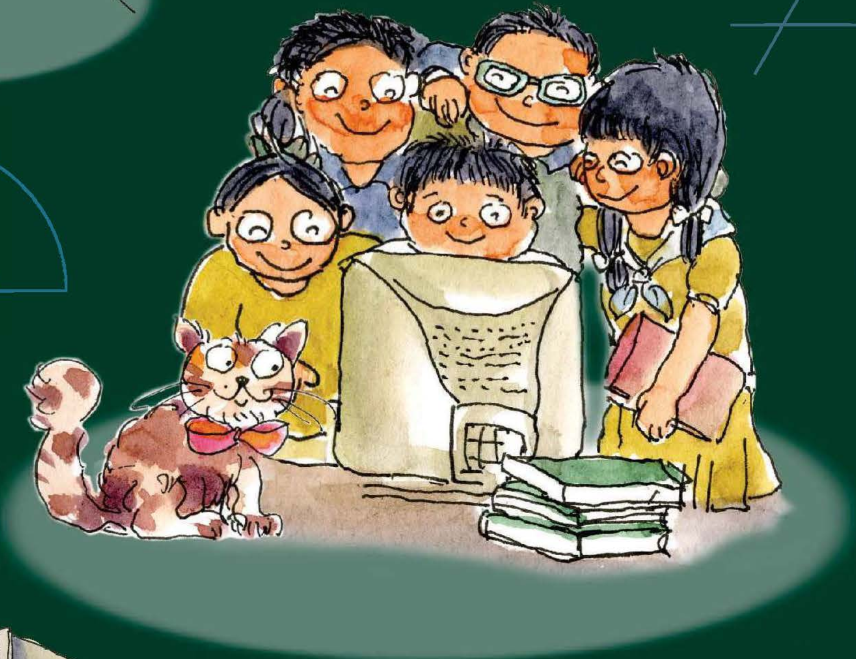
教育部審定

國·民·中·學

數學

第4冊

1＋2＋3＋4＋⋯＋99＋100



國家教育研究院
教育部國審字第0958號

目錄 contents

第1章 數列與級數

第2章 幾何圖形的角

第3章 三角形的基本性質

第4章 幾何圖形

第 1 章

數列與級數

1-1 等差數列

十八世紀，德國某個小學課堂上，學生正為了快要放學而焦躁不安，抓耳托腮。已經疲累了一天的老師嘆著氣，腦中突然靈光一閃，抓起粉筆，在黑板上振筆疾書……

「小朋友，我們再來算一題加法，算對的人就可以先回家。」

加法！還有什麼比加法更簡單的呢！想要回家的小朋友馬上一個個聚精會神，瞪著黑板上的問題：

$$1+2+3+4+5+\cdots+99+100$$

「老師，中間的點點是什麼意思？」

「別急！就是從1開始，一直加到100。」

看到學生安靜下來，老師終於鬆了一口氣，坐到椅子上。他知道不花上半個鐘頭，這些學生是算不出來的。望著窗外遠處的教堂與鐘塔尖流連的雲朵，出神之餘，卻突然聽到學生搬動桌椅的聲音。

「不會吧！」老師皺皺眉：「真沒耐性，才兩三分鐘，就要跑廁所。」

轉過頭來，只見一個斯文的小朋友拿著書包走了過來，不顧背後同學的竊竊私語，在講桌上放下一張薄薄的紙，微微點頭，跟老師笑著說：「再見，先生。」

紙上沒有東塗西畫的算式，乾乾淨淨寫著四個數字：「5050」。

*　*　*　*　*

高斯當時只是10歲的小朋友，日後研究他喜愛的數學和科學，成為史上最偉大的數學家之一。他的全名是Carl Friedrich Gauss（1777-1855）。

在日常生活中，經常會遇到使用一系列數字的情況。例如街道兩側的門牌號碼經常使用奇偶數來編號（如圖1-1）。

偶數側：

棟	1	2	3	4	5	6	7
號碼	2	4	6	8	10	12	14

奇數側：

棟	1	2	3	4	5	6	7	8
號碼	1	3	5	7	9	11	13	15

圖 1-1

因為是依順序點數，所以這些數也經常記為

2、4、6、8、10、12、14

1、3、5、7、 9、11、13、15

像這樣由左至右排列的一串數，稱為**數列**。2、4、6、8、10、12、14每一個數都是此數列的項。第一個數2稱為這個數列的第一項或**首項**，可記為a_1，因此$a_1=2$；第二個數4稱為此數列的第二項，記為a_2，因此$a_2=4$；依此類推就有$a_3=6$，$a_4=8\cdots$等等。因為這個數列共有7項，因此最後一個數14，是第七項（a_7），也稱為此數列的**末項**。

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 2、 & 4、 & 6、 & 8、 & 10、 & 12、 & 14 \\ \uparrow & & & & & & \uparrow \\ \text{首項} & & & & & & \text{末項} \end{array}$$

依照常用的數字順序，我們說第六項12的前一項是第五項10，後一項是第七項14；同樣的，我們也說a_3的前一項是a_2，後一項是a_4。

隨・堂・練・習

考慮數列1、3、5、7、9、11、13、15，並回答下列問題：

(1) 這個數列有幾項？

(2) 這個數列的首項和末項各是什麼數？

(3) 9是第幾項，它的前一項和後一項各是什麼數？

有規律的數列

在小學時，各位可能常常遇到像下面這樣的問題。

隨・堂・練・習

請在空格中填入適當的數：

(1) 1、3、5、7、9、______、13、15

(2) 5、10、15、______、25、30

(3) 1、10、100、1000、______、100000

(4) $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{4}{5}$、______、$\frac{6}{7}$、$\frac{7}{8}$

相信大家都能依照自己的理解，填入適當的數字。

奇怪的是，1、3、5、7、9、66、13、15也是一個數列，為什麼我們不會這樣填呢？這是因為人類有一種找到規律或秩序的本能，因此在做上面的練習時，會自動自發的去發現隱藏在數字間的規律。這種能力非常寶貴，是人類發展科學、理解自然宇宙的基礎。

要判斷自己知不知道一個數列的規律，只要看看自己能不能依序寫出每一項的後續項，就可以知道。底下這些資料所形成的數列就看不出什麼規則：廷聰每月的體重紀錄、玉山山頂每小時的溫度紀錄、班上同學依座號順序登記的數學成績、連續丟一顆骰子所得到的點數等等。我們將在第六冊再來討論處理這類數字資料的方法。

如何描述有規律數列的規則呢？

以前面曾經提到的數列：2、4、6、8、10、12、14為例。我們知道這是偶數所構成的數列，其實這就是一種規則。但如果要寫得更清楚，可以這樣來思考：

$$a_1 = 2 \times 1$$
$$a_2 = 2 \times 2$$
$$a_3 = 2 \times 3$$
$$a_4 = 2 \times 4$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

這樣就可以清楚看出項數n與第n項a_n的關係，並且可以簡記成：

$$a_n = 2n$$

掌握了數列的規則，就可以放心用下面的方式來記錄數列：

$$2、4、6、\cdots、2n、\cdots$$

其中「⋯」表示「以此類推但省略」，而且$2n$表示此數列的第n項。

例1 Example

寫出下列數列的前五項：

(1) $a_n = 2n - 1$　　(2) 1、4、⋯、n^2、⋯

解題說明

(1) 依a_n的規律知道

$$a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$$
$$a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$$
$$a_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$$
$$a_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$$
$$a_5 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

前五項是1、3、5、7、9，

由此可知，$a_n = 2n - 1$是奇數構成的數列。

(2) 這個數列的規律可以用 $a_n = n^2$ 來表示，

所以前五項依序為 1^2、2^2、3^2、4^2、5^2，

即 1、4、9、16、25。

隨·堂·練·習

寫出下列數列的前五項：

(1) $a_n = 5n$　　(2) 1、$\frac{1}{2}$、…、$\frac{1}{n}$、…

上面的例題，是依照給定的數列規則來寫出數列，並不困難。比較困難的是找出數列的規則。下面舉一些例子來討論：

(一) 讓我們假設有一種單細胞生物每隔一天就會從1隻分裂成2隻。這樣到了第三天，就會從2隻分裂成4隻，如圖1-2。從第一天開始，此生物每天個數所成的數列，可列表如表1-1來計算：

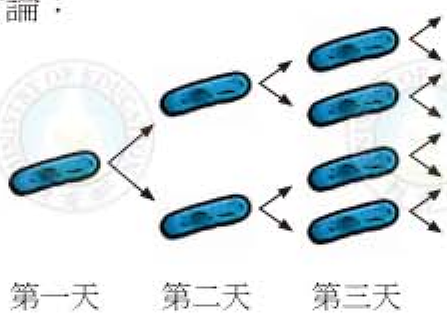


圖 1-2

表 1-1

n（第 n 天）	第一種方法	第二種方法
1	1	1
2	$1\times2=2$	2
3	$2\times2=4$	$2\times2=2^2=4$
4	$4\times2=8$	$2\times2\times2=2^3=8$
5	$8\times2=16$	$2\times2\times2\times2=2^4=16$
6	$16\times2=32$	$2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$
⋮	⋮	⋮

按照第一種方法或第二種方法，就可以寫出前10天的數列：

1、2、4、8、16、32、64、128、256、512

第一種方法所掌握的規則是，相鄰兩項的後項都是前項的2倍。第二種方法則是直接將這個規則寫成

$a_n = 2^{n-1}$

因此這個數列也可以寫成

1、2、4、8、…、2^{n-1}、…

無論是第一種方法還是第二種方法，都能寫出這個數列。但是第二種方法有一個明顯的好處，例如問第12天該單細胞生物有多少個時，我們可以直接代入 $n=12$，得到 $2^{12-1}=2^{11}=2048$，不用再從頭寫出這個數列。

動·動·腦

上例中，為什麼是 $a_n = 2^{n-1}$，而不是 $a_n = 2^n$？

(二) 從圖1-3中知道，這個圖形的第一層有1個三角形，第二層有3個三角形，第三層有5個三角形，……。可以發現，每一層都比上一層多2個三角形。利用這個規律可以寫出每一層的三角形個數。

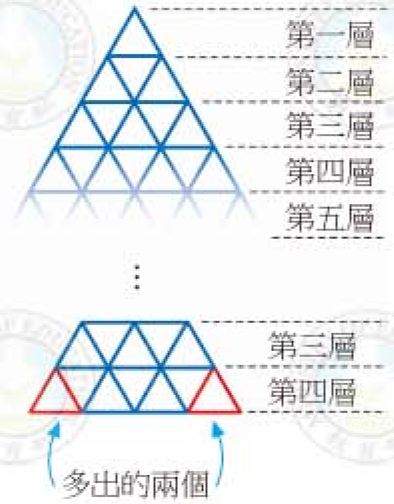


圖 1-3

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_4 = 5 + 2 = 7$

⋮

例如前七層三角形個數所形成的數列就是

1、3、5、7、9、11、13

這其實就是奇數所形成的數列，由例1知道，此數列可以寫成

1、3、5、7、9、…、$2n-1$、…

再一次，我們有兩種方法表現這個數列的規則，第一種方法是知道相鄰兩項的後項減前項的差都是2，第二種方法是直接寫出$a_n=2n-1$。

(三) 利用圖1-4的程序，由長度為1的線段開始，可作出一系列的線段。

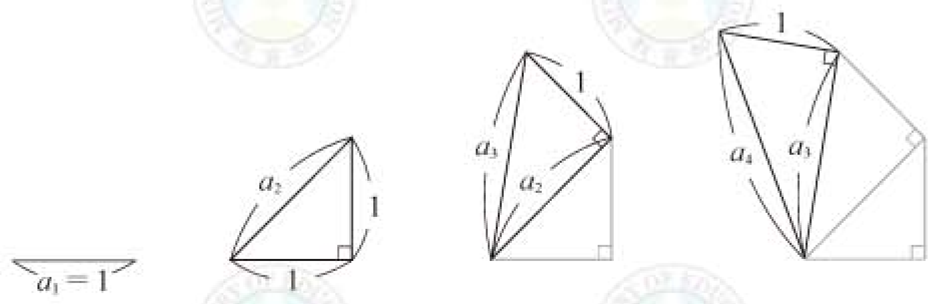


圖 1-4

這一系列線段的長度構成一個數列。從圖1-4的作法及畢氏定理知道，這個數列相鄰兩項的關係是

$$\text{後項}^2=\text{前項}^2+1^2$$

也就是

$$\text{後項}=\sqrt{\text{前項}^2+1}$$

這樣就可以計算出前五項是

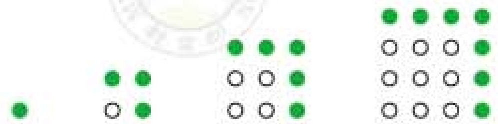
$$a_1=1$$
$$a_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$a_3=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$
$$a_4=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$$
$$a_5=\sqrt{(\sqrt{4})^2+1}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

從這個結果，很容易就知道整個數列可以寫成

$\sqrt{1}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{4}$、$\sqrt{5}$、…、$\sqrt{n}$、…

隨・堂・練・習

觀察下列圖形，並回答問題：



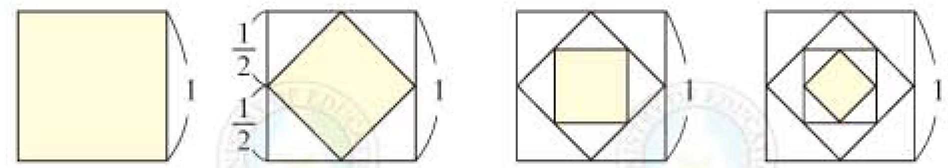
(1) 自左而右，第一圖有______個綠點，第二圖有______個綠點，第三圖有______個綠點。

(2) 考慮綠點數目所形成的數列，則相鄰兩項的後項比前項多______。

(3) 依照(2)的觀察，寫出綠點數列的前六項。

隨・堂・練・習

有一個邊長為1的正方形，取各邊的中點為頂點得一新正方形，再取新正方形各邊中點為頂點又得一新正方形，依此類推，並繪製如下圖（圖中之黃色正方形）。回答下列問題：



(1) 第一個黃色正方形面積＝________，

第二個黃色正方形面積＝________，

第三個黃色正方形面積＝________。

(2) 考慮面積所形成的數列，則相鄰兩項的後項是前項的________倍。

(3) 依照(2)的觀察，寫出此數列的第四項到第七項。

等差數列

本章的主題是要深入探討下面這樣的數列：

2、4、6、8、10、⋯

1、3、5、7、9、⋯

這兩個數列有一個共通點，就是相鄰兩項的後項減前項的差都是2。由前面的例題和練習知道，只要首項確定之後，就可以依照這個規律寫出整個數列。

一個數列如果相鄰兩項的後項減去前項都是固定的差，這種數列稱為**等差數列**，其中固定的差稱為此等差數列的**公差**。

例2 Example

下列兩數列是否為等差數列？如果是，請寫出公差。

(1) 13、10、7、4、1、-2

(2) 6、6、6、6、6、6

解題說明

(1) 任何相鄰兩項的後項減去前項的值都是-3，所以這是一個首項為13，公差為-3的等差數列。

(2) 任何相鄰兩項的後項減去前項的值都是0，所以這是一個首項為6，公差為0的等差數列。

隨．堂．練．習

下列兩數列是否為等差數列？如果是，請寫出公差。

(1) 6、5、4、3、2、1

(2) 0、1、0、1、0、1

例3 Example

寫出下列數列的前五項：

(1) 首項為2，公差為10的等差數列。

(2) 首項為13，公差為-5的等差數列。

解題說明

(1) 公差為10，表示每項再加10，就是下一項，因此

$a_1=2$

$a_2=2+10=12$

$a_3=12+10=22$

$a_4=22+10=32$

$a_5=32+10=42$

前五項為 2、12、22、32、42。

(2) 公差為-5，表示每項再加-5（也就是減5），就是下一項，因此

$b_1=13$

$b_2=13-5=8$

$b_3=8-5=3$

$b_4=3-5=-2$

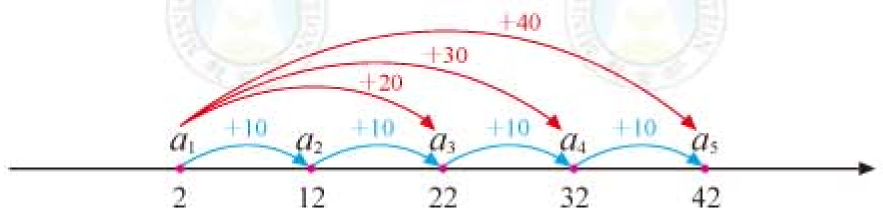
$b_5=-2-5=-7$

前五項為13、8、3、-2、-7。

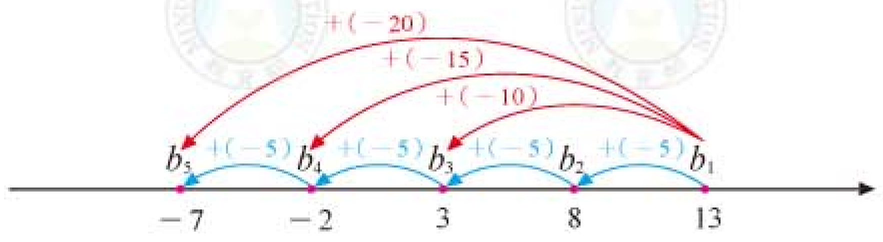
隨．堂．練．習

有一等差數列的首項為0，公差為$\frac{1}{2}$，寫出此數列的前六項。

我們已經掌握如何利用首項與公差來寫出等差數列。但是可以更進一步寫出a_n的公式嗎？下面以例3的(1)和(2)為例。



(a)



(b)

圖 1-5

所以若想計算a_5，由圖1-5(a)，因為a_1和a_5之間有4個間隔，每個間隔各加10，因此

$$\underset{\text{首項}}{a_5 = 2} + \underset{\text{公差}}{10} \times (\underset{\text{間隔數}}{5} - 1)$$

這樣甚至可以計算第100項a_{100}。因為a_{100}和a_1差了$100-1=99$個間隔，

所以 $a_{100} = 2 + 10 \times (100 - 1) = 2 + 10 \times 99 = 992$

由此可知，a_n的一般公式就是

$$a_n = 2 + 10\,(n - 1)$$

因此只要掌握了圖1-5的想法，就知道首項為a_1，公差為d的等差數列，無論d是正的或d是負的，其一般項a_n為

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,d}$$

隨．堂．練．習

寫出例3(2)中b_n的公式，並以此計算b_{100}。

例 4 Example

已知一個等差數列的首項為2，公差為4：

(1) 求此數列的第20項。

(2) 94是不是此等差數列的一項？

(3) 48是不是此等差數列的一項？

解題說明

(1) 由題意知$a_1 = 2$，$d = 4$。因為a_1與a_{20}之間的間隔數為$20-1$，因此

$a_{20} = 2 + (20 - 1) \times 4 = 78$。

(2) 假設94是第n項，即$a_n = 94$。又

已知$a_1 = 2$

所以得到 $94 = 2 + 4\,(n - 1)$

因此 $n - 1 = \dfrac{94-2}{4} = \dfrac{92}{4} = 23$

即 $n = 24$

94為此數列的第24項。

(3) 由(2)知，若48為第m項，則

$m - 1 = \dfrac{48-2}{4} = \dfrac{46}{4} = 11.5$

但m為自然數，因此48不可能是此數列的一項。

例4中(2)、(3)的計算可以用圖1-5的圖示想成

$$\text{間隔數} = \frac{\text{末項}-\text{首項}}{\text{公差}}$$

隨．堂．練．習

一等差數列的首項為 20，公差為 -8：

(1) 求此數列的第 10 項。

(2) -100 為此數列的第幾項？

活用圖 1-5 的圖示與 a_n 的公式，可以解決許多關於等差數列的問題。

例 5 Example

下列的 a_n 都是等差數列中的某一項，其中 d 為公差：

(1) $a_{10}=25$，$d=3$，求 a_{15}。

(2) $a_{20}=12$，$d=-2$，求首項。

(3) $a_{26}=144$，$d=6$，18 為此數列的第幾項？

解題說明

(1) 由右圖知，重點在於求出正確的間隔數 $15-10=5$。因此

$$a_{15}=25+3\times(15-10)$$
$$=25+3\times5$$
$$=40$$

事實上，可以將 a_{10}、a_{11}、……、a_{15} 想成是一個新的等差數列來思考。

(2) 由於 $a_{20}=a_1+(-2)\times(20-1)$

但 $a_{20}=12$

所以 $12=a_1+(-2)\times19$

$a_1=12+38=50$

(3) 設 18 是第 n 項，由於公差是正數，而且 $144>18$，這表示 144 的項數 26 大於 n，因此 18 與 $a_{26}=144$ 的間隔數為 $26-n$。

所以 $144=18+6\times(26-n)$

得 $26-n=\dfrac{144-18}{6}=\dfrac{126}{6}=21$

即 $n=26-21=5$

18 為此數列的第 5 項。

由上例說明知道，例 4 後面的間隔數公式可以用到更一般的情況，因為從等差數列截取一段 a_m、……、a_n，仍然是一個等差數列。本章所有與等差數列有關的公式都可以藉助這個想法，應用到像 a_m、……、a_n 這樣的情況。

隨．堂．練．習

1. 若一等差數列的 $a_{20}=72$，$d=-5$，求 a_{12}。

2. 若一等差數列的 $a_{41}=300$，$d=8$，-20 為此數列的第幾項？

任兩項的差等於公差乘以兩項間隔數的想法，有如下的應用。

例 6 Example

1. 一等差數列的$a_3=19$，$a_{15}=103$，求此數列的公差。
2. 想在40、120之間插入7個數，構成一等差數列，要怎麼做？

解題說明

1. 設公差為d，a_3和a_{15}相差$15-3=12$個間隔，

   利用 $a_{15}=a_3+d\cdot 12$

   得公差 $d=\dfrac{103-19}{12}=\dfrac{84}{12}=7$

   此數列的公差為7。

   將a_3到a_{15}想成一新等差數列
   公差＝$\dfrac{\text{末項}-\text{首項}}{\text{間隔數}}$

2. 插入7個數相當於40和120之間有8個間隔，因此公差是

   $$\frac{120-40}{8}=\frac{80}{8}=10$$

   所以此數列為

   40、50、60、70、80、90、100、110、120

隨・堂・練・習

在4和12之間插入1個數，構成一個等差數列，依序寫出這三個數。

像這樣，在4與12之間插入8，構成一個等差數列，我們通稱8為4與12的**等差中項**。

隨・堂・練・習

求a與b的等差中項。

例 7 Example

計程車一般的計費方式是，最開始有起跳價，之後再加跳固定的續程費。林伯伯在某地搭了兩次計程車，收費分別為110元（表加跳10次）、140元（表加跳16次）。請由這些線索推理出當地計程車的收費方式。

解題說明

設起跳價為A元，固定續程費為k元，

則計程車之車費為

a_1	a_2	a_3	$\cdots$
A	$A+k$	$A+2k$	$\cdots$
↑ 起跳	↑ 加跳1次	↑ 加跳2次	

這是一個以A為首項，k為公差的等差數列a_n，由題意知

$$a_{11}=110，a_{17}=140$$

因此公差為

$$k=\frac{140-110}{17-11}=\frac{\cancel{30}^{\,5}}{\cancel{6}_{\,1}}=5$$

公差＝$\dfrac{\text{末項}-\text{首項}}{\text{間隔數}}$

另外，因為

$$a_{11}=A+5\times(11-1)$$

所以 $110=A+50$

即 $A=110-50=60$

答：當地計程車之起跳價為60元，續程費每跳一次加5元。

摘要

1. 從原始資料可以整理成次數分配表或折線圖。
2. 眾數、中位數、平均數可以代表一份資料集中的情況。
3. 當資料值加上一個數或乘以一個正數時，其眾數、中位數、平均數也會做相對應的改變。
4. 只要知道各份資料的平均數以及各資料數的相對比例，就可以求出合併資料的平均數。

