^\circ$，$\angle B=90^\circ$。

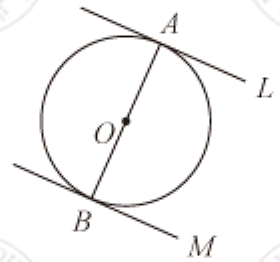
過O作L的平行線N，當然N也平行M，因此

$\angle 1=\angle 2=90^\circ$

由於$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，所以$O$、$A$、$B$三點共線，

即$\overline{AB}$通過圓心，因此$\overline{AB}$為直徑。

隨．堂．練．習



如右圖，過直徑$\overline{AB}$的端點，作兩切線L和M，說明$L//M$。

過圓O外一點A，有兩條到圓O的切線$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{AC}$，如圖2-9。由於$\overleftrightarrow{OA}$是圓O的對稱軸，因此過A的切線（如$\overleftrightarrow{AB}$）其對稱線是過A的另外一條切線（如$\overleftrightarrow{AC}$），所以兩切線的切點B、C互為對稱點，因此$\overline{AB}=\overline{AC}$。$\overline{AB}$和$\overline{AC}$稱為$A$到圓$O$的切線段。由上可知

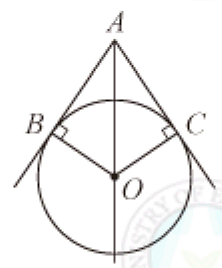


圖2-9

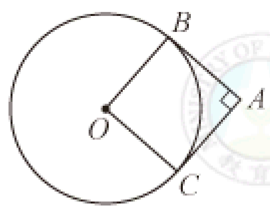
圓外一點，到此圓的兩切線段等長。

利用$\overleftrightarrow{OA}$是對稱軸，也很清楚知道$\overleftrightarrow{OA}$是$\angle BAC$和$\angle BOC$的角平分線，且四邊形$ABOC$為箏形。比較特別的是，在這個箏形中，由於$\angle B$和$\angle C$是直角，所以

$$\angle BAC+\angle BOC=360^\circ-90^\circ\times 2=180^\circ$$

即$\angle BAC$和$\angle BOC$互補。

例 6 Example



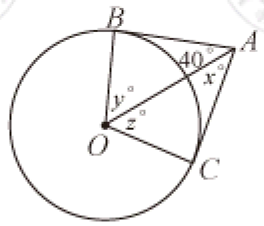
如右圖，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$切圓O於B、C兩點。若$\angle A=90^\circ$，說明$ABOC$為正方形。

解題說明

由於$\angle A=90^\circ$，所以$\angle O=90^\circ$， $\angle A+\angle O=180^\circ$

因此$ABOC$為矩形。但鄰邊$\overline{OB}=\overline{OC}$，因此$ABOC$為正方形。

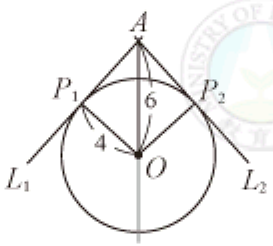
隨・堂・練・習



如右圖，$\overline{AB}$和$\overline{AC}$切圓O於B、C兩點。$\angle OAB=40^\circ$。求圖中的x、y、z。

靈活的利用線對稱和三角形面積公式，隨堂練習中的弦BC可以由$\overline{OA}$得到，如例7所示。

例 7 Example



如右圖，有一半徑為4的圓O，過圓O外一點A，有兩條切線L_1和L_2，各切圓O於P_1和P_2，若已知$\overline{OA}=6$，求$\overline{AP_1}$、$\overline{P_1P_2}$。

解題說明

由於P_1為切點，所以$\angle OP_1A=90^\circ$，因此

$\overline{AP_1}^2+4^2=6^2$ 畢氏定理

故得$\overline{AP_1}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$。

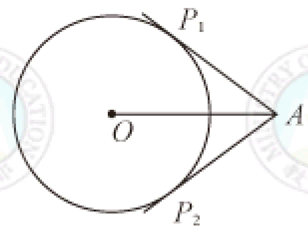
因此 箏形AP_1OP_2面積$=\triangle AP_1O$面積$\times 2$

$$=\frac{2\sqrt{5}\times 4}{2}\times 2=8\sqrt{5}$$

所以 $\overline{P_1P_2}=\dfrac{AP_1OP_2\text{面積}}{\overline{OA}}\times 2$ 箏形面積$=\frac{1}{2}\times$兩對角線相乘

$$=\frac{8\sqrt{5}}{6}\times 2=\frac{8\sqrt{5}}{3}$$

隨・堂・練・習



如右圖，$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$為A到圓O的兩切線段。已知圓的半徑為6，$\overline{OA}=10$，求$\overline{P_1P_2}$。

兩圓的關係

利用圓的線對稱性質，也可以幫我們整理平面上兩圓的可能關係。

假設平面上有兩個圓O_1和O_2，半徑分別為r_1和r_2。$\overleftrightarrow{O_1O_2}$稱為兩圓的**連心線**，而$\overline{O_1O_2}$則稱為**連心距**。由於連心線$\overleftrightarrow{O_1O_2}$同時是圓$O_1$和圓$O_2$的線對稱軸，我們可以藉此整理兩圓的關係，如圖2-10與圖2-11，其中l表示連心距$\overline{O_1O_2}$，並假設$r_1\le r_2$。

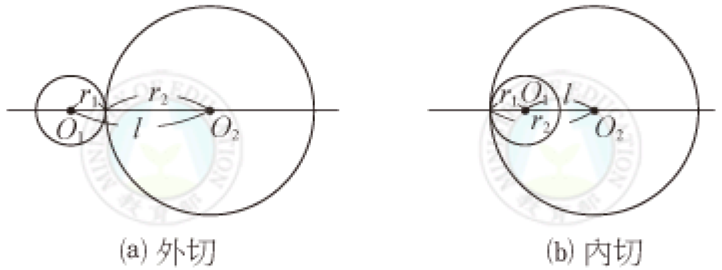


圖2-10

就像直線和圓的關係一樣，我們先探討兩圓交於一點的特殊情形：

(1) **外切：**當$l=r_1+r_2$時（圖2-10(a)），兩圓正好交於一點，我們模仿切線的定義，稱這兩圓**相切**。此時除了切點外，由於其他圓上的點，都在另一圓的外部，因此稱這兩圓外切。

(2) **內切：**當$l=r_2-r_1$時（圖2-10(b)），若$r_2>r_1$，則兩圓相切，只是這時除了切點之外，圓O_1上的其他點都落在圓O_2的內部，因此稱為內切。若$r_2=r_1$，則此兩圓為同一圓。

注意到當兩圓相切時，由於連心線就是對稱軸，所以連心線會通過切點。

隨．堂．練．習

1. 圓O是以$O(0, 0)$為圓心，半徑為6的圓，圓O'是以$O'(3, 4)$為圓心，半徑為1的圓，問此兩圓是否相切？若相切，是內切還是外切？

2. 圓O是以$O(0, 0)$為圓心，半徑為16的圓，圓O'是以$O'(7, 24)$為圓心，半徑為9的圓，問此兩圓是否相切？若相切，是內切或外切？

除了這兩種特殊的情形外，依照l的大小剩下三種情形：

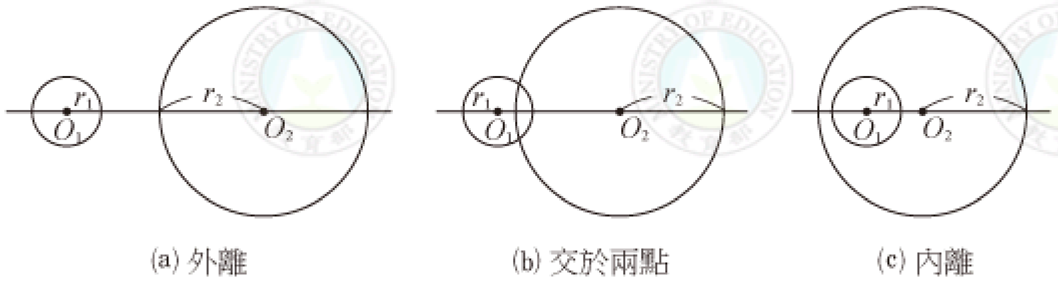


圖2-11

(1) 外離（$l>r_1+r_2$，圖2-11(a)）：兩圓不相交，彼此在對方的外部。

(2) 交於兩點（$r_1+r_2>l>r_2-r_1$，圖2-11(b)）：兩圓交於兩點。

(3) 內離（$r_2-r_1>l$，圖2-11(c)）：兩圓不相交，圓O_1在圓O_2內部。當$l=0$時，圓O_1和圓O_2是同心圓。

我們用圖2-12來幫忙同學釐清這些關係：

圖2-12

隨．堂．練．習

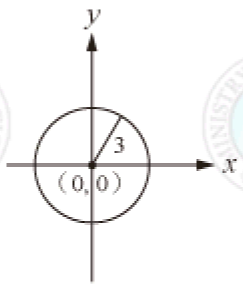
圓O是以$O(0, 0)$為圓心，半徑為5的圓，圓O'是以$O'(1, 1)$為圓心，半徑為1的圓，問此兩圓的關係為何？

動．動．腦

如果上面敘述中的l、r_1、r_2三數可以構成三角形的三邊長，這時兩圓的關係為何？

例 8 Example

如右圖，坐標平面上有一以 (0, 0) 為圓心，半徑為 3 的圓。另有一圓，其半徑為 5，圓心為 $(a, 0)$。若已知此兩圓外離，求 a 的範圍。



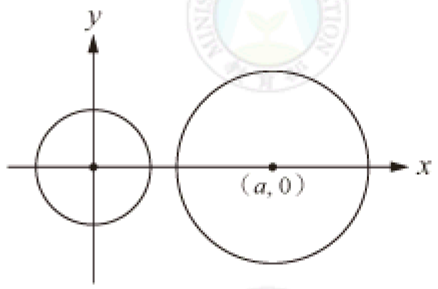
解題說明

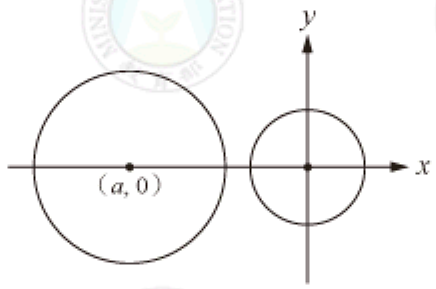
由圖 2-12，可畫出下圖

因此兩圓外離時，連心距 $l>8$。

(1) 當 $(a, 0)$ 在 y 軸的右側時（左下圖），連心距 $l=a-0=a$，因此 $a>8$。

(2) 當 $(a, 0)$ 在 y 軸的左側時（右下圖），連心距 $l=0-a=-a$，由 $l>8$，得 $-a>8$，因此 $a<-8$。

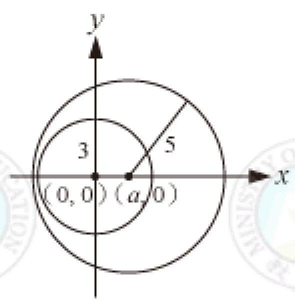




由(1)和(2)知，a 的範圍是 $a>8$ 或 $a<-8$。

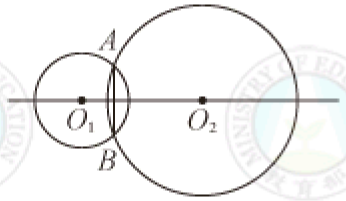
隨・堂・練・習

有一以 $O(0, 0)$ 為圓心，半徑為 3 的圓，另有一圓其半徑為 5，圓心為 $(a, 0)$。若已知此兩圓內離，求 a 的範圍（右圖為參考圖）。



例 9 Example

如右圖，兩圓交於 A、B 兩點，說明 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 是 $\overline{AB}$ 的中垂線。



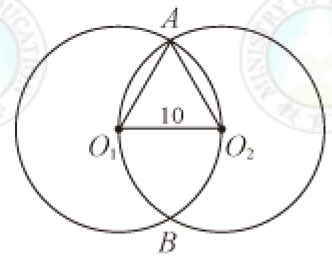
解題說明

由於 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 是兩圓共同的對稱軸，因此若 A 為兩圓交點，則 A 對 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 的對稱點 B 也是兩圓交點，也就是說兩圓交點 A、B 互為對稱點，所以 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 是 $\overline{AB}$ 的中垂線。

例 9 中的 $\overline{AB}$ 同時為圓 O_1 與圓 O_2 的弦，稱為圓 O_1 及圓 O_2 的**公弦**。由例 9 知道，當兩圓相交時，兩圓的連心線垂直平分其公弦。另外，由線對稱或半徑的關係，也可以知道四邊形 AO_1BO_2 是箏形。

例 10 Example

如右圖，兩圓 O_1 和 O_2 交於 A、B 兩點，而且 O_1 在圓 O_2 上，O_2 在圓 O_1 上，若 $\overline{O_1O_2}=10$，求此兩圓的半徑，並說明 $\triangle AO_1O_2$ 為正三角形。



解題說明

因為 O_2 在圓 O_1 上，所以 $\overline{O_1O_2}$ 為圓 O_1 的半徑，因此圓 O_1 的半徑為 10。

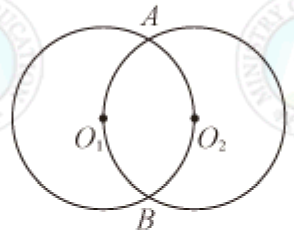
同理，圓 O_2 的半徑為 10。

又因為 $\overline{O_1A}=10$，$\overline{O_2A}=10$，$\overline{O_1O_2}=10$，所以 $\triangle AO_1O_2$ 為正三角形。

由例 10 知道 $\angle AO_1O_2=\angle AO_2O_1=60^\circ$，這表示 $\overset{\frown}{O_1A}$ 和 $\overset{\frown}{O_2A}$ 的弧度都是 60°，因此可以計算 $\overset{\frown}{O_1A}$ 和 $\overset{\frown}{O_2A}$ 的弧長。

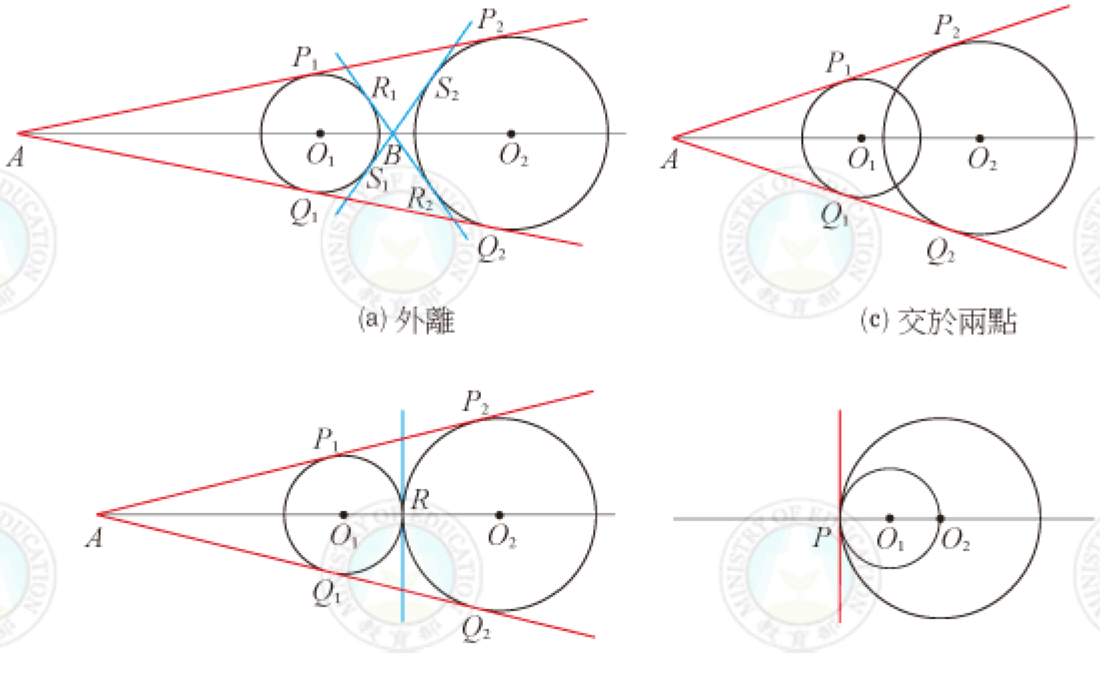
隨·堂·練·習

如右圖，兩圓O_1和O_2交於A、B兩點，且O_1在圓O_2上，O_2在圓O_1上。若已知圓O_1的半徑為10，求$\overparen{AO_1B}$的弧長。



公切線

假設平面上有兩圓O_1和O_2，如果有一直線同時是這兩個圓的切線，就稱這條直線為這兩圓的**公切線**。如果公切線與連心線段$\overline{O_1O_2}$相交，則稱此公切線為**內公切線**（如圖2-13中的藍線），此時兩圓位於公切線的兩側。當內公切線有兩個切點時，則切點連線段稱為內公切線段，如圖2-13(a)的$\overline{R_1R_2}$和$\overline{S_1S_2}$。

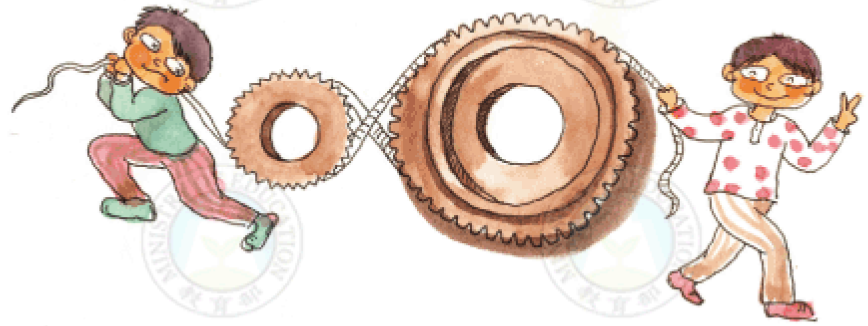


(a) 外離　(c) 交於兩點

(b) 外切　(d) 內切

圖2-13

如果公切線與連心線段$\overline{O_1O_2}$不相交，則稱此切線為這兩圓的**外公切線**（圖2-13中的紅線），而外公切線兩切點的連線段稱為外公切線段，如圖2-13各圖中的$\overline{P_1P_2}$與$\overline{Q_1Q_2}$。此時，兩圓位於公切線的同側。



由圓的對稱性，可以知道圖2-13的各種圖形都對稱於連心線$\overleftrightarrow{O_1O_2}$。利用圓的性質和線對稱的概念，可以得到下列性質：

(1) 無論兩圓是外離、外切或交於兩點，兩條外公切線會彼此對稱，因此兩條外公切線段相等。

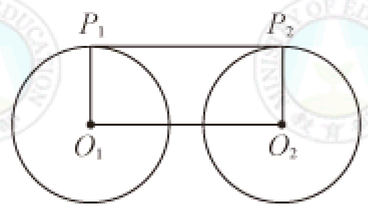
(2) 兩圓外離時，兩條內公切線彼此對稱，因此兩條內公切線段長相等。

(3) 兩圓外切時只有一條內公切線；兩圓內切時只有一條外公切線。

(4) 兩圓內離時沒有公切線。

例11 Example

如右圖，圓O_1與圓O_2的半徑為5，$\overline{O_1O_2}=12$，且$\overline{P_1P_2}$是圓O_1和圓O_2的外公切線段，試說明四邊形$P_1O_1O_2P_2$為一矩形，並求$\overline{P_1P_2}$。



解題說明

因為$\angle O_1P_1P_2=90^\circ$，$\angle O_2P_2P_1=90^\circ$，所以$\overline{O_1P_1}$//$\overline{O_2P_2}$。

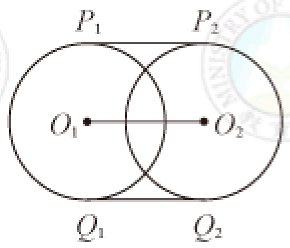
又因為$\overline{O_1P_1}=\overline{O_2P_2}=5$，所以四邊形$P_1O_1O_2P_2$是一矩形，因此

$\overline{P_1P_2}=\overline{O_1O_2}=12$

由例11知道，等半徑兩圓的外公切線$\overleftrightarrow{P_1P_2}$平行於連心線$\overleftrightarrow{O_1O_2}$。

隨・堂・練・習

如右圖，圓O_1與圓O_2的半徑相等，其兩外公切線段為$\overline{P_1P_2}$、$\overline{Q_1Q_2}$，說明$\overline{P_1P_2} // \overline{Q_1Q_2}$，且$\overline{P_1Q_1}$為直徑。



由上面練習，知道等半徑兩圓的兩條外公切線互相平行。由圖2-14，可以觀察到若兩圓的半徑不相等，則兩外公切線$\overleftrightarrow{P_1P_2}$和$\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$會相交於一點$A$。但因為兩外公切線對稱於$\overleftrightarrow{O_1O_2}$，因此交點$A$會落在$\overleftrightarrow{O_1O_2}$上，亦即$A$、$O_1$、$O_2$三點共線。

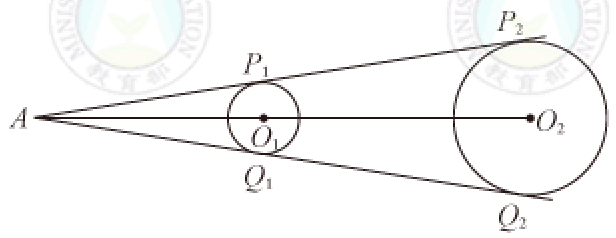
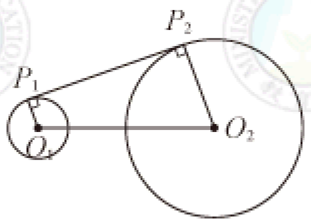


圖2-14

例12 Example

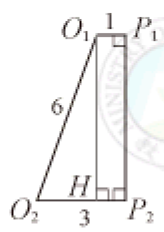
如右圖，圓O_1半徑為1，圓O_2半徑為3，連心距$\overline{O_1O_2}=6$。若$\overline{P_1P_2}$為外公切線段，求$\overline{P_1P_2}$。



解題說明

因為$\overline{O_1P_1} \perp \overline{P_1P_2}$，$\overline{O_2P_2} \perp \overline{P_1P_2}$，

所以可將上圖的$P_1O_1O_2P_2$重新畫成如右圖的梯形。

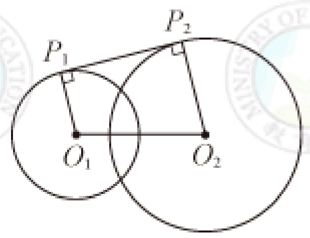


作高$\overline{O_1H}$，得$\overline{O_2H}=3-1=2$，

因此 $\overline{P_1P_2}=\overline{O_1H}=\sqrt{6^2-2^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

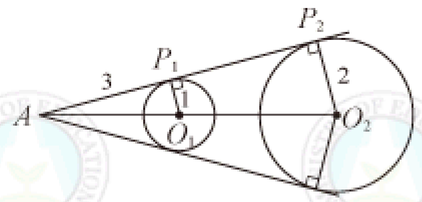
隨・堂・練・習

如右圖，圓O_1半徑為2，圓O_2半徑為3，連心距$\overline{O_1O_2}=4$，$\overline{P_1P_2}$為外公切線段。試仿例12的說明畫出對應的梯形，並求$\overline{P_1P_2}$。



例13 Example

如右圖，A點是圓O_1、圓O_2兩條外公切線的交點。已知$\overline{AP_1}=3$，圓O_1半徑為1，圓O_2半徑為2，求$\overline{P_1P_2}$。