1-1 自我評量

1. 下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。

( ) (1)一份資料只有一個眾數。

( ) (2)平均數一定比中位數大。

( ) (3)測量一個正方形農地的邊長 10 次，得到 10 個數據，若其眾數為 50 公尺，則面積的眾數一定是 50^2 平方公尺。

( ) (4)測量一個正方形農地的邊長 10 次，得到 10 個數據，若其中位數為 50 公尺，則面積的中位數一定是 50^2 平方公尺。

( ) (5)測量一個正方形農地的邊長 10 次，得到 10 個數據，若其平均數為 50 公尺，則面積的平均數一定是 50^2 平方公尺。

( ) (6)一份資料的中位數是 10，若將其中一筆資料由 20 改成 40，則其中位數變大。

( ) (7)一份資料的平均數是 10，若將其中一筆資料由 20 改成 40，則其平均數變大。

2. 某一組資料有八個正整數，已知其中七個數為 1，6，3，5，2，2，6。下列哪一個數不可能是這一組資料的中位數？

(A) 3 (B) 3.5 (C) 4 (D) 4.5

1-2 等差級數

在1-1節談到聰明的高斯很快算出1加到100的故事。到底他是怎麼計算的呢？

我們先用下面簡單的例子，說明高斯神奇的想法。假設要計算

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

我們可以用圖1-6的方格數表示上式的和。

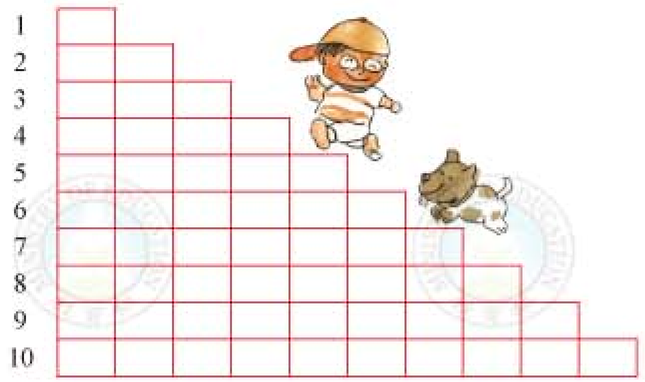


圖 1-6

如果將這個圖形複製一份，如圖1-7那樣翻轉過來，就會發現兩個圖形可以緊密接合起來，變成我們熟悉的矩形（長方形）。

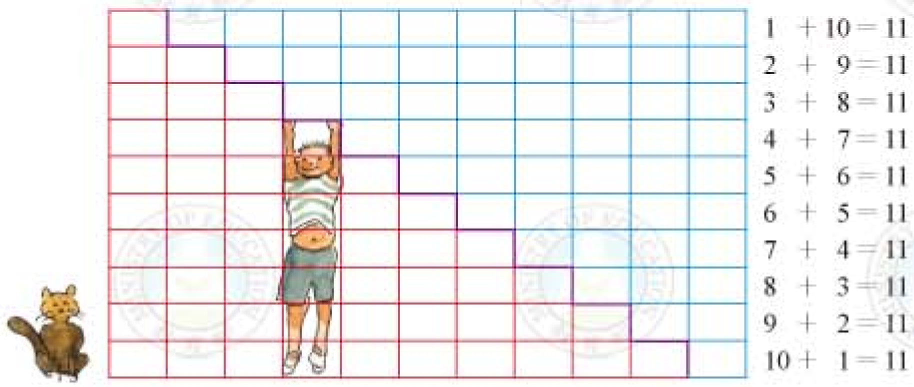


圖 1-7

如果用S表示$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$的和，按照圖1-7，可以將上面的想法寫成下面的式子

$$\begin{array}{rrl} & S= & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ +) & S= & 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ \hline & 2S= & \underbrace{11+11+11+11+11+11+11+11+11+11}_{10\text{項}} \end{array}$$

上式的結果可簡寫成

$$2S=11\times 10$$

即 $$S=\frac{11\times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}_{1}}=55$$

回到高斯小時候的故事，他當時要計算的是

$$S=1+2+3+\cdots+100$$

因此按照上面的方法，可以寫成

$$\begin{array}{rrl} & S= & 1+2+3+\cdots+98+99+100 \\ +) & S= & 100+99+98+\cdots+3+2+1 \\ \hline & 2S= & \underbrace{101+101+101+\cdots+101+101+101}_{100\text{項}} \end{array}$$

因此就得到

$$2S=101\times 100$$

$$S=\frac{101\times \cancel{100}^{50}}{\cancel{2}_{1}}=5050$$

這就是高斯可以在短短時間內，用心算算出$1+2+3+\cdots+100$的秘密。這個高明的想法很有用，可以用來解決更一般的問題，例如：

$$2+5+8+11+14$$

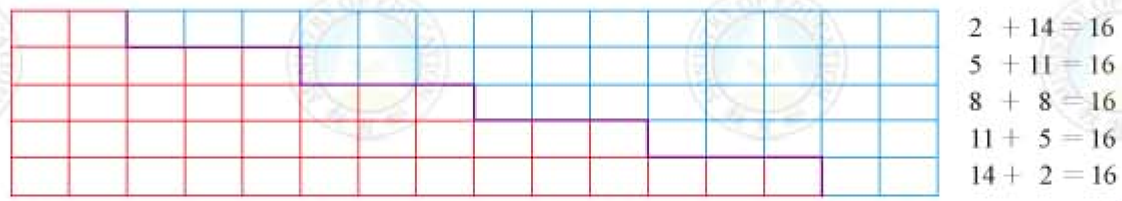


圖 1-8

由圖1-8，若令$S=2+5+8+11+14$

算式可寫成

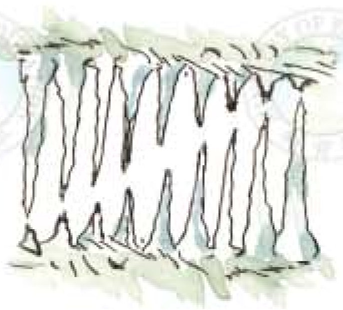
$$
\begin{array}{rl}
 & S=2+5+8+11+14 \\
+) & S=14+11+8+5+2 \\
\hline
 & 2S=\underbrace{16+16+16+16+16}_{5項}
\end{array}
$$

因此 $2S=16\times 5$

$$S=\frac{\cancel{16}^{8}\times 5}{\cancel{2}_{1}}=40$$

動．動．腦

想想看，為什麼圖1-8的圖形會剛剛好接成一個矩形？這和等差數列的特性有什麼關係？



一般來說，給定一個數列a_1、a_2、a_3、…、a_n，算式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

稱為由這個數列所得到的**級數**，其總和的值稱為**級數和**，我們常用S(sum)的記號來表示級數和。如果這個數列是等差數列，所得到的級數就稱為**等差級數**。這一節我們就是要討論計算一般等差級數和的方法。

模仿前面三個例子的想法，令

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

可得到

$$
\begin{array}{rl}
 & S=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n \\
+) & S=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1 \\
\hline
 & 2S=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)
\end{array}
$$

由前面的經驗知道，關鍵在於下面的等式是否正確？

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$$

但因為這是等差級數，設公差為d，由圖1-9，可以知道

$$a_2-a_1=d=a_n-a_{n-1}$$

圖1-9

在等號兩邊同加a_1+a_{n-1}，或利用移項法則，就得到

$$a_2+a_{n-1}=a_1+a_n$$

隨．堂．練．習

模仿上述方法說明：$a_3+a_{n-2}=a_2+a_{n-1}$，因此a_3+a_{n-2}也等於a_1+a_n。

依此類推，就知道

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}=\cdots$$

這麼一來，上面的計算式就變成

$$
\begin{array}{rl}
 & S=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n \\
+) & S=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1 \\
\hline
 & 2S=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1) \\
 & \quad=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)}_{n項}
\end{array}
$$

也就是 $2S=n(a_1+a_n)$

即 $S=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

等差級數和 $=\dfrac{\text{項數}\times(\text{首項}+\text{末項})}{2}$

活用這個等差級數和的公式，可以解決許多求和的問題。

例1 Example

1. 求 $19+21+23+25+27+29+31+33+35$。
2. 有一等差數列，$a_4=80$，$a_{12}=-12$，求 $a_4+a_5+\cdots+a_{12}$。
3. 在110和40之間插入7個數，構成一等差數列，求此7數之和。

解題說明

1. 這是公差為2的等差級數，共有9項，而且首項為19，末項為35，所以總和為

$$\frac{9}{2}\times(19+35)=\frac{9}{\cancel{2}_1}\times\cancel{54}^{27}=243$$

2. 可以將 a_4、…、a_{12} 想成一個新的等差數列，首項是80，末項是 -12，且項數為 $12-4+1=9$，所以

$$a_4+a_5+\cdots+a_{12}=\frac{9}{2}\times(80+(-12))=\frac{9}{\cancel{2}_1}\times\cancel{68}^{34}=306$$

3. 在110和40之間插入7個數，構成一個9項的等差數列，首項為110，末項為40，因此

$$\begin{aligned}\text{中間7項的和}&=\text{9項的總和}-(\text{首項}+\text{末項})\\&=\frac{9}{2}\times(110+40)-(110+40)\\&=\frac{9}{2}\times150-150\\&=\frac{7}{\cancel{2}_1}\times\cancel{150}^{75}\\&=525\end{aligned}$$

隨·堂·練·習

1. 有一等差數列，$a_{13}=-8$，$a_6=48$，求 $a_6+\cdots+a_{13}$。

2. 在0和100之間插入10個數，構成一等差數列，求此12個數的總和。

例2 Example

有一等差數列，首項為2，末項為37，且其等差級數和為156，問此等差數列有幾項？公差是多少？

解題說明

令 n 為項數，由題意知

$$\frac{n}{2}(2+37)=156$$

即 $$n=\frac{\cancel{156}^{4}\times2}{\cancel{39}_1}=8$$

$$\text{公差}=\frac{37-2}{8-1}=\frac{\cancel{35}^{5}}{\cancel{7}_1}=5$$

此等差數列有8項，且其公差為5。

隨·堂·練·習

在0和50之間插入一些數，構成一個等差數列，若希望這些數（含0和50）的總和是400，應插入幾個數？

注意到，在上面的例1與隨堂練習中求等差級數和時，似乎都不需要知道公差。這其實是因為公差的線索，隱藏在首項、末項與項數中，例2告訴我們如何求出隱藏的公差。

但是如果知道首項、項數與公差，卻不知道末項時，就必須繞個彎來求級數和。

例 3 Example

有一等差數列，首項為5，公差為4，求前50項的和。

解題說明

依照等差級數和的公式，必須先算出末項a_{50}，

$$
\begin{aligned}
a_{50} &= 5+(50-1)\times 4\\
&= 5+49\times 4\\
&= 5+196\\
&= 201
\end{aligned}
$$

再依照等差級數和的公式，知

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{50}{2}\times(5+201)\\
&= \frac{50}{\cancel{2}_{1}}\times \cancel{206}^{103}\\
&= 5150
\end{aligned}
$$

隨 · 堂 · 練 · 習

有一等差數列，首項為70，公差為-5，求前25項的和。

上面例子的方法，可以推廣成一般的公式。假設一等差數列的首項為a_1，公差為d，則其第n項為

$$a_n = a_1+(n-1)d$$

因此

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{n}{2}(a_1+a_n)\\
&= \frac{n}{2}(a_1+(a_1+(n-1)d)) \quad \text{代入}a_n\text{的公式}\\
&= \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)
\end{aligned}
$$

這個公式可以用分配律寫成

$$S = na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

並且可以另外說明如下：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1\\
a_2 &= a_1+1\times d\\
a_3 &= a_1+2\times d\\
a_4 &= a_1+3\times d\\
&\vdots\\
+)\quad a_n &= a_1+(n-1)\times d\\
\hline
S &= a_1+\cdots+a_n\\
&= a_1\times n+(1+2+3+\cdots+(n-1))\times d
\end{aligned}
$$

其中$1+2+3+\cdots+(n-1)$是一個$n-1$項的等差級數，首項為1，末項為$n-1$，因此

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(n-1) &= \frac{n-1}{2}(1+(n-1))\\
&= \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

這就說明了$S = na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$。

就求和而言，這個公式和前面的等差級數和的公式其實差不多。下面的例子，比較能看出這個公式的用處。

例 4 Example

有一等差級數，首項為2，公差為6。若已知其級數和為140，問這個等差級數有幾項？並求其末項。

解題說明

由於不知道末項，因此不能像例2那樣求解。令項數為n，我們可利用上述公式得

$$\begin{aligned}140&=2n+\frac{n(n-1)}{\cancel{2}_1}\times\cancel{6}^3\\&=2n+3n^2-3n\\&=3n^2-n\end{aligned}$$

所以　$3n^2-n-140=0$

利用十字交乘法

$$\begin{array}{c}3\left\langle\begin{matrix}1 & \times & -7\\ 3 & & 20\end{matrix}\right\rangle -140\\ \hline 20+(-21)=-1\end{array}$$

得　$3n^2-n-140=(n-7)(3n+20)=0$

因此　$n=7$ 或 $n=-\frac{20}{3}$（負不合）

而且　$a_7=2+6\times(7-1)=2+36=38$

此等差數列共有7項，且末項為38。

隨．堂．練．習

有一等差級數，首項為15，公差為-2，若已知其級數和為48，問此等差級數共有幾項？並求其末項。答案只有一種可能嗎？

例 5 Example

求等差數列1、3、5、7、9、…前n項的和，並求a_n。

解題說明

此數列的首項為1，公差為2，

因此　$a_n=1+(n-1)\times2$

$\qquad=1+2n-2=2n-1$

前n項和為

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}(a_1+a_n)&=\frac{n}{2}(1+(2n-1))\\&=\frac{n}{2}\cdot 2n=n^2\end{aligned}$$

這個奇數等差級數和的結果非常簡單，可以解釋如圖1-10：

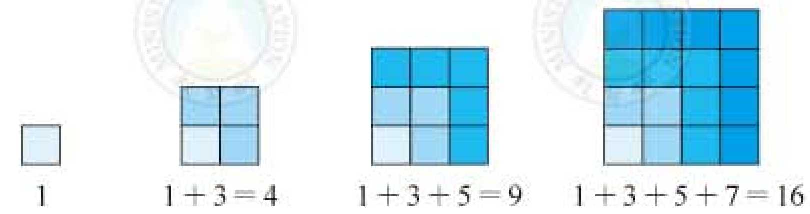


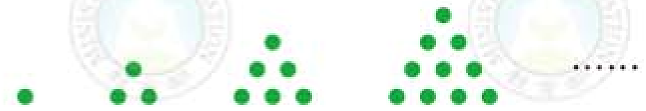
圖 1-10

設每一方格是邊長為1的正方形，由於每往右上一層都比原層多2個方格，因此每一層的方格數的確是首項為1，公差為2的等差數列，而其和就是各正方形的面積，也就是1^2、2^2、3^2、4^2、…。

隨．堂．練．習

求等差數列2、4、6、8、10、…前n項的和，並求a_n。

古希臘人對於與幾何形狀有關的數很有興趣，例如下面的1、3、6、10、…稱為三角形數。



1 3 6 10

圖 1-11

例6 Example

1. 觀察圖1-11，寫出三角形數數列的第5項。
2. 求此數列第20項的值。
3. 求此數列第n項的值。

解題說明

1. 觀察這些數的關係，可知

$$a_1=1$$
$$a_2=1+2=3$$
$$a_3=1+2+3=6$$
$$a_4=1+2+3+4=10$$

所以 $a_5=1+2+3+4+5=15$

2. 由1.知道

$$a_{20}=1+2+3+\cdots+20$$

但1、2、3、…、20是等差數列，首項為1，末項為20，共有20項，

所以 $a_{20}=\dfrac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{2}_{1}}(1+20)=210$

3. 由2.知，第n項的值是

$$a_n=1+2+3+\cdots+n$$
$$=\frac{n}{2}(1+n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

摘要

1. 若一等差級數的首項為a_1，末項為a_n，項數為n，則
$$S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$
2. 若一等差級數的首項為a_1，公差為d，項數為n，則
$$S=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

1-2 自我評量

1. 下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」：

(　　) (1) 將一等差級數的各項都乘以3，則新的等差級數和是原來等差級數和的3倍。

(　　) (2) 將一等差級數的各項都加3，則新的等差級數和是原來等差級數和加3。

(　　) (3) 如果一等差數列中有兩項是4、16，則4的前一項與16的後一項的和等於20。

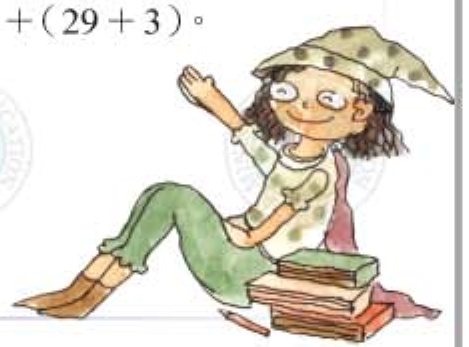
(　　) (4) 一等差級數首項為10，末項為－10，則此等差級數和為0。

(　　) (5) 已知三角形的三角和為180°，若此三角的度數由小到大成一等差數列，則其中必有一角為60°。

2. 求12＋17＋22＋27＋32＋37＋42＋47＋10。

3. 求6×3＋16×3＋26×3＋36×3＋46×3＋56×3。

4. 求（37＋3）＋（35＋3）＋（33＋3）＋（31＋3）＋（29＋3）。



第2章

幾何圖形的角

2-1 三角形的角

從國小以來，我們學過許多平面圖形（例如直線、三角形、正方形、矩形、圓等），以及立體圖形（例如正方體、長方體、球、圓柱），在這些圖形中，最基本且最簡單的要素就是點、線、角。

首先從點和線複習起，圖2-1(a)是平面上的一點A。連接A、B兩點的線段AB，記為$\overline{AB}$，如圖2-1(b)。沿著$\overline{AB}$，以A為起始點，向B方向延伸的線稱為射線AB，記為$\overrightarrow{AB}$，如圖2-1(c)。至於向兩邊無限延伸的線則稱為過A、B兩點的直線，記為$\overleftrightarrow{AB}$，如圖2-1(d)。一般也常用大寫英文字母，如L、M或L_1、L_2等來表示直線，如圖2-1(d)中的L代表直線AB。

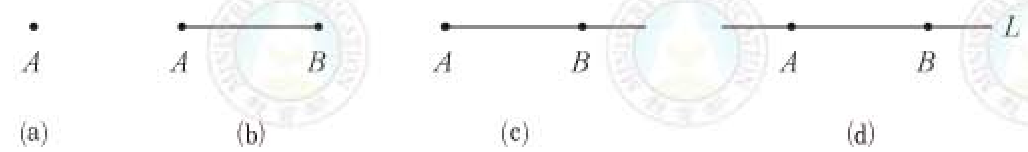


圖2-1

接下來討論角。日常生活中常會看到直角，圖2-2(a)的矩形中每一個角都是直角，直角的角度為90度，記為90°。當兩個直角如圖2-2(b)放在一起，這兩個直角拼成的角稱為**平角**，也就是說，平角的角度為180°。四個直角拼成的角或旋轉一圈所成的角稱為**周角**，周角的角度為360°，如圖2-2(c)。

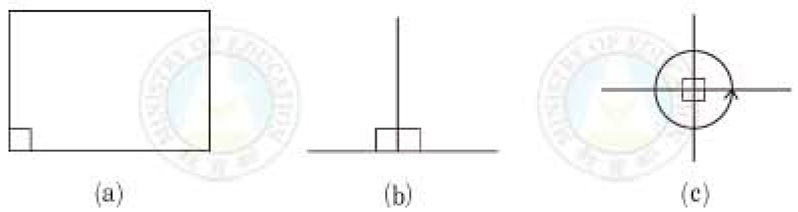


圖2-2

圖2-3(a)是一個一般角，這個角是由頂點A，以及過點A的兩射線$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$所構成，稱為角BAC或角CAB，記為$\angle BAC$或$\angle CAB$，亦可簡記為$\angle A$。為了精簡符號的使用，通常$\angle A$既可以表示角，也可以表示該角的角度。

角的大小和角的兩邊有多長並沒有關係，因為角的大小指的是角所張開的大小，例如圖2-3中(a)和(b)的兩個角，顯然$\angle BAC$小於$\angle EDF$。

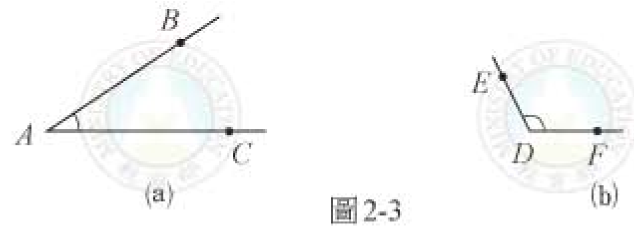


圖2-3

另外要注意，討論角時，$\angle BAC$或$\angle A$可能表示如圖2-4中的兩種不同角度的角。為了能清楚區別，在圖形中有時會用記號$\sphericalangle$來表示指定的角，例如圖2-4(a)的$\angle A$是指比較小的那個角，而圖2-4(b)指的是較大的那個角。

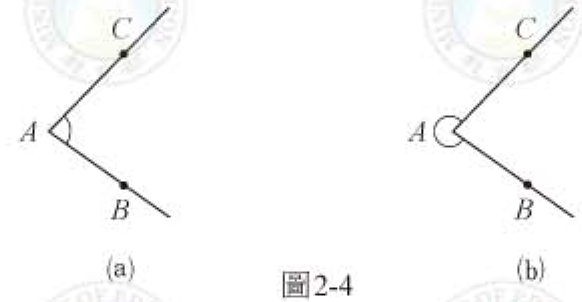
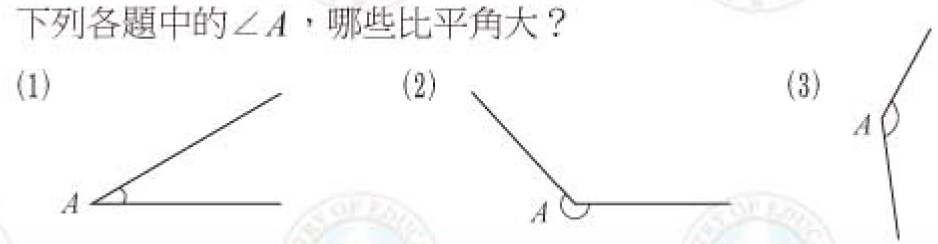


圖2-4

隨・堂・練・習

下列各題中的$\angle A$，哪些比平角大？



另一種常用的表示法是使用$\angle 1$、$\angle 2$這類記號，例如圖2-5中的$\angle 1$是左邊的角，$\angle 2$是右邊的角。

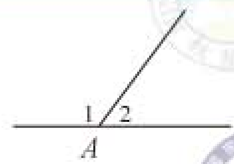


圖2-5

對頂角

兩條直線L和M若相交於一點時，會將平面分成四個部分，形成四個角，如圖2-6。這時稱不相鄰的兩角互為**對頂角**，例如圖2-6中，$\angle 1$和$\angle 2$互為對頂角，而$\angle 3$和$\angle 4$是另一組對頂角。

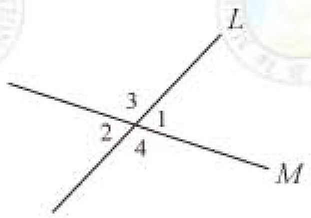
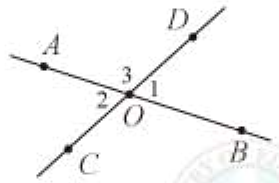


圖2-6

例1 Example

如右圖，已知$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{CD}$交於一點O，且$\angle 1 = 60^\circ$，求$\angle 2$。



解題說明

因為A、O、B三點在同一直線上，所以

$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

同理 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

因此 $\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 3$

同減$\angle 3$得 $\angle 2 = \angle 1 = 60^\circ$

由例1的說明，知道

若相異兩直線相交，所形成的對頂角相等。

隨・堂・練・習

如右圖，直線L與M相交於一點，已知$\angle 1 = 85^\circ$，求$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$的度數。

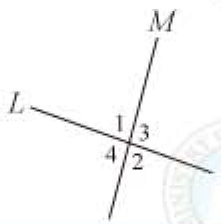


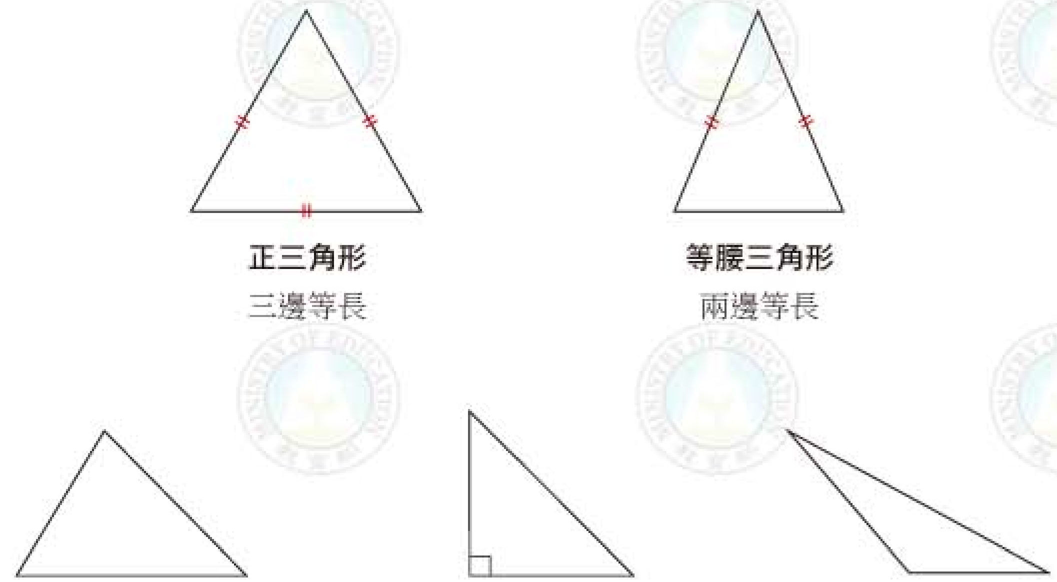
圖2-6中$\angle 1$和$\angle 3$合起來是180°，一般稱和為180°的兩角互為**補角**，簡稱兩角互補。例如，圖2-6中，$\angle 1$和$\angle 3$互補，$\angle 2$和$\angle 3$也互補。

隨・堂・練・習

若$\angle A = 90^\circ$，$\angle B=120^\circ$，求$\angle A$與$\angle B$補角的度數。

三角形的角

接下來討論三角形。三角形有三個頂點，連接這三個頂點構成三條邊，而由這三條邊可構成三個角。三角形中有一些比較特殊的三角形，是利用特別的邊長或角度關係定義出來的，如圖2-7所示：



正三角形 三邊等長

等腰三角形 兩邊等長

銳角三角形 每個角都小於直角

直角三角形 有一個角是直角

鈍角三角形 有一個角大於直角

圖2-7

其中邊上如果有相同的記號，表示這些邊的邊長相等。

如圖2-8中的三角形ABC，一般記為$\triangle ABC$，其中A、B、C表示三角形的頂點，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$表示三角形的三邊。為了精簡符號的使用，通常$\overline{AB}$既可以表示線段，也可以表示該線段的長度。

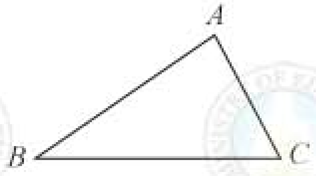
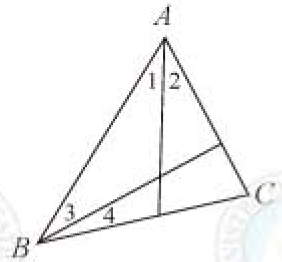


圖2-8

在討論像三角形這類圖形時，$\angle BAC$或$\angle A$通常表示朝向圖形內部的角，稱為**內角**。另外，當底下討論三角形時，我們通常用較簡潔的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$來表示$\triangle ABC$的內角。

隨・堂・練・習

如右圖的$\triangle ABC$中，已知$\angle 1=30^\circ$，$\angle 2=30^\circ$，$\angle 3=30^\circ$，$\angle ABC=45^\circ$，求$\angle BAC$和$\angle 4$。



如圖2-9，將$\triangle ABC$的邊延長後，會得到此三角形的六個**外角**。其中$\angle 1$、$\angle 2$是$\angle A$的外角，$\angle 3$、$\angle 4$是$\angle B$的外角，$\angle 5$、$\angle 6$是$\angle C$的外角。由圖2-9知道，$\angle A$的兩個外角$\angle 1$、$\angle 2$互為對頂角，因此$\angle 1=\angle 2$，即三角形同一內角的兩外角相等。

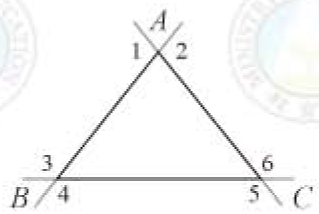


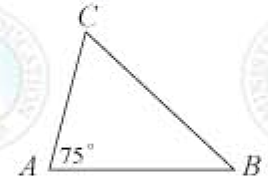
圖2-9

另外，由圖2-9也知道$\angle A$與$\angle 1$互補，$\angle A$與$\angle 2$互補，換句話說，任一內角與它的外角互補。例如，若$\angle A=60^\circ$，則

$$\angle A\text{的外角}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

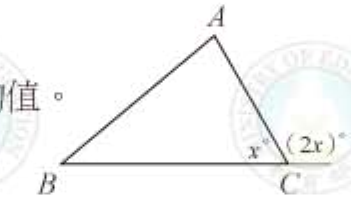
隨・堂・練・習

在$\triangle ABC$中，$\angle A=75^\circ$，求$\angle A$外角的角度。



例2 Example

如右圖，若$\angle C=x^\circ$，$\angle C$的外角$=(2x)^\circ$，求x的值。



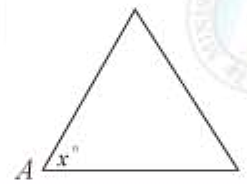
解題說明

由　$x+2x=180$　內角與其外角互補

解得　$x=\cancel{180}^{60}\times\frac{1}{\cancel{3}_{1}}=60$

隨・堂・練・習

如右圖，$\angle A$為x°，$\angle A$的外角為$(3x-60)^\circ$，求x。

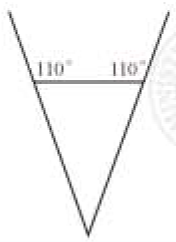


三角形的三個角有沒有可能有兩個直角或是兩個鈍角呢？假如用量角器試畫出兩個分別是110°和110°的鈍角，可能會出現像圖2-10這樣的圖形，其中左右兩「邊」越離越遠，根本不可能相交，所以不能形成一個三角形。

圖2-10

動・動・腦

玉玲說她畫了一個像右圖這樣的三角形，而且這個三角形有兩個鈍角。你覺得她說得對不對？



由上面的討論，可以感覺到三角形的三個角，好像會彼此牽制，角度的總和似乎不能太大。所以在小學時，老師會要求同學利用量角器去測量三個角，或者用剪刀將三個角剪下來，像圖2-11一樣，對準角的頂點，把三個角加起來。然後就會發現，三個角的總和好像是180°。嘗試不同的三角形，得到的結果都和180°很靠近。因此，歸納出

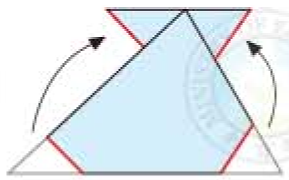


圖2-11

三角形的內角和是180度。

我們暫時假設這個性質成立，底下將說明從這個性質可以得到的一些結論，在48頁我們將再回來說明這個性質。

例3 Example

假設「三角形的三角和是180度」，說明三角形最多只有一個直角。

解題說明

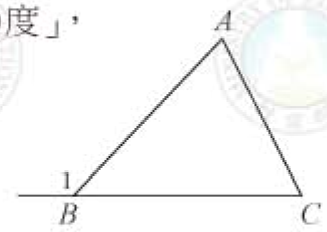
如果一個三角形有兩個直角，那麼這兩個角的和已經是180度，由於三角形的每一個角的角度都大於0，若再加上第三個角，三個角的總和就會超過180度。但這是不可能的，因為我們假設三個角的總和是180度。這樣就說明了三角形頂多只有一個直角。

隨・堂・練・習

模仿例3的做法，說明三角形最多只有一個鈍角。

例4 Example

如右圖，有一$\triangle ABC$，利用「三角形的內角和是180度」，說明$\angle 1=\angle A+\angle C$。



解題說明

因為$\angle 1$是$\angle B$的外角，所以$\angle 1+\angle B=180^\circ$。

由於三角形內角和為180°，得$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$。

所以　　$\angle 1+\angle B=\angle A+\angle B+\angle C$

同減$\angle B$得　$\angle 1=\angle A+\angle C$

當然以上的說明，對其他的外角也都成立，為了避免敘述麻煩，我們把這個性質簡稱為**三角形外角性質**，即

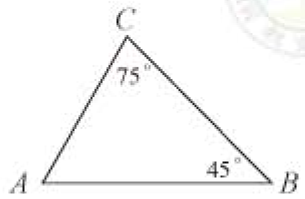
三角形任一外角等於其兩內對角之和

其中，$\angle A$、$\angle C$稱為外角$\angle 1$的**內對角**，這是因為它們位於$\angle 1$頂點B的對面，又是三角形內角的緣故。

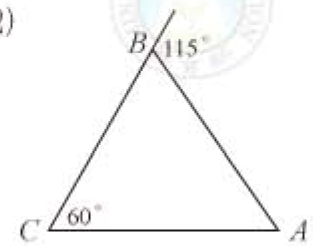
隨・堂・練・習

求下列各題中$\angle A$的外角：

(1)



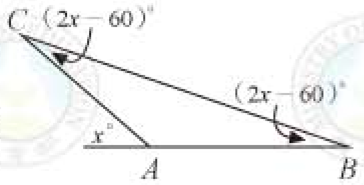
(2)



例 5 Example

如右圖，$\triangle ABC$中$\angle A$的外角為x°，

$\angle B=\angle C=(2x-60)^\circ$，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$。



解題說明

由三角形外角性質得

$$x=(2x-60)+(2x-60)=4x-120$$

因此 $3x=120$

得 $x=40$

所以 $\angle A=180^\circ-40^\circ=140^\circ$

$\angle B=\angle C=(2x-60)^\circ=(80-60)^\circ=20^\circ$

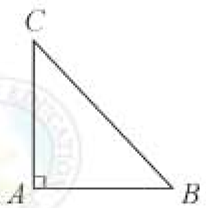
隨・堂・練・習

若$\triangle ABC$中，$\angle A$的外角是147°，$\angle B$是$\angle C$的兩倍，求$\angle B$、$\angle C$。

例 6 Example

如右圖，$\triangle ABC$為一直角三角形，$\angle A$為直角，

說明$\angle B+\angle C=90^\circ$。



解題說明

因為三角形內角和是180°

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$$

已知 $\angle A=90^\circ$

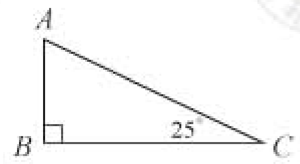
所以 $\angle B+\angle C=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

若兩角和為90度，則稱這兩角互為**餘角**，或簡稱為兩角互餘。由上面的例題知道，直角三角形中非直角的兩角互餘。

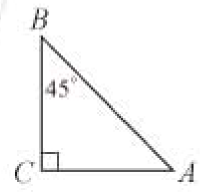
隨・堂・練・習

求下列各題中的$\angle A$：

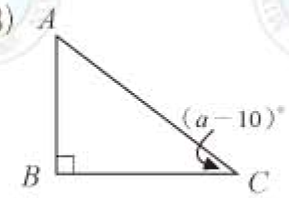
(1)



(2)

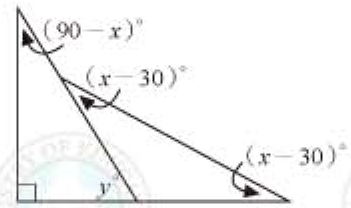


(3)



例 7 Example

根據右圖所示各角的角度，求x、y的值。



解題說明

由於直角三角形中，非直角的兩角互餘，得

$$(90-x)+y=90$$

化簡得 $y=x$ ⋯⋯⋯⋯(1)

由三角形外角性質，得

$$y=(x-30)+(x-30)=2x-60 \quad\cdots\cdots(2)$$

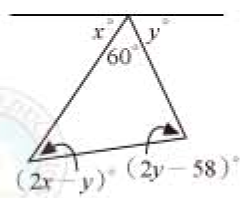
將(1)代入(2)，得

$$x=2x-60$$

解得 $x=60$，$y=x=60$

隨・堂・練・習

如右圖，求x、y的值。



從以上的例題，我們發現一個有趣又驚人的事情，只要知道「三角形內角和為180度」，那麼完全不需要透過實際的測量，只靠簡單的計算和推理，就可以知道很多三角形的性質，例如三角形最多只有一個直角；三角形的外角一定會等於其兩內對角的和；直角三角形中，非直角的兩內角一定互餘，比我們實際去測量還要準確！這真是一件神奇的事。

不過聰明的你，可能會問到一個關鍵的問題：「為什麼我們知道三角形內角和一定是180度呢？」以前不是也只靠測量角度或拼貼，才能說明這個性質的嗎？如何確定這一定是對的呢？

是的，這其實就是為什麼要學習幾何學的原因。在以後的章節裡，我們會慢慢討論這些性質，大家將發現幾何圖形中有許多沒想到的有趣性質。下面我們先說明三角形外角和的性質，再說明三角形內角和為什麼一定是180度。

三角形外角和性質

想像廷聰從如圖2-12三角形公園的一邊$\overline{AC}$某處出發，要繞公園走一圈。走到A點時，廷聰要轉一個$\angle 1$的角度後，才可以在$\overline{AB}$上繼續前進，由圖可知$\angle 1$其實就是A的外角。廷聰繼續走下去，在B點轉一個$\angle 2$的角度後，踏上$\overline{BC}$，再到C點轉$\angle 3$的角度後，走回邊$\overline{AC}$，最後走回原處。

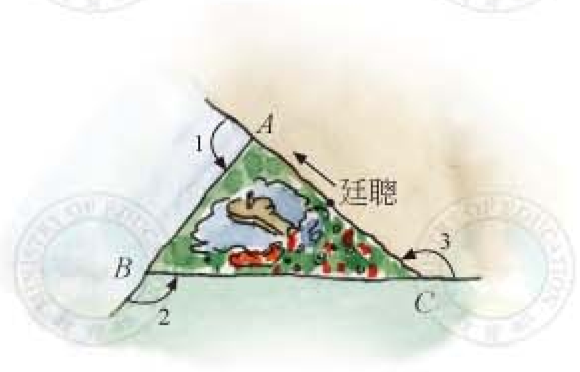


圖2-12

由於廷聰整整繞了一圈，所轉的角度是360度，所以廷聰三次轉彎的角度總和是360度。也就是說

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$$

如果想像廷聰其實是一個巨人，根本不費吹灰之力就繞完一圈，他從很高的地方往下看他繞一圈的結果，感覺上就像原地旋轉一樣（如圖2-13）這更說明了這三個外角的和的確是一個周角，也就是360度。

圖2-13

重點是，不管這個三角形公園的形狀是正三角形、直角三角形，甚至任何三角形，以上的說明都成立。因此我們發現了一個對任何三角形都成立的性質。如果把這三個外角稱為此三角形的一組外角，這個性質可以敘述成

三角形的一組外角和為360度。

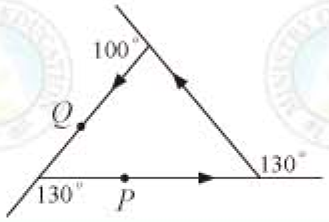
上述性質稱為**三角形外角和性質**。

動．動．腦

如果廷聰換個方向，沿三角形公園繞一圈，會得到怎樣的結果？

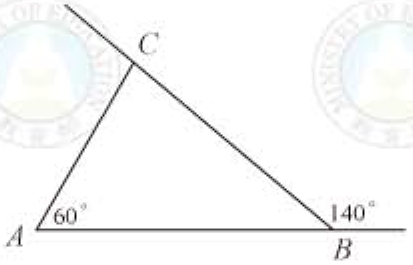
隨・堂・練・習

如右圖，若美華從P沿著箭頭方向走到Q，問美華總共轉了幾度？



例8 Example

如右圖，求$\angle C$的外角。



解題說明

因為$\angle A=60^\circ$，所以

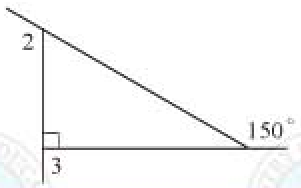
$\angle A$的外角$=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

由外角和為360°，得

$\angle C$的外角$=360^\circ-140^\circ-120^\circ=100^\circ$

隨・堂・練・習

如右圖，求$\angle 2$、$\angle 3$。



三角形內角和等於180度

現在說明為什麼三角形三內角的和是180度。任意畫一個三角形ABC，如圖2-14。

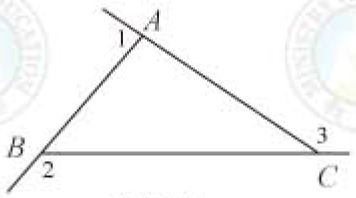


圖2-14

由於$\angle 1$和$\angle A$互補、$\angle 2$和$\angle B$互補、$\angle 3$和$\angle C$互補，所以有

$$\angle 1+\angle A=180^\circ$$
$$\angle 2+\angle B=180^\circ$$
$$\angle 3+\angle C=180^\circ$$

利用等量公理，我們可以把這些式子的等號兩邊各自做連加，得到

$$(\angle 1+\angle A)+(\angle 2+\angle B)+(\angle 3+\angle C)=540^\circ$$

由於我們有興趣的是三角形的三內角和，所以把左式重組，改寫成

$$(\angle 1+\angle 2+\angle 3)+(\angle A+\angle B+\angle C)=540^\circ$$

但是因為三角形的一組外角和為360度，也就是

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$$

於是得到　$360^\circ+(\angle A+\angle B+\angle C)=540^\circ$

同減360°得　$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

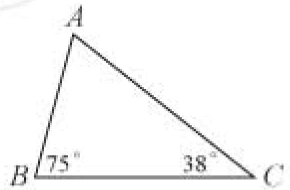
由於$\triangle ABC$是隨意畫出來的，由上面的說明，可知下述性質是正確的

三角形內角和為180度。

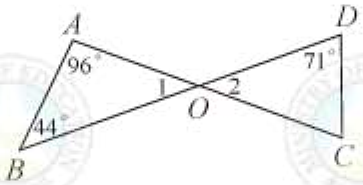
在這個說明裡，我們完全沒有使用量角器去測量角度，但是卻能夠知道任意三角形內角和一定是180度，是不是很奇妙呢？

隨・堂・練・習

如右圖，求$\angle A$。



例9 Example



如右圖，已知$\overline{AC}$和$\overline{BD}$相交於O點，求$\angle C$。

解題說明

在$\triangle ABO$中

$\angle 1 = 180^\circ - \angle A - \angle B$ 　三角形內角和是180°

$= 180^\circ - 44^\circ - 96^\circ$

$= 40^\circ$

因為 $\angle 2 = \angle 1 = 40^\circ$ 　對頂角相等

所以 $\angle C = 180^\circ - \angle D - \angle 2$ 　三角形內角和是180°

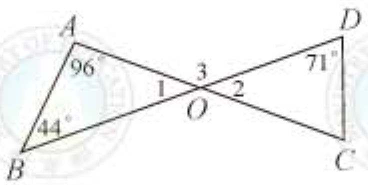
$= 180^\circ - 71^\circ - 40^\circ$

$= 69^\circ$

在例9裡，我們用藍色框說明推理過程中每個步驟所引用的性質。如前面所強調，幾何學的學習是要能用推理來得到某些結論，因此每一個推理的步驟都要清楚，同學要多加練習，底下是一個例子。

隨．堂．練．習

例9的$\angle C$也可以利用外角性質來算。請在下列空格中填入答案或適當的理由。



$\angle 3 = \angle A + \angle B$ 　(＿＿＿＿＿＿＿＿)

$=$ ＿＿＿＿＿＿

在$\triangle OCD$中，$\angle 3$是$\angle 2$的外角，

所以 $\angle C = \angle 3 - \angle D$ 　(＿＿＿＿＿＿＿＿)

$=$ ＿＿＿＿＿＿

例10 Example

如果$\triangle ABC$三內角的連比為$\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$，這個三角形是銳角、直角還是鈍角三角形？

解題說明

由於 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$

設 $\angle A = (2r)^\circ$，$\angle B = (3r)^\circ$，$\angle C = (4r)^\circ$

得 $2r + 3r + 4r = 180$ 　三角形內角和為180°

因此 $9r = 180$

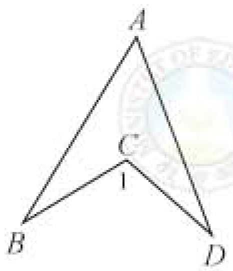
即 $r = 20$

所以這三個角分別為40°、60°、80°，因此$\triangle ABC$是一個銳角三角形。

隨．堂．練．習

已知$\triangle ABC$三內角的連比為$\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 4 : 3$，請問$\triangle ABC$是銳角、直角還是鈍角三角形？

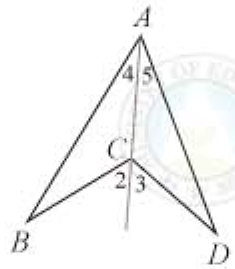
例11 Example



如右圖，試說明$\angle 1 = \angle A + \angle B + \angle D$。

解題說明

由於我們只知道三角形內角和為180°，因此可以試著畫一條輔助線把四邊形$ABCD$切割成兩個三角形，如此可幫忙我們分析各角的關係。下面提供兩種作法。



方法一：如右圖作$\overrightarrow{AC}$

則　$\angle 2 = \angle B + \angle 4$　外角等於兩內對角和

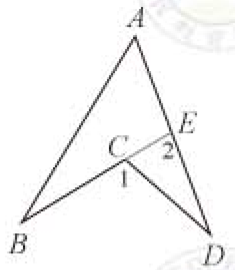
同理　$\angle 3 = \angle D + \angle 5$

所以　$\angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle B + \angle D$

但是　$\angle 2 + \angle 3 = \angle 1$

　　$\angle 4 + \angle 5 = \angle A$

所以　$\angle 1 = \angle A + \angle B + \angle D$



方法二：如右圖作$\overline{BC}$的延長線交$\overline{AD}$於E

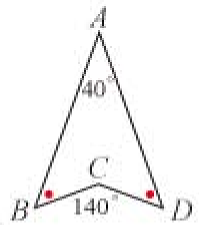
　　$\angle 2 = \angle A + \angle B$　三角形外角性質

同理　$\angle 1 = \angle 2 + \angle D$

所以　$\angle 1 = \angle A + \angle B + \angle D$

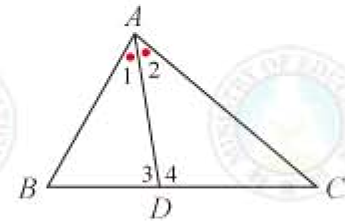
隨・堂・練・習

如右圖，已知$\angle B = \angle D$，求$\angle B$。



上圖中$\angle B$、$\angle D$兩角中相同的圓點記號，表示兩角相等。

例12 Example



如右圖，有一$\triangle ABC$，$\angle B = 60^\circ$，$\angle C = 40^\circ$，$\angle 1 = \angle 2$，求$\angle 3$和$\angle 4$。

解題說明

由於　$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$

　　$= 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$　三角形內角和為180°

而且　$\angle A = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 2$，

得　$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle A = (\frac{1}{2} \times 80)^\circ = 40^\circ$