解題說明

由前面說明，A、O_1、O_2三點共線。由於$\overline{O_1P_1} // \overline{O_2P_2}$，

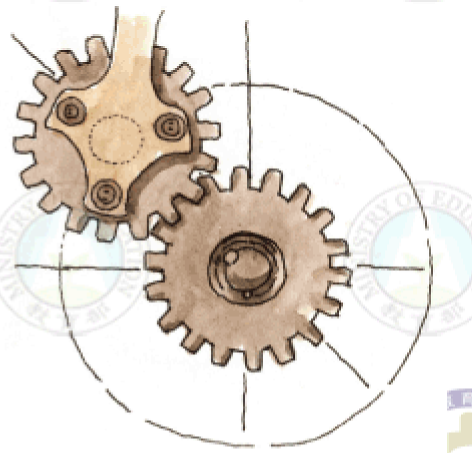
因此 $\triangle AO_1P_1 \sim \triangle AO_2P_2$ AA相似性質

所以 $\overline{AP_1} : \overline{AP_2}=\overline{O_1P_1} : \overline{O_2P_2}=1:2$ 對應邊成比例

因此 $\overline{AP_2}=2\overline{AP_1}=2\times 3=6$

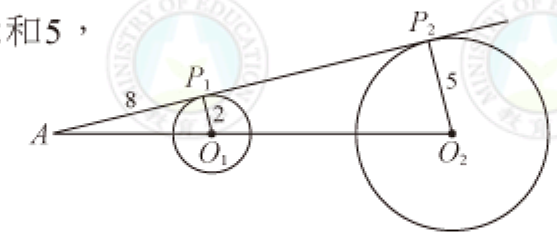
得 $\overline{P_1P_2}=\overline{AP_2}-\overline{AP_1}=6-3=3$

由例13的說明可以知道，圓O_2是由A將圓O_1縮放2倍的圖形，其中倍數2是半徑$\overline{O_2P_2}$對$\overline{O_1P_1}$的比值。



隨・堂・練・習

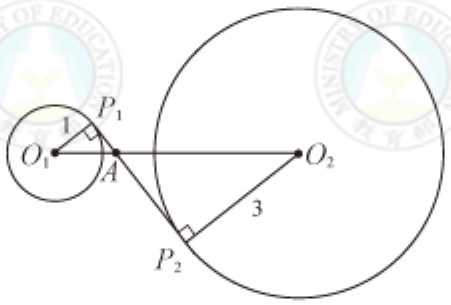
如右圖，圓 O_1 和圓 O_2 的半徑分別為2和5，且外公切線 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 和 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 交於 A 點。已知 $\overline{AP_1}=8$，求 $\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{O_1O_2}$。



和外公切線的情況一樣，當兩圓外離時，由於線對稱的性質，兩條內公切線的交點一定會落在連心線上，底下討論內公切線的相關問題。

例14 Example

如右圖，A 為內公切線 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 與 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 的交點。已知圓 O_1 半徑為1，圓 O_2 半徑為3，連心距 $\overline{O_1O_2}=5$，求 $\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_1A}$。



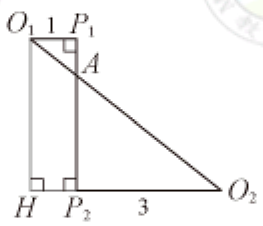
解題說明

因為 $\overline{O_1P_1}\perp\overline{P_1P_2}$，$\overline{O_2P_2}\perp\overline{P_1P_2}$，

可以將上面的 O_1、P_1、P_2、O_2 畫成右邊的圖形。

如圖作 $\overline{O_1H}\,//\,\overline{P_1P_2}$，交 $\overleftrightarrow{O_2P_2}$ 於 H，

因此 $O_1HP_2P_1$ 為矩形。



可得 $\overline{O_2H}=\overline{P_2H}+\overline{O_2P_2}=1+3=4$

因此 $\overline{P_1P_2}=\overline{O_1H}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_2H}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

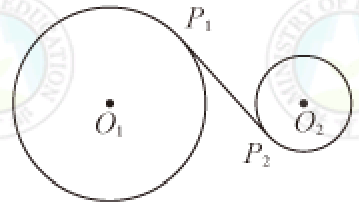
由右圖知 $\triangle O_1P_1A\sim\triangle O_2P_2A$ **AA相似性質**

因此 $\overline{P_2A}:\overline{P_1A}=\overline{O_2P_2}:\overline{O_1P_1}=3:1$ **對應邊成比例**

所以 $\overline{P_1A}=\dfrac{1}{1+3}\overline{P_1P_2}=\dfrac{1}{4}\cdot 3=\dfrac{3}{4}$

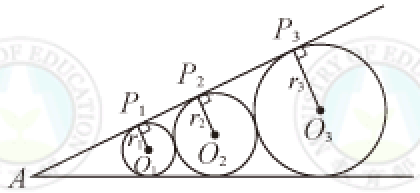
隨・堂・練・習

如右圖，圓 O_1 半徑為4，圓 O_2 半徑為2，連心距 $\overline{O_1O_2}=8$，$\overline{P_1P_2}$ 為兩圓的內公切線段，其中 P_1、P_2 為切點，求 $\overline{P_1P_2}$。



例15 Example

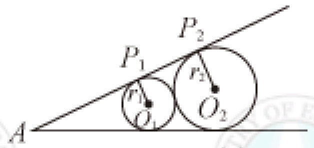
如右圖，$\angle A$ 的兩邊是圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 的外公切線，且圓 O_1 和圓 O_2 外切，圓 O_2 和圓 O_3 外切。若 r_1、r_2、r_3 各為圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 的半徑，說明 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{r_3}{r_2}$。



解題說明

我們將上圖分解成右邊的圖(a)和圖(b)。

現以 A 為中心將圖(b)中的圖形縮放 $\dfrac{r_1}{r_2}$ 倍，得圖(c)，



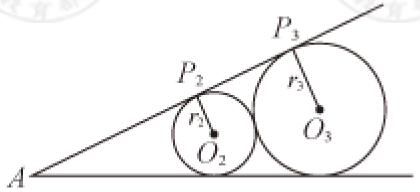
(a)

則 $\overline{O_2'P_2'}=\cancel{r_2}\times\dfrac{r_1}{\cancel{r_2}}=r_1$

$\overline{O_3'P_3'}=r_3\times\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{r_3r_1}{r_2}$

由於圓 O_2' 的半徑和圓 O_1 一樣，

因此圖(c)和圖(a)的圖形一樣。

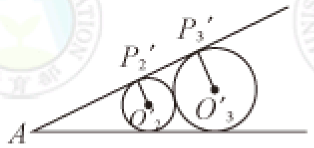


(b)

所以 $\overline{O_2P_2}=\overline{O_3'P_3'}$

亦即 $r_2=\dfrac{r_3r_1}{r_2}$

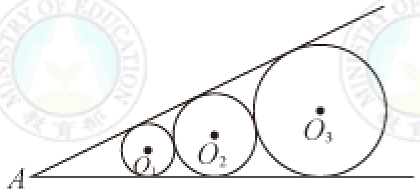
得 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{r_3}{r_2}$



(c)

隨．堂．練．習

如右圖，圓O_1半徑為2，圓O_2半徑為3，且圓O_1和圓O_2外切，圓O_2和圓O_3外切，求圓O_3的半徑。



摘要

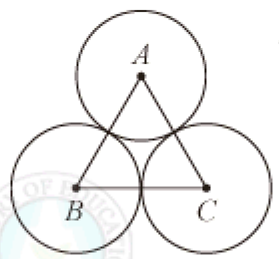
1. 過弦中點的直徑必垂直平分此弦。
2. 弦長相等的兩弦，其弦心距相等；反之，弦心距相等的兩弦，其弦長亦相等。
3. 直線L若和圓僅交於一點P，則L稱為圓的切線，而P為切點。若P為切點，則半徑$\overline{OP}$垂直於切線L。
4. 相異兩圓必對稱於其連心線。

2-1 自我評量

1. 下列敘述，將正確的打「○」，錯誤的打「×」。
   (　　) (1) 圓的對稱軸必過圓心。
   (　　) (2) 若圓上某半徑平分一弦，則該半徑垂直此弦。
   (　　) (3) 若圓心到一直線的距離等於半徑，則此直線為切線。
   (　　) (4) 同圓心的相異兩圓一定內離。
   (　　) (5) 若兩圓的兩個半徑以及連心距可以構成三角形的三邊，則此兩圓必外離。
   (　　) (6) 若兩圓的兩條外公切線平行，則此兩圓的半徑相等。
   (　　) (7) 若兩圓相切，則切點在兩圓的連心線段上。

2. 已知坐標平面上有一圓，$(1, 1)$和$(-1, -1)$落在此圓上，下面那一點不可能是該圓的圓心。
   (1) $(1, -1)$　(2) $(0, 0)$　(3) $(-1, 0)$　(4) $(-1, 1)$

3. 如右圖，有三個等半徑的圓兩兩外切，其中A、B、C為圓心，說明$\triangle ABC$為正三角形。



2-2 圓與角

圓周角

本節要討論圓和角的關係，其中要用到第四冊介紹過的弧度概念。

簡單的說，一個圓弧的度數就是這個圓弧所對圓心角的度數（圖2-15）。由於一個周角是360°，因此整個圓弧的度數是360°，半圓的度數是180°，直角圓心角所對弧的度數則是90°。

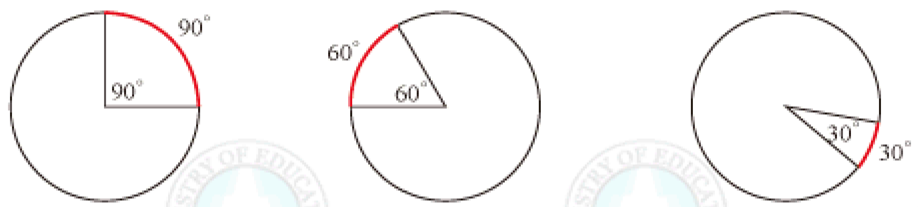
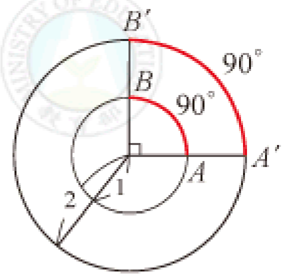


圖2-15

各位同學千萬不要混淆弧的度數和弧長的概念。只要圓弧所對的圓心角度數固定，不管我們把圓放大或縮小，相對應的圓弧度數並不會改變，但是弧長則會成比例變化（圖2-16）。



$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$的度數都是90°

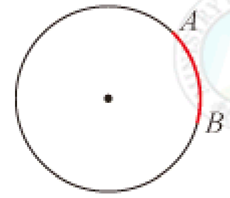
$\overset{\frown}{AB}$弧長$=\dfrac{\pi}{2}$

$\overset{\frown}{A'B'}$弧長$=\pi$

圖2-16

隨・堂・練・習

如右圖，$\overset{\frown}{AB}$是將圓八等分後的弧，若此圓的半徑為10，求$\overset{\frown}{AB}$的度數與弧長。



在本節我們將使用$\overset{\frown}{AB}$或$\overset{\frown}{ACB}$的記號同時代表圓弧或圓弧的度數。

如圖2-17(a)，若圓上兩弦$\overline{AP}$和$\overline{BP}$交於圓上一點P，則我們稱$\angle APB$是一個**圓周角**，而$\overset{\frown}{ACB}$則稱為圓周角$\angle APB$所對的弧。在圖2-17(b)中有很多相對於$\overset{\frown}{ACB}$的圓周角，由於這些角和弦$\overline{AB}$所構成的三角形形狀不一，我們很自然的會以為這些圓周角的度數，大概沒有什麼特殊的關係。底下例題的結論可能會讓你覺得很訝異。

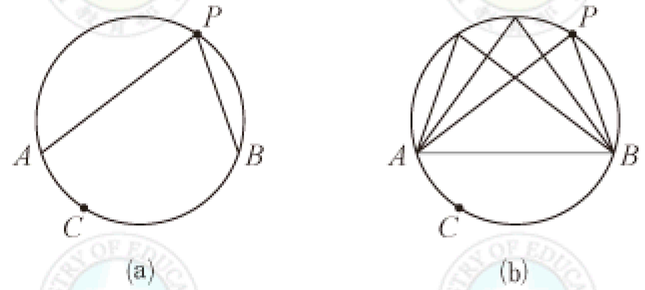
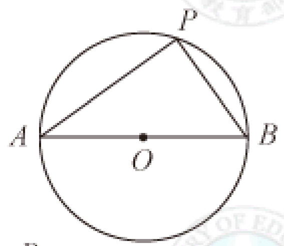


圖2-17

例1 Example

如右圖，$\overline{AB}$為圓O的直徑，在圓上任取異於A、B的一點P，說明圓周角$\angle APB$必為直角。

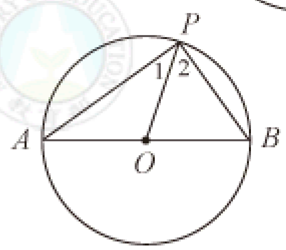


解題說明

如右圖，作$\overline{OP}$。

由於 $\angle 1=\angle A$ $\triangle OAP$為等腰三角形

$\angle 2=\angle B$ $\triangle OBP$為等腰三角形



由三角形內角和為180°，得

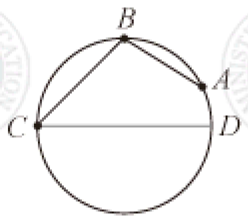
$$\angle A+\angle B+(\angle 1+\angle 2)=180^\circ$$

因此 $(\angle 1+\angle 2)\times 2=180^\circ$

所以 $\angle 1+\angle 2=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$

隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{CD}$為圓O的直徑，若圓上的A、B兩點在$\overline{CD}$的同側，說明$\angle ABC$是鈍角。



同學們有沒有注意到，$\angle APB=90^\circ$，正好是$\angle APB$所對弧的弧度180°的一半（圖2-18）。這個性質對於一般圓周角也成立嗎？

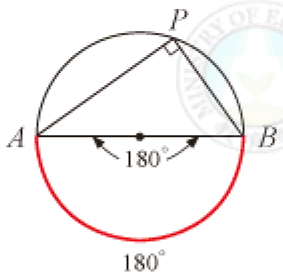
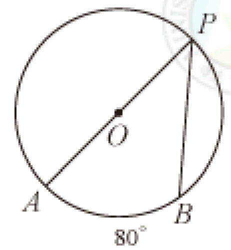


圖2-18

要回答這個問題，我們首先討論圓周角$\angle APB$其中一邊是直徑的情況。

例2 Example

如右圖，$\overline{AP}$為圓O的直徑，若已知$\overset{\frown}{AB}=80^\circ$，求$\angle APB$。



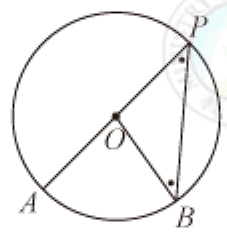
解題說明

連接$\overline{OB}$，則$\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=80^\circ$。

由於 $\overline{OB}=\overline{OP}$，所以$\triangle POB$為等腰三角形，

因此 $\angle AOB=2\angle APB$　三角形外角性質

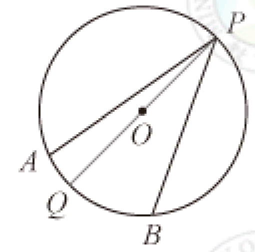
即 $\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=40^\circ$



下面的隨堂練習討論圓心O落在$\angle APB$內部的情況。

隨・堂・練・習

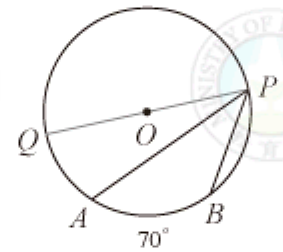
如右圖，$\overset{\frown}{AB}=70^\circ$，利用直徑$\overline{PQ}$與例題2求$\angle APB$。



底下的動動腦討論最後的情況：圓心O在$\angle APB$的外部。

動・動・腦

如右圖，$\overset{\frown}{AB}=70^\circ$，利用隨堂練習的想法求$\angle APB$。

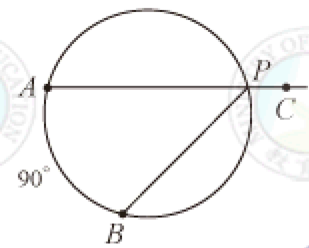


由上面的例題、練習、動動腦，我們知道

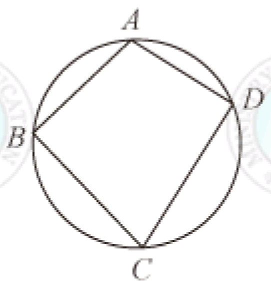
圓周角等於其所對弧度數的一半。

隨・堂・練・習

如右圖，$\overset{\frown}{AB}=90^\circ$，$C$為$\overrightarrow{AP}$上的一點。求$\angle BPC$。



例 3 Example



如右圖，圓上四點A、B、C、D構成一四邊形，說明$\angle A+\angle C=180^\circ=\angle B+\angle D$。

解題說明

由於 $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$

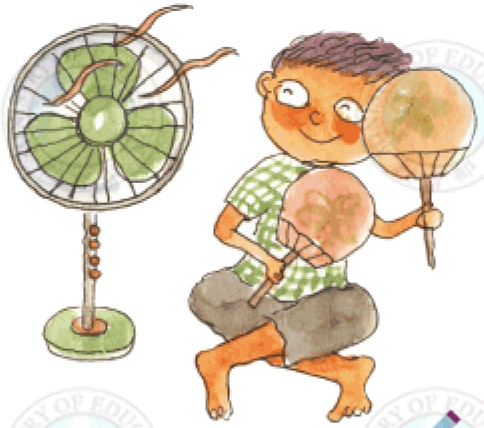
$\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$

所以 $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$

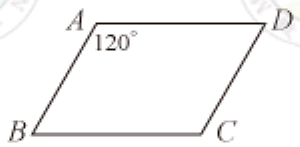
$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD})$

$=360^\circ\times\frac{1}{2}=180^\circ$

同理 $\angle B+\angle D=180^\circ$

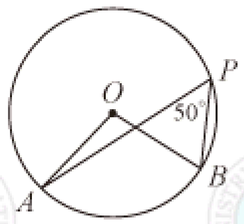


隨・堂・練・習



如右圖，有一平行四邊形$ABCD$，$\angle A=120^\circ$，說明A、B、C、D不會共圓。

例 4 Example



如右圖，$\angle APB=50^\circ$，求$\angle AOB$。

解題說明

因為 $\angle APB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

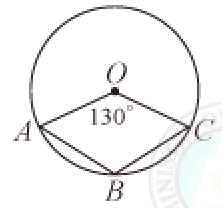
所以 $\overset{\frown}{AB}=2\angle APB=50^\circ\times2=100^\circ$

因此 $\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=100^\circ$

例4說明了圓心角與圓周角的關係：

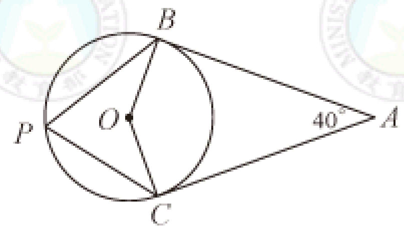
同一弧所對圓周角是所對圓心角的一半。

隨・堂・練・習



如右圖，圓心角$\angle AOC=130^\circ$，求$\angle ABC$。

隨・堂・練・習



如右圖，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別與圓O切於B、C。已知$\angle A=40^\circ$，求$\angle BOC$和$\angle BPC$。

動・動・腦

若有一圓周角$\angle APB=90^\circ$，則$\overline{AB}$是否一定是直徑？

弦切角

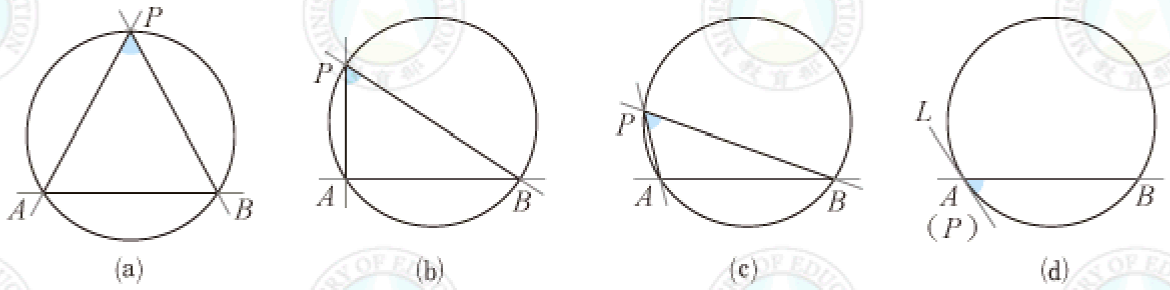


圖2-19

如圖2-19，如果我們將圓周角$\angle APB$的邊延伸成兩條直線$\overleftrightarrow{BP}$和$\overleftrightarrow{AP}$，固定A、B，再將圓周角的頂點P沿著圓弧向A靠近。由圓周角的性質知道$\angle APB$的度數保持相同。最後當P和A重合時，$\overleftrightarrow{PA}$就會變成切於A點的切線L。此時，$\angle APB$就變成由切線L和弦$\overline{AB}$所形成的角，如圖2-19(d)中的藍色角，像這樣的角稱為**弦切角**。

由上述的圖示可知，此弦切角的度數應該等於圓周角$\angle APB$的度數，我們說明如下：

如圖2-20，設$\overleftrightarrow{AC}$切圓O於A點，$\overline{AB}$為一弦。現作直徑$\overline{AD}$，連接$\overline{DB}$。

由於　$\overline{OA}\perp\overline{AC}$

所以　$\angle CAB=90^\circ-\angle DAB$　$\overleftrightarrow{AC}$為切線

又因為　$\overline{DB}\perp\overline{AB}$

所以　$\angle ADB=90^\circ-\angle DAB$　$\overline{AD}$為直徑

因此　$\angle CAB=\angle ADB$

所以$\angle CAB$等於$\overset{\frown}{AB}$度數的一半。

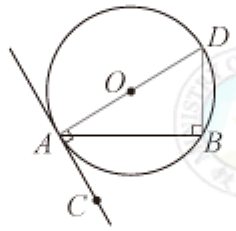


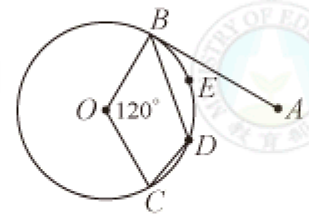
圖2-20

我們總結如下：

弦切角等於其夾弧度數的一半，
亦等於其夾弧所對應的圓周角。

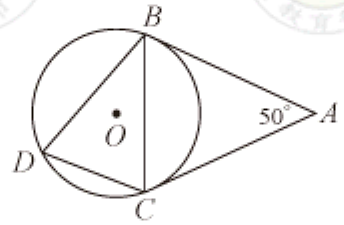
隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{AB}$與圓O相切於B，且D、E三等分$\overset{\frown}{BDC}$。若$\angle BOC=120^\circ$，求$\angle DBA$及$\angle OCD$。



例5 Example

如右圖，D為圓O上的一點，且$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別與圓O相切於B、C，$\angle A=50^\circ$，求$\angle ABC$和$\angle BDC$。



解題說明

利用等腰三角形或弦切角為所夾弧一半的性質，都可以知道

$\angle CBA=\angle BCA$

所以　$\angle CBA=\dfrac{1}{2}(180^\circ-50^\circ)=65^\circ$　三角形的內角和為180度

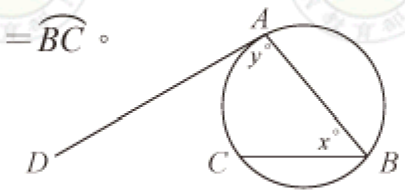
因此　$\angle BDC=\angle CBA=65^\circ$　弦切角等於圓周角

隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{DA}$與圓切於A，且C為圓上一點，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$。

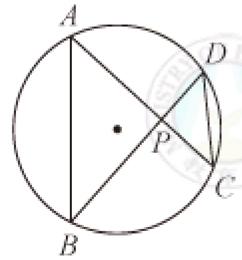
(1) 說明$y=2x$。

(2) 若D、C、B共線，且$\angle ADC=30^\circ$，求x。



例 6 Example

如右圖，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於P點，說明$\triangle ABP \sim \triangle DCP$。



解題說明

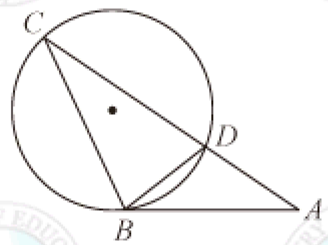
因為 $\angle APB = \angle DPC$　　對頂角相等

　　 $\angle ABP = \angle DCP$　　對同一弧的圓周角相等

所以 $\triangle ABP \sim \triangle DCP$　　AA相似性質

隨．堂．練．習

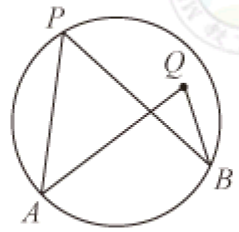
如右圖，$\overline{AB}$切圓於B，並且$\overline{AC}$交圓於D，說明$\triangle ABC \sim \triangle ADB$。



圓內角和圓外角

例 7 Example

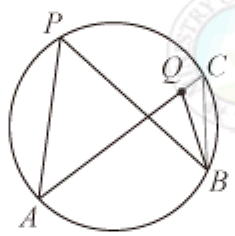
如右圖，點Q在圓內部，Q和P在$\overline{AB}$的同側，說明$\angle Q > \angle P$。



解題說明

如右圖，延長$\overline{AQ}$，使得$\overrightarrow{AQ}$和圓O交於C點，並連接$\overline{CB}$。因為$\angle APB$和$\angle ACB$所對的弧相同，所以

$$\angle APB = \angle ACB$$



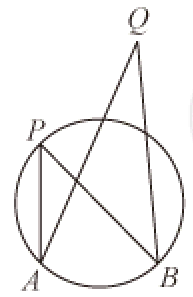
由於$\angle AQB$是$\triangle BQC$的外角，亦即

$$\angle AQB = \angle ACB + \angle QBC$$

所以$\angle AQB > \angle ACB$，因此$\angle AQB > \angle APB$。

動．動．腦

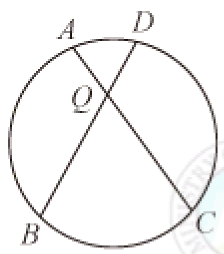
如右圖，點Q在圓外，且P、Q均在$\overleftrightarrow{AB}$的同一側，說明$\angle Q < \angle P$。



例7中的$\angle AQB$，因為頂點Q在圓內部，所以稱為**圓內角**。動動腦中的$\angle AQB$，則因為頂點Q在圓外部，故稱為**圓外角**。由上述可知，圓內角大於對同一弧的圓周角，而圓外角小於對同一弧的圓周角。

例 8 Example

如右圖，$\overset{\frown}{AD} = 40^\circ$，$\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$，求$\angle BQC$。



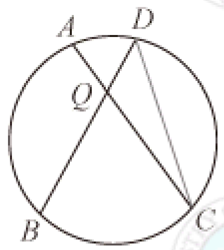
解題說明

如右圖，連接$\overline{CD}$，由例7的說明可知

$$\angle BQC = \angle QDC + \angle QCD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(90^\circ + 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ$$

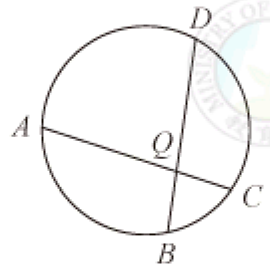


隨・堂・練・習

如右圖，A、B、C、D為圓上四點，Q為圓內一點。

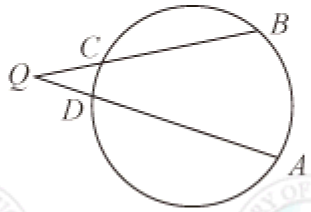
(1) 若$\overset{\frown}{BC}=40^\circ$，$\overset{\frown}{AD}=120^\circ$，求$\angle BQC$。

(2) 若$\angle AQD=90^\circ$，$\overset{\frown}{AB}=100^\circ$，求$\overset{\frown}{CD}$。



例 9 Example

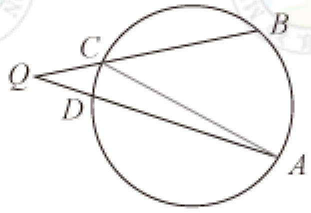
如右圖，已知$\overset{\frown}{AB}=90^\circ$，$\overset{\frown}{CD}=30^\circ$，求$\angle AQB$。



解題說明

如右圖，連接$\overline{AC}$，得

$$\begin{aligned}\angle AQB &= \angle ACB-\angle DAC\\ &=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})\\ &=\frac{1}{2}(90^\circ-30^\circ)\\ &=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ\end{aligned}$$

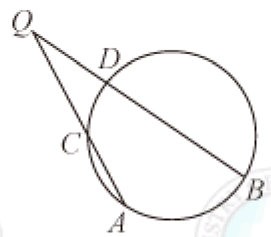


隨・堂・練・習

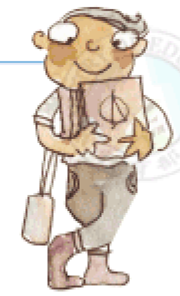
如右圖，A、B、C、D為圓上四點，Q為圓外一點。

(1) 若$\overset{\frown}{CAB}=140^\circ$，$\overset{\frown}{DCA}=80^\circ$，求$\angle AQB$。

(2) 若$\angle AQB=35^\circ$，$\overset{\frown}{CD}=45^\circ$，求$\overset{\frown}{AB}$。



摘要



1. 圓周角等於其所對弧度數的一半。
2. 同一弧所對圓周角是所對圓心角的一半。
3. 弦切角等於其夾弧度數的一半，亦等於其夾弧所對應的圓周角。

2-2 自我評量

1. 下列敘述，將正確的打「○」，錯誤的打「×」。

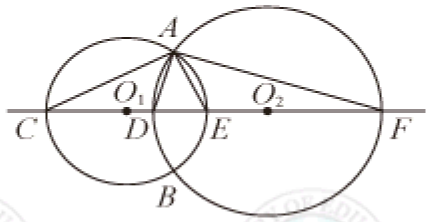
　(　　) (1) 若一圓周角所對的弧是120°，則此角為鈍角。

　(　　) (2) 若$\overline{AB}$為圓上直徑，C、D為圓上異於A、B的兩點，則$\angle ACB=\angle ADB$。

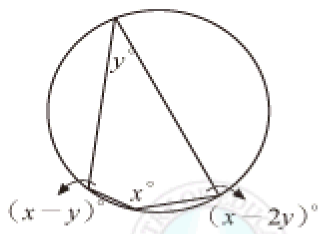
　(　　) (3) 圓中兩相異直徑的四個端點構成一個矩形。

　(　　) (4) 若由圓上四個點所構成的四邊形是平行四邊形，則此平行四邊形一定是矩形。

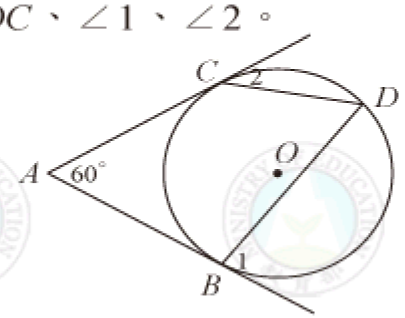
2. 如右圖，圓O_1和圓O_2交於A、B兩點，$\overleftrightarrow{O_1O_2}$與兩圓的交點為$C$、$D$、$E$、$F$。說明$\angle CAD=\angle FAE$。



3. 如右圖，求x、y。



4. 如右圖，A為圓O外一點，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$切圓於B、C兩點，D為圓上一點。已知$\angle BAC=60^\circ$，$\angle 1=2\angle 2$，求$\angle BDC$、$\angle 1$、$\angle 2$。



2-3 圓與多邊形

內接多邊形、外接圓與外心

給定一個圓，在圓上任意取n個點，$n>2$，再依順時針或逆時針的方向，以線段連結各點，得到一個n邊形，稱為此圓的**內接多邊形**。圖2-21是圓O內接三角形、內接四邊形、內接五邊形的例子。

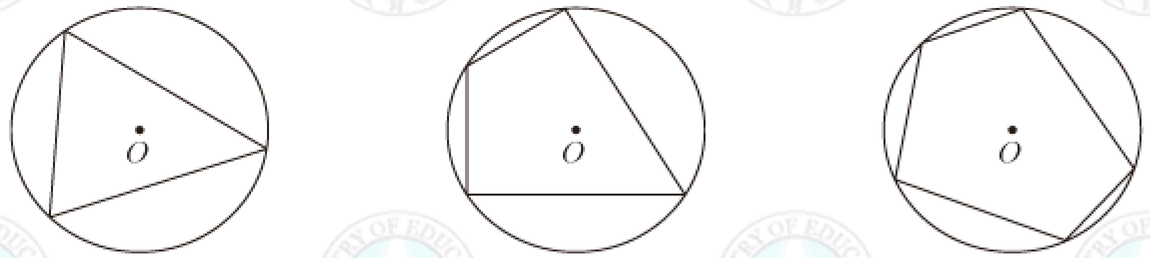


圖2-21

反過來，如果一個多邊形的頂點，都落在一個圓上，則稱此圓為此多邊形的**外接圓**。而外接圓的圓心，則稱為此多邊形的**外心**。如果一個多邊形有外心，則外心到此多邊形各頂點的距離皆等長，也就是外接圓的半徑（圖2-22）。

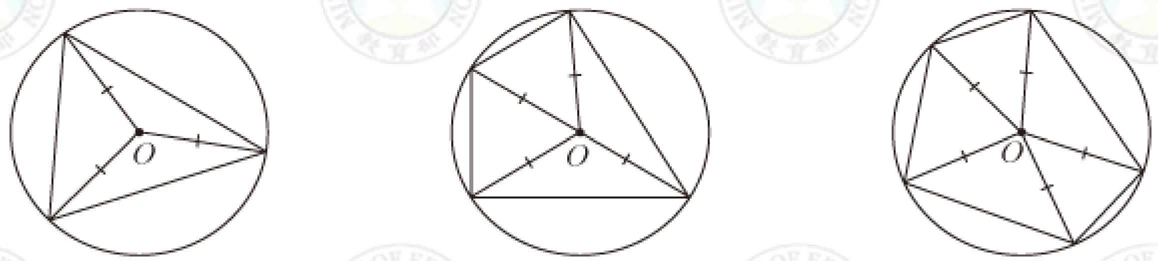


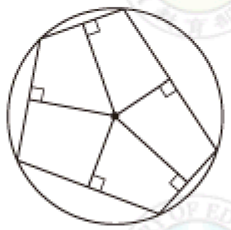
圖2-22

例 1 Example

若一多邊形有外心，說明外心是此多邊形各邊中垂線的交點。

解題說明

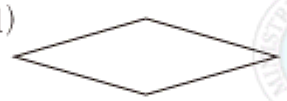
由於此多邊形有外接圓，因此任一邊都是該圓的弦，但因為圓上一弦的中垂線必過圓心，因此外心（亦即圓心）就是各邊中垂線的交點。右圖是五邊形的例子。



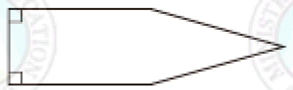
反過來說，若一多邊形每一邊的中垂線都相交於同一點，則此多邊形有外接圓，而且各中垂線交點就是此圓的圓心，也就是此多邊形的外心。

隨·堂·練·習

判斷下列各圖形哪些有外心？哪些沒有外心？

(1) 

(2) 

(3) 

一般來說，在平面上任意取兩直線，除非剛好找到互相平行的線，不然兩直線通常都會有交點。但是如果是任意取三條、四條、五條或更多直線，那麼除非是很特別的情形，不然這些直線不會同時交於一點。

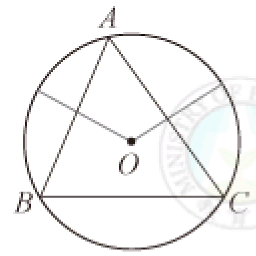
所以直覺上，多邊形各邊的中垂線通常不會交於一點。事實上，四邊形、五邊形等多邊形的確不一定有外心（例如上面的隨堂練習的(1)和(3)）。但底下我們將說明任意三角形一定有外心，也就是說，三角形三邊的中垂線一定會同時交於一點。

例 2 Example

說明△ABC必有外心。

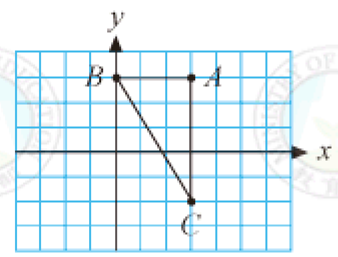
解題說明

由於A、B、C三點不共線，由2-1節知道，必有一圓O通過此三點A、B、C（如右圖）。因此圓O就是△ABC的外接圓，而圓心O就是△ABC的外心。



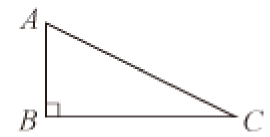
隨·堂·練·習

如右圖，坐標平面上有一△ABC，且A、B、C坐標為$(3, 3)$，$(0, 3)$，$(3, -2)$，求△ABC外心的坐標。



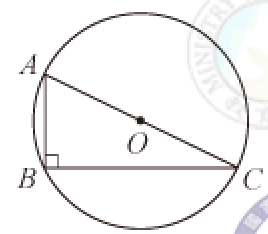
例 3 Example

如右圖，△ABC為直角三角形，說明△ABC的外心就是斜邊$\overline{AC}$的中點。



解題說明

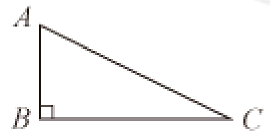
過A、B、C三點作一外接圓，如右圖。由於圓周角$\angle ABC = 90^\circ$，所以$\overline{AC}$必為直徑。但外心O為此圓的圓心，因此外心就是$\overline{AC}$的中點。



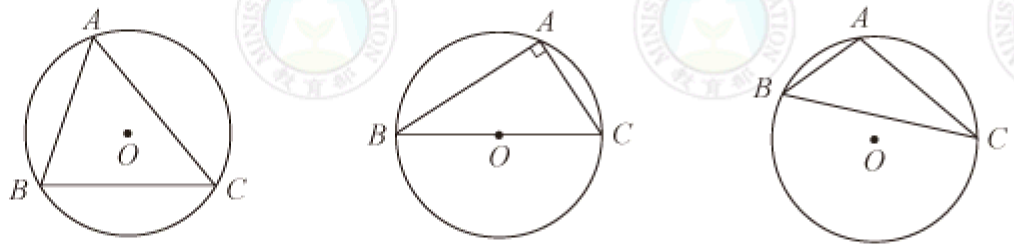
因為直角三角形的斜邊的中點是外心，所以直角三角形的斜邊中點到三頂點的距離相等。

隨・堂・練・習

如右圖，$\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，求外接圓的半徑。



三角形的外心不一定在三角形的內部，利用外接圓，可以看得很清楚兩者的關係，如圖2-23。

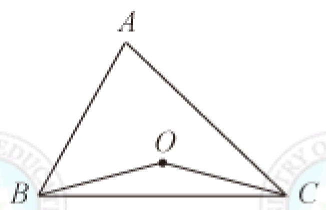


銳角三角形　　直角三角形　　鈍角三角形

圖2-23

動・動・腦

如右圖，若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則 $\angle BOC$ 和 $\angle A$ 有什麼關係？（提示：畫 $\triangle ABC$ 的外接圓）



接著考慮四邊形 $ABCD$ 及其外接圓，如圖2-24。2-2節的例3說明了：

$\angle A+\angle C=180^\circ$ 以及 $\angle B+\angle D=180^\circ$

也就是說

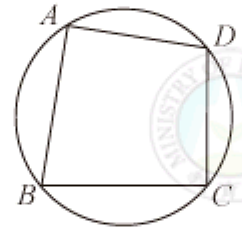
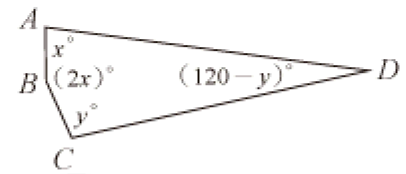


圖2-24

若四邊形內接於一圓，則此四邊形的兩組對角互補。

隨・堂・練・習

如右圖，有一四邊形 $ABCD$，若已知 $ABCD$ 有外接圓，求 x、y。



反過來說，如圖2-25，若四邊形 $ABCD$ 有一組對角互補，即

$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$ ……………(1)

則四邊形 $ABCD$ 有外接圓嗎？

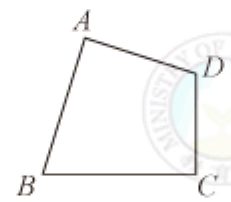


圖2-25

要回答這個問題，首先由圖2-26中，我們觀察到：

若點 D' 是射線 $\overrightarrow{AD}$ 上的點，同時

$\angle BCD'=\angle BCD$

則 D' 點就會是 D 點。

這個觀察可以用來說明 A、B、C、D 四點共圓，說明如下：

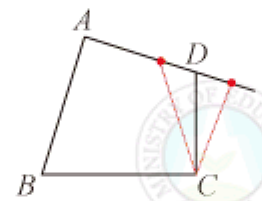


圖2-26

如果紅點（D'）不是 D 點，則 $\angle BCD'\neq\angle BCD$。

首先，有一圓O會通過A、B、C三點，如圖2-27(a)，其中D'是射線$\overrightarrow{AD}$和圓O的交點。由於$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AD'}$是同一條射線，所以

$\angle BAD=\angle BAD'$

因為A、B、C、D'共圓，如圖2-27(b)，所以

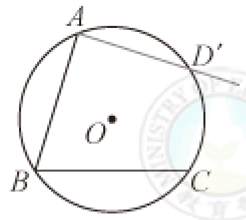
$\angle BAD'+\angle BCD'=180^\circ$ ⋯⋯⋯⋯(2)

比較(1)、(2)兩式，再加上$\angle BAD=\angle BAD'$，得到

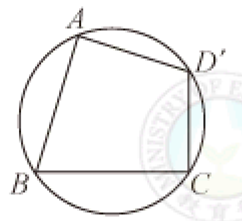
$\angle BCD'=\angle BCD$

利用前面的觀察，知道D'就是D。

如此，A、B、C、D四點共圓，也就是說，



(a)



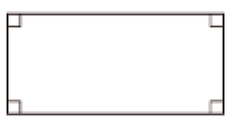
(b)

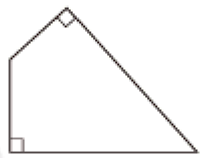
圖2-27

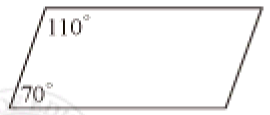
若四邊形的一組對角互補，則此四邊形有外接圓。

隨・堂・練・習

下列哪些四邊形有外接圓？

(1)


(2)


(3)


外切多邊形、內切圓與內心

如果給定一個圓，在圓上取n個點，$n>2$，以這些點為切點作切線，如果這些切線構成一個n邊形，則稱為此圓的**外切多邊形**。圖2-28是圓O外切三角形、外切四邊形、外切五邊形的例子。

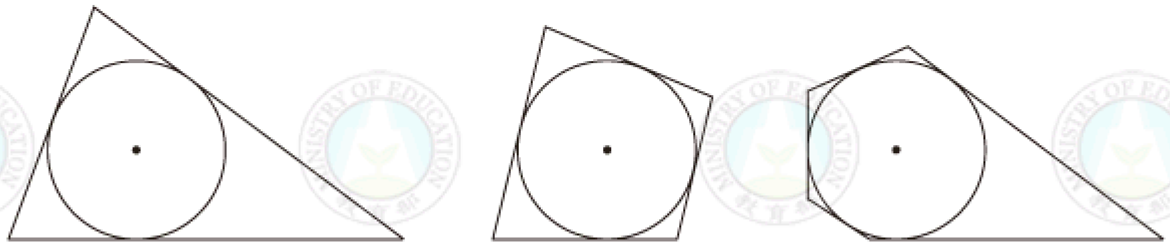


圖2-28

反過來，如果一個多邊形的內部有一個圓，和此多邊形的每一邊都相切，則稱此圓為此多邊形的**內切圓**。而內切圓的圓心，則稱為此多邊形的**內心**。如果一個多邊形有內心，那麼內心到此多邊形各邊的距離都等長，也就是內切圓的半徑（圖2-29）。

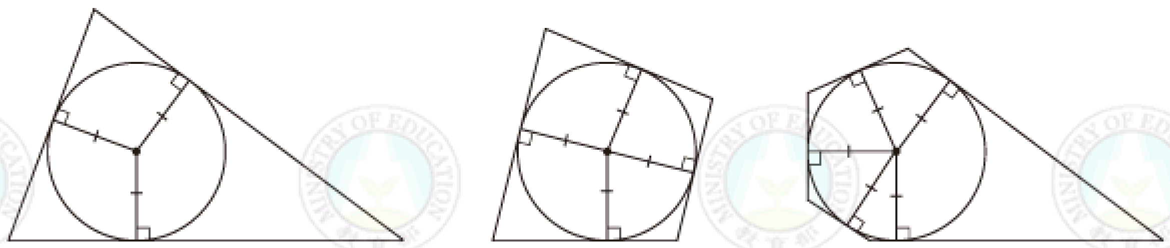


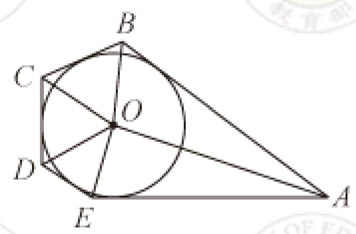
圖2-29

例4 Example

若一多邊形有內心，說明內心是此多邊形各內角的角平分線的交點。

解題說明

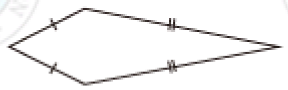
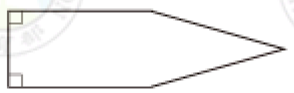
由於此多邊形有內切圓，由2-1節圓外一點的切線性質知道，此多邊形頂點到圓心的連線是該內角的角平分線，因此內心（亦即圓心）就是各內角的角平分線的交點。右圖以五邊形為例。



反過來說，若一多邊形各內角的角平分線交於同一點，則此多邊形有內切圓，而且各角平分線的交點就是此圓的圓心，也就是此多邊形的內心。

隨．堂．練．習

判斷下列各圖形哪些有內心？哪些沒有內心？

(1)  (2)  (3) 

由於內心是各內角角平分線的共同交點，所以和前面的討論一樣，照理說，多邊形各內角的角平分線應該不會剛好交於一點。但是和外心的情況類似，雖然四邊形、五邊形等多邊形的確不一定有內心，但任意三角形卻一定有內心，也就是說，三角形三內角的角平分線一定同時交於一點。

底下將說明三角形一定會有內心。注意到，任給一$\triangle ABC$，如果$\triangle ABC$有內切圓，由四邊形內角和為360度知道（圖2-30）