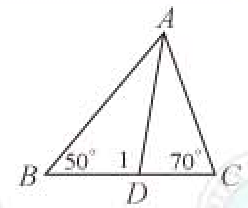
因此　$\angle 3 = \angle 2 + \angle C = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$　三角形外角性質

再由此得　$\angle 4 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$　$\angle 3$和$\angle 4$互補

在例12裡，$\overline{AD}$把$\angle A$分成$\angle 1$和$\angle 2$兩個相等的角，此時稱$\overrightarrow{AD}$或$\overline{AD}$是$\angle A$的**角平分線**。

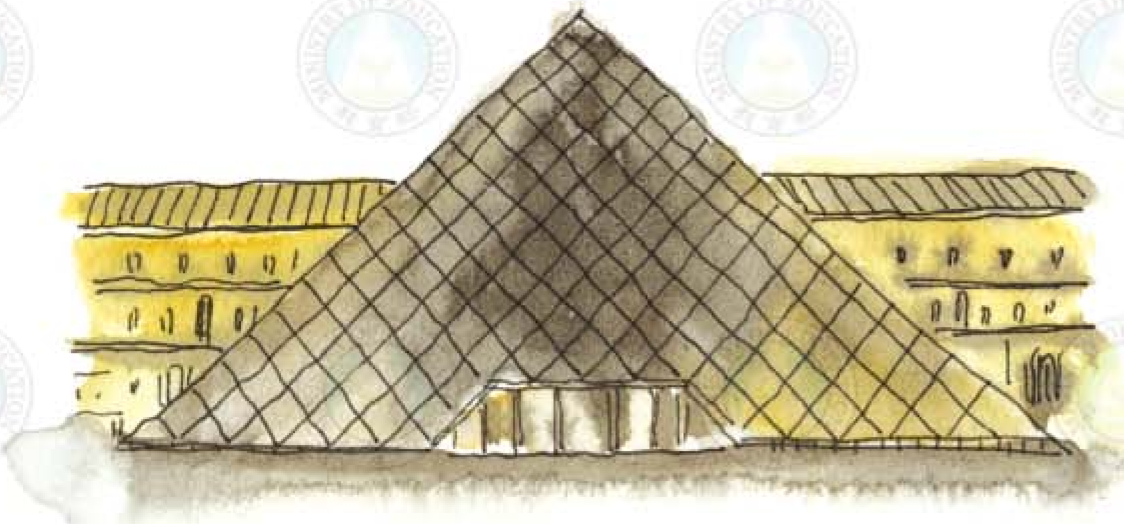
隨・堂・練・習

如右圖，有一$\triangle ABC$，$\angle B = 50^\circ$，$\angle C = 70^\circ$，$\angle 1 = 100^\circ$，請問$\overline{AD}$是不是$\angle A$的角平分線？



摘要

1. 若相異兩直線相交，所形成的對頂角相等。
2. 三角形的一組外角和為360度， 三角形內角和為180度。
3. 三角形任一外角等於其兩內對角之和。



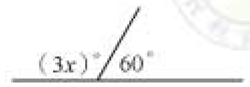
2-1 自我評量

1. 求下列各角餘角的度數：

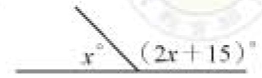
(1) $\angle A=30^\circ$　(2) $\angle B=50^\circ$　(3) $\angle C=70^\circ$

2. 求下列各圖形中x的值：

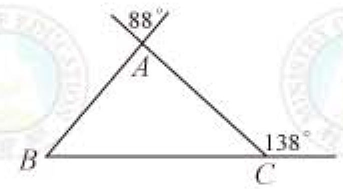
(1)



(2)

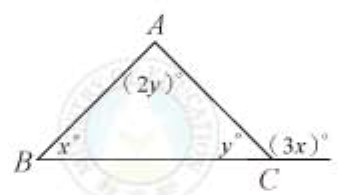


3. 如右圖，求$\angle B$。



4. $\triangle ABC$中，$\angle A=\angle B$，$\angle C=40^\circ$，求$\angle A$。

5. 如右圖，求x、y的值。



2-2 多邊形的內角與外角

圖2-15中的圖形分別稱為三角形、四邊形、五邊形與六邊形，這些圖形是以邊數來命名的，統稱為**多邊形**。多邊形的頂點、邊及角的意義與三角形相同。圖2-15中藍色的部分稱為多邊形的內部，多邊形的角指的是朝向內部的角，也稱為內角。

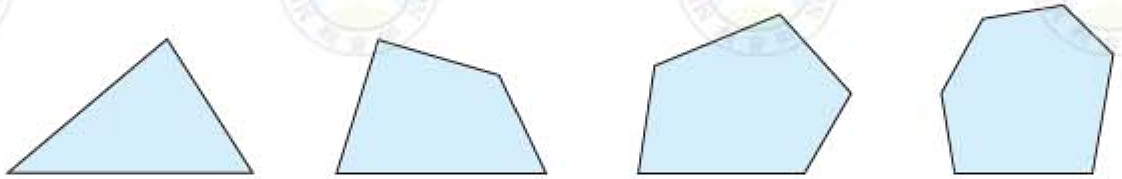


圖2-15

習慣上，多邊形依頂點連接的順序來命名，如圖2-16的四邊形可記為四邊形$ABCD$或$BCDA$或$ADCB$等等。但是不可以記為四邊形$ABDC$或$ADBC$。這是因為即使頂點相同，但是若頂點連接方式不同，就會得到不同的圖形。例如圖2-17中，由同樣的一組頂點A、B、C、D，卻能畫出不同的四邊形$ABCD$（圖2-17(a)）和$ABDC$（圖2-17(b)）。

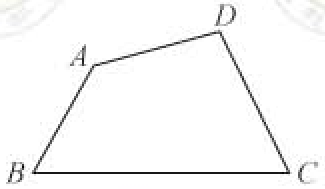


圖2-16

圖2-17

多邊形兩不相鄰頂點的連線段稱為**對角線**。例如圖2-18中，灰色線段都是對角線。多邊形分為凸多邊形與凹多邊形，通常以對角線來判斷。所有對角線都在多邊形內部的多邊形稱為**凸多邊形**（如圖2-18(a)），否則稱為**凹多邊形**（如圖2-18(b)）。由圖2-15到圖2-18，可以看到凸多邊形的每一個內角都小於180°，而凹多邊形中至少有一個內角大於180°。本書所討論的多邊形都是凸多邊形。

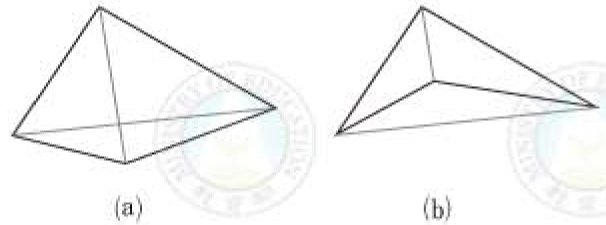
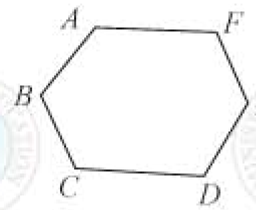


圖2-18

隨·堂·練·習

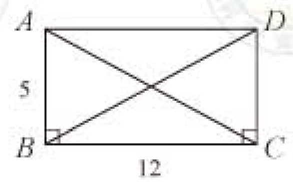
如右圖，有一六邊形$ABCDEF$，請問以A為端點的對角線有多少條？這些對角線把此六邊形切割成幾個三角形？



例1 Example

一矩形的長、寬分別為12、5，求此矩形的兩對角線長。

解題說明



如右圖，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為矩形$ABCD$的兩對角線，

因為$\triangle ABC$為直角三角形，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，

得 $\overline{AC}^2=5^2+12^2=169$ 畢氏定理

所以 $\overline{AC}=13$

同理，$\triangle BCD$也是直角三角形，且$\overline{CD}=5$，$\overline{BC}=12$，

所以 $\overline{BD}^2=5^2+12^2=169$ 畢氏定理

得 $\overline{BD}=13$

由例1的說明，可知

矩形的兩對角線等長。

隨・堂・練・習

一矩形的長為24，對角線長為25，求此矩形的寬。

接著我們討論多邊形的外角和與內角和的性質。

多邊形的外角和與內角和

多邊形內角的一邊和另一邊延長線所成的角，稱為此內角的一個外角，如圖2-19中，$\angle 1$、$\angle 5$都是內角$\angle A$的外角。由圖可知，$\angle 1$、$\angle 5$分別都和$\angle A$互補，所以$\angle 1=\angle 5$，即多邊形任一角的兩外角相等，這些性質都和三角形一樣。

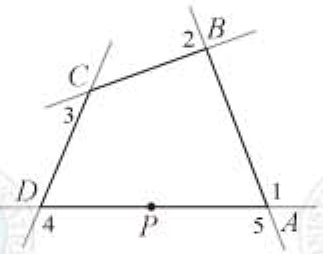


圖2-19

隨・堂・練・習

若一多邊形的某內角等於其外角，求此內角的度數。

在討論三角形一組外角和時，我們以繞行三角形一圈的方式來思考。對於四邊形，也可以用相同的方式來討論。如圖2-19，從P點出發，沿四邊形$ABCD$的邊前進，依序經過A、B、C、D四點，繞一圈回到P點，所轉的角度和恰為四邊形$ABCD$一組外角的總和，由於繞一圈的角度是360°。因此$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^\circ$，即**四邊形一組外角和為$360^\circ$**。

這是一個初看令人很驚訝的結果。因為三角形及四邊形邊數不同，但外角和卻都是360°。不過在了解這只是繞一圈是360°的原理後，就不那麼令人意外了。同樣的想法可以用到任意的多邊形，例如由圖2-20中五邊形$ABCDE$的P點出發，沿邊繞一圈就可以得到外角和也是360°的結果。

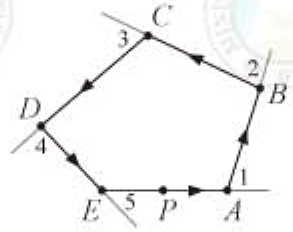


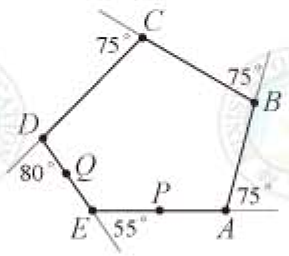
圖2-20

由上面的討論可知

n邊形的一組外角和為360度。

隨・堂・練・習

如右圖，森雄繞五邊形的公園散步，他由P點出發，依序經過A、B、C、D四點繞行到Q點，森雄一共轉了多少度？



例2 Example

(1) 若某四邊形的每個外角皆相等，求此四邊形的任一外角。

(2) 若某五邊形的每個外角皆相等，求此五邊形的任一內角。

解題說明

(1) 由於四邊形一組外角和為360°，且每個外角皆相等，所以

每個外角$=360^\circ\div4=90^\circ$

(2) 由於五邊形一組外角和為360°，且每個外角皆相等，

所以　每個外角$=360^\circ\div5=72^\circ$

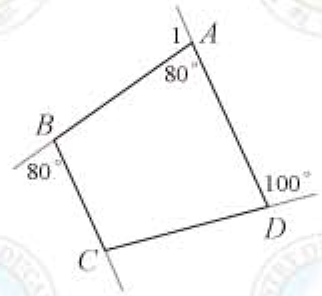
因此　每個內角$=180^\circ-72^\circ=108^\circ$

隨・堂・練・習

若某六邊形的每個外角皆相等，求此六邊形的任一內角。

例 3 Example

如右圖，求$\angle C$的外角。



解題說明

由圖知，$\angle1$是$\angle A$的外角，所以

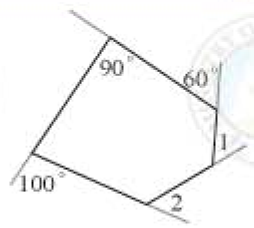
$\angle1=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

由外角和為360°，得

$\angle C$的外角$=360^\circ-100^\circ-100^\circ-80^\circ=80^\circ$

隨・堂・練・習

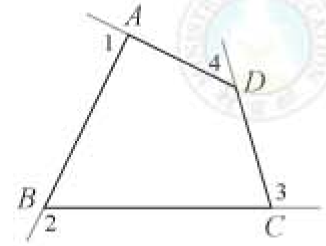
如右圖，已知$\angle1=\angle2$，求$\angle1$。



接下來要討論多邊形的內角和，首先以四邊形為例。

例 4 Example

說明四邊形$ABCD$的內角和為360°。



解題說明

因為四邊形的每一內角與其外角構成一平角，所以

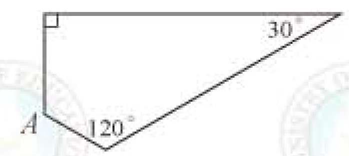
四邊形的內角和與一組外角和加起來有4個平角，即

內角和＋一組外角和$=180^\circ\times4=720^\circ$

但因為一組外角和為360°，所以內角和$=720^\circ-360^\circ=360^\circ$。

隨・堂・練・習

如右圖，已知四邊形中的三內角，求$\angle A$。



例 5 Example

如右圖，已知四邊形中的兩內角，求x的值。

解題說明

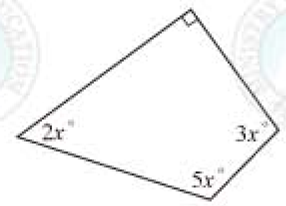
由圖得　$x+105+x+95=360$　四邊形內角和為360°

化簡得　$2x=360-105-95=160$

解得　$x=80$

隨・堂・練・習

如右圖，求x的值。



例4的想法可以推廣到n邊形的內角和。因為n邊形有n個內角，而每一內角與其外角和等於180°，所以

$$n\text{邊形內角和}+n\text{邊形一組外角和}=180^\circ\times n$$

但因為一組外角和為360°，所以

$$n\text{邊形內角和}=180^\circ\times n-360^\circ=180^\circ\times(n-2)$$

即

n邊形內角和為$180\times(n-2)$度。

例6 Example

1. 求五邊形的內角和。
2. 已知一多邊形的內角和為1800°，求此多邊形的邊數。

解題說明

1. 由內角和公式，得
   五邊形內角和$=180^\circ\times(5-2)=540^\circ$
2. 設此多邊形的邊數為n，則由內角和公式得
   $$180\times(n-2)=1800$$
   解得$n-2=10$，即$n=12$

隨・堂・練・習

1. 求九邊形的內角和。

2. 若一n邊形的內角和為1980°，求n。

例7 Example

1. 若一多邊形每一個內角為其外角的2倍，求此多邊形的邊數。
2. 一五邊形的5個內角度數成一等差數列，若最小角為50°，求最大角。

解題說明

1. 設此多邊形的邊數為n，由於任一內角等於其外角的2倍，所以內角和是其外角和的2倍。由於外角和為360°，所以內角和為$360^\circ\times2=720^\circ$
   因此　$180\times(n-2)=720$
   解得$n-2=\dfrac{\cancel{720}^{\,4}}{\cancel{180}_{\,1}}$，即$n=6$。
2. 已知此等差數列為5項，即$a_1=50^\circ$、a_2、a_3、a_4、a_5，因為此數列的和為$5\cdot a_3$，所以$5\cdot a_3=180^\circ\times(5-2)=540^\circ$，解得$a_3=108^\circ$。
   由於　$a_1+a_5=2\cdot a_3=108^\circ\times2$
   所以　$a_5=216^\circ-50^\circ=166^\circ$

隨・堂・練・習

若一個n邊形內角和為外角和的3倍，求n。

動・動・腦

某九邊形的內角度數為一等差數列，求公差的範圍。

除了用外角和來求得內角和的方法外，我們也可以把多邊形切割成幾個三角形，然後運用三角形內角和為180°的公式來得到n邊形內角和公式。下面我們用圖2-21來說明。

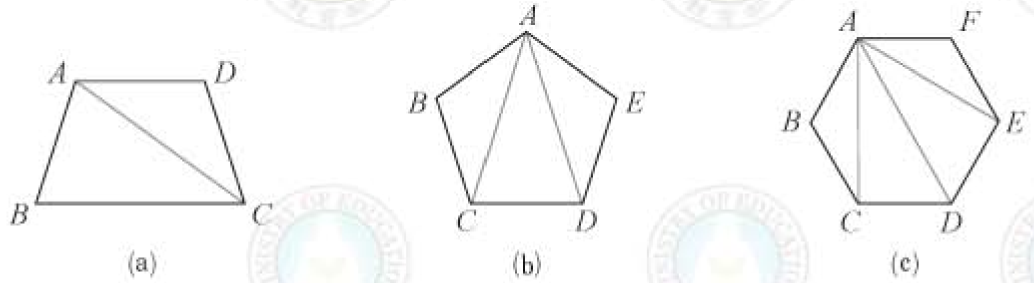


圖2-21

如圖2-21，以頂點A為端點的所有對角線把多邊形分割成一些三角形：

四邊形被分割成2個三角形（圖2-21(a)），所以

四邊形內角和$=180^\circ\times 2$

五邊形被分割成3個三角形（圖2-21(b)），所以

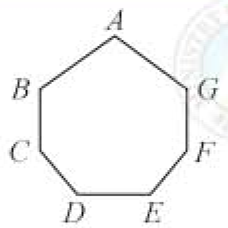
五邊形內角和$=180^\circ\times 3$

六邊形被分割成4個三角形（圖2-21(c)），所以

六邊形內角和$=180^\circ\times 4$

隨．堂．練．習

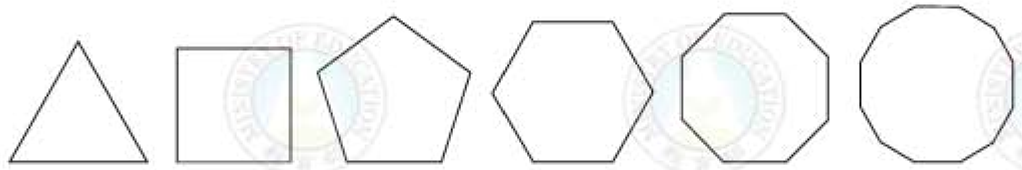
以七邊形的某一頂點為端點的所有對角線會將此七邊形分割成幾個三角形？利用這個分割，七邊形的內角和是多少？和前面所得的結果一樣嗎？



由上可知，這樣做的結果和前面n邊形內角和的公式是一致的。

正多邊形

多邊形中最簡單而常見的是每邊都等長且每角也都是等角的多邊形，這種多邊形稱為**正多邊形**，如圖2-22。其中正三邊形就是大家熟悉的正三角形，正四邊形就是正方形。



正三角形　正方形　正五邊形　正六邊形　正八邊形　正十二邊形

圖2-22

動．動．腦

1. 有沒有四角都相等，但是四邊卻不一定都等長的四邊形？

2. 有沒有四邊都等長，但是四角卻不一定都相等的四邊形？

因為正多邊形的每個內角都相等，因此每個外角也都相等。由n邊形外角和為360度的性質，可以計算出正 n 邊形每個外角為$\frac{360^\circ}{n}$。但因為內角與其外角互補，因此

$$正\ n\ 邊形的每個內角=180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$$

隨．堂．練．習

利用n邊形內角和的公式，重新說明正n邊形每個內角為$180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$。

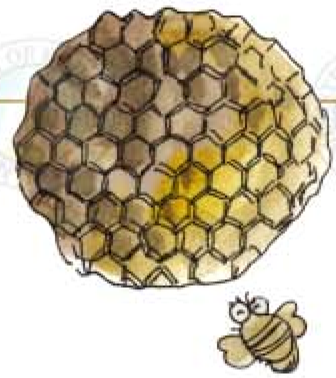
例 8 Example

正十二邊形的一個外角與一個內角各為多少度？

解題說明

正十二邊形的一個外角為 $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$，

因此正十二邊形的一個內角為 $180^\circ-30^\circ=150^\circ$。



隨．堂．練．習

若正 m 邊形的一個內角為 144°，求 m。

例 9 Example

若一正多邊形外角小於 17°，求此多邊形的邊數至少是多少？

解題說明

因為正 n 邊形的一個外角等於 $(\frac{360}{n})^\circ$，

所以 $\frac{360}{n}<17$，兩側同乘以 $\frac{n}{17}$，得 $n>\frac{360}{17}=21\frac{3}{17}$。

但因為 n 是整數，所以 n 至少是 22。

隨．堂．練．習

若一正多邊形的內角小於 140°，求它可能的邊數。

日常生活中常用正方形地磚來鋪地面，因為這樣可以鋪滿地面，如圖2-23(a)。但是並不是所有的正多邊形都可以用來鋪滿地面，如圖2-23(b)就是一個例子。

(a) (b)

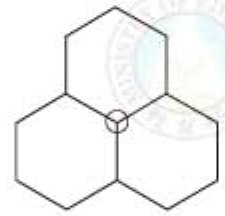
圖2-23

例 10 Example

試問正六邊形地磚，可以鋪滿地面而不會造成空隙嗎？

解題說明

由右圖可知，若要不造成空隙，360° 必須恰為正多邊形內角度數的整數倍。因為正六邊形的內角為 120°，而 120 可以整除 360，所以正六邊形可以鋪滿地面而不會造成空隙。



隨．堂．練．習

試問正五邊形可以鋪滿地面而不會造成空隙嗎？換成正八邊形呢？

動．動．腦

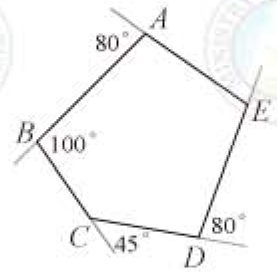
在所有正多邊形中，只有正三角形、正方形、正六邊形這三種正多邊形地磚，可以鋪滿地面而不會留下空隙。你會說明嗎？

摘要

1. n 邊形的一組外角和為 360°，而內角和為 $180^\circ\times(n-2)$。
2. 正多邊形是每邊都等長且每角也都是等角的多邊形。
3. 正 n 邊形的每個外角為 $\dfrac{360^\circ}{n}$，每個內角為 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$。

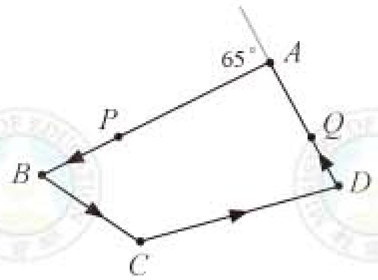
2-2 自我評量

1. 如右圖，有一五邊形 $ABCDE$，求：
   (1) $\angle B$的外角、$\angle E$的外角。
   (2) $\angle C$、$\angle E$。



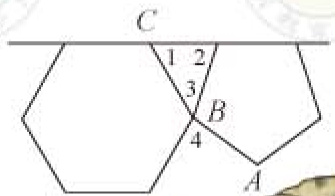
2. 求十邊形的一組外角和及內角和。

3. 如右圖，爺爺繞四邊形的公園散步，他由 P 點出發，經 B、C、D 三點後到達 Q 點，他一共轉了多少度？



4. 若$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$為一個四邊形的一組外角，其中$\angle 3=50^\circ$，$\angle 4=150^\circ$，而且$\angle 1=3\angle 2$（即$\angle 2$的3倍），求$\angle 1$。

5. 右圖為一正五邊形與一正六邊形拼排後的圖形：
   (1) 求$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$。
   (2) A、B、C在同一條直線上嗎？為什麼？



2-3 平行與垂直

平行或垂直是我們在日常生活中熟悉的概念，如圖2-24：

圖2-24

在數學上，當兩直線L_1、L_2同時垂直於同一條直線（如圖2-25的$\overleftrightarrow{AB}$）時，我們稱L_1平行於L_2，或L_1、L_2互相平行，記為$L_1 // L_2$，其中符號「//」讀做「平行於」。