$\angle 1+\angle A=180^\circ$

$\angle 2+\angle B=180^\circ$

$\angle 3+\angle C=180^\circ$

由上面的關係式，給我們一個靈感來說明三角形一定有內心。

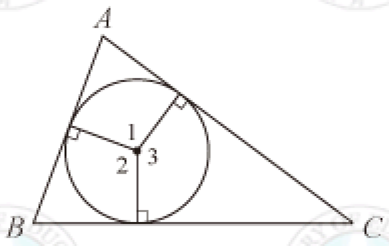
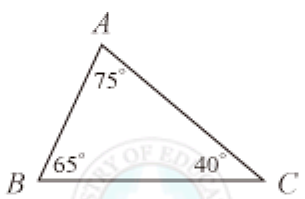
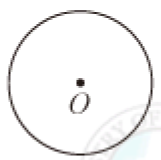


圖2-30

例5 Example

如右圖，有一$\triangle ABC$與圓O，試在圓O作一外切三角形$A'B'C'$，使得$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$。





解題說明

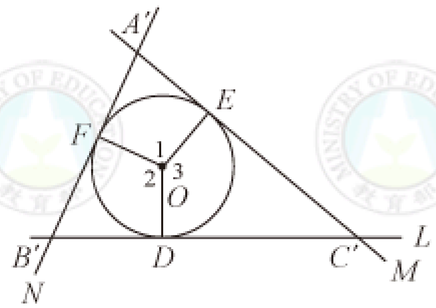
令 $\angle 1=180^\circ-\angle A=105^\circ$

$\angle 2=180^\circ-\angle B=115^\circ$

$\angle 3=180^\circ-\angle C=140^\circ$

由於$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$，在圓$O$作$105^\circ$、$115^\circ$、$140^\circ$的圓心角，分別在圓上得$D$、$E$、$F$點如右圖。

再過D、E、F分別作切線L、M、N構成$\triangle A'B'C'$。所以



$\angle A'=180^\circ-\angle 1=180^\circ-105^\circ=75^\circ=\angle A$

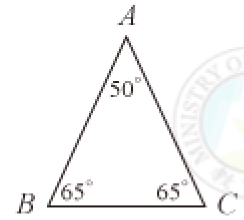
$\angle B'=180^\circ-\angle 2=180^\circ-115^\circ=65^\circ=\angle B$

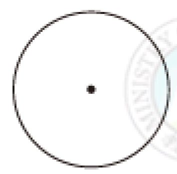
因此 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$ AA相似性質

例5有一個重要的應用，可以推理出$\triangle ABC$有內心。因為只要將$\triangle A'B'C'$作適當的縮放，就會和$\triangle ABC$全等，但是當$\triangle A'B'C'$縮放時，內切圓O也會跟著縮放成$\triangle ABC$的內切圓。由此，我們知道任一三角形必有內切圓，其圓心就是此三角形的內心，也就是三內角角平分線的共同交點。

隨．堂．練．習

如右圖，有一$\triangle ABC$，試仿例5在下面的圓畫出一外切三角形和$\triangle ABC$相似。





動・動・腦

我們可以模仿上面的做法，在一圓上得到和右邊矩形相似的外切四邊形嗎？

內切圓半徑

由於內心O到$\triangle ABC$三邊的距離都相等（記成d）。底下將說明如何計算d：

如圖2-31，連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$，由於

$\triangle OAB$面積$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OF}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times d$

$\triangle OBC$面積$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OD}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times d$

$\triangle OCA$面積$=\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{OE}=\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times d$

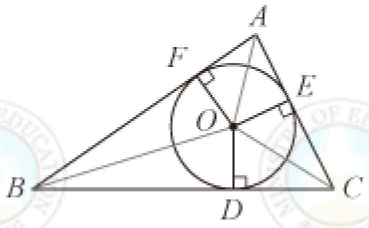


圖2-31

三式連加，可得

$\triangle ABC$面積$=\triangle OAB$面積$+\triangle OBC$面積$+\triangle OCA$面積

$=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\times d$

因此我們得到

$$\triangle ABC\text{面積}=\frac{1}{2}\times\triangle ABC\text{周長}\times d$$

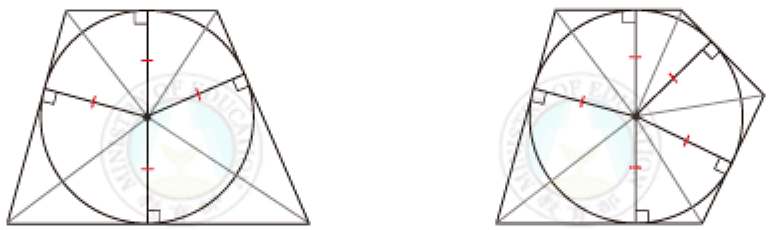


圖2-32

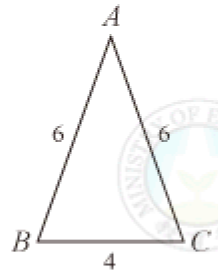
同樣的，若一多邊形有內心，則其內心到各邊距離相等，因此上面的性質並不是三角形獨有的性質，例如圖2-32中的四邊形或五邊形，都可以利用內心到頂點的連線，將該圖形分割成四個或五個三角形，再利用前面的說法，也可以說明上述公式對有內心的多邊形都是正確的。

例6 Example

如右圖，$\triangle ABC$為等腰三角形，腰長為6，底邊長為4。

(1) 求$\triangle ABC$的面積。

(2) 求內心O到各邊的距離。

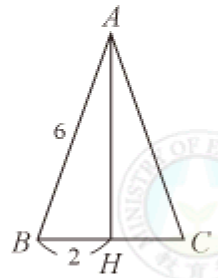


解題說明

(1) 如右圖，作$\overline{AH}$為$\overline{BC}$上的高。

所以 $\overline{BH}=2$ 　　$\overline{AH}$是$\overline{BC}$的中垂線

$\overline{AH}=\sqrt{6^2-2^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$



由此得$\triangle ABC$面積為

$\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

(2) 設內心O到各邊的距離為d。$\triangle ABC$的周長為$6+6+4=16$

因此 $8\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times 16\times d$

解得 $d=8\sqrt{2}\times\frac{1}{8}=\sqrt{2}$

由於內心O在$\angle A$的角平分線$\overline{AH}$上，所以內心O的位置如圖2-33所示，是距離H為$\sqrt{2}$的點。

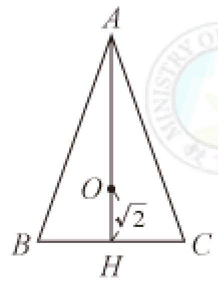


圖2-33

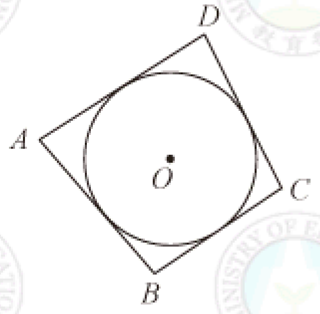
隨・堂・練・習

已知一三角形的周長24，面積為18，求此三角形內切圓的半徑。

前面討論過圓內接四邊形對角互補的性質，下面則討論圓外切四邊形的性質。

例 7 Example

如右圖，四邊形$ABCD$是圓O的外切四邊形，說明$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$。



解題說明

設四邊形$ABCD$和圓O切於E、F、G、H四點。

由於 $\overline{AH}=\overline{AE}$，$\overline{BE}=\overline{BF}$，

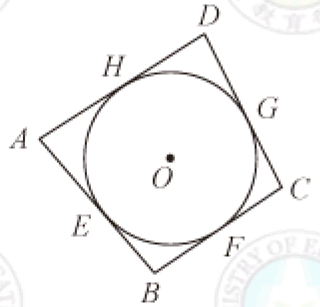
$\overline{CF}=\overline{CG}$，$\overline{DG}=\overline{DH}$， 切線性質

因此 $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AH}+\overline{DH}+\overline{BF}+\overline{CF}$

$=\overline{AE}+\overline{DG}+\overline{BE}+\overline{CG}$

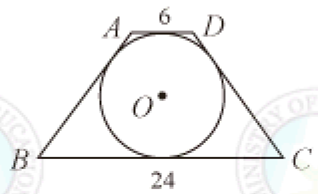
$=(\overline{AE}+\overline{BE})+(\overline{CG}+\overline{DG})$

$=\overline{AB}+\overline{CD}$



隨．堂．練．習

如右圖，等腰梯形$ABCD$有內切圓，其中$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AD}=6$，$\overline{BC}=24$，求$\overline{AB}$和內切圓半徑。



正多邊形的內心與外心

正多邊形和圓類似，有很高的對稱性，因此它們的內心和外心具有很好的性質。以正六邊形為例，我們任取一圓O，如圖2-34(a)，將繞圓心O的周角360°六等分為六個60°的圓心角。並依序標出六個點A、B、C、D、E、F，再依序連結此六點得到一六邊形$ABCDEF$（圖2-34(b)）。

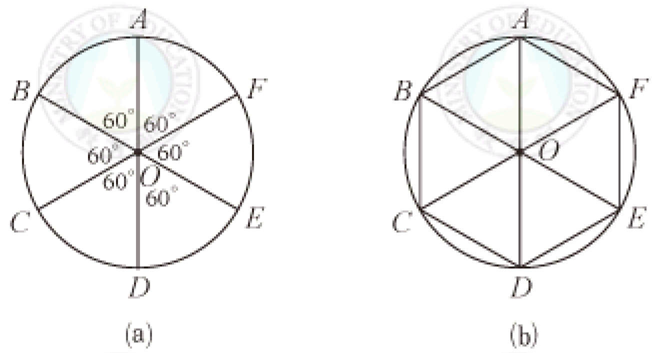


圖2-34

由於圓心角相等，半徑相等，由三角形SAS全等性質知道$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODE$、$\triangle OEF$、$\triangle OFA$彼此全等，所以此六邊形的六邊等長、六內角相等。換句話說，六邊形$ABCDEF$是一個正六邊形。由於圓O是此六邊形的外接圓，因此圓心O就是此正六邊形的外心。

但是在第一章，我們已經說明所有的正n邊形都相似，因此利用恰當的倍數去縮放圖2-34，就說明了所有正六邊形都有外心。

回到圖2-34(b)，由於正六邊形$ABCDEF$的六邊都是圓O中等長的弦。因此圓心O到各邊的弦心距都相等，以弦心距為半徑作圓如圖2-35中的藍圓，就得到此正六邊形的內切圓，換句話說，此正六邊形的外心和內心是同一點O。按照前述的相似形想法，透過適當的縮放，就說明了所有的正六邊形都有內心，而且任一正六邊形的內心和外心是同一點。

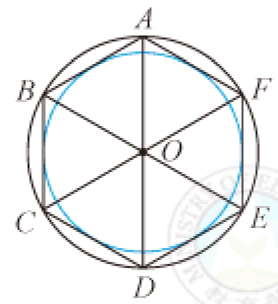
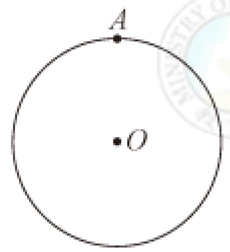


圖2-35

隨・堂・練・習

仿照前面的作法，在右邊的圓 O 上作出一個內接正五邊形，並作出此正五邊形的內切圓。



事實上，由上面的操作以及正多邊形的相似性，我們已經說明了

正多邊形皆有內心和外心，且內心和外心為同一點。

利用以上的操作，配合圓的對稱性，加上對稱軸的特殊性質，我們可以知道正多邊形的對稱軸如圖2-36。

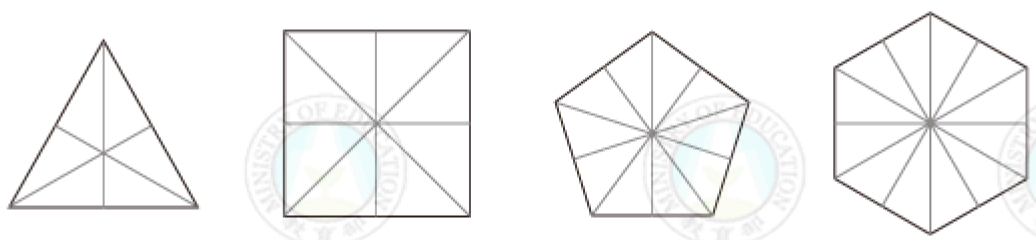


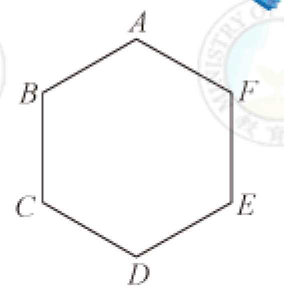
圖2-36

正多邊形的對稱軸可以歸納如下：

若一正多邊形邊數是偶數，
則其對稱軸是各內角角平分線或各邊的中垂線。
若一正多邊形邊數是奇數，
則其對稱軸是各內角角平分線（即各邊的中垂線）。

動・動・腦

如右圖，有一正六邊形 $ABCDEF$，說明 $\overline{AB}//\overline{DE}$。



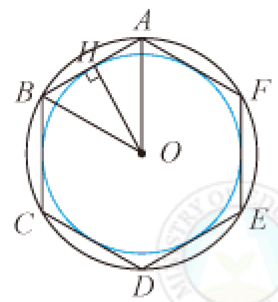
底下例8，說明正多邊形線對稱性質的應用。

例8 Example

設一正六邊形邊長為1，求此正六邊形內切圓及外接圓的半徑。

解題說明

如右圖，令正六邊形 $ABCDEF$ 的外心（也是內心）為 O，則外接圓的半徑等於 $\overline{OA}$，而且內切圓的半徑等於 $\triangle OAB$ 中 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{OH}$。由於正六邊形各內角等於



$$\frac{(6-2)\times 180^\circ}{6}=120^\circ$$

所以 $\angle OAB=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$ 　$\overleftrightarrow{OA}$ 為線對稱軸

同理 $\angle OBA=60^\circ$ 　$\overleftrightarrow{OB}$ 為線對稱軸

因此 $\triangle OAB$ 是邊長1的正三角形。

得 $\overline{OA}=1$

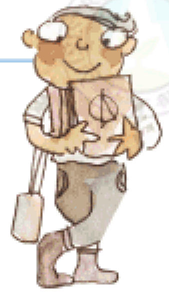
$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 　$\triangle OAH$ 為 30°-60°-90° 三角形

所以外接圓半徑為1，內切圓半徑為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

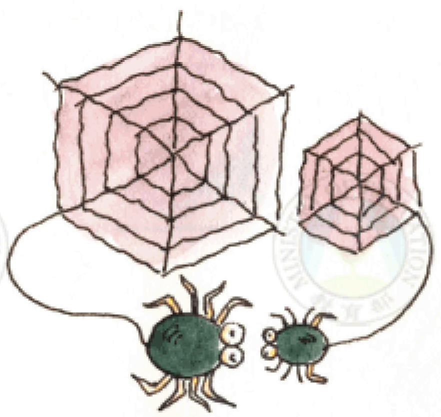
隨・堂・練・習

設一正方形邊長為2，求此正方形外接圓與內切圓的半徑。

摘要



1. 若一多邊形各邊的中垂線相交於同一點，則此多邊形有外接圓，且中垂線的交點即為外接圓的圓心。反之，若一多邊形有外接圓，則其各邊的中垂線必交於外接圓的圓心。
2. 任一三角形必有外心，即任一三角形的三邊中垂線必交於一點。
3. 若一多邊形各頂點的角平分線相交於同一點，則此多邊形有內切圓，而角平分線的交點即為內切圓的圓心。反之，若一多邊形有內切圓，則各頂點的角平分線必交於內切圓的圓心。
4. 任一三角形必有內心，即任一三角形三頂點的角平分線必交於一點。
5. 任一正多邊形的內心和外心是同一點。

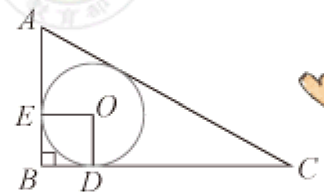


2-3 自我評量

1. 下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。
   (　　) (1) 圓的外切平行四邊形必為菱形。
   (　　) (2) 菱形必有內切圓。
   (　　) (3) 圓的內接箏形必為菱形。
   (　　) (4) 菱形必有外接圓。
   (　　) (5) 任一矩形必有外接圓。
   (　　) (6) 任一矩形必有內切圓。
   (　　) (7) 三角形的內心一定在三角形內部。
   (　　) (8) 三角形的外心一定在三角形外部。
   (　　) (9) 正三角形的內心和外心是不同的點。
   (　　) (10) 直角三角形的內心和外心是不同的點。

2. 若圓的半徑為4，求其內接正方形與外切正方形的面積。

3. 如右圖，有一直角三角形ABC，$\angle B$為直角，且O為內心，作$\overline{OD}\perp\overline{BC}$，$\overline{OE}\perp\overline{AB}$，試說明
   (1) $\overline{BE}=\overline{BD}$是三角形$ABC$內切圓半徑。
   (2) $\overline{OE}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}}{2}$。



2-4 數學證明

證明的意義

底下是我們從以前的課文截取下來的說明片段：

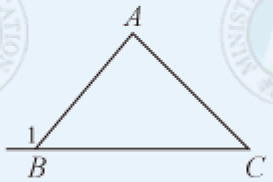
如右圖，試說明$\angle 1=\angle A+\angle C$。

由於 $\angle 1+\angle B=180^\circ$ 互補

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ 三角形內角和為180度

所以 $\angle 1+\angle B=\angle A+\angle B+\angle C$

即 $\angle 1=\angle A+\angle C$ 等量公理



上述的例子顯示，為了說明「外角等於內對角和」的性質，除了非常顯然的等號性質外，我們必須將每一個步驟的理由寫清楚，像這樣的說明過程稱為**證明**。

證明的過程並不是數學獨有的。古希臘的雅典是世界上第一個民主城邦，所有的國家大事，都要由雅典的公民一起討論決定。同學們都知道，當許多人一起討論時，每一個人不能只憑各人的喜好隨意發言，應該將自己主張的理由講清楚。所以雅典的公民就得練習**讓自己的意見有憑有據**，並且在辯論的過程中能看穿別人說法的漏洞或弱點。

也許是因為這樣的生活經驗，讓希臘人的思想特別重視論證的能力。希臘大哲學家亞里士多德發展了非常有名的三段論法（圖2-37）。

秦始皇是人

秦始皇會死 人皆會死

$\angle 1+\angle B=\angle A+\angle B+\angle C$

$\angle 1=\angle A+\angle C$ 等量公理

圖2-37

也就是說，在從一句話推論出另一句話的過程中，一定要有一個正確的敘述來作為依據。在上面的數學證明例子裡，我們可以看到右邊的藍框中都是定義或重要的性質，這些性質、定義加上問題原先的假設，共同推動整個證明的過程，並得到最後的結論。

底下讓我們再練習一下這樣的想法。

隨・堂・練・習

如右圖，A在$\overline{BC}$的中垂線L上。

在下列空格中填入適當的性質，證明$\overline{AB}=\overline{AC}$。

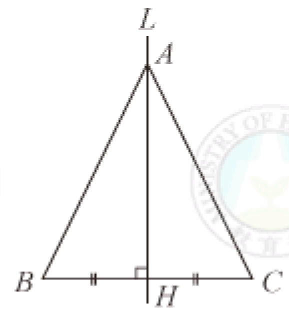
【證明】由於 $\overline{BH}=\overline{CH}$ （________）

$\angle AHB=\angle AHC$ （________）

$\overline{AH}=\overline{AH}$

所以 $\triangle ABH\cong\triangle ACH$ （________全等性質）

因此 $\overline{AB}=\overline{AC}$ （________）

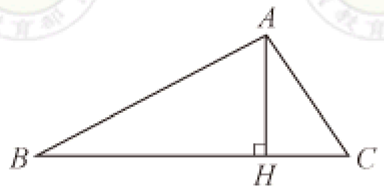


隨・堂・練・習

如右圖，有一$\triangle ABC$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$。

在下列的空格填入適當的算式，

證明$\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$。



【證明】由於 $\overline{AB}>$________（直角三角形三邊以斜邊最長）

$\overline{AC}>$________（直角三角形三邊以斜邊最長）

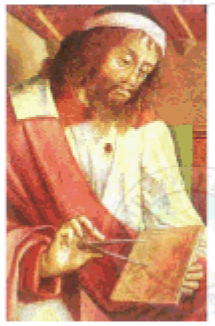
因此 $\overline{AB}+\overline{AC}>$________（不等式性質）

即 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$

希臘人非常愛好幾何學，但是當時眾人所熟悉的幾何知識，其實許多是更早期埃及人、巴比倫人靠經驗、嘗試錯誤而獲得的知識。這有點像我們在小學時期所學的幾何圖形知識一樣。

在亞里士多德的晚年，一位希臘數學家歐幾里得誕生了。在希臘愛好思想的文化薰陶下，他寫出一本人類文化史上的曠世巨著原本(Elements)。


亞里士多德


歐幾里得

由於當時的幾何知識很零亂，其中有些可能是錯誤的，因此歐幾里得將這些只憑經驗獲得的零碎知識加以整理。他所做的不只是分門別類而已，而是在所有的已知幾何知識間，建立起一種順序，希望能從絕對正確的幾何性質，利用亞里士多德的推理想法，把各式各樣幾何知識整個編串起來(圖2-38是一個例子)，成為一個整體。這樣一來，才能保證許多以前靠經驗嘗試得來知識的正確性，也才能辨認或改正錯誤的知識。

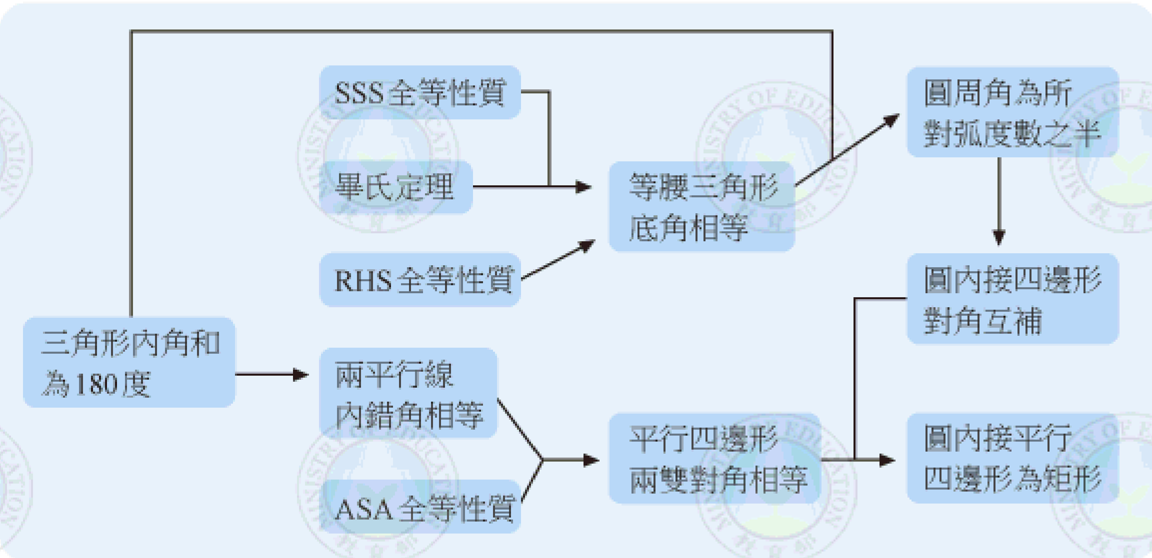
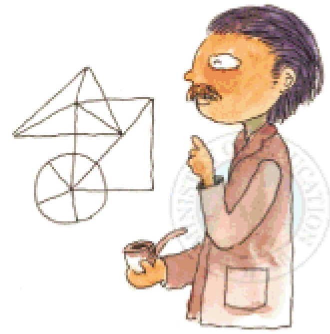