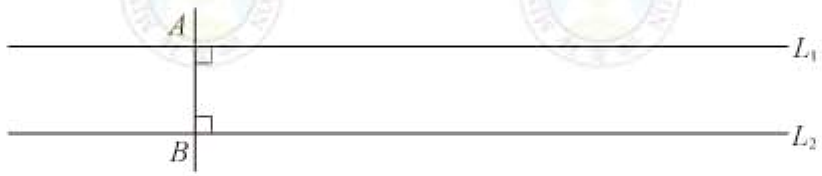


圖2-25

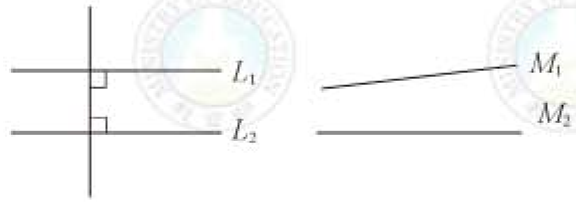
當L_1平行於L_2時，這兩條直線會相交嗎？由圖2-25看起來是不會相交。事實上這可以利用「三角形不可能有兩個直角」來推理得知。想想看如果L_1和L_2會相交在某點C，例如交點C在AB的右側，則$\triangle ABC$就會有兩個直角，但在2-1節我們已經知道這是不可能的。所以，兩平行線不會相交。換句話說，若兩直線相交，則此兩直線就不平行。

隨・堂・練・習

依據右圖回答下列問題：

(1) L_1、L_2會不會相交？為什麼？

(2) M_1、M_2是否平行？為什麼？



當L_1平行於L_2時，若有一直線M和L_1、L_2相交，而且M垂直於L_1，那麼M會不會垂直於L_2？由於L_1平行於L_2，這表示它們會同時垂直於某一直線$\overleftrightarrow{AB}$，如圖2-26。

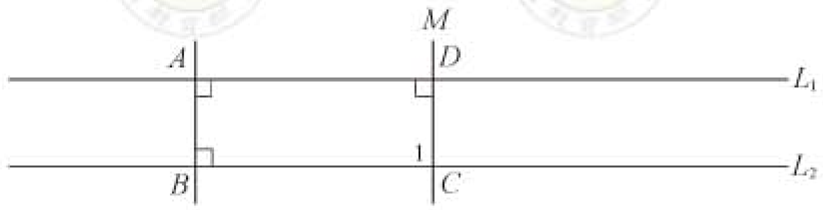


圖2-26

問M會不會垂直於L_2，相當於問$\angle 1$是不是90度。但$ABCD$構成一四邊形，由四邊形內角和公式，得

$$\angle 1 = 360^\circ - \angle BAD - \angle ABC - \angle ADC$$
$$= 360^\circ - 90^\circ \times 3 = 90^\circ$$

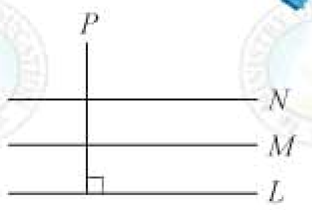
因此M確實垂直於L_2，總結如下

若一直線$M \perp L_1$，且$L_1 // L_2$，則$M \perp L_2$。

$M \perp L_1$表示M垂直於L_1，符號「⊥」讀做「垂直於」。

動 · 動 · 腦

平面上有三條相異直線L、M、N，而且$L // M$、$M // N$，試利用垂直於L的直線P與上述性質說明$L // N$。



點到直線的距離

直覺上，兩條平行線就像筆直的鐵軌，兩線之間好像有著一樣寬的間隔，這個性質在小學已學過，但下面將仔細說明這個性質以及相關的概念。

首先，我們介紹直線外一點到直線的距離。如圖2-27(a)，點A不在直線L上。我們可以利用三角板，在L上找到一點P，使得$\overline{AP} \perp L$，如圖2-27(b)。我們稱P點是$\overleftrightarrow{AP}$在L上的**垂足**，或A在L上的垂足。

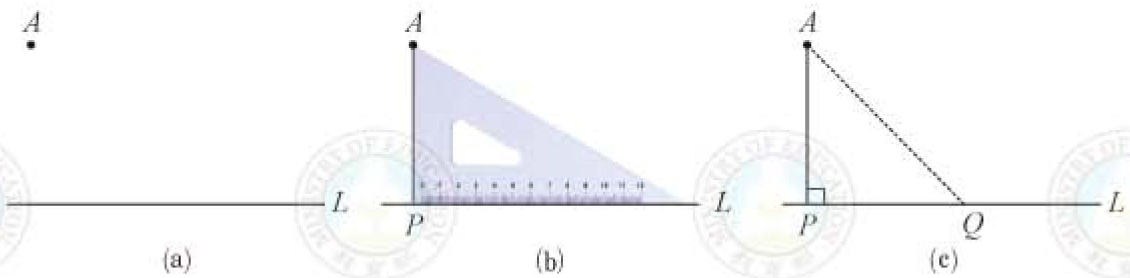


圖2-27

在L上任取一點Q，則$\overline{AP}$和$\overline{AQ}$何者比較長呢？如圖2-27(c)，由於$\triangle APQ$是直角三角形，而$\overline{AQ}$是斜邊，因此$\overline{AQ}$大於$\overline{AP}$，換句話說，A到L上任一點的距離以A到P的距離為最短。我們稱$\overline{AP}$為**A點到直線L的距離**。

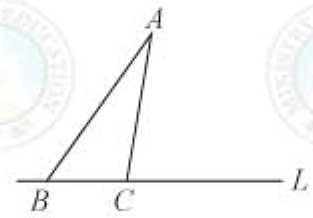
綜合上述可知

A到直線L的距離就是A在L上的垂足與A之間的距離。

隨 · 堂 · 練 · 習

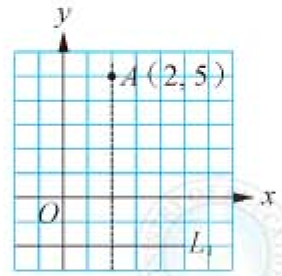
如右圖，B、C是直線L上的兩點。

試比較A到L的距離、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$三者的大小。



例 1 Example

設直線L_1的方程式是$y=-2$。求$A(2, 5)$到L_1的距離。

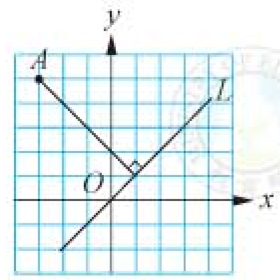


解題說明

過$A(2, 5)$作鉛直線，此鉛直線垂直於L_1，且與L_1的交點為$(2, -2)$。因此$A(2, 5)$到L_1的距離為$5-(-2)=7$。

隨 · 堂 · 練 · 習

如右圖，坐標平面上的一點A在L的垂足是$(1, 1)$，求A到L的距離。



知道點到直線距離的意義後，就可以討論平行線間等寬的現象。如圖2-28，L_1平行於L_2。取L_1上的任意兩點A、B，並各自取它們在L_2上的垂足，分別記為P、Q，則$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BQ}$都垂直於L_2。又

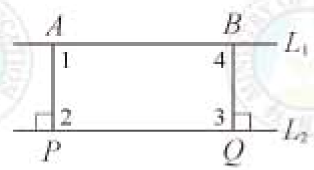


圖2-28

因為$L_1//L_2$，所以$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BQ}$也都垂直於L_1。因此$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$都是直角，亦即四邊形$APQB$是一個矩形，所以$\overline{AP}=\overline{BQ}$，換句話說，$L_1$上任意兩點到$L_2$的距離均相等，這解釋了兩平行線之間等寬的現象。我們把這個性質稱為兩平行線間的距離處處相等。

平行線與截角性質

接著要討論一直線與兩平行線相交時，所形成的角彼此之間的關係。

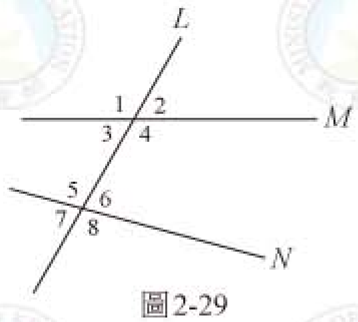


圖2-29

當一直線L與相異的兩直線M、N交於不同兩點時，我們稱L是M、N的**截線**，三線所形成的角都稱為**截角**，如圖2-29，其中$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$為L與M相交產生的截角，$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$、$\angle 8$為L與N相交產生的截角。這兩組截角依彼此相關的位置有下面的關係。

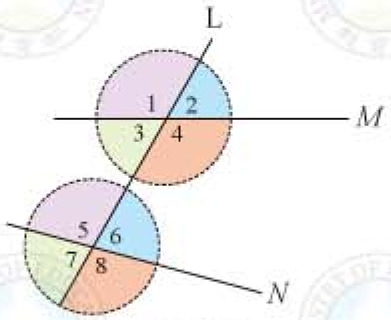


圖2-30

我們稱$\angle 1$和$\angle 5$互為**同位角**。意思是說，此兩角都在截線L的左側，且分別在M、N的上方。同樣的，$\angle 2$和$\angle 6$、$\angle 3$和$\angle 7$、$\angle 4$和$\angle 8$都互為同位角。由圖2-30，知道共有四組同位角。

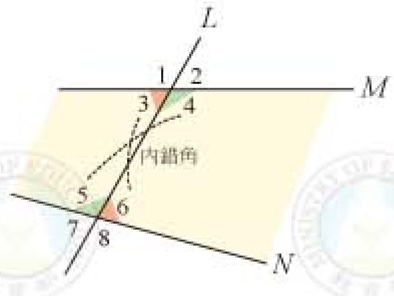


圖2-31

我們稱$\angle 3$和$\angle 6$互為**內錯角**，如圖2-31。意思是說，此兩角均在M、N之間（內側），且為截線L所錯開。同樣的，$\angle 4$和$\angle 5$亦互為內錯角。由圖2-31知道，共有兩組內錯角。

我們稱$\angle 3$和$\angle 5$互為**同側內角**，如圖2-32。意思是說，此兩角在截線L的同側，且均在M、N的內側。同樣的，$\angle 4$和$\angle 6$亦互為同側內角。由圖2-32知道，共有兩組同側內角。

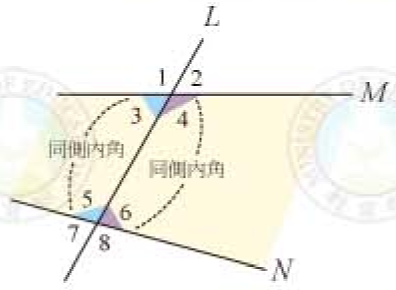
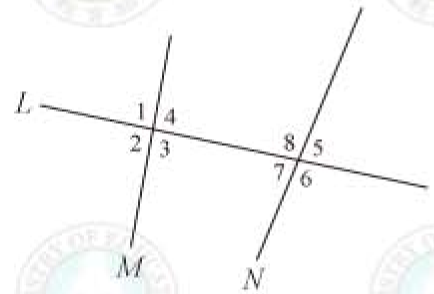


圖2-32

隨・堂・練・習

右圖中，L是M、N的截線，回答下列的問題：



(1) $\angle 2$的同位角是＿＿＿＿＿＿。

(2) $\angle 6$的同位角是＿＿＿＿＿＿。

(3) $\angle 3$的內錯角是＿＿＿＿＿＿。

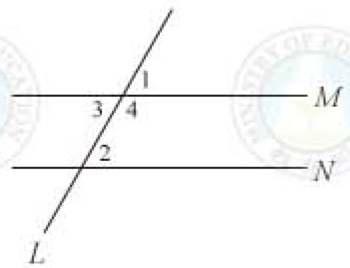
(4) $\angle 7$的內錯角是＿＿＿＿＿＿。

(5) $\angle 4$的同側內角是＿＿＿＿＿。

(6) $\angle 7$的同側內角是＿＿＿＿＿。

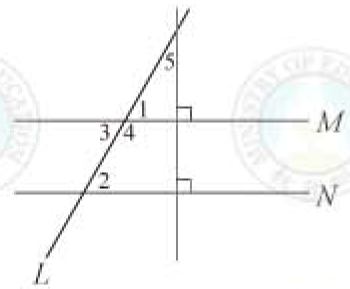
例2 Example

如右圖，$M//N$，L是M、N的截線，其中$\angle 2$和$\angle 1$是同位角，$\angle 2$和$\angle 3$是內錯角，而$\angle 2$和$\angle 4$是同側內角，試說明$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 2$，$\angle 2+\angle 4=180^\circ$。



解題說明

因為$M//N$，所以可作一直線同時垂直於直線M、N。如右圖，可知



$\angle 1+\angle 5=90^\circ$

$\angle 2+\angle 5=90^\circ$

所以　$\angle 1+\angle 5=\angle 2+\angle 5$

得　　$\angle 1=\angle 2$

又因為　$\angle 1=\angle 3$　　**對頂角相等**

所以　　$\angle 2=\angle 3$

又由於　$\angle 3+\angle 4=180^\circ$

可得　　$\angle 2+\angle 4=180^\circ$

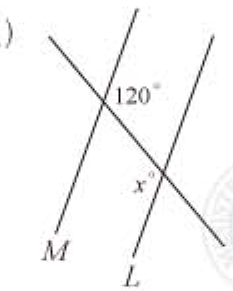
因此　　$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 2$，$\angle 2+\angle 4=180^\circ$

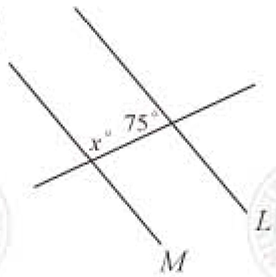
利用例2的方法，也可以推得其他各組的同位角相等、內錯角相等及同側內角互補。因此

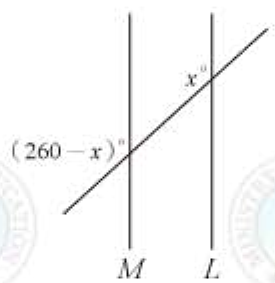
當兩平行線被一直線所截時，
其同位角相等，內錯角相等，同側內角互補。

隨・堂・練・習

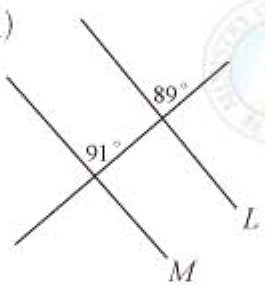
1. 下列各圖中的L與M均互相平行，試分別求出x的值。

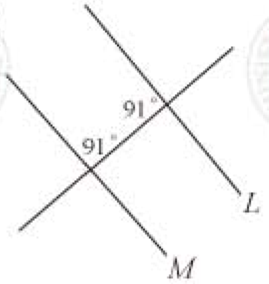
(1)


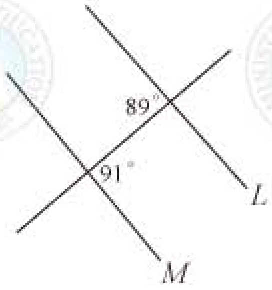
(2)


(3)


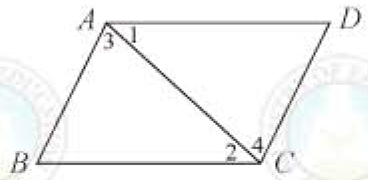
2. 下列各圖中，哪些圖形裡的直線L與M確定<u>不</u>平行？若不平行，請說明理由。

(1)


(2)


(3)


3. 如右圖，四邊形$ABCD$是平行四邊形，在下列空格中填入適當理由，說明$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。

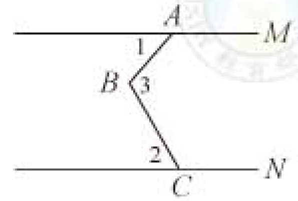


因為$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，所以$\angle 1=\angle 2$。（＿＿＿＿＿＿）

因為$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$，所以$\angle 3=\angle 4$。（＿＿＿＿＿＿）

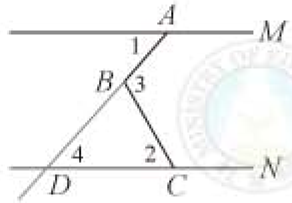
例3 Example

如右圖，$M/\!/N$，$\angle 1=50^\circ$，$\angle 2=60^\circ$，求$\angle 3$的度數。



解題說明

延長$\overline{AB}$交直線N於D，如右圖。由於$M/\!/N$



所以　$\angle 4=\angle 1$　　**內錯角相等**

又　　$\angle 3=\angle 4+\angle 2$　　**外角等於兩內對角之和**

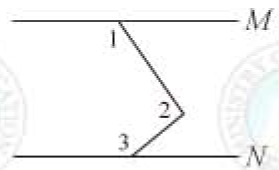
所以　$\angle 3=\angle 1+\angle 2=50^\circ+60^\circ=110^\circ$

隨・堂・練・習

如右圖，$M/\!/N$：

(1) 如果$\angle 1=125^\circ$，$\angle 3=140^\circ$，求$\angle 2$。

(2) 說明$\angle 1+\angle 2+\angle 3$恆為$360^\circ$。



平行四邊形角的性質

四邊形中相鄰的邊稱為鄰邊，不相鄰的邊稱為對邊；同理，四邊形中相鄰的角稱為鄰角，不相鄰的角稱為對角。以圖2-33的四邊形$ABCD$為例，$\overline{AB}$與$\overline{BC}$互為鄰邊，$\overline{AB}$與$\overline{DC}$互為對邊，$\angle C$與$\angle D$互為鄰角，$\angle B$與$\angle D$互為對角。

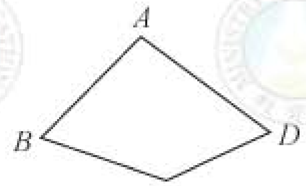


圖2-33

兩組對邊互相平行的四邊形稱為**平行四邊形**。如圖2-34，四邊形$ABCD$中，$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$，因此$ABCD$為一平行四邊形。

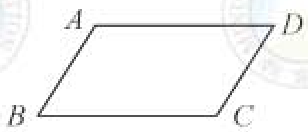
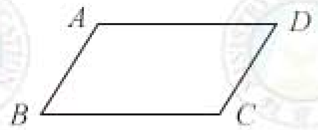


圖2-34

例4 Example

如右圖，已知四邊形$ABCD$為平行四邊形，說明$\angle A+\angle B=180^\circ$，$\angle A=\angle C$。



解題說明

由於四邊形$ABCD$為平行四邊形，所以$\overline{AB}/\!/\overline{DC}$，$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$。

因為 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$

所以 $\angle A+\angle B=180^\circ$。 同側內角互補

因為 $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$

所以 $\angle B+\angle C=180^\circ$ 同側內角互補

因此 $\angle A+\angle B=\angle B+\angle C$

同減$\angle B$得 $\angle A=\angle C$

由例4的方法，也可以推得其他鄰角互補，對角相等。因此

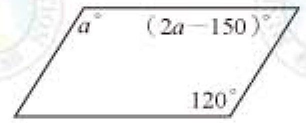
平行四邊形的鄰角互補，對角相等。

隨・堂・練・習

$ABCD$為一平行四邊形，已知$\angle A=80^\circ$，求$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$。

動・動・腦

右圖的四邊形是否為平行四邊形？

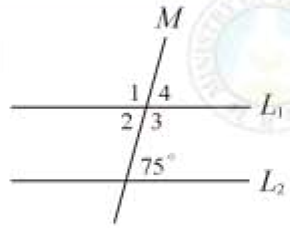


摘要

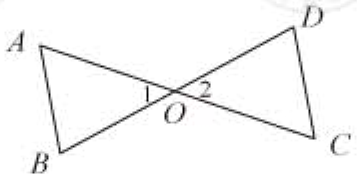
1. 當兩平行線被一直線所截時，其同位角相等，內錯角相等，同側內角互補。
2. 平行四邊形的鄰角互補，對角相等。

2-3 自我評量

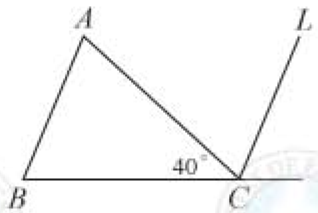
1. 如右圖，$L_1 // L_2$，M 為 L_1、L_2 的截線，求 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$。



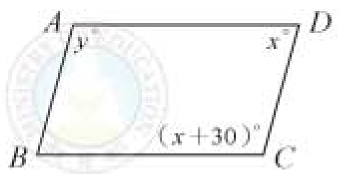
2. 如右圖，$\overline{AB} // \overline{DC}$，$\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 交於 O 點，若 $\angle A = 60°$，$\angle 1 = 50°$，求 $\angle C$、$\angle D$、$\angle 2$。



3. 如右圖，L 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 外角的角平分線，已知 $L // \overline{AB}$，$\angle C = 40°$，求 $\angle A$、$\angle B$。



4. 如右圖，$ABCD$ 為平行四邊形，求 x、y。



第 3 章

三角形的基本性質

3-1 全等的概念

兩個平面圖形，如果看起來似乎相同，要如何判斷它們是否一樣？一個方法是用疊合法，以圖3-1和圖3-2中的△ABC、△DEF為例。

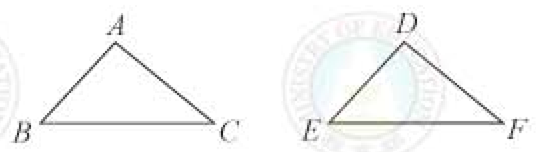


圖3-1

圖3-2

首先將△ABC用透明紙描繪複製，並且移動它能和△DEF重疊在一起（圖3-1），或者如果將複製的三角形翻轉再移動，可以和△DEF重疊起來（圖3-2）。由於兩個三角形完全重疊在一起，因此這兩個三角形形狀、大小都相同。

在數學上，兩個形狀、大小相同的圖形稱為**全等**。事實上，用上面的疊合法，知道圖中的△ABC全等於△DEF，記為

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

其中符號「≅」讀做「全等於」。

由上面的操作來看，如圖3-1和圖3-2，若△ABC要和△DEF疊合，頂點A、B、C一定只能依序和頂點D、E、F相對應才行，否則就沒有辦法疊合。因此，討論三角形全等時，要注意點、邊、角的對應關係。

兩平面圖形全等時，疊在一起的頂點稱為**對應點**，疊在一起的邊叫**對應邊**，疊在一起的角稱為**對應角**。以圖3-1為例，A的對應點是D，所以$\angle A=\angle D$；B的對應點是E，所以$\angle B=\angle E$；同時$\overline{AB}$的對應邊是$\overline{DE}$，因此$\overline{AB}=\overline{DE}$。

在圖3-3中，我們用相同的記號標示這些對應的等長線段與等角。

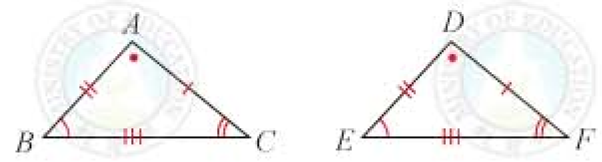


圖3-3

這表示

$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$

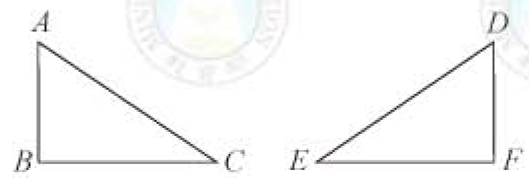
$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$

總之，我們有下面的性質：

兩全等三角形的對應邊相等，對應角相等。

隨・堂・練・習

已知右圖的兩個三角形全等，依你的觀察在空格中填入適當的答案。



B的對應點是________，

$\overline{AC}$的對應邊是________。

例 1 Example

已知△ABC≅△DEF，並且A、B、C的對應點分別是D、E、F，若$\angle A=52^\circ$，$\angle B=78^\circ$，求$\angle D$、$\angle E$、$\angle F$。

解題說明

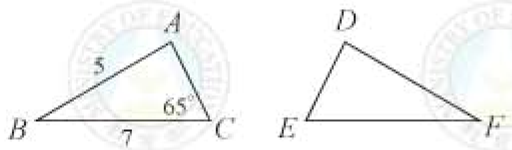
因為A的對應點是D，所以$\angle D=\angle A=52^\circ$。

因為B的對應點是E，所以$\angle E=\angle B=78^\circ$，

由三角形內角和是180°，得$\angle F=180^\circ-52^\circ-78^\circ=50^\circ$。

隨·堂·練·習

右圖中$\triangle ABC \cong \triangle DFE$，其中$A$、$B$、$C$的對應點是$D$、$F$、$E$。求$\overline{DF}$及$\angle E$。



當然，要判斷兩個圖形是不是全等時，並不一定真的要使用疊合法。我們還可以利用觀察、工具（如圓規），甚至簡單的推理，來判斷圖形是不是全等。

以觀察為例，圖3-4的兩個圖形顯然不可能全等。另外，直接靠觀察也可以知道所有半徑相等的圓都全等。

圖3-4

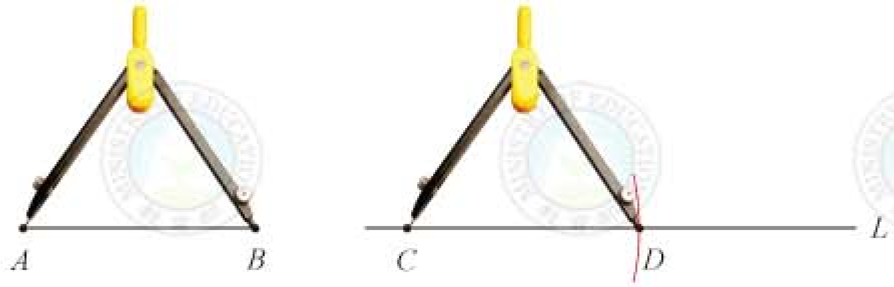
線段的全等

圖3-5(b)為一直線L，利用圓規我們可以在L上作一線段和圖3-5(a)的$\overline{AB}$等長。

(a) (b)

圖3-5

首先在L上選一點C，如圖3-6(b)；接著如圖3-6(a)所示，將圓規的腳張開，使兩個腳尖分別落在$\overline{AB}$的兩端點A、B上；然後不要改變兩腳張開的幅度，把圓規輕輕提起，移到L上，使一腳落在C點上，另一腳畫一個適當的弧和L交於D點，則$\overline{CD}$就會和$\overline{AB}$等長（圖3-6(b)）。



(a) (b)

圖3-6

隨·堂·練·習

在下面的線上做一條長度為$\overline{AB}$兩倍長的線段。

角的全等

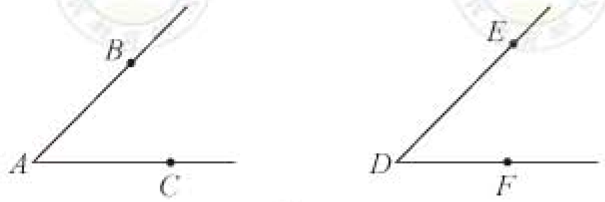


圖3-7

下面討論角的全等。如圖3-7，要知道$\angle BAC$和$\angle EDF$是否全等，可以先將A、$\overrightarrow{AC}$分別疊在D、$\overrightarrow{DF}$上，如果$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{DE}$也重合在一起，這就表示$\angle BAC = \angle EDF$。反之，若$\angle BAC = \angle EDF$，則$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{DE}$也會重合。這個觀察雖然簡單，卻非常有用，在本節後面討論三角形全等時，會利用這個性質來做簡單的推理。

前面提到，如果兩個三角形全等，則邊、角的六個相等條件都成立。反過來看，是不是上面的六個條件都成立，就能保證兩個三角形全等呢？如果是的話，還可以再追問是不是一定要這六個條件全都成立，才能判斷這兩個三角形全等。這些是接下來要討論的問題。

SAS全等性質

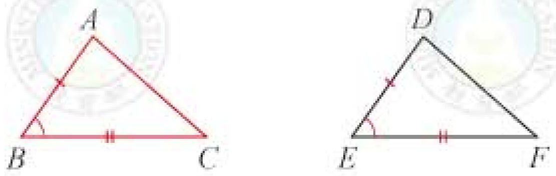
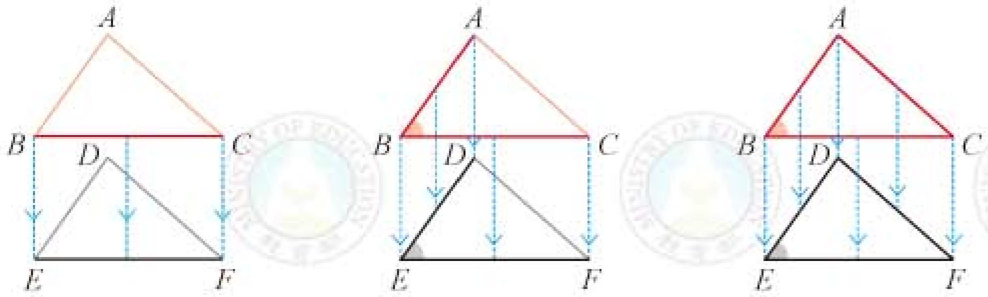


圖3-8

如圖3-8的兩個三角形，如果已知$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，同時$\angle B=\angle E$，這兩個三角形全等嗎？

依照前述的方法，先複製出$\triangle ABC$，然後看看利用上面的條件，可不可能讓$\triangle ABC$與$\triangle DEF$完全疊合？下面是推理的過程：



(a) (b) (c)

圖3-9

(一) 將B和E重合，並且把$\overline{BC}$和$\overline{EF}$對齊。因為$\overline{BC}=\overline{EF}$，所以當$B$和$E$重合時，$C$和$F$也會重合，如圖3-9(a)。

(二) 由於$\angle B=\angle E$，而且$\overrightarrow{BC}$與$\overrightarrow{EF}$重合，所以$\overrightarrow{BA}$會與$\overrightarrow{ED}$重合。又因為$\overline{AB}=\overline{DE}$，所以$A$和$D$也會重合，如圖3-9(b)。

(三) 因為A、C分別與D、F重合，所以$\overline{AC}$與$\overline{DF}$重合，如圖3-9(c)。

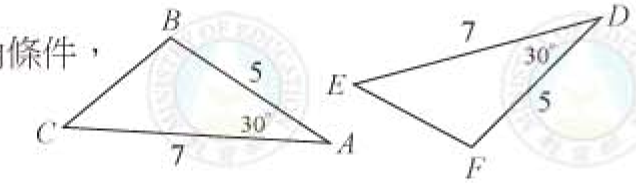
如此一來，$\triangle ABC$就全等於$\triangle DEF$。以上說明了下面的性質

若兩三角形的兩邊與其夾角對應相等，則此兩三角形全等。

上面的性質稱為三角形的**SAS全等性質**，其中S表示邊（Side），A表示角（Angle），而SAS表示「兩邊及其夾角對應相等」的意思。

例2 Example

如右圖，根據這兩個三角形的邊角條件，判斷它們是否全等。



解題說明

在上圖中，我們只知道兩個三角形中兩邊長及其夾角的關係，所以可以試著以SAS全等性質來判斷。

在$\triangle ABC$與$\triangle DFE$中，因為

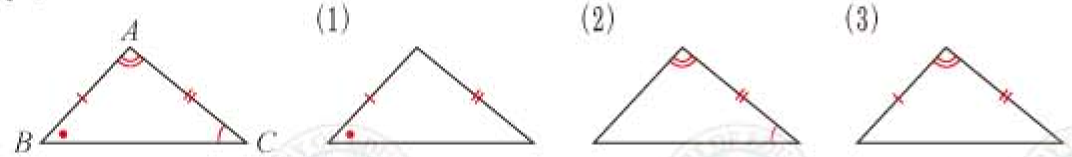
$\overline{AB}=\overline{DF}=5$，$\angle A=\angle D=30^\circ$，$\overline{AC}=\overline{DE}=7$

所以由SAS全等性質可知

$\triangle ABC\cong\triangle DFE$

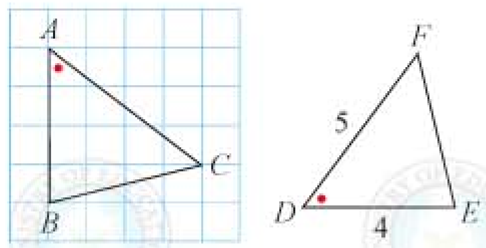
隨・堂・練・習

下列的圖形中，等長的線段與相同的角度都以相同的符號標示。若只利用SAS全等性質，試判斷(1)、(2)、(3)三個三角形中，哪一個與$\triangle ABC$全等？



例3 Example

如右圖，有兩三角形$\triangle ABC$和$\triangle DEF$，方格邊長為1。已知$\angle D=\angle A$，$\overline{DE}=4$，$\overline{DF}=5$，求$\overline{EF}$。



解題說明

由圖知　$\overline{AB}=4$

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$　畢氏定理

由題意知

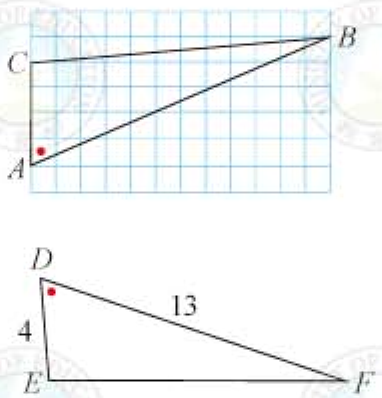
$\overline{DE}=\overline{AB}$，$\angle D=\angle A$，$\overline{DF}=\overline{AC}$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ SAS全等性質

因此 $\overline{EF}=\overline{BC}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$ 畢氏定理

隨．堂．練．習

如右圖，有兩三角形△ABC和△DEF，方格邊長為1，已知$\angle D=\angle A$，$\overline{DE}=4$，$\overline{DF}=13$，求$\overline{EF}$。



ASA全等性質

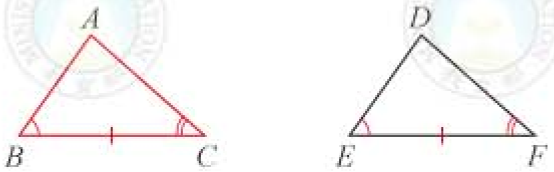


圖3-10

如圖3-10的兩個三角形，已知$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，同時$\overline{BC}=\overline{EF}$，這兩個三角形全等嗎？

依照前述的方法，先複製出△ABC，移動它使B點和E點重合，再把$\overline{BC}$和$\overline{EF}$對齊重疊。因為$\overline{BC}=\overline{EF}$，所以$C$和$F$會重合，如圖3-11(a)。

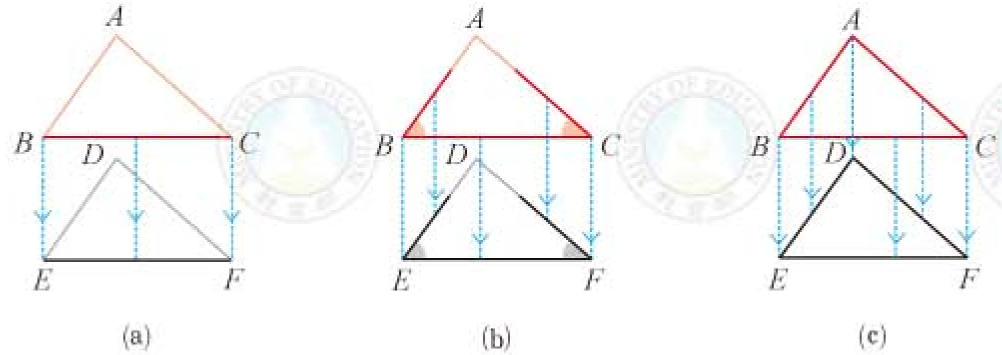


圖3-11

接著要確定A的位置，因為$\overline{BC}$和$\overline{EF}$重合，以及$\angle B=\angle E$、$\angle C=\angle F$，所以，$\overrightarrow{BA}$會對齊$\overrightarrow{ED}$，而且$\overrightarrow{CA}$會對齊$\overrightarrow{FD}$，如圖3-11(b)。因為A是$\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{CA}$的交點，所以A會對到$\overrightarrow{ED}$與$\overrightarrow{FD}$的交點D上，因此A和D會重合，如圖3-11(c)。

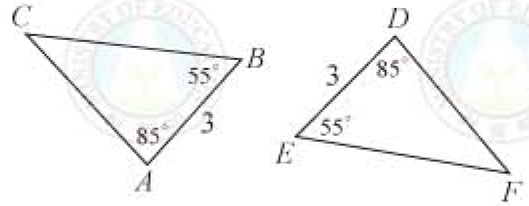
至此，△ABC的三個頂點剛好疊在△DEF的三個頂點上面，所以△ABC全等於△DEF。因此得到

若兩三角形的兩角與其夾邊對應相等，則此兩三角形全等。

上面的性質稱為三角形的**ASA全等性質**。

例 4 Example

如右圖，根據△ABC與△DEF的條件，判斷它們是否全等。



解題說明

在上圖中，我們只知道兩個三角形中兩個內角及其夾邊的關係，所以可以試著以ASA全等性質來判斷。

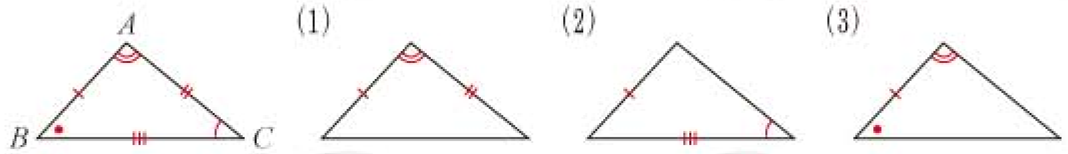
在△ABC與△DEF中，因為

$\angle A=\angle D=85^\circ$，$\overline{AB}=\overline{DE}=3$，$\angle B=\angle E=55^\circ$

所以由ASA全等性質可知△$ABC\cong$△DEF。

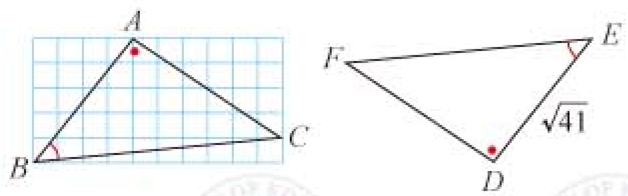
隨．堂．練．習

若只利用ASA全等性質，試判斷(1)、(2)、(3)三個三角形中，哪一個與$\triangle ABC$全等？



例5 Example

如右圖，有兩三角形$\triangle ABC$與$\triangle DEF$，方格邊長為1。若已知$\angle D=\angle A$，$\angle E=\angle B$，且$\overline{DE}=\sqrt{41}$，求$\overline{DF}$和$\overline{EF}$。



解題說明

由題意知$\angle D=\angle A$，$\angle E=\angle B$，它們各自的夾邊是$\overline{DE}$和$\overline{AB}$，

其中 $\overline{DE}=\sqrt{41}$，而由圖知

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$ 畢氏定理

因此兩對應角的夾邊$\overline{DE}$和$\overline{AB}$相等。

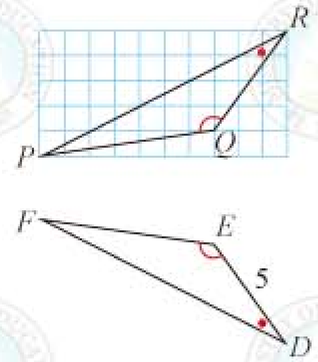
所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ ASA全等性質

並且 $\overline{DF}=\overline{AC}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

$\overline{EF}=\overline{BC}=\sqrt{1^2+10^2}=\sqrt{101}$

隨．堂．練．習

如右圖，有兩三角形$\triangle PQR$和$\triangle DEF$，方格邊長為1，若已知$\angle D=\angle R$，$\angle E=\angle Q$，$\overline{DE}=5$，試說明$\triangle PQR\cong\triangle FED$，並求$\overline{DF}$和$\overline{EF}$。

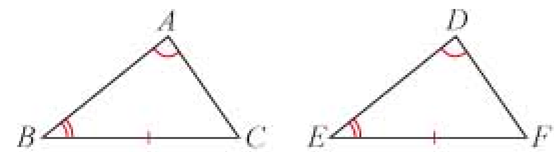


AAS全等性質

由於任何三角形的內角和是180°，利用這個性質以及ASA全等性質，可以得到AAS全等性質，如例6所示。

例6 Example

如右圖，已知$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，且$\overline{BC}=\overline{EF}$，試說明$\triangle ABC\cong\triangle DEF$。



解題說明

由題意知$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，

所以$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-\angle D-\angle E=\angle F$。 三角形內角和為180°

因為$\angle B=\angle E$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，$\angle C=\angle F$，

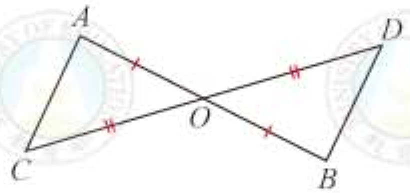
所以由ASA全等性質，得到$\triangle ABC\cong\triangle DEF$。

例6的全等性質稱為**AAS全等性質**，即

若兩三角形的兩角及其中一角的對邊對應相等，則此兩三角形全等。

例 7 Example

如右圖，$\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於O點，
已知$\overline{OA}=\overline{OB}$，$\overline{OC}=\overline{OD}$，說明
$\triangle OAC\cong\triangle OBD$，且$\overline{AC}=\overline{BD}$。



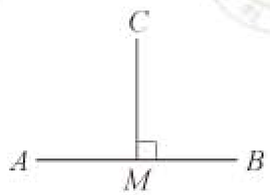
解題說明

因為	$\overline{OA}=\overline{OB}$，$\overline{OC}=\overline{OD}$	
且	$\angle AOC=\angle BOD$	對頂角相等
所以	$\triangle OAC\cong\triangle OBD$	SAS全等性質
得	$\overline{AC}=\overline{BD}$	對應邊相等

在例7，點O將$\overline{AB}$分成長度相等的兩段，這時稱O為$\overline{AB}$的中點。同理，O也是$\overline{CD}$的中點。

隨·堂·練·習

如右圖，M是$\overline{AB}$的中點，$\overline{CM}\perp\overline{AB}$，
試在下列空格中填入適當的理由，說明$\overline{AC}=\overline{BC}$。



連接$\overline{AC}$和$\overline{BC}$，由於

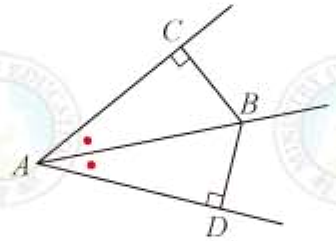
	$\overline{AM}=\overline{MB}$	(__________)
	$\angle AMC=\angle BMC=90^\circ$	(__________)
	$\overline{MC}=\overline{MC}$	(共邊)
因此	$\triangle AMC\cong\triangle BMC$	(__________)
同時	$\overline{AC}=\overline{BC}$	(__________)

隨堂練習中，我們知道$\overleftrightarrow{CM}$垂直於$\overline{AB}$，並且其垂足M平分$\overline{AB}$，此時稱$\overleftrightarrow{CM}$為$\overline{AB}$的中垂線。由隨堂練習，得到**中垂線性質**：

一線段的中垂線上任一點C到此線段的兩端點等距。

例 8 Example

如右圖，$\overrightarrow{AB}$為$\angle A$的角平分線，若$\overline{BC}\perp\overline{AC}$，
$\overline{BD}\perp\overline{AD}$，說明$\overline{BC}=\overline{BD}$。



解題說明

因為	$\angle CAB=\angle DAB$	$\overrightarrow{AB}$為分角線
	$\overline{AB}=\overline{AB}$	共邊
以及	$\angle ACB=\angle BDA=90^\circ$	已知
所以	$\triangle ABC\cong\triangle ABD$	AAS全等性質
因此	$\overline{BC}=\overline{BD}$	全等時對應邊相等

例8得到**角平分線性質**：

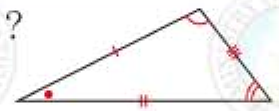
一角的角平分線上任一點至角的兩邊等距。

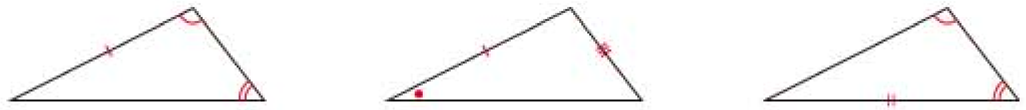
摘要

1. 兩全等三角形的對應邊相等，對應角相等。
2. SAS 全等性質：若兩三角形的兩邊與其夾角對應相等，則此兩三角形全等。
3. ASA 全等性質：若兩三角形的兩角與其夾邊對應相等，則此兩個三角形全等。
4. AAS 全等性質：若兩三角形的兩角及其中一角的對邊對應相等，則此兩三角形全等。

3-1 自我評量

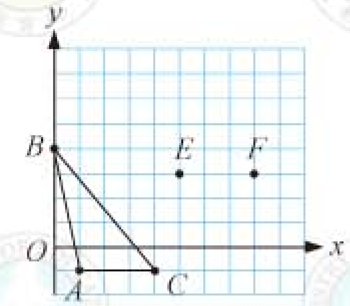
1. 判斷下面各三角形中，哪一個和右圖的三角形全等？請圈出來，並說明所根據的三角形全等性質。



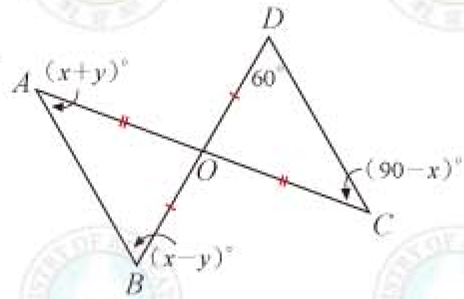


________ ________ ________

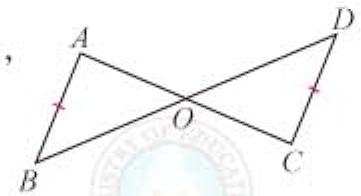
2. 如右圖，在坐標平面上找出D點，使得$\triangle ABC$與$\triangle EDF$全等，且$\angle F=\angle C$。寫出D點的坐標。（提示：D有兩個解。）



3. 如右圖，$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$，求$x$、$y$。



4. 如右圖，已知$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$，且$\overline{AB}=\overline{CD}$，試說明$\triangle ABO$全等於$\triangle CDO$。



3-2 SSS全等與尺規作圖

SSS全等性質

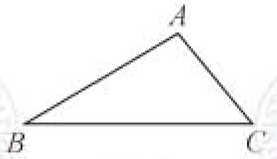


圖3-12

給定一$\triangle ABC$，如圖3-12，我們要作出另一個三角形使得這兩個三角形三邊對應相等。作法如下：

㈠以直尺畫一直線L，並以圓規擷取$\overline{BC}$長，在L上作一線段$\overline{EF}$，使得$\overline{EF}=\overline{BC}$，如圖3-13(a)。

圖3-13(a)

㈡分別以E、F為圓心，$\overline{AB}$和$\overline{AC}$長為半徑，在L的同側畫兩弧，交於D，如圖3-13(b)。

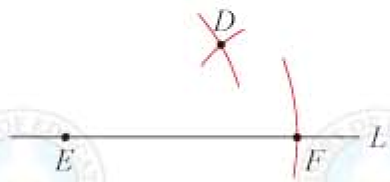


圖3-13(b)

㈢以直尺連接$\overline{DE}$、$\overline{DF}$，得$\triangle DEF$，如圖3-13(c)。$\triangle DEF$即為所求。

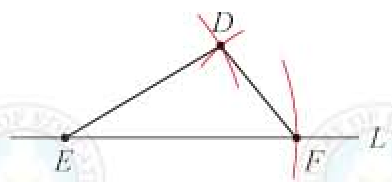


圖3-13(c)

問題是$\triangle ABC$和$\triangle DEF$會全等嗎？下面是我們的說明。

就像在討論SAS全等時一樣，讓我們先複製出$\triangle ABC$，再把$\triangle ABC$移到$\triangle DEF$上面，其中把B、$\overrightarrow{BC}$和E、$\overrightarrow{EF}$重疊在一起，由於$\overline{BC}=\overline{EF}$，所以$C$剛好疊在$F$上面。但是這樣的疊合會不會讓$A$剛好疊在$D$上面呢？如果會，那麼$\overline{AB}$就和$\overline{DE}$重合，$\overline{AC}$也會和$\overline{DF}$重合，如此$\triangle ABC$就全等於$\triangle DEF$。