圖2-38

把零散、看似無關的經驗整理成確定的知識，是一個非常重要的成就。自歐幾里得的原本之後，世人慢慢開始相信人類可以利用這樣的方式，來獲得確定的知識，有了確定的知識，我們才能更有信心來探索這個宇宙的知識。

因為如此，嚴謹的數學成為所有知識的典範。許多哲學家、科學家如羅素、愛因斯坦都曾經坦言原本對自己年少時期的重要影響。

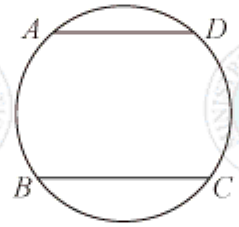


底下，請各位同學學習寫下簡單的證明，不但要寫下前後的步驟，還要學著讓自己的想法有憑有據。

隨・堂・練・習

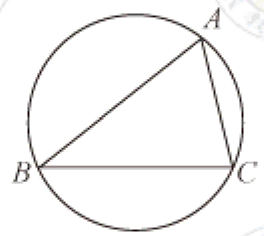
如右圖，已知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，證明$\overline{AD}//\overline{BC}$。

(提示：連接$\overline{BD}$或連接$\overline{AC}$)



隨・堂・練・習

若$\triangle ABC$的外接圓半徑是1，試利用「兩點間以直線為最短距離」的性質，證明$\triangle ABC$的周長小於2π。



一個幾何證明的例子──重心

雖然原則上，我們應該將所有的幾何性質證明的一清二楚，不過有許多性質，其實我們一看就能相信，推理並不困難。只有探討並證明那些令人意外又重要的性質，才能特別顯現出數學中最吸引人的特色。

(a) (b)

圖2-39

以角的性質為例，圖2-39(a)中的「$\angle 1$和$\angle 2$互補」完全是來自於平角的定義就是180°的角；又如圖2-39(b)中，要說明「對頂角相等」，則要用到互補的想法以及等量公理，需要想一想，但不困難。這樣的性質和「三角形內角和是180度」相比，顯然簡單多了。

動・動・腦

翻一翻這幾冊課本，有哪些是你覺得其實不用特別說明，也會相信的性質？哪些是不靠證明，你簡直無法想像的性質？

舉例來說，畢氏定理探討了直角三角形斜邊長和兩股長的數量關係，這絕對不是我們第一眼就能看出來的定理，雖然巴比倫人、中國人都早就知道3、4、5構成某些直角三角形的三邊比例，但這只是經驗而已，不能和探討一般直角三角形邊長關係的畢氏定理相提並論。

前面提到的「三角形內角和是180度」，也是一個令人驚訝的性質。我們雖然學過用剪紙拼貼的方式，來說明手上這個三角形「似乎」內角和是180度，但是我們怎麼知道任意的三角形內角和的確是180度呢？

在這一章裡面，我們也看到三角形的三條內角角平分線會恰好交於內心，三邊的中垂線恰好交於外心，這也是乍看不可思議，而且不能只靠我們粗糙、有誤差的作圖就能判定的性質。依靠三角形和圓的性質，才讓我們對這兩個性質，有一種恍然大悟的領會。

但是三角形的「心」可不只有內心和外心而已，底下要介紹的**重心**也是一個很重要的概念，而且可以再一次讓我們理解證明或推理的重要性。

每一個物體都有重心，可以想像成物體質量（重量）集中的中心。如果將平面圖形想成是一張薄薄的均勻紙卡，重心就是如圖2-40，原則上可以用手指或筆尖撐起，而不會搖晃傾斜的位置。

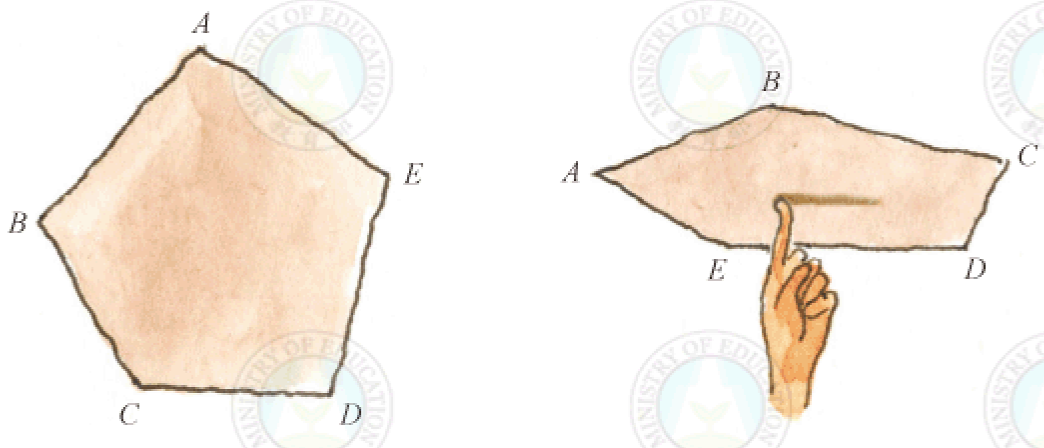
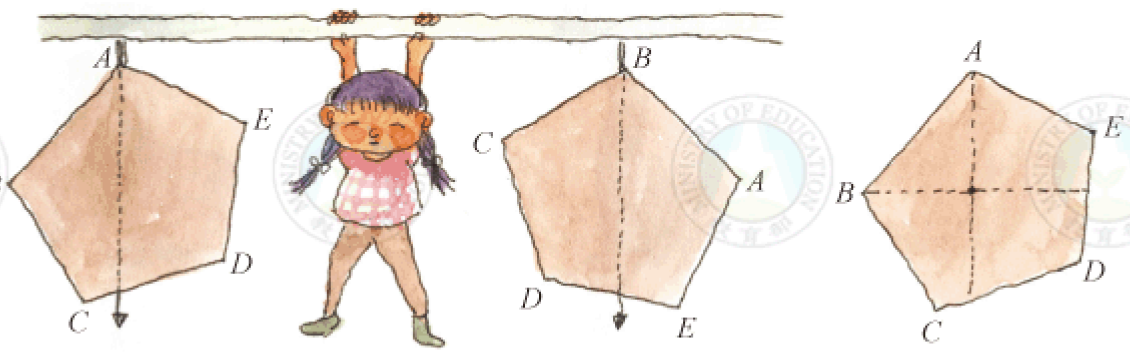


圖2-40

測量重心的方法，可以利用圖2-41的方法，將圖形懸吊起來，記錄過懸吊點的鉛直線，變換兩個懸吊點後（圖2-41(a)和(b)），兩鉛直線相交的點就是重心的位置（圖2-41(c)）。這是因為重心是質量（重量）中心的位置，因此懸吊起來後，鉛直線兩邊會彼此平衡，因此重心一定會落在鉛直線上。



(a) (b) (c)

圖2-41

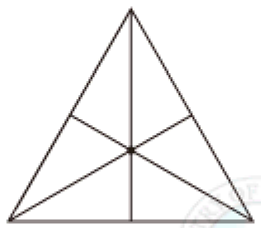
上面的想法，說明了一個線對稱幾何圖形的重心，因為圖形對稱的原因，一定會落在對稱軸上。例如圓的重心一定是圓心，因為圓心是唯一所有對稱軸都通過的點。

例 1 Example

說明正三角形的內心、外心、重心是同一點。

解題說明

如右圖，正三角形有三條對稱軸，就是各邊的垂直平分線，同時也是各內角的角平分線，因此這三條對稱軸的交點就是內心和外心。但因為重心在對稱軸上，所以正三角形的重心、內心、外心是同一點。

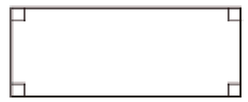


同樣的道理，所有正多邊形的重心、內心、外心也都是同一點。

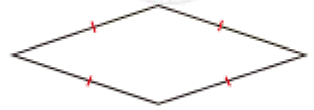
隨・堂・練・習

利用下列圖形的線對稱特性，找出其重心的位置。

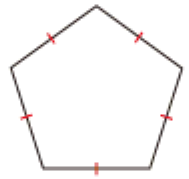
(1) 矩形



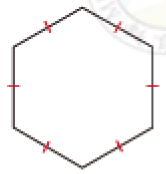
(2) 菱形



(3) 正五邊形



(4) 正六邊形



但是如果是一般的三角形怎麼辦呢？如圖2-42，由物理學的理論知道，在一般三角形的情況，鉛直線 L 兩側的面積正好相同。但由於△ABD和△ADC在$\overline{BD}$和$\overline{DC}$上的高相等，所以△ABD和△ADC的面積相等，就表示$\overline{BD}$必須等於$\overline{DC}$。

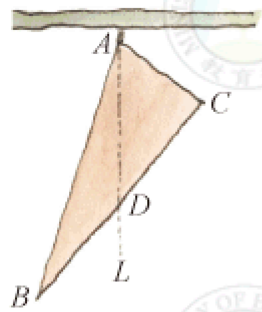


圖2-42

像$\overline{AD}$這樣連接三角形頂點到對邊中點的線段稱為**中線**，而△ABC的重心按照前面的說法應該就是圖2-43中，三條中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$的交點 G。以正三角形為例，其中線正好是各邊的中垂線，因此如例1所述三中線的確交於一點。

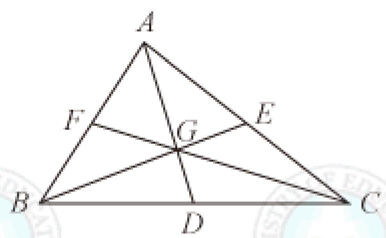
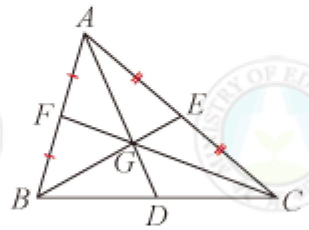


圖2-43

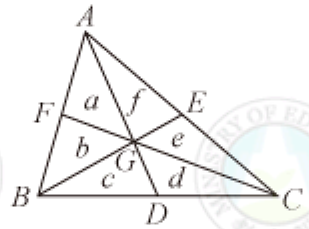
問題是如果不依賴物理學的想法，我們可以直接證明一般三角形的三條中線真的剛好交於一點嗎？

例 2 Example



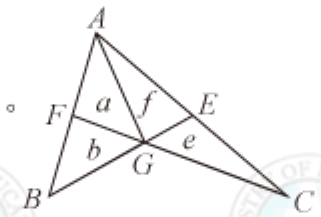
如右圖，中線$\overline{BE}$與$\overline{CF}$交於G，連$\overrightarrow{AG}$交$\overline{BC}$於D，證明D必為$\overline{BC}$的中點。

解題說明



如右圖，將以G為頂點之一的小三角形面積標為a、b、c、d、e、f，例如$\triangle GAF$的面積是a。底下我們將說明這些小三角形的面積有很好的性質，並以此說明$\overline{BD}=\overline{DC}$。

(1) 首先我們先說明$a=b=e=f$。



由於F是$\overline{AB}$的中點，$\overline{AF}=\overline{BF}$，且$\triangle GAF$中$\overline{AF}$邊上的高等於$\triangle GBF$中$\overline{BF}$邊上的高。

因此　$a=b$　　三角形面積$=\frac{1}{2}\times$底$\times$高

同理　$e=f$

再利用三角形面積公式，由於$\overline{AF}=\overline{BF}$，

因此　$\triangle AFC$面積$=\frac{1}{2}\triangle ABC$面積

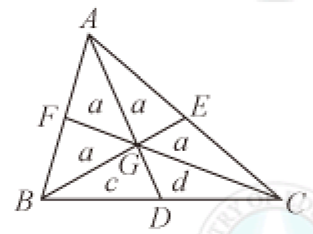
同理　$\triangle ABE$面積$=\frac{1}{2}\triangle ABC$面積

因此　$b+\cancel{a}+\cancel{f}=e+\cancel{f}+\cancel{a}$

故得　$b=e$　　等量公理

換句話說　$a=b=e=f$

(2) 其次我們將證明$c=d$。



由於$a=b=e=f$，我們利用a表示這些面積，將上圖重新標示如右圖，再一次運用三角形的面積公式，可知

$\overline{BD}:\overline{CD}=\triangle GBD$面積$:\triangle GCD$面積$=\triangle ABD$面積$:\triangle ACD$面積

由第二個等號可得$c:d=(c+2a):(d+2a)$

故得　$d(c+2a)=c(d+2a)$　　內項相乘等於外項相乘

化簡得　$\cancel{dc}+2ad=\cancel{cd}+2ac$

再同除以$2a$得　$c=d$　　等量公理

(3) 利用$c=d$與三角形面積公式，可知$\overline{BD}:\overline{CD}=c:d=1:1$

即$\overline{BD}=\overline{CD}$，所以$D$為$\overline{BC}$的中點。

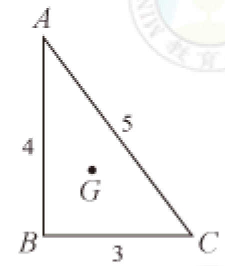
這表示$\overline{AD}$也是$\triangle ABC$的中線，因此$\triangle ABC$的三中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於一點G，就是$\triangle ABC$的重心。

事實上，由解題說明的方法，我們一併證明了三中線將$\triangle ABC$分成6個面積一樣的三角形，以圖2-43為例，我們有

$\triangle GBD$面積$=\frac{1}{6}\triangle ABC$面積

$\triangle GBC$面積$=\frac{1}{3}\triangle ABC$面積

隨・堂・練・習



如右圖，$\triangle ABC$為一直角三角形，其三邊為3、4、5，G為重心。

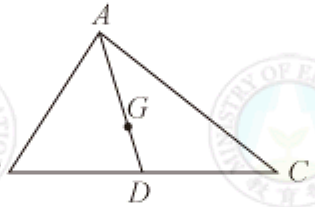
(1) 求$\triangle GAC$與$\triangle GBC$的面積。

(2) 求G到$\overline{AC}$、$\overline{BC}$的距離。

(3) G是否為$\triangle ABC$的內心？

例3 Example

如右圖，G為$\triangle ABC$的重心，證明$\overline{AG}:\overline{DG}=2:1$。



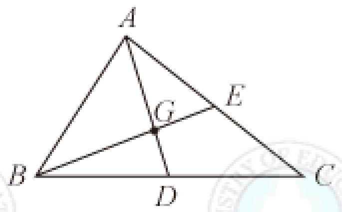
解題說明

如右圖，作中線$\overline{BE}$，由上述可知

$\triangle ABG$面積：$\triangle BDG$面積$=2:1$

但$\triangle ABG$在$\overline{AG}$上的高等於$\triangle BDG$在$\overline{DG}$上的高，

因此$\overline{AG}:\overline{DG}=\triangle ABG$面積：$\triangle BDG$面積$=2:1$。

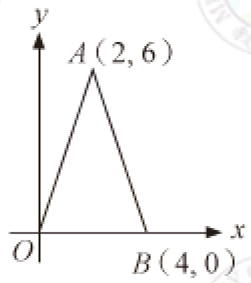


這表示

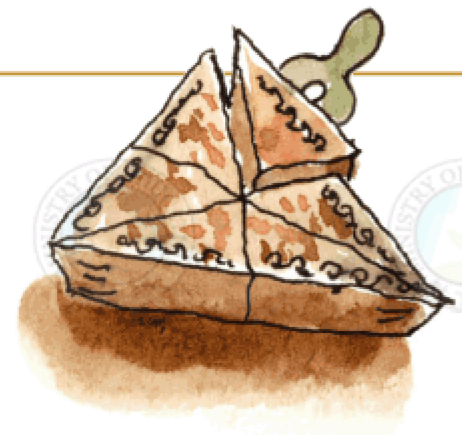
三角形重心到頂點的距離，是過此頂點中線長的$\frac{2}{3}$。

隨・堂・練・習

如右圖，坐標平面上有一等腰三角形AOB，求重心G的坐標。



由上述，我們證明了看似不太可能相交於一點的三條中線，竟然同時交於重心，並且揭示了重心的美妙性質，再一次顯示了數學證明的特色。



如何閱讀論證或證明

當然我們曾經學過的數學證明，有些過程十分冗長，有些還要透過額外的補助線才能證明，因此不是大家一時之間就能夠熟習的，但是至少我們應該學習如何閱讀證明。

從第一冊到現在，我們在課本上看過許多證明。課本上的證明是正確的，你在閱讀時只要能運用正確的推理過程，檢查從前一句話到後一句話是否有充分的理由就可以了。學習的過程雖然辛苦，但要讀懂並不困難。

不過我們會碰到的數學證明，並不見得一定是課本上的證明，也可能是網路上找到的、同學寫的、甚至是自己寫的，我們怎麼知道這些「證明」是對的呢？這就像我們閱讀報紙、廣告、書籍、網路文章一樣，作者將自己的意見推論寫成文字，但是我們在閱讀時，有時會覺得其中的想法不太對勁，我們要如何閱讀這樣的文章呢？

底下我們來探討閱讀論證或證明時，偶爾會碰到的問題。

㈠ 用反例來點出錯誤的敘述

要判斷別人說的話不對，有時最快的辦法就是舉出反例。例如，老師在鼓勵學生時，也許會說「如果小時候在校成績不好，你們就不要想成功了。」言下之意，如果一個人想要成功，一定要把書唸好。不過知名發明家愛迪生當然算是成功的典範，但他小時候的功課卻很差。愛迪生的例子就是「如果小時候在校成績不好，你們就不要想成功了。」的反例。老師也許本意很好，但是他的話卻是錯的。

想要善用反例來判斷他人敘述的對錯，需要豐富的知識，這是我們要努力求知的原因之一，免得受到他人的誤導。

底下我們來練習找出數學敘述的反例。

例4 Example

找出下面敘述的反例：

(1) 康雄說，他從邊長3、4、5或5、12、13或4、5、6的三角形例子，發現一個定理：「三角形的兩邊乘積大於第三邊。」這個敘述對嗎？

(2) 美蕙說，她發現一個質數的公式：n^2+n+1。因為她試$n=1$，結果是3；$n=2$，結果是7；$n=5$，結果是31。所以她歸納出這個結果，你覺得正確嗎？

解題說明

(1) 我們懷疑康雄的說法，所以找邊長最簡單的正三角形來測試。取邊長是$\frac{1}{2}$的正三角形，則兩邊乘積$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$小於第三邊長$\frac{1}{2}$。因此康雄的想法是錯的。康雄會這樣猜，可能是因為平常課本上的例子，很多邊長都是整數的緣故。

(2) 要測試美蕙的想法，最簡單的方式，就是有系統的表列出更完整的結果：

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2+n+1	3	7	13	21	31	43	57	73

顯然。在$n=4$和7時，21和57都有3的因數，因此美蕙的說法是錯的。

隨．堂．練．習

找出下面敘述的反例：

(1) 美蕙修正她的說法：「若n^2+n+1不是3的倍數，則n^2+n+1一定是質數。」你覺得美蕙新的說法對嗎？

(2) 若一個圓有外切四邊形，則此四邊形一定是菱形。

(二) 反過來的敘述不一定正確

我們都知道「人類是動物」，但反過來，「動物是人類」顯然是錯誤的；「正方形是矩形」，但反過來，「矩形是正方形」也是錯誤的。

這種錯誤在日常生活最容易以下面的方式出現：

校長鼓勵大家說：「只有大家合作無間，才能夠拿到冠軍。」

小明對小華說：「太好了，小華，你們隊的默契十足，一定是冠軍。」

校長說的話其實意思是「如果要拿到冠軍，那麼至少要合作無間才行。」他並沒有說合作無間就能得到冠軍，畢竟冠軍只有一個，但是可能有很多隊伍都很有默契。只是校長用這種方式的說法，比較有鼓勵的效果。

上面校長的說法，有時會用另一種方法呈現：

校長警惕大家說：「如果大家不能合作，就拿不到冠軍。」

小明對小華說：「太好了，小華，你們隊的默契十足，一定是冠軍。」

校長說的話其實和上一段的話意思一樣，小明卻還是做出錯誤的結論。各位想一想，日常生活的對話是不是經常有這種錯誤發生呢？

底下來看看數學中的例子。

例5 Example

判斷下列反過來的敘述是否正確：

(1) 已知「如果$a=1$，則$a^2=1$。」問敘述「如果$a^2=1$，則$a=1$。」是否正確。

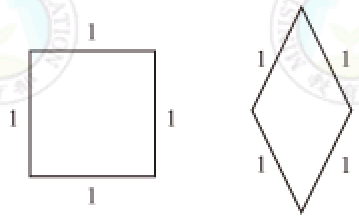
(2) 已知「若兩四邊形全等，則四對應邊相等。」問敘述「如果兩四邊形四對應邊相等，則此兩四邊形全等。」是否正確。

解題說明

⑴ $a=-1$顯然是「$a^2=1$則$a=1$」的反例，所以這敘述是錯的。

⑵ 敘述是錯的，我們可以找最熟悉的例子。

如右圖，邊長是1的正方形和邊長是1但不是正方形的菱形，就是明顯的反例。



隨．堂．練．習

⑴ 已知「若兩四邊形相似，則四對應角相等。」問敘述「若兩四邊形四對應角相等，則此兩四邊形相似。」是否正確。

⑵ 已知「如果$a=0$，則$a^2=0$。」問敘述「如果$a^2=0$，則$a=0$。」是否正確。

請注意，我們並沒有說反過來的敘述一定是錯誤的，上面的隨堂練習⑵就是一個例子。

敘述和反敘述都正確的情況，有時候很重要。例如

⑴ $\triangle ABC$中，「如果$\overline{AB}=\overline{AC}$，則$\angle B=\angle C$。」這是等腰三角形兩底角相等的性質。反過來，「如果$\angle B=\angle C$，則$\overline{AB}=\overline{AC}$。」則表示我們可以用底角相等來刻畫等腰三角形。

⑵ 平行線也有這樣的例子（如圖2-44）

「如果$L//M$，則$\angle 1=\angle 2$。」

「如果$\angle 1=\angle 2$，則$L//M$。」

這就是我們可以用內錯角相等來刻畫兩條直線平行的原因。

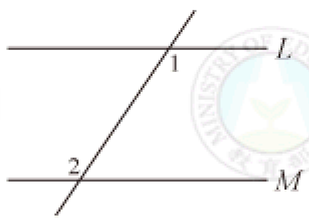


圖2-44

這一小節提醒大家，當我們在說明自己的看法或聆聽別人的想法時，要注意到不要錯用反過來的敘述，要知道有沒有錯，可以試試找反例。

摘要

1. 三角形的三條中線必相交於同一點，此點稱為此三角形的重心。
2. 三角形的重心到任一頂點的距離為過此頂點中線長的$\frac{2}{3}$。
3. 反例可以用來點出錯誤的敘述。
4. 就算一個敘述是正確的，反過來的敘述也不一定正確。

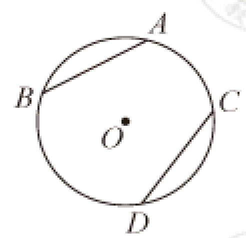
2-4 自我評量

1. 下面的敘述是錯誤的，試給出反例。

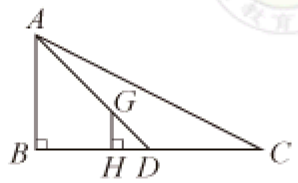
(1) 若a、b是正數，則$ab > a$。

(2) 若兩圓不相交，則這兩圓有外公切線和內公切線。

2. 如右圖，圓O上$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，證明$\overline{AB} = \overline{CD}$。