A點會不會剛好疊在D點上面？我們可以用圓規來幫助思考。首先，用圓規以B、C為圓心，分別以$\overline{BA}$、$\overline{AC}$為半徑畫出兩圓，如圖3-14(a)。

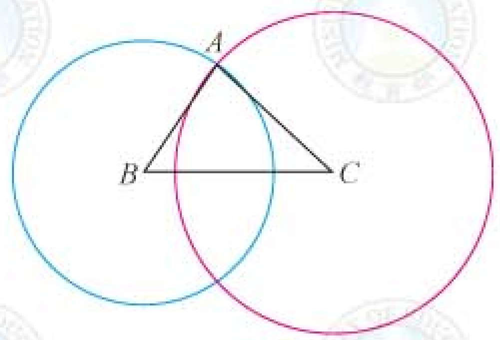


圖3-14(a)

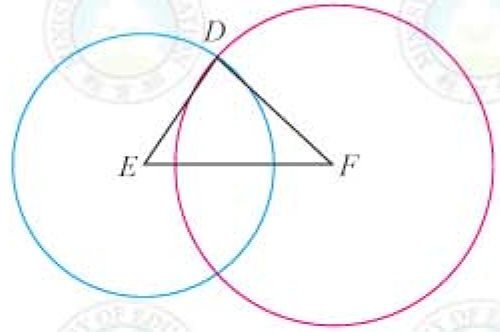


圖3-14(b)

由圖3-14(a)，我們發現這兩個圓只能相交於兩點，而這兩個交點中只有A點是在$\overleftrightarrow{BC}$的上方。同樣的，我們也可以將圖3-13(c)中的兩弧畫成兩圓，如圖3-14(b)。

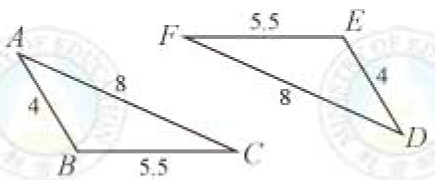
由於以B、E為圓心的兩個圓的半徑相等（即$\overline{AB}=\overline{DE}$），因此當我們把$B$和$E$疊在一起時，這兩個藍色圓會重合；同樣的，把$C$和$F$疊在一起時，以$C$、$F$為圓心的兩個紅色圓也會重合。因為$A$、$D$同時是藍色圓和紅色圓的交點，而且都在上方，所以，$A$點和$D$點確實會疊在一起。因此，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$全等。由上面的討論知道

若兩三角形的三邊對應相等，則此兩三角形全等。

這個性質稱為三角形的**SSS全等性質**。

例 1 Example

如右圖，根據$\triangle ABC$與$\triangle DEF$的條件，判斷它們是否全等。



解題說明

在上圖中，我們只知道兩個三角形的三邊長關係，所以可以試著以SSS全等性質來判斷。

在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中，因為

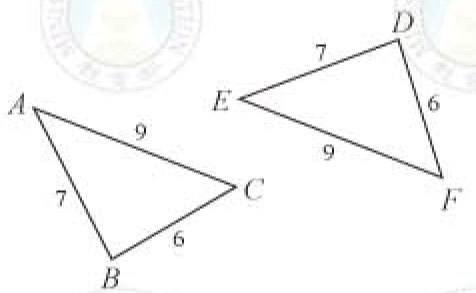
$$\overline{AB}=\overline{DE}=4，\overline{BC}=\overline{EF}=5.5，\overline{AC}=\overline{DF}=8$$

所以由SSS全等性質，得知

$$\triangle ABC\cong\triangle DEF$$

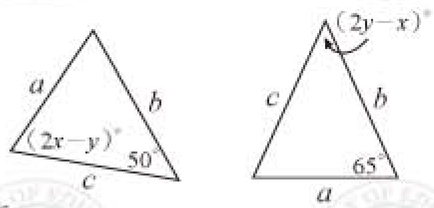
隨・堂・練・習

請根據右圖中的條件，判斷兩個三角形$\triangle ABC$與$\triangle DEF$是否全等，若兩三角形全等，試將對應角標上相同的符號。



例 2 Example

如右圖，有兩個邊長皆為a、b、c的三角形，求x、y的值。



解題說明

由於兩個三角形三邊對應相等，由SSS全等性質，知道此兩三角形全等，所以對應角相等。由圖可知邊長a所對的角為50°，得

$$2y-x=50 \cdots\cdots(1)$$

由三角形和為180°，得邊長b所對的角為

$$180^\circ-50^\circ-65^\circ=65^\circ$$

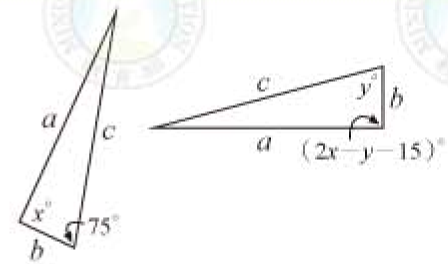
即　$2x-y=65 \cdots\cdots(2)$

$(1)+(2)\cdot 2$得　$3x=50+65\cdot 2=180$

解得　$x=60$，$y=\dfrac{50+60}{2}=55$

隨・堂・練・習

如右圖，有兩個邊長皆為a、b、c的三角形，求x、y的值。



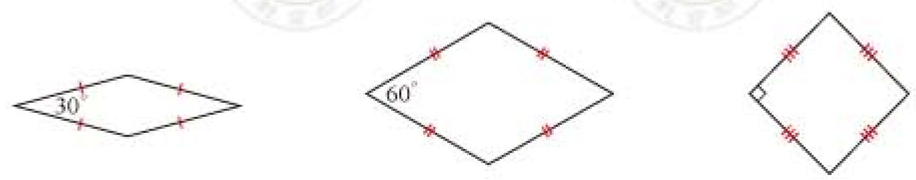
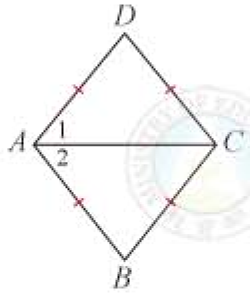


圖3-15

如圖3-15，四邊等長的四邊形稱為**菱形**。因為正方形的四邊等長，所以正方形是菱形的一種。利用三角形的SSS全等性質，我們將討論菱形的一個重要性質，如下頁例3所示。

例3 Example



如右圖，四邊形$ABCD$為菱形，$\overline{AC}$為對角線。試說明$\triangle ADC \cong \triangle ABC$，以及$\angle 1=\angle 2$，$\angle D=\angle B$。

解題說明

因為四邊形$ABCD$為菱形，所以$ABCD$的四邊均相等。

由於在$\triangle ADC$與$\triangle ABC$中

$\overline{AD}=\overline{AB}$，$\overline{DC}=\overline{BC}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$

所以 $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ SSS全等性質

由於$\overline{CD}$、$\overline{BC}$的對角分別是$\angle 1$、$\angle 2$，所以$\angle 1=\angle 2$。同理，得$\angle D=\angle B$。

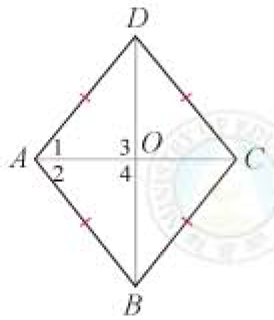


圖3-16

如圖3-16，設O為兩對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$的交點。因為

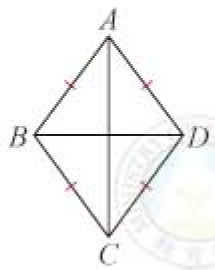
$\overline{AO}=\overline{AO}$，$\overline{AD}=\overline{AB}$，$\angle 1=\angle 2$（由例2）

所以$\triangle AOD \cong \triangle AOB$，得$\overline{DO}=\overline{BO}$，$\angle 3=\angle 4$。因為$\angle 3$和$\angle 4$互補，所以$\angle 3=90^\circ$，也就是$\overline{AC} \perp \overline{BD}$，又因為$\overline{DO}=\overline{BO}$，所以$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$。

同樣的結果對另一條對角線$\overline{BD}$也會成立，也就是$\overline{BD}$是$\angle D$的角平分線，並且$\angle A=\angle C$，$\overline{OA}=\overline{OC}$。因此得到

菱形的兩對角線互相垂直平分，而且分別平分菱形的兩組對角。

隨・堂・練・習



1. 如右圖，四邊形$ABCD$為菱形，已知兩對角線$\overline{AC}=16$，$\overline{BD}=12$，求$\overline{AB}$。

2. 四邊形$ABCD$為一菱形，已知$\angle A=60^\circ$，求$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$。

RHS全等性質

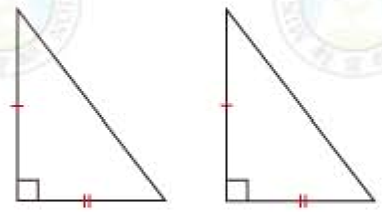
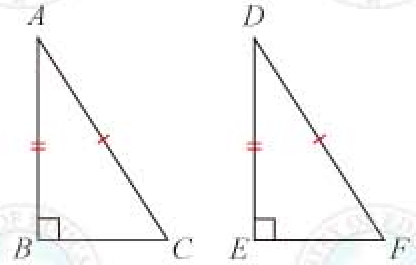


圖3-17

如圖3-17的兩個直角三角形，如果其兩股長對應相等，那麼利用SAS全等性質，就可以得到這兩個直角三角形全等。但是如果是一股和斜邊分別對應相等，則要利用畢氏定理才能說明這兩個三角形全等。

例4 Example



如右圖，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$都是直角三角形，其中$\angle B$、$\angle E$為直角，已知$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{AB}=\overline{DE}$，試說明$\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

解題說明

因為$\triangle ABC$和$\triangle DEF$都是直角三角形，所以

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$ ……(1) 畢氏定理

$\overline{EF}^2=\overline{DF}^2-\overline{DE}^2$ ……(2) 畢氏定理

因為 $\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{AB}=\overline{DE}$

所以 $\overline{BC}=\overline{EF}$

直接利用SSS全等性質或SAS全等性質，皆可得到

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

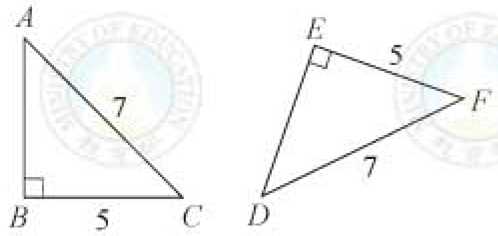
例4的全等性質可以寫成

若兩直角三角形的斜邊及一股分別對應相等，則此兩直角三角形全等。

此性質稱為**RHS全等性質**，R代表直角，H代表斜邊，S代表一股。

例 5 Example

如右圖，根據△ABC與△DEF的條件，判斷它們是否全等。



解題說明

在△ABC與△DEF中

因為　$\angle B=\angle E=90^\circ$　直角

　　　$\overline{AC}=\overline{DF}=7$　斜邊相等

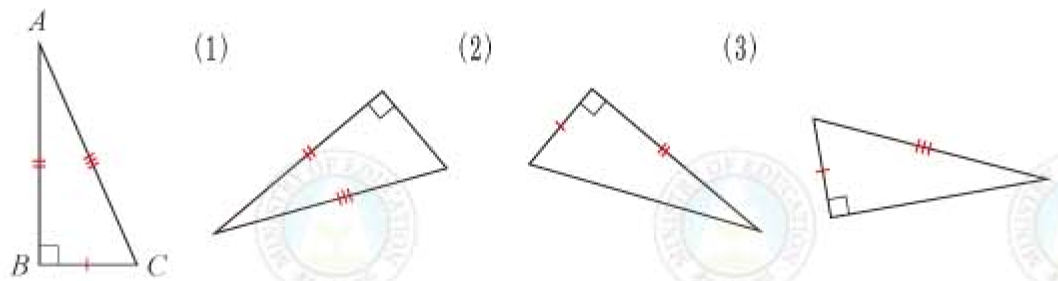
　　　$\overline{BC}=\overline{EF}=5$　股長相等

所以由RHS全等性質，可知

　　　△ABC≅△DEF

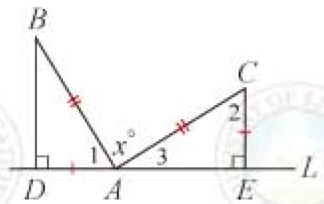
隨・堂・練・習

若只利用RHS全等性質，試判斷(1)、(2)、(3)三個三角形中，哪些與△ABC全等？



例 6 Example

如右圖，已知三點D、A、E在直線L上，$\overline{BD}$、$\overline{CE}$分別垂直L於點D、E，且$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{CE}$，求$x$。



解題說明

如右圖，在△ADB與△CEA中，因為$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{CE}$，

而且$\angle ADB=\angle CEA=90^\circ$，

所以　△ADB≅△CEA　RHS全等性質

得　　$\angle 1=\angle 2$

但　　$\angle 2+\angle 3=90^\circ$　互餘

所以　$\angle 1+\angle 3=90^\circ$

由於D、A、E在直線L上

因此　$\angle 1+x^\circ+\angle 3=180^\circ$

即　　$x=180-90=90$

兩三角形之間，關於邊或角三組對應相等的情況，可完全條列如下：

(1) SSS：三邊對應相等。

(2) SAS：兩邊及其夾角對應相等。

(3) ASA：兩角及其夾邊對應相等。

(4) AAS：兩角及其中一角的對邊對應相等。

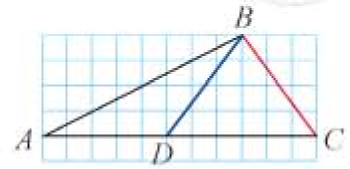
(5) SSA：兩邊及其中一邊的對角對應相等。

(6) AAA：三角對應相等。

除了(5)、(6)外，上述條件都可以用來判斷兩三角形是否全等。下面則說明SSA或AAA的對應條件無法保證兩個三角形一定全等。

例 7 Example

如右圖，方格邊長為1，試說明△ABC與△ABD滿足SSA對應關係，但它們不全等。



解題說明

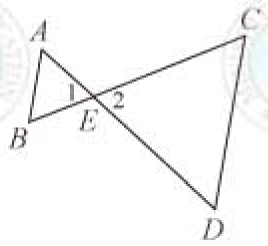
因為$\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\overline{BD}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以在△$ABC$與△$ABD$中，

　$\overline{BC}=\overline{BD}$，$\overline{AB}=\overline{AB}$，$\angle A=\angle A$

即兩三角形滿足SSA對應關係。但由上圖知道，△ABC與△ABD顯然不全等。

隨・堂・練・習

如右圖，已知$\overline{AB}//\overline{CD}$，試說明$\triangle ABE$與$\triangle CDE$滿足AAA對應關係，但它們不全等。

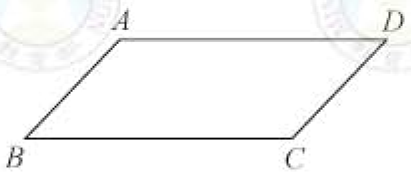


由隨堂練習可知，AAA對應關係無法保證兩三角形全等。

前面學過的三角形全等性質，可以應用到其他的平面圖形，例如本節的例3討論了菱形的性質，下面再舉一例說明平行四邊形的性質。

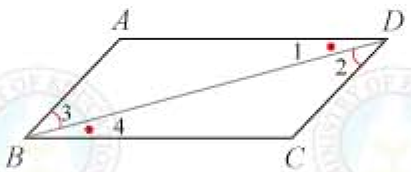
例8 Example

如右圖，已知$\overline{AB}//\overline{DC}$，$\overline{AD}//\overline{BC}$，試說明$\overline{AB}=\overline{DC}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$。



解題說明

如右圖，作$\overline{BD}$線段，在$\triangle ABD$和$\triangle CDB$中，



因為 $\overline{AD}//\overline{BC}$

所以 $\angle 1=\angle 4$ 　內錯角相等

因為 $\overline{AB}//\overline{DC}$

所以 $\angle 3=\angle 2$ 　內錯角相等

又 $\overline{BD}=\overline{BD}$ 　共邊

因此 $\triangle ABD\cong\triangle CDB$ 　ASA全等性質

所以 $\overline{AB}=\overline{DC}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$

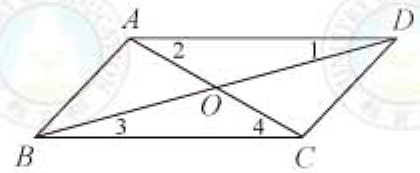
由例8及其說明可以知道

(1) 平行四邊形的對邊相等。

(2) 對角線將平行四邊形分成兩個全等的三角形。

隨・堂・練・習

如右圖，$ABCD$為平行四邊形，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$交於O點。請在空格中填入適當的理由，說明$\overline{OD}=\overline{OB}$，$\overline{OA}=\overline{OC}$。



$\angle 1=\angle 3$ 　（__________）

$\angle 2=\angle 4$ 　（__________）

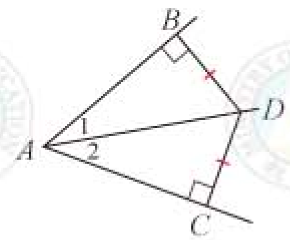
$\overline{AD}=\overline{BC}$ 　（__________）

所以$\triangle AOD\cong\triangle COB$ 　（__________）

得$\overline{OD}=$______，$\overline{OA}=$______

例9 Example

如右圖，已知$\overline{DB}\perp\overline{AB}$，$\overline{DC}\perp\overline{AC}$，且$\overline{BD}=\overline{CD}$，試說明$\angle 1=\angle 2$。



解題說明

因為 $\overline{BD}=\overline{DC}$ 　已知

$\overline{AD}=\overline{AD}$ 　共邊

$\angle DBA=\angle DCA=90^\circ$

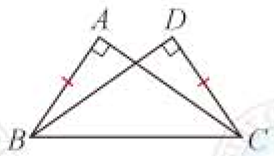
所以 $\triangle ADB\cong\triangle ADC$ 　RHS全等性質

得 $\angle 1=\angle 2$ 　對應角相等

在例9中，由於$\overline{DB}\perp\overline{AB}$，所以$\overline{DB}$是$D$到$\overleftrightarrow{AB}$的距離，同樣的，$\overline{CD}$是$D$到$\overleftrightarrow{AC}$的距離。因此，例9說明了，若一點$D$到$\angle BAC$兩邊的距離相等，則$D$在$\angle BAC$的角平分線上。

隨．堂．練．習

如右圖，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\angle DBC=35^\circ$，求$\angle ACB$。



如圖3-18，其中M為$\overline{BC}$的中點。頂點A和M的連線稱為$\triangle ABC$中$\overline{BC}$的**中線**。顯然一個三角形有三條中線。由三角形面積公式知道，中線$\overline{AM}$將$\triangle ABC$分割成兩個面積相等的小三角形，這是中線很重要的性質。

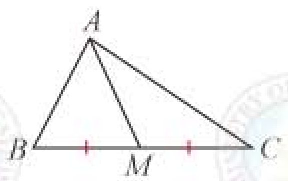


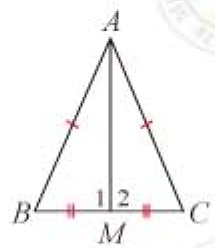
圖3-18

例10 Example

試說明等腰三角形，底邊的中線就是底邊的中垂線。

解題說明

如右圖的$\triangle ABC$，其中$\overline{AB}=\overline{AC}$，$M$為$\overline{BC}$的中點。



因為　$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AM}=\overline{AM}$

且　$\overline{BM}=\overline{CM}$　　M為中點

所以　$\triangle ABM\cong\triangle ACM$　　SSS全等性質

得　$\angle 1=\angle 2$

因為　$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，所以$\angle 1=90^\circ$，即$\overline{AM}\perp\overline{BC}$，

因此$\overline{AM}$垂直平分$\overline{BC}$，即$\overline{AM}$為$\overline{BC}$的中垂線。

例10的已知條件事實上只用到$\overline{AB}=\overline{AC}$，即$A$到$\overline{BC}$的兩端點$B$、$C$等距。因此，例10同時說明了下面性質：若一點$A$到一線段兩端點的距離相等，則$A$會在此線段的中垂線上。

尺規作圖

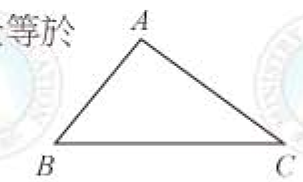
96頁討論SSS全等性質時，使用了特別的工具——直尺和圓規。其中圓規用來複製長度或畫圓弧，直尺則只用來畫直線。這種作圖的方法稱做**尺規作圖**。

古希臘人特別鍾愛如何用尺規作圖作出幾何圖形的問題。下面將介紹一些最基本的作圖方法，讓我們可以作出角平分線、線段的中垂線或垂直線等等，這些都是常用的幾何作圖法。

再提醒大家一次，所謂的尺規作圖，直尺只有畫直線的功能。由於直尺刻度不能精確測量任意線段的長度，我們改用圓規來複製長度。

隨．堂．練．習

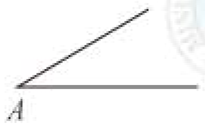
如右圖，已知一$\triangle ABC$，試以尺規作圖，作出一全等於$\triangle ABC$的三角形。



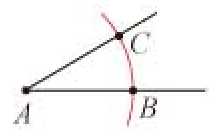
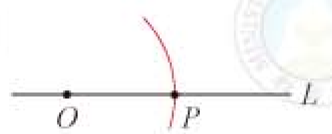
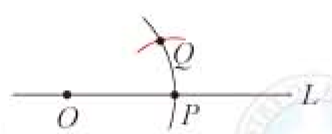
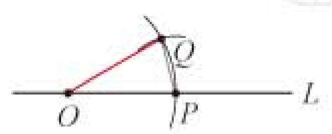
給定一個角，如何用尺規作圖作出一個與這個角相等的角？利用SSS全等性質，例11說明等角的尺規作圖。

例11 Example

如右圖，已知$\angle A$，利用尺規作圖作出另一角使它等於$\angle A$。



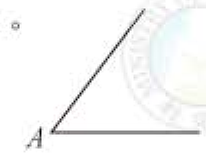
解題說明

作　　法	作　　圖	說　明
(1) 作一直線L，並於直線L上取一點O。		
(2) 以A為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交$\angle A$的兩邊於B、C兩點。		在$\angle A$上取一個$\triangle ABC$。
(3) 以O為圓心，$\overline{AC}$長為半徑畫弧，交直線L於點P。		(3)(4)是以本節開始的SSS作圖方式複製$\triangle ABC$。
(4) 以P為圓心，$\overline{BC}$長為半徑畫弧，與前弧相交於Q點。		
(5) 連接$\overline{OQ}$，則$\angle POQ$即為所求。		$\triangle OPQ\cong\triangle ABC$，故$\angle POQ=\angle A$。

在以上等角作圖裡，我們在「作圖」欄中用紅色線條呈現作圖的步驟，並保留所有直尺和圓規作圖的痕跡，在「作法」欄內用文字描述作圖的操作程序，並在「說明」欄中作相關的解釋。

隨・堂・練・習

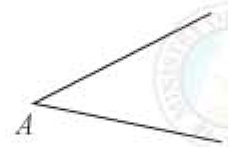
如右圖，已知$\angle A$，試以尺規作圖作出一角，使它等於$2\angle A$。



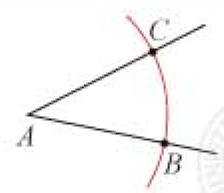
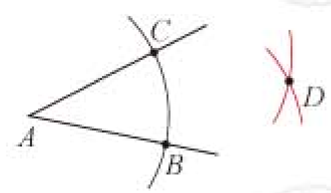
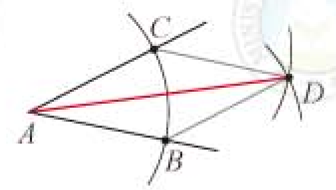
由本節例3知道菱形$ABCD$的對角線$\overline{AC}$平分$\angle A$，例12將利用這個性質來作任意角的角平分線。