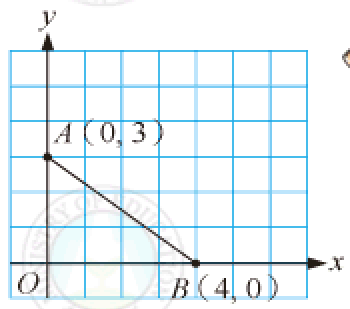


3. 如右圖，G為直角三角形ABC的重心，$\overline{GH} \perp \overline{BC}$，說明$\overline{GH} = \frac{1}{3}\overline{AB}$。



4. 如右圖，坐標平面上有一直角三角形AOB。

(1) 求外心J，內心I，重心G的坐標。



(2) J、I、G三點共線嗎？

第3章

二次函數

3-1 二次函數與圖形

在第二冊時，我們介紹過函數的概念。對於兩組數量A、B，如果知道A組的任一數量，就能決定B組的一個數量，我們就說B是A的函數。例如，大雄快走時，所花的時間和所走的距離如下表：

表3-1

時間（秒）	5	10	15	20	25
距離（公尺）	7	14	21	28	35

由表3-1，如果知道大雄走了多少秒後，就知道他走了多少公尺。因此，距離是時間的函數。如果再進一步觀察，時間和距離這兩組數量會滿足下面的關係式：

$$\frac{7}{5}=\frac{14}{10}=\frac{21}{15}=\frac{28}{20}=\frac{35}{25}=1.4$$

若以x（秒）代表時間，y（公尺）代表距離，則由上面的關係式得到

$$y=1.4x$$

上面的式子，將時間和距離的函數關係具體的表示出來。這個式子可以讓我們回答更多只靠查表無法解決的問題。例如，由這個式子可以算出大雄一分鐘可以走

$$y=1.4\times 60=84\text{（公尺）}$$

另外，若操場一圈有400公尺，則大雄走完一圈要花

$$x=\frac{400}{1.4}=\frac{2000}{7}\text{秒}\doteqdot 4\text{分}46\text{秒}$$

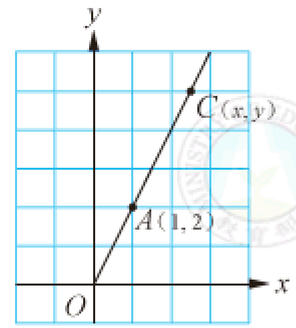
在第二冊曾經提過，像$y=1.4x$這樣的函數稱為一次函數，因為等式右邊的式子是一元一次式。

一次函數的圖形

在第二冊，我們曾經利用一次函數圖形是直線這個性質，來描繪一次函數的圖形，這一節我們要說明一次函數的圖形的確是直線。

例1 Example

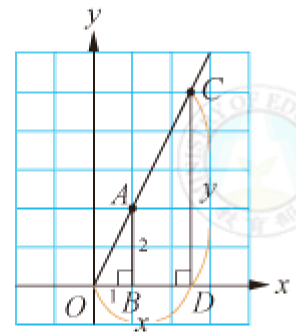
如右圖，A的坐標為$(1, 2)$，在第一象限取$\overleftrightarrow{OA}$上任一點C，設其坐標為(x, y)，求y與x的關係。



解題說明

如右圖，取$B(1, 0)$，$D(x, 0)$。則

$\overline{OB}=1$，$\overline{AB}=2$，$\overline{OD}=x$，$\overline{CD}=y$。



由AA相似性質可知

$\triangle COD \sim \triangle AOB$

因此　$\overline{CD}:\overline{AB}=\overline{OD}:\overline{OB}$　對應邊成比例

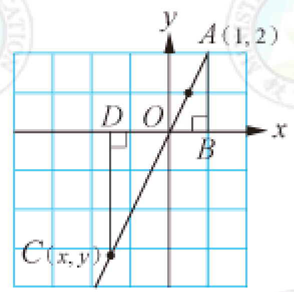
即　$y:2=x:1$

所以　$y=2x$

隨．堂．練．習

如右圖，A坐標為$(1, 2)$，在第三象限取$\overleftrightarrow{OA}$上任一點C，設其坐標為(x, y)，求y與x的關係。

（注意：$\overline{OD}=-x$，$\overline{CD}=-y$）



由上面的例子和隨堂練習可以知道，直線$\overleftrightarrow{OA}$上的點都滿足函數關係式$y=2x$。反過來，任何滿足$y=2x$關係的數對如$(a, 2a)$正好是直線$x=a$和$\overleftrightarrow{OA}$交點的坐標，因此任何滿足$y=2x$的數對都會落在$\overleftrightarrow{OA}$上。這表示函數$y=2x$的圖形的確是一條直線。

底下我們再說明一般的情況。

例 2 Example

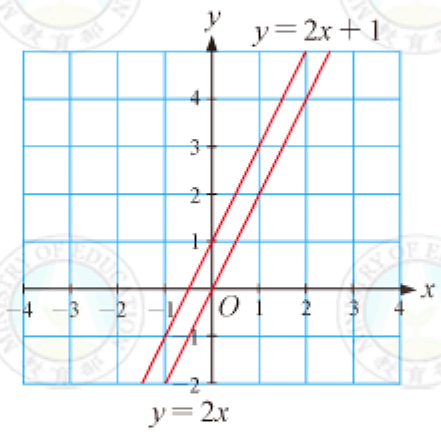
說明$y=2x+1$的圖形是一條直線。

解題說明

要說明$y=2x+1$的圖形是直線，我們可以比較$y=2x+1$的圖形和另一個函數$y=2x$圖形的關係，如下表：

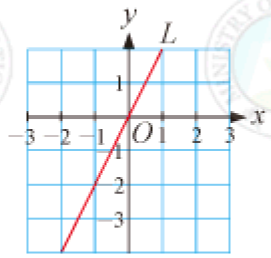
x	$y=2x$圖形的點	$y=2x+1$圖形的點
-2	$(-2, -4)$	$(-2, -4+1)$
-1	$(-1, -2)$	$(-1, -2+1)$
0	$(0, 0)$	$(0, 0+1)$
1	$(1, 2)$	$(1, 2+1)$
2	$(2, 4)$	$(2, 4+1)$

由上面列表的方式，可以知道$y=2x+1$圖形上任一點，是由$y=2x$圖形上的一點上移一個單位，例如$(1, 2+1)$是$(1, 2)$往上移一個單位。因此$y=2x+1$的圖形是將$y=2x$的圖形上移一個單位。但例1已說明$y=2x$的圖形是一條通過$(0, 0)$和$(1, 2)$的直線。因此$y=2x+1$的圖形也是一條直線，如右圖：



隨・堂・練・習

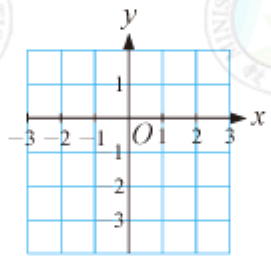
如右圖，直線L是函數$y=2x$的圖形，試利用L畫出$y=2x-3$的圖形。



以上的說明可以應用到所有的一次函數，因此一次函數的圖形是直線，也因此一次函數常稱為線型函數。別忘了線型函數除了一次函數外，還包括常數函數。

隨・堂・練・習

試在坐標平面上畫出$y=-3$的圖形。



二次函數

從第三冊開始，我們經常討論到許多平面圖形的面積，其中最簡單的就是正方形的面積。若假設正方形的邊長為x，正方形的面積為y，則正方形面積和邊長的關係是$y=x^2$。

像$y=x^2$這樣的關係式，我們只要知道x的值，就能知道y的值。例如若$x=10$則$y=10^2=100$；若$x=-10$，則$y=(-10)^2=100$。由於$y=x^2$

等號右邊是一個二次多項式，像這樣的函數稱為**二次函數**。$y=x^2-1$，$y=2x^2-x+1$，$y=-x^2+\frac{x}{2}-3$等都是二次函數的例子。一般來講，y是x的二次函數可表示成

$$y=ax^2+bx+c$$

其中a、b、c都是常數，而且a不等於0。

例 3 Example

下列各函數中，哪些是二次函數？

(1) $y=x+1$　(2) $y=-x^2$　(3) $y=(x-1)^2$　(4) $y=\frac{1}{x^2}$

解題說明

(1) y是x的一次函數，不是x的二次函數。

(2) 因為$-x^2$是x的二次多項式，所以$y=-x^2$是x的二次函數。

(3) 因為$(x-1)^2$是x的二次多項式，所以$y=(x-1)^2$是x的二次函數。

(4) 當$x\neq 0$時，符號$\frac{1}{x^2}$表示$1\div x^2$。因為$\frac{1}{x^2}$不是x的二次多項式，所以$y=\frac{1}{x^2}$不是x的二次函數。

隨・堂・練・習

下列各函數中，哪些是二次函數？

(1) $y=x-x^2$　(2) $y=3$　(3) $y=1-(x+2)^2$　(4) $y=\frac{1}{x}$

例 4 Example

若$y=(x-1)^2$，試完成下表：

x	-2	-1	0	1	2
y					

解題說明

當$x=-2$，則$y=(-2-1)^2=(-3)^2=9$

當$x=-1$，則$y=(-1-1)^2=(-2)^2=4$

當$x=0$，則$y=(0-1)^2=(-1)^2=1$

當$x=1$，則$y=(1-1)^2=0^2=0$

當$x=2$，則$y=(2-1)^2=1^2=1$

隨・堂・練・習

在下列空格填入適當的數使得該數對滿足$y=x^2+1$。

(1) $(-1,$ ______ $)$　(2) $(0,$ ______ $)$

(3) $(1,$ ______ $)$

例 5 Example

若數對$(1,-2)$滿足$y=-x^2+c$，求c。

解題說明

因為數對$(1,-2)$滿足$y=-x^2+c$，

所以$-2=-1^2+c$，

化簡得$-2=c-1$，解得$c=-2+1=-1$。

隨・堂・練・習

若數對$(0,2)$和$(1,-2)$滿足$y=ax^2+b$，求a和b。

二次函數的圖形

二次函數的圖形怎麼畫呢？讓我們複習一下第二冊中畫$y=x^2$圖形的步驟。首先我們先作一個表，如表3-2：

表3-2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

將數對$(-3, 9)$、$(-2, 4)$、$(-1, 1)$、…、$(3, 9)$標示在坐標平面上，並將這些點依序用直線（紅色）連起來，得到如圖3-1的折線圖。

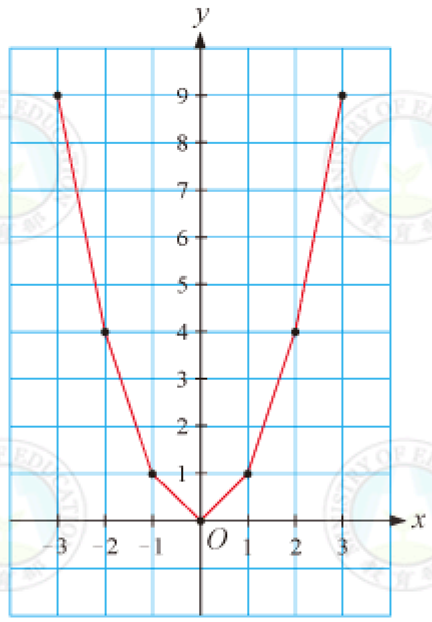


圖3-1

當然圖3-1並不是$y=x^2$真正的圖形，而只是一個近似的圖形。如果要更精確的把圖描出，可以在圖3-1裡加入更多的數對，例如代入$x=\pm\frac{5}{2}$、$\pm\frac{3}{2}$、$\pm\frac{1}{2}$…等，可以得到比圖3-1更接近$y=x^2$的圖形，如圖3-2。

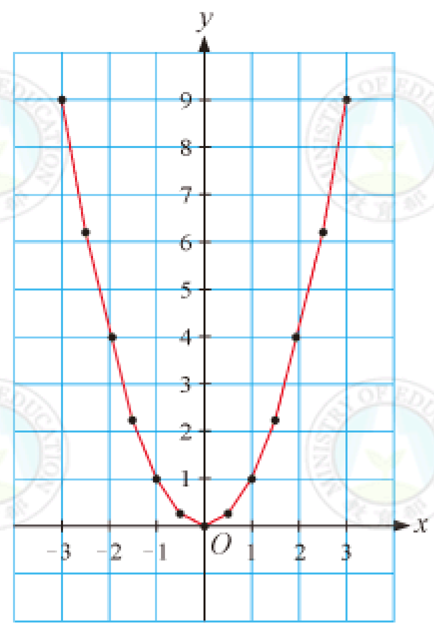
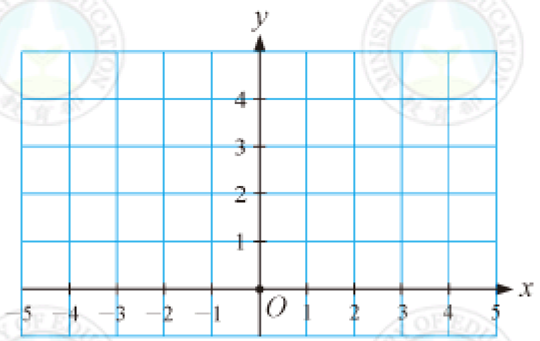


圖3-2

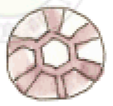
隨・堂・練・習

若$y=\frac{1}{2}x^2$，試完成下表，並畫出對應的折線圖。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



雖然圖3-2仍然是$y=x^2$的近似圖，但是已經非常接近$y=x^2$的真正圖形（圖3-3）。



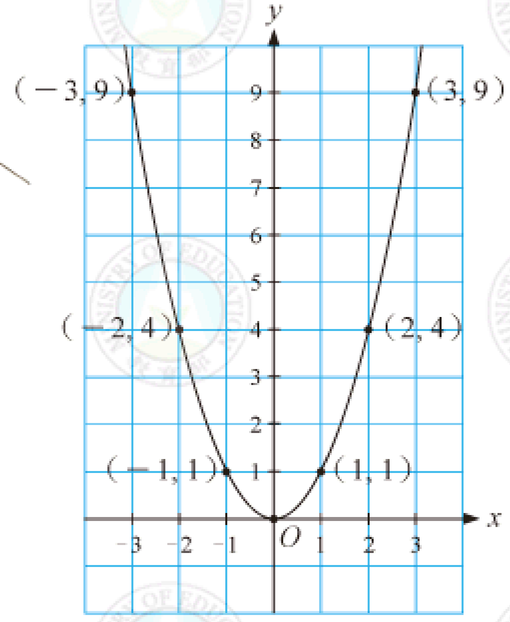


圖3-3

要很準確的畫出函數圖形並不容易，常常要藉助電腦軟體的輔助。在課堂裏，我們通常只需要畫出近似圖形，幫助我們理解函數就可以。但就算只畫近似圖，前述代值描圖的步驟還是很繁瑣。因此，我們需要多學習一些函數的性質，讓我們只要代入少數的點，就能畫出夠好的函數近似圖形。

二次函數的性質

首先，由圖3-3，我們注意到，圖形在y軸右側的點，如$(3, 9)$、$(2, 4)$、$(1, 1)$，它們對y軸的對稱點$(-3, 9)$、$(-2, 4)$、$(-1, 1)$都落在圖形上。這個觀察暗示$y=x^2$的圖形是對稱於y軸的線對稱圖形。事實上，對任意的正數k，

當$x=k$時，$y=k^2$

當$x=-k$時，$y=(-k)^2=(-k)\cdot(-k)=k^2$

所以對任何正數k，(k, k^2)與它對y軸的對稱點$(-k, k^2)$都在$y=x^2$的圖形上。也就是說，$y=x^2$的圖形的確對y軸對稱。

隨・堂・練・習

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$上的點$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$對$y$軸的對稱點坐標是多少？這個點在$y=\frac{1}{2}x^2$的圖形上嗎？

(2) 仿照上面的方式說明$y=\frac{1}{2}x^2$的圖形對稱於y軸。

由上面的練習，可以知道二次函數$y=ax^2$ $(a\neq 0)$的圖形一定會對y軸對稱。利用這個性質可以簡化描繪$y=ax^2$函數圖形的步驟。

例6 Example

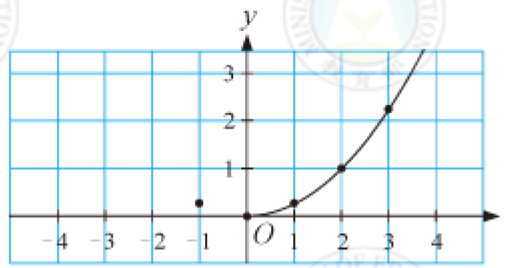
畫出$y=\frac{1}{4}x^2$的圖形。

解題說明

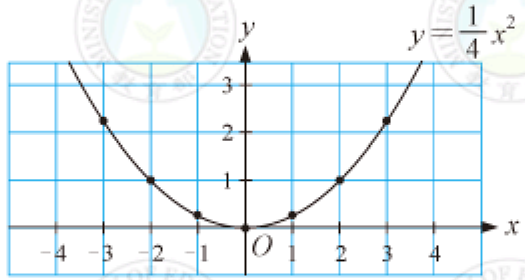
因為$y=\frac{1}{4}x^2$的圖形對稱於y軸，所以只要畫出y軸右側的圖形就可以了。

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$

將上表的數對標示在坐標平面，並依序以平滑的曲線將這些點連起來，如下圖(a)。然後再利用線對稱，完成在y軸左側的圖形，如下圖(b)。



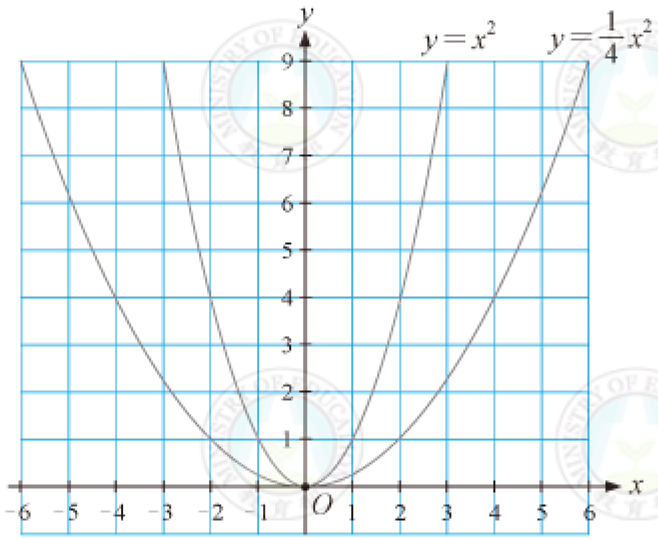
(a)



(b)

隨・堂・練・習

在下面的坐標平面上，畫出$y=\frac{1}{2}x^2$的圖形，並和$y=x^2$、$y=\frac{1}{4}x^2$的圖形做比較。



由這些圖形可以觀察到，它們不但都有對稱軸（y軸），而且圖形的開口都朝上。另外，這些圖形都有一個最低點，而且最低點是函數圖形與對稱軸的交點。

例 7 Example

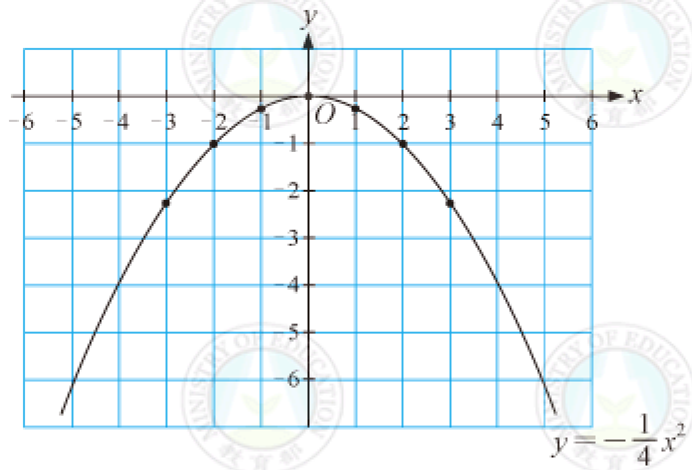
畫出$y=-\frac{1}{4}x^2$的圖形。

解題說明

因為圖形對稱於y軸，所以可以只考慮在y軸右側的數對，如右表。

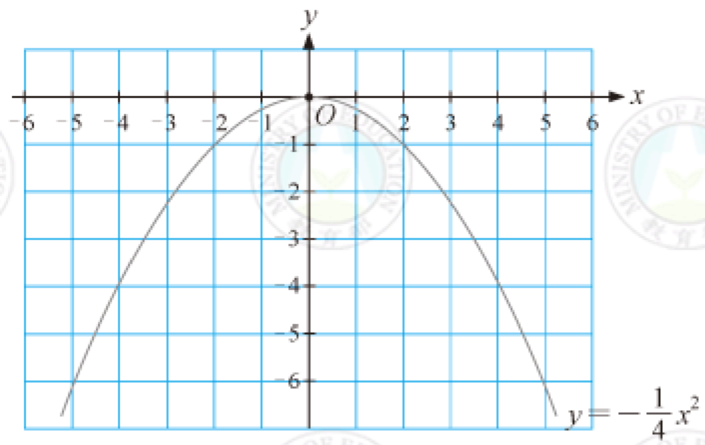
x	0	1	2	3
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$

將數對標示後，並用平滑曲線將點連起來，這就得到y軸右邊的圖形。再將圖形對y軸作對稱圖形，就得到$y=-\frac{1}{4}x^2$的圖形，如右圖。



隨・堂・練・習

在右邊的坐標平面上，畫出$y=-x^2$的圖，並和$y=-\frac{1}{4}x^2$的圖形做比較。



我們注意到，例7與隨堂練習的圖形和前面的圖形不同，它們的開口朝下，圖形有最高點，而最高點是圖形與對稱軸的交點。兩者主要的差別在於$y=ax^2$中，a是正數還是負數。

例8 Example

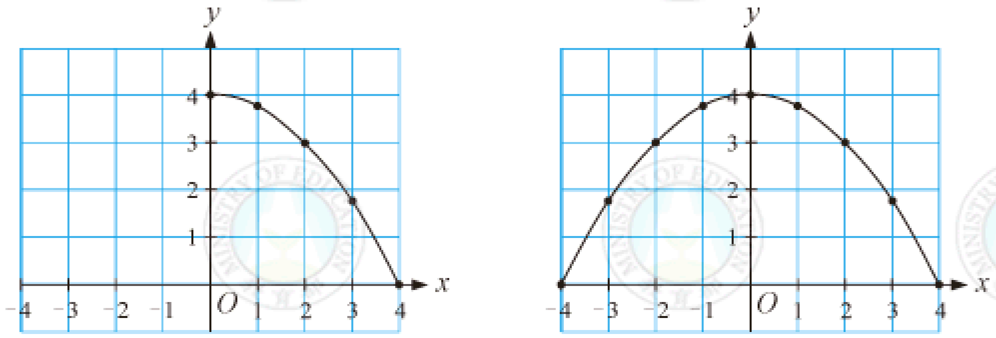
畫出$y=-\frac{1}{4}x^2+4$的圖形。

解題說明

利用130、131頁中，$y=x^2$的圖形對稱於y軸的說明，一樣可以說明$y=-\frac{1}{4}x^2+4$的圖形也對稱於y軸。底下我們將提供兩種作圖的想法，一種是依循例6、例7先作半邊圖形的方法，另一種則是比較$y=-\frac{1}{4}x^2$的圖形與$y=-\frac{1}{4}x^2+4$的圖形。先作表如下：

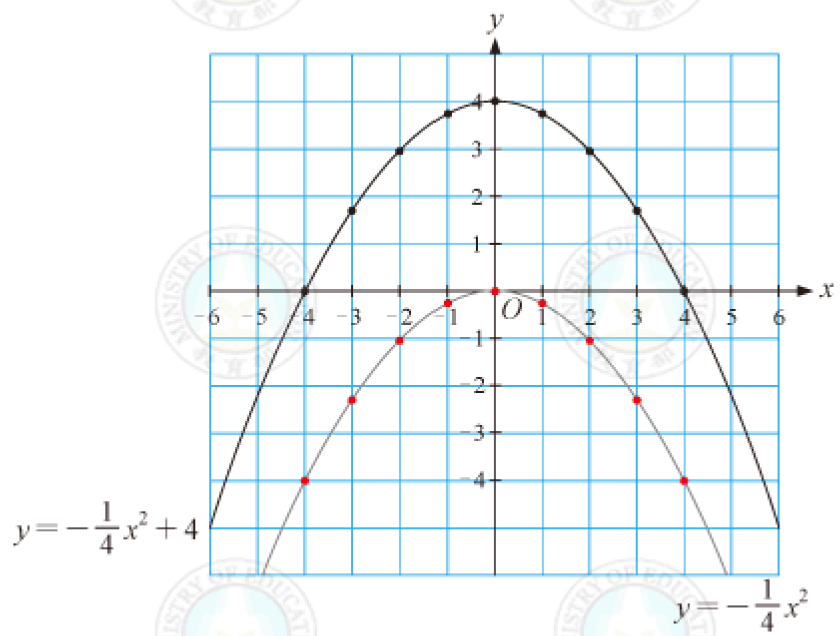
x	$y=-\frac{1}{4}x^2$	$y=-\frac{1}{4}x^2+4$
0	0	$0+4=4$
1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}+4=3\frac{3}{4}$
2	-1	$-1+4=3$
3	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{4}+4=1\frac{3}{4}$
4	-4	$-4+4=0$

(1) 仿照例6、例7，將數對$(0, 4)$、$(1, 3\frac{3}{4})$、$(2, 3)$、$(3, 1\frac{3}{4})$、$(4, 0)$標示在坐標平面，以平滑曲線將點連起來後（下圖(a)），再用對稱性完成y軸左側圖形，此即為$y=-\frac{1}{4}x^2+4$的圖形（下圖(b)），如下圖所示：



(a) (b)

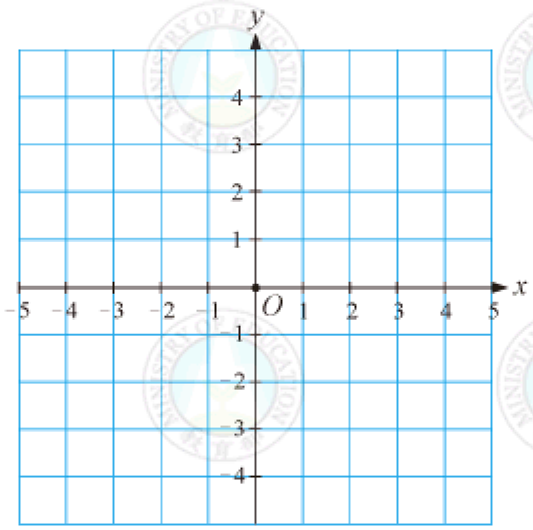
(2) 上表中，$y=-\frac{1}{4}x^2+4$欄裏的算式，表示$y=-\frac{1}{4}x^2+4$的圖形是$y=-\frac{1}{4}x^2$的圖形向上移4個單位。所以利用例7中$y=-\frac{1}{4}x^2$的圖形，再仿照例2的想法，也可以作出$y=-\frac{1}{4}x^2+4$的圖形。



由例8可知，$y=-\frac{1}{4}x^2+4$的圖形仍是一個對稱於y軸，向下開口的圖形，但其最高點是$(0, 4)$，最高點仍然是圖形本身和對稱軸的交點。

隨．堂．練．習

畫出$y=x^2-4$的圖形，
並求其最低點的坐標。



對於二次函數$y=ax^2+c$，$a\neq 0$，我們總結其圖形的性質如下：

(1) 無論a是正是負，其圖形都是線對稱圖形，對稱軸為y軸。

(2) 若$a>0$，其圖形開口向上，最低點為$(0, c)$。

(3) 若$a<0$，其圖形開口向下，最高點為$(0, c)$。

(4) 無論是最高點或最低點，都是對稱軸與圖形本身的交點。

隨．堂．練．習

試求出下列二次函數的最高點或最低點的坐標。

(1) $y=4x^2-4$　　(2) $y=8-\dfrac{x^2}{4}$

拋物線

當我們打籃球投籃時，籃球投出後的行進路徑（或稱軌跡）不是一條直線，而是如圖3-4的曲線。圖3-4是將原圖縮小後，繪在有方格紙背景的坐標平面上。

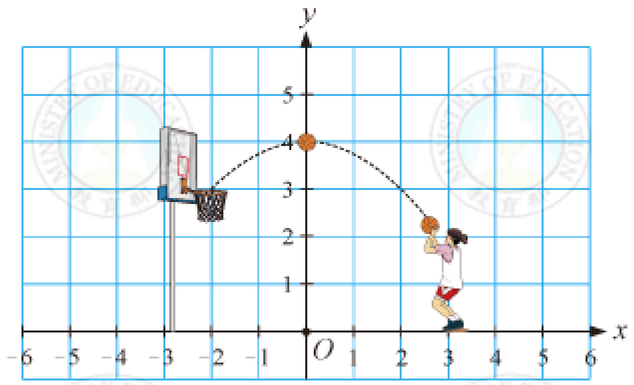


圖3-4

圖3-4的曲線看起來有些眼熟，事實上，若將例8的圖形移到圖3-4作比較（例如拿出附件1和圖3-4比較）會發現這兩個圖形完全一樣。因此我們可以用$y=-\dfrac{1}{4}x^2+4$來描述圖3-4中籃球投出後的軌跡。基於這個理由，二次函數的圖形（不論開口向上或向下）通常稱為**拋物線**。

例 9 Example

圖3-4中的籃球軌跡可以用$y=-\dfrac{1}{4}x^2+4$來表示。

(1) 若$x=\dfrac{1}{2}$，求此時籃球的高度。

(2) 當籃球高度為$3\dfrac{1}{2}$時，求x。

解題說明

(1) 由於$y=-\dfrac{1}{4}x^2+4$，所以當$x=\dfrac{1}{2}$時，

$$y=-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4=4-\frac{1}{16}=3\frac{15}{16}。$$

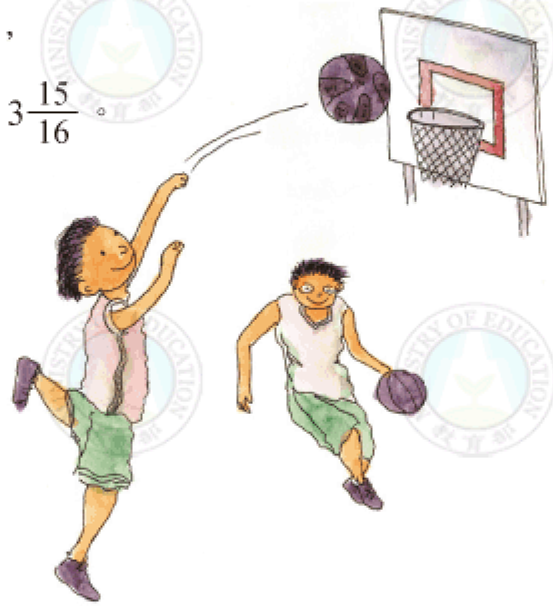
(2) 籃球高度$y=3\dfrac{1}{2}$時，表示

$$3\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x^2+4$$

得　$\dfrac{1}{4}x^2=4-3\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

即　$x^2=2$

得　$x=\pm\sqrt{2}$



隨・堂・練・習

有一二次函數 $y=2x^2+1$，

(1) 若 $x=-\frac{1}{3}$，求 y。　　(2) 若 $y=4$，求 x。

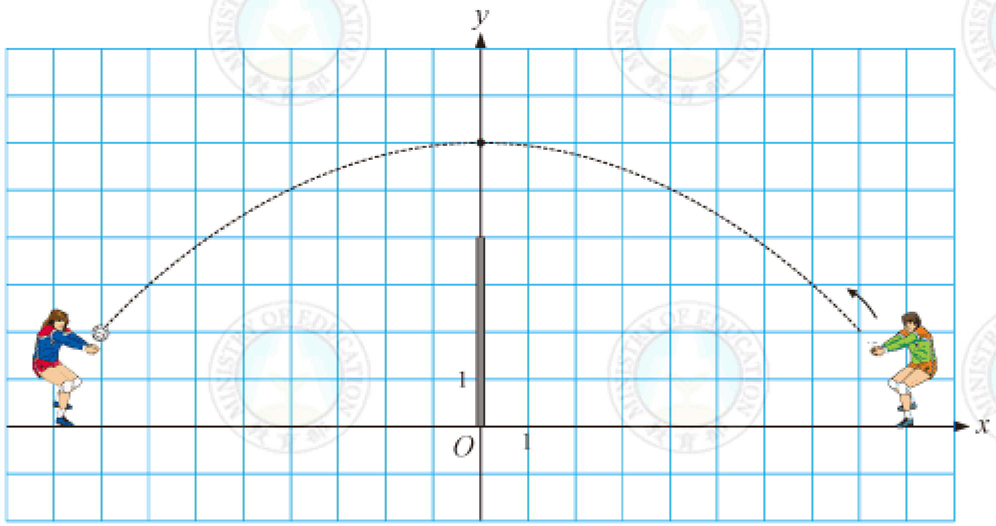


圖3-5

例10 Example

圖3-5是美華和廷聰打排球時，排球過網的路徑圖，並畫在坐標平面上。

(1) 求排球在行進中的最高點坐標。

(2) 若此拋物線是 $y=ax^2+6$ 的圖形，求 a。

解題說明

(1) 由圖3-5可知，排球在行進中最高的點是 $(0, 6)$。

(2) 由圖3-5，排球是在 $(8, 2)$ 點擊出，代入 $y=ax^2+6$，得

$$2=a\cdot 8^2+6$$

化簡得 $64a=-4$，解得 $a=-\frac{1}{16}$。

我們可將 $y=-\frac{1}{16}x^2+6$ 的圖形（見附件2），拿來和圖3-5比較，可以發現這兩個圖形相同。因此，圖3-5確實是二次函數 $y=-\frac{1}{16}x^2+6$ 的圖形。

隨・堂・練・習

若某拋物線是 $y=ax^2+c$ 的圖形，且其最低點是 $(0, 5)$，並通過 $(2, 10)$，求 a 和 c。

摘要

1. 利用相似性質，可說明一次函數的圖形是直線。
2. 無論a是正是負，$y=ax^2+c$的圖形是一個線對稱圖形，其對稱軸為y軸。
3. 若$a>0$，則$y=ax^2+c$的圖形是開口向上的拋物線，其最低點為$(0, c)$。
4. 若$a<0$，則$y=ax^2+c$的圖形是開口向下的拋物線，其最高點為$(0, c)$。
5. $y=ax^2+c$圖形的最高點或最低點是對稱軸與圖形本身的交點。

3-1 自我評量

1. 下列敘述，將正確的打「○」，錯誤的打「╳」。

（　　）(1) 因為$y=\dfrac{1}{x^2+1}$中有二次多項式，所以$y=\dfrac{1}{x^2+1}$是二次函數。

（　　）(2) $y=2x-1-x^2$不是二次函數。

（　　）(3) $y=x^2+10$的圖形有最高點，其坐標為$(0, 10)$。

（　　）(4) $y=-4x^2-1$的圖形有最低點，其坐標為$(0, -1)$。

（　　）(5) $y=x^2+4$的圖形是對稱於y軸的線對稱圖形。

（　　）(6) $y=-x^2$的圖形是對稱於x軸的線對稱圖形。

2. (1) 求$y=8$與$y=2x^2$圖形交點A、B的坐標，並求$\overline{AB}$。

(2) 求$y=8$與$y=\dfrac{1}{2}x^2$圖形交點C、D的坐標，並求$\overline{CD}$。

(3) 比較$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的大小。

3. 求下列各點對y軸的對稱點。

(1) $A(2, 2)$　　(2) $B(-3, -3)$　　(3) $C(a, b)$

3-2 配方法與拋物線

一般的拋物線並不一定是用$y=ax^2+c$來表示，例如我們可以將圖3-4的方格紙看作籃球圖片的背景，想像打籃球的畫面固定不動，而把作為背景的方格紙向左移動2單位，如圖3-6。

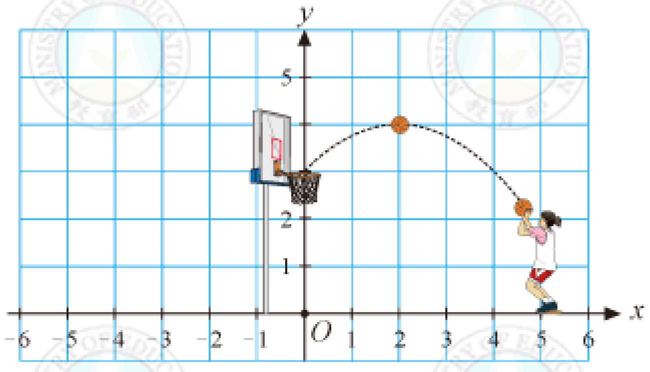


圖3-6

這麼一來，雖然行進的路徑還是拋物線，但其最高點位置變成$(2,4)$，對稱軸也變成鉛直線$x=2$。雖然圖3-6拋物線的最高點不在y軸上，對稱軸也不是y軸。但是它仍然有對稱軸，並且通過其最高點。

隨・堂・練・習

當$x=4$、2、0時，求出滿足$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$的數對，這些數對會落在圖3-6的拋物線上嗎？

事實上，拋物線可用一般二次函數$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的圖形來表示，所以拋物線的特殊性質如對稱軸、最高點或最低點，也是二次函數圖形的特殊性質。底下將利用這些性質，來描繪一般二次函數的圖形。

對稱軸

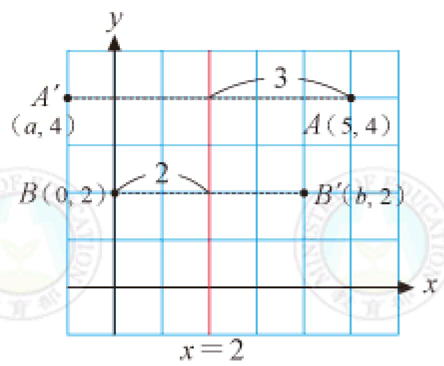
底下將先討論$y=a(x-h)^2+k$的圖形，首先我們要討論這個圖形的對稱軸，但在這此之前，我們要先理解如何計算對稱於鉛直線的對稱點坐標。

例 1 Example

求下列各點對$x=2$的對稱點坐標。

(1) $A(5,4)$ (2) $B(0,2)$

解題說明



(1) 如右圖，因為是對$x=2$對稱，因此對稱點A'的y坐標和A的y坐標一樣都等於4。設A'坐標為$(a,4)$，由於A'位於$x=2$的左側，故$a<2$。由於A、A'互為對稱點，因此A到$x=2$的距離等於A'到$x=2$的距離，所以

$$5-2=2-a$$

解得$a=-1$。因此A'為$(-1,4)$。

(2) 如右圖，設$B(0,2)$對$x=2$的對稱點為$B'(b,2)$，其中$b>2$。由於B到$x=2$的距離等於B'到$x=2$的距離，所以

$$2-0=b-2$$

解得$b=4$。因此B'為$(4,2)$。

隨・堂・練・習

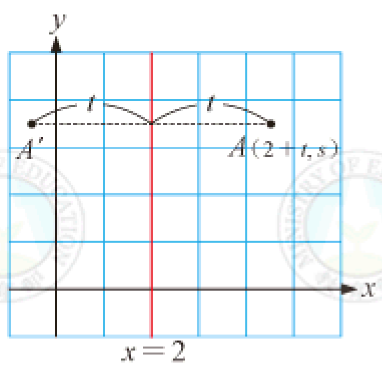
求下列各點對$x=-3$的對稱點坐標。

(1) $A(5,4)$

(2) $B(0, 3)$

例 2 Example

如右圖，若t為正數，求$A(2+t, s)$對$x=2$的對稱點A'的坐標。



解題說明

因為A'的y坐標和A的y坐標相等，

所以可設A'的坐標為(a, s)。

由於$t>0$，所以A在$x=2$的右側，

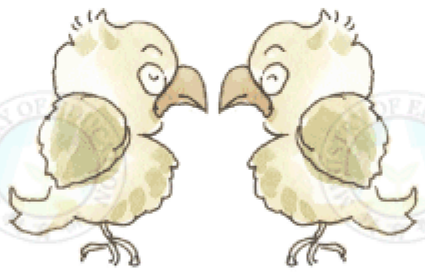
因此A'在$x=2$的左側，得到$a<2$。

由於A和A'到$x=2$的距離相等，所以

$$2+t-2=2-a$$

得 $a=2-t$

因此$A(2+t, s)$對$x=2$的對稱點為$A'(2-t, s)$。



由例2的公式，我們可以很快的算出對稱於$x=2$的對稱點坐標，例如求$A(6, 3)$對$x=2$的對稱點時，可先將6寫成$2+4$，由此得到其對稱點A'的坐標為$(2-4, 3)$即$(-2, 3)$。

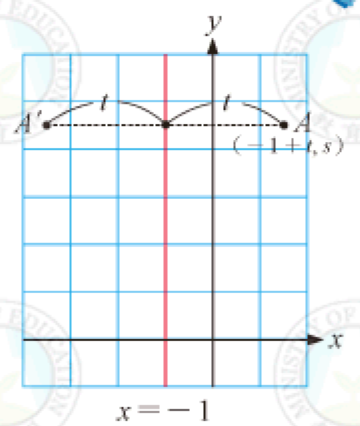
隨·堂·練·習

試求下列各點對$x=2$的對稱點。

(1) $A(8, 2)$ (2) $B(2\frac{1}{2}, -1)$

動·動·腦

如右圖，若t為正數，說明$A(-1+t, s)$對$x=-1$的對稱點為$A'(-1-t, s)$。



例 3 Example

說明$x=2$是$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$圖形的對稱軸。

解題說明

由於對$x=2$對稱的點，可以寫成$(2+t, s)$和$(2-t, s)$的樣子。我們先作一個表觀察一下：

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x	$2-4$	$2-3$	$2-2$	$2-1$	2	$2+1$	$2+2$	$2+3$	$2+4$
y	$-\frac{4^2}{4}$	$-\frac{3^2}{4}$	$-\frac{2^2}{4}$	$-\frac{1^2}{4}$	0	$-\frac{1^2}{4}$	$-\frac{2^2}{4}$	$-\frac{3^2}{4}$	$-\frac{4^2}{4}$

互相對稱

對於一般的情況，

若$x=2+t$，則$y=-\frac{1}{4}((2+t)-2)^2=-\frac{t^2}{4}$；

若$x=2-t$，則$y=-\frac{1}{4}((2-t)-2)^2=-\frac{(-t)^2}{4}=-\frac{t^2}{4}$。

因此對任意的t，$\left(2+t,-\frac{t^2}{4}\right)$和其對稱點$\left(2-t,-\frac{t^2}{4}\right)$總是落在$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$的圖形上。所以$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$的圖形對稱於$x=2$。也就是說，$x=2$為此圖形的對稱軸。

隨・堂・練・習

仿照上例，說明$x=1$是$y=(x-1)^2+1$圖形的對稱軸。

由上面的例題與隨堂練習可以知道，$x=h$是二次函數$y=a(x-h)^2+k$圖形的對稱軸。

有了對稱軸，就可以輕鬆描繪二次函數的圖形了。

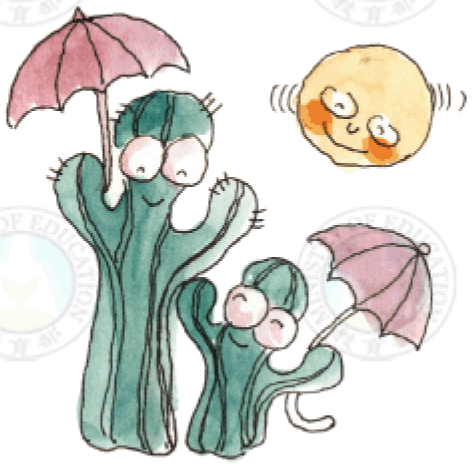
例 4 Example

畫出$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$的圖形。

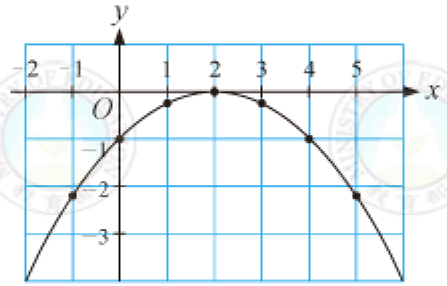
解題說明

由於$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$，所以對稱軸是$x=2$。如3-1節的例6，首先代值畫出$x=2$右側的圖形，如下表：

x	2	3	4	5
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$

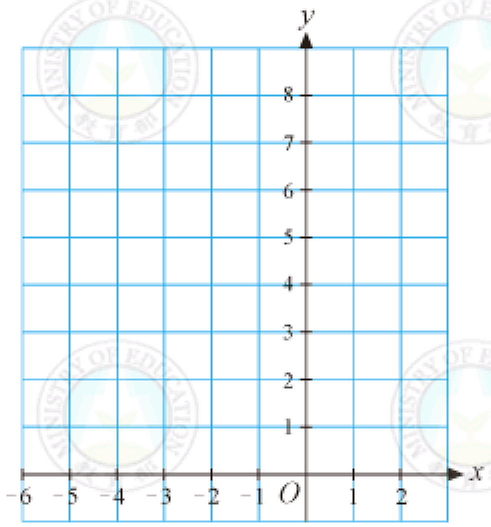


並將點用平滑曲線連起來，再用對稱性畫出$x=2$左側的圖形，得右圖：



隨・堂・練・習

求二次函數$y=(x+1)^2$圖形的對稱軸，並畫出此函數的圖形。



例 5 Example

畫出$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$的圖形。

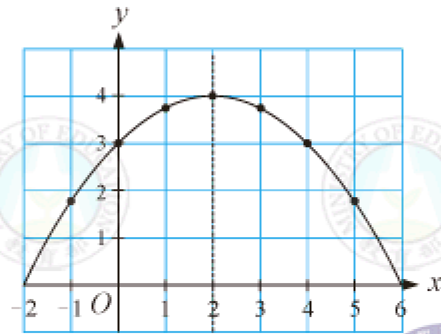
解題說明

由於$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$，所以對稱軸是$x=2$。

取$x=2$右側的數對，如下表：

x	2	3	4	5
y	4	$\frac{15}{4}$	3	$\frac{7}{4}$

由上表及對稱性，可畫出右圖：

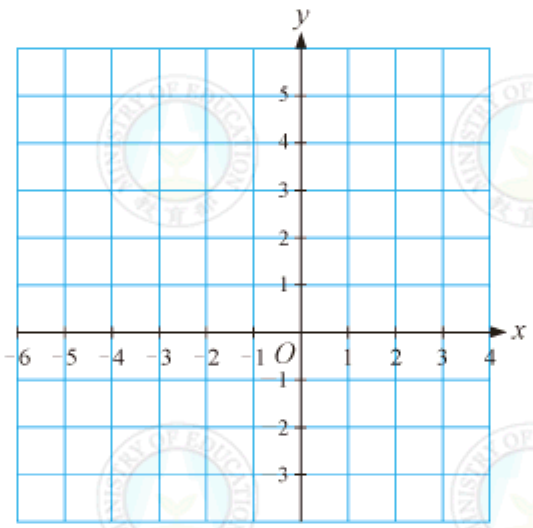


拿出附件中$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$的圖形，並和圖3-6比較，會發現這兩個圖形是同一個圖形。因此圖3-6的拋物線可以用$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$來描述。

同學們或許會覺得很奇怪，明明是同一條拋物線，為什麼有兩個不同的函數在描述它，在圖3-4時，函數是$y=-\frac{1}{4}x^2+4$；而在圖3-6時，函數是$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$。經過上面的解說，同學們應該已經發現這是因為圖3-4和圖3-6背景的坐標平面不同，圖3-6的坐標平面是圖3-4的坐標平面向左移動2個單位而得到的，這和x^2與$(x-2)^2$的不同有關。這種坐標平面的移動，將留到高中課程中再討論。

隨・堂・練・習

畫出$y=(x+1)^2-4$的圖形。



最大值和最小值

另外，從前面的例題和隨堂練習可以知道，

$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$的圖形有最高點$(2, 0)$

$y=(x+1)^2$的圖形有最低點$(-1, 0)$

$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$的圖形有最高點$(2, 4)$

$y=(x-1)^2-4$的圖形有最低點$(1, -4)$

換句話說，最高點或最低點是對稱軸和拋物線圖形的交點，至於該點是最高點或最低點，則要由平方項的係數來決定，我們總結如下：

當$a>0$時，$y=a(x-h)^2+k$的最低點是(h, k)

當$a<0$時，$y=a(x-h)^2+k$的最高點是(h, k)

隨・堂・練・習

(1) 求$y=3(x-\frac{1}{2})^2+5$的最低點。

(2) 求$y=-100(x+4)^2-10$的最高點。

若將滿足$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$的對稱點列表如下：

表3-3

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	$4-4$	$4-\frac{9}{4}$	$4-1$	$4-\frac{1}{4}$	4	$4-\frac{1}{4}$	$4-1$	$4-\frac{9}{4}$	$4-4$

我們發現圖形上各點除了最高點之外，它們的y坐標都比4小，因此我們說最高點$(2, 4)$的y坐標4是函數$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$的**最大值**。

表3-3還可以這樣解釋，由於$-\frac{1}{4}(x-2)^2$這一項永遠小於或等於0（也就是$-\frac{1}{4}(x-2)^2\leq 0$），因此$-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$的值永遠都小於或等於$0+4=4$，也就是說

$$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4\leq 4$$

因此函數$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$的最大值是4，此時$x=2$。

同樣的說法也可以用到圖形有最低點的二次函數，例如$y=(x+1)^2-4$圖形的最低點是$(-1,-4)$，因此圖形上各點除了最低點外，它們的y坐標都比-4大，因此最低點$(-1,-4)$的y坐標-4稱為函數$y=(x+1)^2-4$的**最小值**。一樣的，我們也可以說，因為$(x+1)^2\geq 0$，所以

$$y=(x+1)^2-4\geq -4$$

即函數$y=(x+1)^2-4$的最小值是-4，此時$x=-1$。

由上面的討論與前頁的討論，可以再總結出：

當$a>0$時，$y=a(x-h)^2+k$有最小值k，此時$x=h$。

當$a<0$時，$y=a(x-h)^2+k$有最大值k，此時$x=h$。

例 6 Example

試判斷下列函數是否有最大值或最小值，並求其值。

(1) $y=-3(x+\frac{1}{2})^2-5$

(2) $y=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{3}{4}$

解題說明

(1) 因為$-3(x+\frac{1}{2})^2\leq 0$，所以$y=-3(x+\frac{1}{2})^2-5$有最大值$-5$。

(2) 因為$\frac{1}{6}(x-2)^2\geq 0$，所以$y=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{3}{4}$有最小值$\frac{3}{4}$。

隨・堂・練・習

試判斷下列函數是否有最大值或最小值，並求其值。

(1) $y=-\frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})^2+2$

(2) $y=4(x-7)^2+\frac{1}{2}$

有了以上的討論後，我們就可以求出一般二次函數的對稱軸、最大值或最小值，並繪製其圖形，其中的關鍵就是第三冊所學的配方法。

例 7 Example

(1) 求$y=2x^2+4x+10$的最小值及其圖形的對稱軸與最低點。

(2) 求$y=-3x^2+6x+10$的最大值及其圖形的對稱軸與最高點。

解題說明

(1) 因為$y=2x^2+4x+10=2(x^2+2x)+10$

$$=2(x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2)+10$$
$$=2((x+1)^2-1)+10$$
$$=2(x+1)^2-2+10=2(x+1)^2+8$$

所以$y=2x^2+4x+10$的最小值為8，而圖形的對稱軸為$x=-1$，且最低點為$(-1,8)$。

(2) 因為$y=-3x^2+6x+10=-3(x^2-2x)+10$

$$=-3(x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2)+10$$
$$=-3((x-1)^2-1)+10$$
$$=-3(x-1)^2+3+10=-3(x-1)^2+13$$

所以$y=-3x^2+6x+10$的最大值是13，而且圖形的對稱軸為$x=1$，且最高點為$(1,13)$。

隨・堂・練・習

(1) 求$y=2x^2+6x$的最小值；及其圖形的對稱軸與最低點。

(2) 求 $y=-2x^2-4x-6$ 的最大值；及其圖形的對稱軸與最高點。

例 8 Example

畫出 $y=-x^2+2x+6$ 的圖形。

解題說明

因為 x^2 的係數是 $-1<0$，所以 $y=-x^2+2x+6$ 的圖形是開口向下的拋物線，有最高點。由於

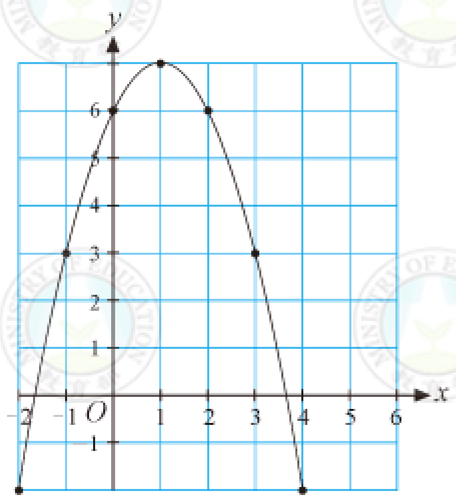
$$\begin{aligned} y&=-x^2+2x+6\\ &=-(x^2-2\cdot 1\cdot x)+6\\ &=-(x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2)+6\\ &=-(x-1)^2+7 \end{aligned}$$

所以 $y=-x^2+2x+6$ 的最高點是 $(1, 7)$，對稱軸是 $x=1$。

由 $x=1$ 的右側取點作圖，如下表：

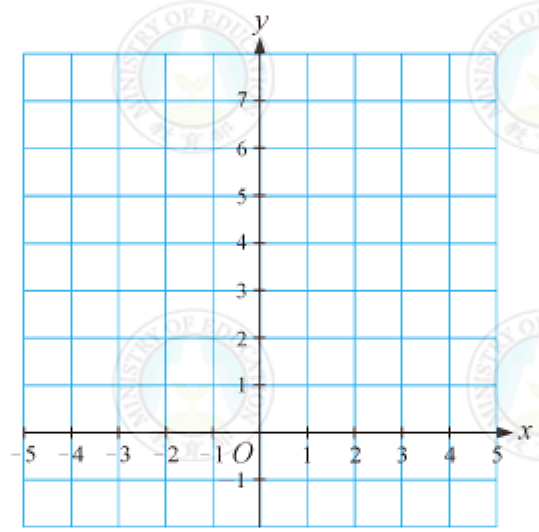
x	1	2	3	4
y	7	6	3	-2

將點用平滑曲線連起來，再用對稱性得到右圖：



隨・堂・練・習

畫出 $y=x^2+2x$ 的圖形。



底下是上面討論的應用。

例 9 Example

若某二次函數圖形對稱於 $x=-1$，且通過 $(0, 6)$、$(2, -10)$，求此函數。

解題說明

因為此二次函數對稱於 $x=-1$，所以此二次函數可以寫成

$$y=a(x-(-1))^2+k=a(x+1)^2+k$$

又因為圖形通過 $(0, 6)$ 以及 $(2, -10)$，所以 a、k 滿足

$$6=a(0+1)^2+k$$

$$-10=a(2+1)^2+k$$

化簡得 $a+k=6$ ……(1)

$9a+k=-10$ ……(2)

(2) − (1) 得 $8a=-16$，解得 $a=-2$

由 (1) 式得 $k=6-a=6+2=8$

所以，此二次函數為 $y=-2(x+1)^2+8$。

隨・堂・練・習

若某二次函數圖形對稱於$x=1$，且通過$(2,-1)$、$(3,8)$，求此函數。

例10 Example

若某二次函數圖形的最低點是$(-1,-4)$，且通過$(0,2)$，求此二次函數。

解題說明

因為最低點是$(-1,-4)$，所以函數圖形的對稱軸是$x=-1$，因此該函數可寫成$y=a(x-(-1))^2-4=a(x+1)^2-4$，其中$a>0$。但因為圖形通過$(0,2)$，所以

$$2=a(0+1)^2-4$$

解得$a=2+4=6$，所以此二次函數為$y=6(x+1)^2-4$。

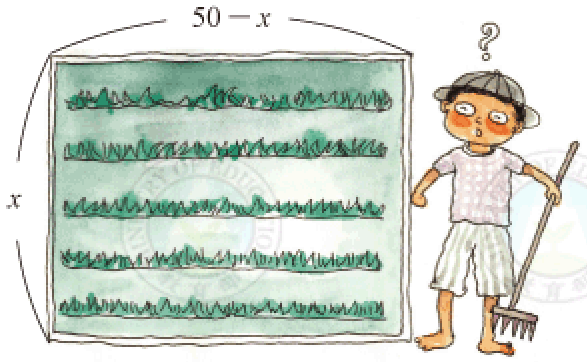
隨・堂・練・習

若某二次函數圖形的最高點是$(5,2)$，且通過$(4,-8)$，求此二次函數。

例11 Example

有一位農夫想用100公尺的籬笆圍成一個矩形的菜園，問如何圍出最大面積的菜園？並求出此面積。

解題說明



如右圖，設農夫所圍成矩形菜園的一邊長為x公尺。由題意知另一邊長為$(50-x)$公尺。

因此菜園的面積為

$$\begin{aligned}x(50-x)&=50x-x^2\\&=-(x^2-50x)\\&=-(x^2-2\cdot 25\cdot x+25^2-25^2)\\&=-(x-25)^2+625\end{aligned}$$

因此當$x=25$時，面積有最大值625。此時菜園的一邊長為25公尺，另一邊長為$50-25=25$（公尺），也就是說當此菜園是正方形時，其面積最大，且面積為625平方公尺。

隨・堂・練・習

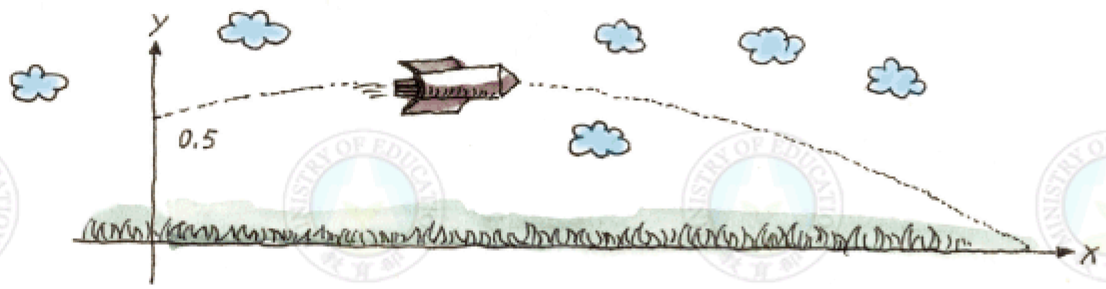
如果例11中，農夫改用120公尺的籬笆，答案是什麼？

由上述，我們發現在這樣的問題裡，最大面積都發生在正方形的情況。

例12 Example

小明參加創意科學營，製作了一個小火箭，完成後拿到操場試射。

假設小火箭沿二次函數$y=-\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{5}x+5$的軌跡飛行，如下圖：



其中x公尺為火箭飛行的水平距離，y公尺則為火箭距地面高度，發射點在 $(0, 5)$ 的位置。 試回答下列問題：

(1) 火箭從發射到落地時，飛行的水平距離為多少公尺？

(2) 在飛行過程中，火箭離地面的高度最高為多少公尺？

解題說明

(1) 我們必須知道火箭落地的位置。當火箭落地時，高度為0，即$y=0$，所以可得一元二次方程式：

$$-\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{5}x+5=0$$

化簡得 $x^2-40x-500=0$

由因式分解得 $(x-50)(x+10)=0$

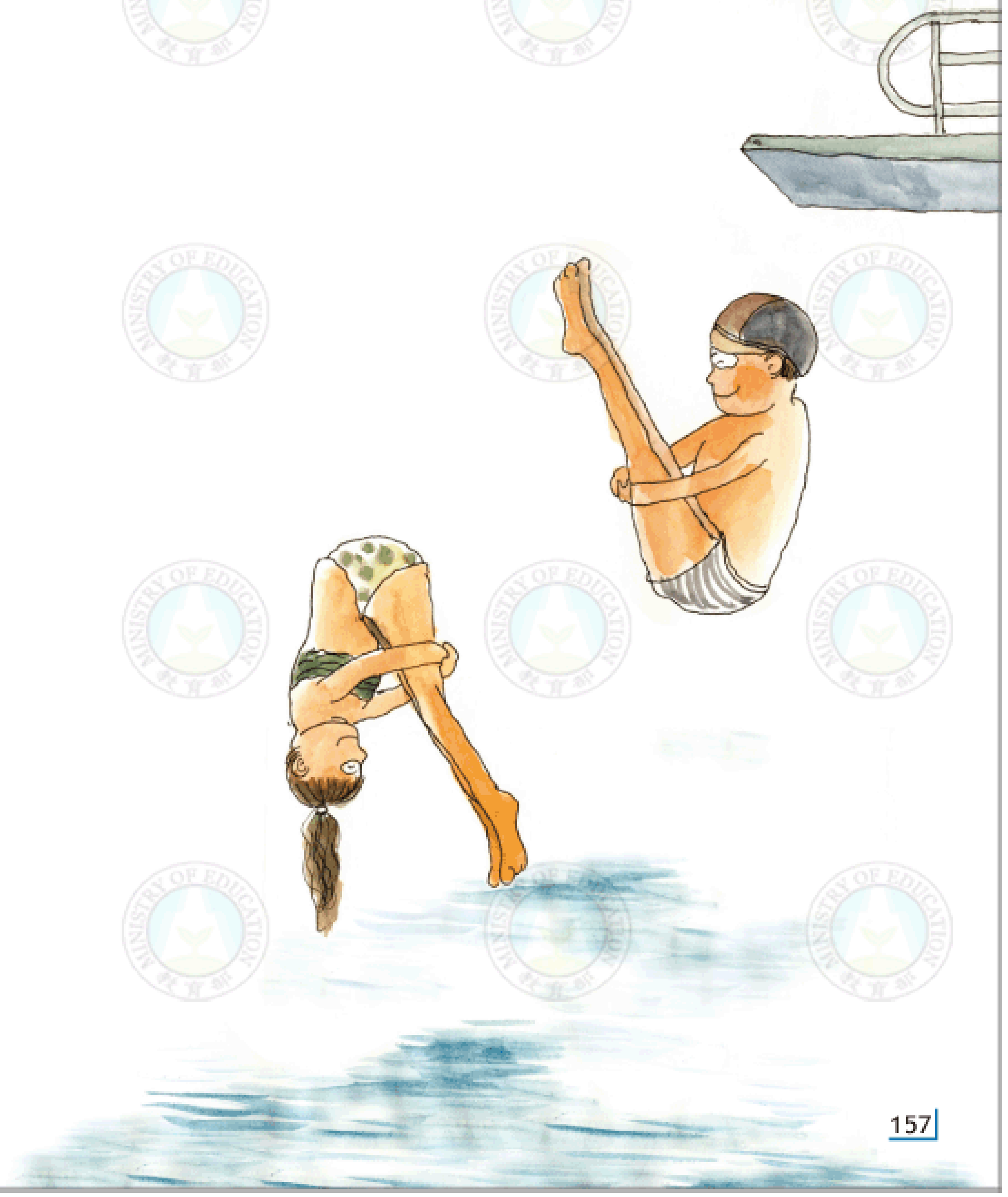
解得 $x=50$，或$x=-10$（不合題意）

因此，火箭落地的地點到發射點的水平距離為$50-0=50$公尺。

(2) 因為y公尺表示火箭的飛行高度，火箭離地面最高的高度即為函數$y=-\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{5}x+5$的最大值，所以，可將此函數配方而得到：

$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{100}(x^2-40x)+5 \\ &=-\frac{1}{100}(x^2-2\cdot 20\cdot x+20^2-20^2)+5 \\ &=-\frac{1}{100}(x-20)^2+4+5 \\ &=-\frac{1}{100}(x-20)^2+9 \end{aligned}$$

因此，當$x=20$時，$y=9$為最大值，也就是說，飛行過程中火箭離地面最高的高度為9公尺。



摘要

1. 任意二次函數可以用配方法寫成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，其中 a 不為 0。此時，二次函數圖形的對稱軸為 $x=h$。
2. 若二次函數圖形的對稱軸是 $x=h$，則此二次函數可以寫成 $y=a(x-h)^2+k$，其中 a、k 是常數，$a\neq 0$。
3. 若 $a>0$，則 $y=a(x-h)^2+k$ 的最小值為 k，圖形最低點為 (h, k)。
   若 $a<0$，則 $y=a(x-h)^2+k$ 的最大值為 k，圖形最高點為 (h, k)。
4. 二次函數的對稱軸是過最高點或最低點的鉛直線。
5. 若二次函數圖形的最高點或最低點是 (h, k)，則此二次函數可寫成 $y=a(x-h)^2+k$，其中 $a\neq 0$。

3-2 自我評量

1. 下列敘述，將正確的打「○」，錯誤的打「╳」。
   (　　) (1) $y=x^2+bx+c$ 的圖形一定是線對稱圖形。
   (　　) (2) 若 $y=x^2+bx+c$ 的圖形對稱於 $x=4$，則 $b=8$。
   (　　) (3) $y=x^2+4x$ 的最小值是 0。
   (　　) (4) $y=4x-x^2$ 的最大值是 0。
   (　　) (5) 因為 $x^2+8x+100=0$ 沒有解，所以 $y=x^2+8x+100$ 沒有最大值，也沒有最小值。

2. 若直線 $y=10$ 與 $y=x^2+bx+c$ 的圖形相交於 $(5, 10)$ 與 $(-5, 10)$。
   (1) 求此二次函數圖形的對稱軸。(2) 求 b。

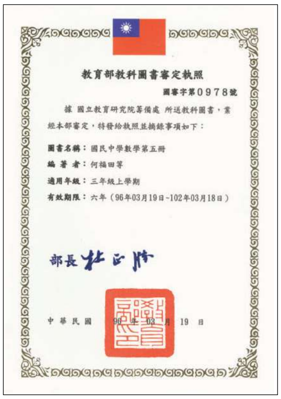
3. 求二次函數 $y=x^2+5x+6$ 的圖形與 x 軸的交點。

國民中學　數學課本　第五冊（三上）

主 編 者：國家教育研究院
編 審 者：數學領域部編本教科書編輯委員會
主任委員：鄭國順
委　　員：李慶祥　林世華　林長壽　林明碧
林宜臻　林清平　林淑君　林惠雯
林震燦　林鴻哲　洪志成　洪若烈
胡志偉　翁秉仁　陳　宏　陳伯璋
陳昭地　陳建隆　陳俊瑜　陳清溪
程守慶　張麟偉　葉芳栢　鄭人豪
蔡東和　賴文宗　盧銘法
（依姓氏筆畫順序排列）
編輯小組：林長壽　林明碧　林政魏　林淑君
林鴻哲　翁秉仁　賴文宗
（依姓氏筆畫順序排列）
審查小組：林清平　林惠雯　胡志偉　陳　宏
程守慶　蔡東和
（依姓氏筆畫順序排列）
本冊修訂：林長壽　林淑君　翁秉仁
（依姓氏筆畫順序排列）
總 訂 正：鄭國順
封面設計：李美玲設計工作室
內頁插圖：李美玲設計工作室
美術編輯：翰林出版事業股份有限公司
出 版 者：國家教育研究院
部編教科書網站：http://mathtext.project.edu.tw
國家教育研究院網站：http://www.naer.edu.tw

※本書經國立編譯館民國97年4月2日
國教國字第0970001527號函准予修訂

民國九十六年八月初版
民國九十七年八月二版
民國九十八年八月二版二刷
民國九十九年八月二版三刷
民國一百年八月二版四刷
民國一百零一年八月二版五刷


教育部教科圖書審定執照
圖審字第0978號
據 國立教育研究院籌備處 所送教科圖書，業經本部審定，特發給執照並摘錄事項如下：
圖書名稱：國民中學數學第五冊
編 著 者：何福田等
適用年級：三年級上學期
有效期限：六年（96年03月19日~102年03月18日）
部長 杜正勝
中華民國 96 年 03 月 19 日

營業總部暨營業所在地：
70248 臺南市南區新樂路 76 號（安平工業區）
電話／（06）263-1188（代表號）
出版登記：新聞局局版臺業字第 5853 號
承 印 者：翰林出版事業股份有限公司
發 行 者：翰林出版事業股份有限公司
讀者訂書專線：電話／（06）263-7923
傳真／（06）264-5852
客戶服務專用帳號：service@hanlin.com.tw
郵政劃撥：31376678
翰林出版事業股份有限公司
法律顧問：北辰律師事務所
蕭雄淋律師　嚴裕欽律師　幸秋妙律師
翰林我的網：http://www.worldone.com.tw
翰林文教網：http://www.hle.com.tw
翰 林 書 城：http://books.worldone.com.tw

政府出版品展售門市：
國家書店松江門市
地址：10485 臺北市中山區松江路209號1樓
電話：（02）2518-0207（代表號）
國家網路書店：http://www.govbooks.com.tw
五南文化廣場
地址：40042 臺中市中區中山路6號
電話：（04）2226-0330
網址：http://www.wunanbooks.com.tw

國中教科書全國服務中心

北區服務中心（臺北、基隆、宜蘭、花蓮、金門）
地址／23585 新北市中和區建一路136號9樓
電話／（02）3234-4718　傳真／（02）3234-4720

桃竹區服務中心（桃園、新竹、苗栗）
地址／32455 桃園縣平鎮市興埔路232之2號
電話／（03）468-8066　傳真／（03）468-8120

中區服務中心（臺中、南投、彰化）
地址／40854 臺中市南屯區東興路一段480號
電話／（04）2473-8515　傳真／（04）2472-8505

雲嘉區服務中心（雲林、嘉義）
地址／60085 嘉義市西區國賢一街38號
電話／（05）281-2656　傳真／（05）231-2415

南區服務中心（臺南）
地址／70248 臺南市南區新樂路76號（安平工業區）
電話／（06）263-7923　傳真／（06）264-5852

高屏區服務中心（高雄、屏東、臺東、澎湖）
地址／80794 高雄市三民區民族一路373巷15號
電話／（07）397-2288　傳真／（07）397-1199