例12 Example

如右圖，已知$\angle A$，利用尺規作圖作出$\angle A$的角平分線。



解題說明

作　　法	作　　圖	說　明
(1) 以A為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交$\angle A$的兩邊於B、C兩點。		決定菱形邊長及另兩個頂點。
(2) 分別以B、C為圓心，$\overline{AC}$的長度為半徑畫弧，設兩弧相交於D點。		以同樣的邊長找出菱形的第四個頂點。
(3) 連接A、D，則$\overrightarrow{AD}$即為所求。		四邊形$ABDC$為一菱形，故對角線$\overline{AD}$平分$\angle A$。

隨．堂．練．習

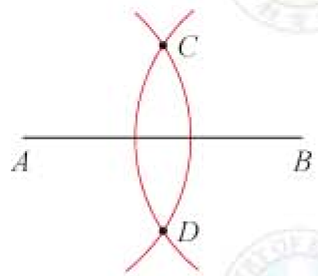
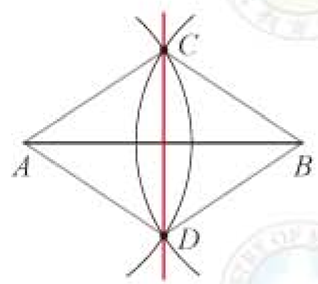
如右圖，$\triangle ABC$為一等腰三角形，試以尺規作圖作出$\angle A$的角平分線。

由例3知道菱形的對角線會互相垂直平分，藉由這個性質，就可以利用尺規作圖作線段的中垂線。

例13 Example

如右圖，已知$\overline{AB}$，利用尺規作圖作出$\overline{AB}$的中垂線。

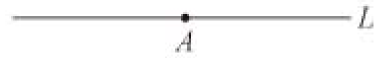
解題說明

作法	作圖	說明
(1) 分別以A、B為圓心，同以大於$\overline{AB}$一半的長度為半徑畫弧，設兩弧相交於C、D兩點。		作出一以$\overline{AB}$為對角線的菱形。 注意：若半徑不大於$\overline{AB}$的一半，則不會有C、D點。
(2) 連接C、D，則$\overleftrightarrow{CD}$即為所求。		四邊形$ADBC$為一菱形，對角線$\overline{CD}$垂直平分$\overline{AB}$。

由於例13的$\overleftrightarrow{CD}$為$\overline{AB}$的中垂線，因此$\overleftrightarrow{CD}$和$\overline{AB}$的交點就是$\overline{AB}$的中點，所以例13的方法也可用來找出$\overline{AB}$的中點。

隨．堂．練．習

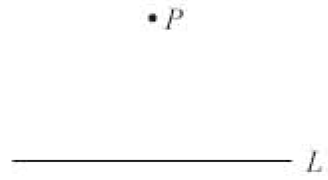
如下圖，已知A是直線L上的一點，試以尺規作圖作出過A且垂直於L的直線。



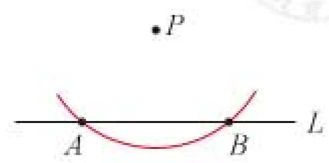
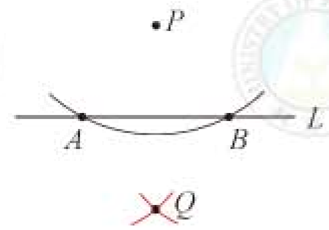
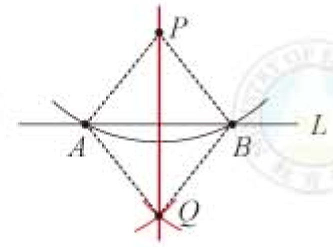
利用菱形的性質，還可以作過直線外一點P而且垂直於此直線的直線。

例14 Example

如右圖，P是直線L外的一點，利用尺規作圖作過P且垂直於L的直線。



解題說明

作法	作圖	說明
(1) 以P為圓心，適當長為半徑畫弧，交L於A、B兩點。		決定菱形邊長及另兩頂點。
(2) 分別以A、B為圓心，以$\overline{PA}$長度為半徑，在直線L異於點P之一側畫兩弧，設相交於Q點。		以同樣的邊長找出菱形的第四個頂點。
(3) 連接P、Q，則$\overleftrightarrow{PQ}$即為所求。		四邊形$AQBP$為菱形，對角線$\overline{PQ}$垂直於$\overline{AB}$。

在第三冊學過的畢氏定理，談的是直角三角形三邊的關係。如果給定三個數滿足畢氏定理的公式，例如3、4、5或5、12、13或7、24、25等，我們怎麼知道一定會有一個直角三角形它的三邊長就是這一組數呢？如果有，如何用尺規作圖來畫出這樣的直角三角形？稍微想一想，就知道只要能用尺規作出直角（如111頁的隨堂練習或例14），就能作出這個直角三角形，如下面的動動腦。

動．動．腦

如以右邊的線段為單位長，試以尺規作圖作出一個邊長為3、4、5的直角三角形。

1

注意到在上面的作圖過程中，我們並不需要一單位一單位畫出邊長為5的斜邊，這是因為畢氏定理保證了斜邊必須是5。

畢氏定理告訴我們，若一直角三角形其兩股為a、b，斜邊為c，則a、b、c滿足

$$c^2=a^2+b^2$$

但是給一個三角形，其三邊a、b、c滿足

$$c^2=a^2+b^2$$

這個三角形一定是直角三角形嗎？

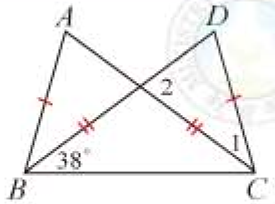
由上面的尺規作圖，我們可以先做出一個直角三角形，其兩邊分別是a、b。由畢氏定理，知此直角三角形的斜邊為c。然後，再由SSS全等性質得到，原三角形和此新三角形全等，所以原三角形為直角三角形。

摘要

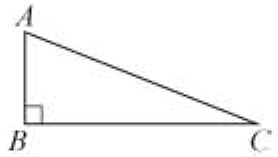
1. SSS全等性質：若兩三角形的三邊對應相等，則此兩三角形全等。
2. RHS全等性質：若兩直角三角形的斜邊及一股分別對應相等，則此兩直角三角形全等。
3. 菱形的兩對角線互相垂直平分，而且分別平分菱形的兩組對角。
4. 平行四邊形的兩組對邊相等，兩對角線互相平分。
5. 若一三角形的三邊a、b、c滿足$c^2=a^2+b^2$，則此三角形必為直角三角形，且直角的對邊為c。

3-2 自我評量

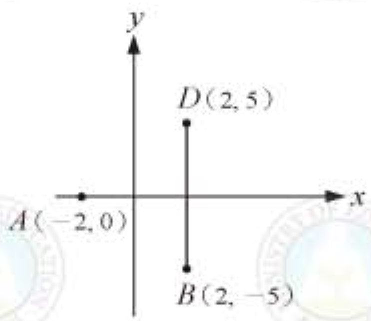
1. 如右圖，$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{DB}$，$\angle DBC=38^\circ$，$\angle DCB=75^\circ$，求$\angle 1$與$\angle 2$。
$\overline{CA}$是不是$\angle BCD$的角平分線？



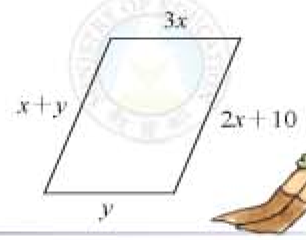
2. 如右圖，已知$\overline{AB}=10$、$\overline{BC}=24$，求B到$\overline{AC}$的距離。



3. 如右圖，已知坐標平面上三點A、B、D為菱形$ABCD$的三個頂點。
(1) 說明x軸是$\overline{BD}$的中垂線。
(2) 求另一頂點C的坐標。
(3) 求菱形$ABCD$的面積。



4. 右圖為一平行四邊形，求x、y。



3-3 三角形的邊角關係

如圖3-19，從A到涼亭所在的B，有三條路徑，如果三條路大約是平坦的，沒有上上下下，那麼哪一條路徑是最短的呢？由於兩點之間以直線距離為最短，所以當然是$\overline{AB}$的路徑最短，到C點再轉彎的紅色路徑、到D點再轉彎的藍色路徑都比較長。上面的說明，可以應用到三角形三邊長的關係。

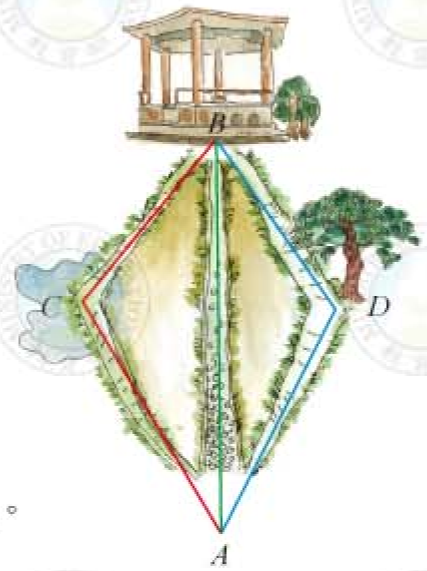


圖3-19

如圖3-20，$\triangle ABC$上的三邊長分別為a、b、c。

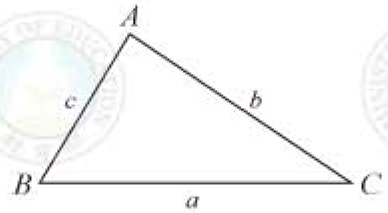


圖3-20

如果沿著$\overline{BA}$從B點走到A點，其距離為c。如果沿著$\overline{BC}$走到C後，再沿著$\overline{CA}$走到A，所走的路徑長度為$a+b$。由上面的說明知道a、b、c有下述的關係

$$a+b>c$$

同樣的，考慮從C走到B或從A走到C，都有類似的關係。可總結如下

$$a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$$

即

三角形任兩邊和大於第三邊。

隨．堂．練．習

下面哪一組數不可以當做三角形的三邊長？

⑴ 4、7、3　　⑵ 15、15、18　　⑶ 3、4、5

動．動．腦

已知$a>9$，假設6、9、a這一組數滿足任意兩數的和大於第三數的條件，求a的範圍。

前面談到，若a、b、c為某三角形的三邊長，則a、b、c這一組數中，任兩數的和都大於第三個數。但是反過來，如果有三個正數a、b、c，其中任兩個數的和都大於第三個數，這組數是否一定是某個三角形的三邊長？

例1 Example

右圖為1單位長的線段，利用尺規作圖作出一個三角形，使得它的三邊分別為4、5、6。

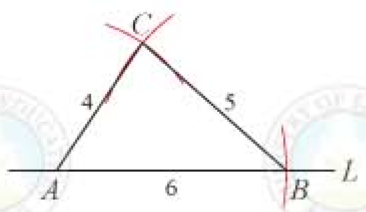
1單位長

解題說明

⑴在一直線L上，作一線段$\overline{AB}$，使得$\overline{AB}=6$。

⑵分別以A、B為圓心，4、5為半徑，在L的同側畫兩弧，得此兩弧相交於C。

⑶連接$\overline{AC}$、$\overline{BC}$，則$\triangle ABC$即為所求。



隨．堂．練．習

右圖為1單位長的線段，試仿例1用尺規作圖作出一個三角形，其邊長分別為3、4、6。

1單位長

⑴ 取6為第一數，做做看。

⑵ 取3為第一數，再做做看。

動．動．腦

在上面的作圖裏，哪裡用到兩數和大於第三數？如果作圖時第一個數選的是最大的數，是不是比較容易說明？

由上述的作圖，可知

給定三個正數a、b、c，若其中任意兩數的和大於第三數，則a、b、c是某三角形的三邊長。

例2 Example

判斷下列各題中的三個數是不是某三角形的三邊長。

⑴ 2、3、5　⑵ 4、7、1　⑶ 8、4、9

解題說明

⑴ 任意兩數的和與第三數的大小關係是

$2+3=5$，$2+5>3$，$3+5>2$

第一組的兩數和不大於第三數，所以此三數不能構成三角形的三邊長。

⑵ 任意兩數的和與第三數的大小關係是

$4+7>1$，$7+1>4$，$4+1<7$

第三組的兩數和不大於第三數，所以此三數不能構成三角形的三邊長。

(3) 任意兩數的和與第三數的大小關係是

$8+4>9$，$4+9>8$，$8+9>4$

任意兩數的和都大於第三數，所以此三數構成某三角形的三邊長。

實際上要判斷三數中任兩個數的和是否大於第三個數，並不需要真的將三個大小關係都寫出來，而只要知道最大的數比另外兩數的和小即可。例如給定8、4、9三數。由$8+4>9$，就知道這三數滿足任意兩數和大於第三數。

隨・堂・練・習

判斷下列各題的三個數是不是某三角形的三邊長。哪一組數是直角三角形的三邊長？

(1) 6、3、10　　(2) 8、5、12　　(3) 5、12、13

例3 Example

若a、a、5為三角形的三邊長，求a的範圍。

解題說明

因為a、a、5是三角形的三邊長，得$a+5>a$，$5+a>a$，$a+a>5$。

但$a+5>a$，$5+a>a$自動成立，因此只要$a+a>5$成立即可，由此得a的範圍為$a>\frac{5}{2}$。

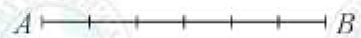
隨・堂・練・習

若8、8、c為三角形的三邊長，求c的範圍。

給定三個正數，如果這三個數中，有一數等於或大於另外兩數的和，若仿照例1作圖的作法，會得到什麼結果呢？下面以3、3、6與2、2、6這兩組數來說明。

例4 Example

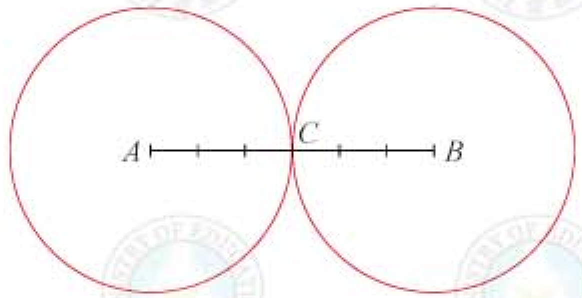
如右圖，$\overline{AB}=6$，若以A、B為圓心，作半徑均為3的圓，試問這兩圓相交於幾點？



解題說明

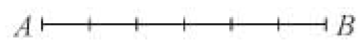
以A、B為圓心，半徑均為3的兩圓相交情況如右圖。

由圖可知，兩圓僅相交於一點C，且A、C、B三點在同一直線上。



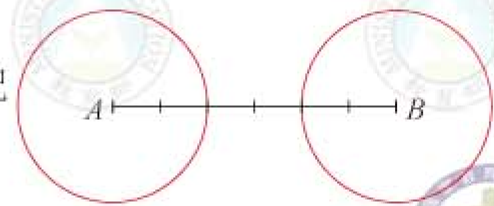
例5 Example

如右圖，$\overline{AB}=6$，若以A、B為圓心，作半徑均為2的圓，試問這兩圓相交於幾點？



解題說明

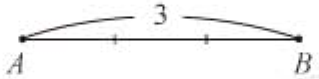
以A、B為圓心，半徑均為2的兩圓相交情況如右圖，這兩個圓不相交。



當一組正數a、b、c中，有兩數的和不大於第三數時，上面的作圖告訴我們a、b、c為什麼不能構成三角形的三邊長。

隨．堂．練．習

如下圖，$\overline{AB}=3$，若以A、B為圓心，作半徑分別為2、6的兩圓，這兩圓會相交嗎？



等腰三角形

如圖3-21，$\triangle ABC$為等腰三角形，其中$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BC}$稱為底邊，$\angle B$和$\angle C$稱為底角，$\angle A$則稱為頂角。

取M為$\overline{BC}$的中點，由3-2節的例10，知$\overline{AM}$事實上是$\overline{BC}$上的中垂線，並且$\triangle ABM\cong\triangle ACM$。因此$\angle B=\angle C$，於是得到

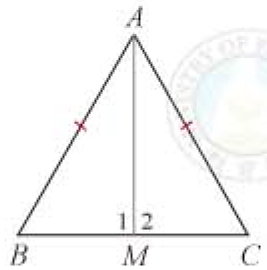


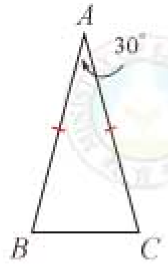
圖3-21

等腰三角形的兩底角相等。

有時這個性質也稱為**等邊對等角性質**。

例 6 Example

已知$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A=30^\circ$，求$\angle B$和$\angle C$。



解題說明

因為$\triangle ABC$是等腰三角形，

所以 $\angle B=\angle C$ 等腰三角形兩底角相等

又因為 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ 三角形內角和性質

得 $2\angle B+\angle A=180^\circ$

即 $2\angle B=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

因此 $\angle C=\angle B=75^\circ$

隨．堂．練．習

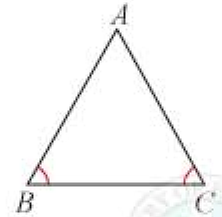
1. 有一等腰直角三角形$\triangle ABC$，其中$\angle A$為直角，求$\angle B$和$\angle C$。

2. 若$\triangle ABC$的三邊都等長，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$。

由前面討論知，等腰三角形的兩底角相等。接著要反過來說明，若三角形有兩個角相等，則此三角形必為等腰三角形。

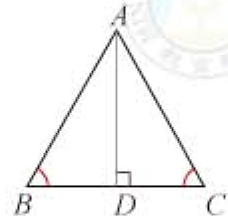
例 7 Example

如右圖，已知$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$。試說明$\overline{AB}=\overline{AC}$。



解題說明

先作$\overline{BC}$上的高$\overline{AD}$，如右圖。



在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

因為 $\angle B=\angle C$ 已知

$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$ $\overline{BC}\perp\overline{AD}$

$\overline{AD}=\overline{AD}$ 共邊

所以由AAS三角形全等性質，得

$\triangle ABD\cong\triangle ACD$

因此 $\overline{AB}=\overline{AC}$

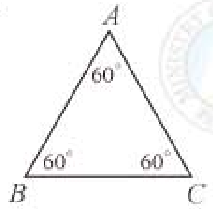
由例7的討論得到

若三角形中有兩角相等，則它們的對邊等長。

上面的性質稱為**等角對等邊性質**。

隨．堂．練．習

如右圖，$\triangle ABC$的每一個內角都是60°，說明$\triangle ABC$為一正三角形。



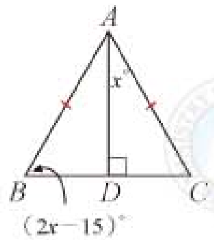
前述圖3-21中$\triangle ABM$和$\triangle ACM$的全等關係，除了得到$\angle B=\angle C$外，還有$\angle BAM=\angle CAM$。因此知道$\overline{AM}$為頂角$\angle A$的角平分線。

綜合上述的說明，知道等腰三角形底邊的高就是底邊的中垂線，也是其頂角的角平分線，因此

等腰三角形頂角的角平分線、底邊的中線、底邊的中垂線與底邊的高均為同一直線。

隨．堂．練．習

如右圖，$\triangle ABC$為等腰三角形，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，求$x$的值。



大邊對大角

運用等腰三角形的性質，底下將討論三角形中，若兩邊不等時，其對角的大小關係。如圖3-22，若$\triangle ABC$中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，問其對角$\angle C$、$\angle B$的大小關係？

因為$\overline{AB}>\overline{AC}$，可在$\overline{AB}$上取一點$D$，使得$\overline{AD}=\overline{AC}$。

這表示$\triangle ADC$為等腰三角形，所以$\angle 1=\angle 2$。

但由三角形外角性質，

得　$\angle 1>\angle B$

又　$\angle C>\angle 2$

因此　$\angle C>\angle B$

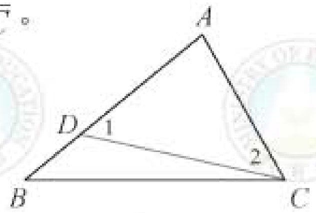


圖3-22

由上述知道，三角形有**大邊對大角**的性質

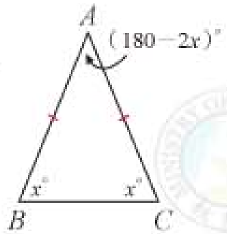
三角形的大邊所對的角較大。

隨．堂．練．習

在$\triangle ABC$中，$\overline{BC}<\overline{AC}<\overline{AB}$，求三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的大小關係。

例8 Example

如右圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，若$\overline{BC}<\overline{AB}$，求$x$的範圍。



解題說明

因為$\angle A$是一個角，所以$180-2x>0$，

解得　$x<90$

又因為　$\overline{AB}>\overline{BC}$

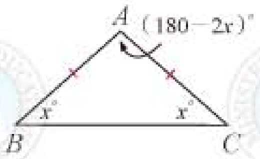
所以　$x>180-2x$　　大邊對大角

解得　$x>60$

因此　$60<x<90$

隨．堂．練．習

如右圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，若$\overline{BC}>\overline{AB}$，求$x$的範圍。



大角對大邊

接著我們要討論三角形中，不相等兩角之對邊大小關係。如圖3-23，若$\triangle ABC$中，$\angle B>\angle C$，問其對邊$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的大小關係？

因為$\angle B>\angle C$，作$\overline{BD}$，使得$\angle CBD=\angle C$。

由等角對等邊性質得$\overline{BD}=\overline{CD}$

但由三角形兩邊和大於第三邊

得　$\overline{BD}+\overline{AD}>\overline{AB}$

因此　$\overline{AC}=\overline{CD}+\overline{AD}=\overline{BD}+\overline{AD}>\overline{AB}$

由上述知道，三角形有**大角對大邊**的性質

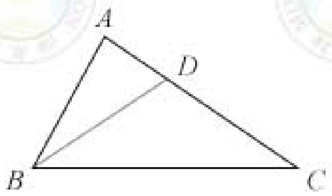


圖3-23

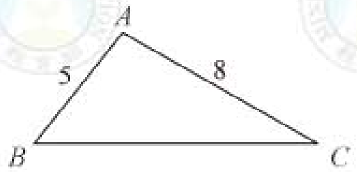
三角形的大角所對的邊較長。

隨．堂．練．習

利用大角對大邊，說明直角三角形的斜邊比任一股長。

例 9 Example

如右圖，$\triangle ABC$中，$\angle A>\angle B>\angle C$，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=8$，求$\overline{BC}$的範圍。



解題說明

因為$\angle A>\angle B$，得$\overline{BC}>8$，　　大角對大邊

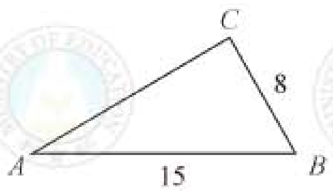
再由兩邊和大於第三邊，得

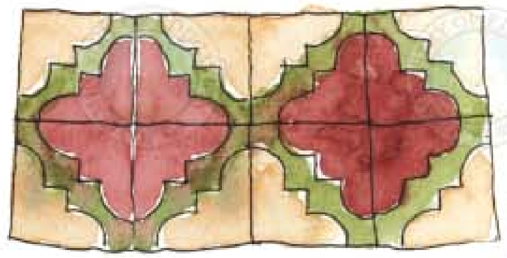
$\overline{BC}<\overline{AB}+\overline{AC}=8+5=13$

所以　$8<\overline{BC}<13$

隨．堂．練．習

如右圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=15$，$\overline{BC}=8$。若$\angle A<\angle B<\angle C$，求$\overline{AC}$的範圍。



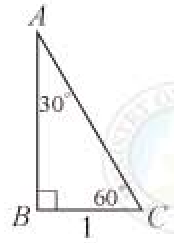


特殊直角三角形

接下來，要討論一些特殊的直角三角形，如三內角為30°、60°、90°的直角三角形，以及三內角為45°、45°、90°的直角三角形。

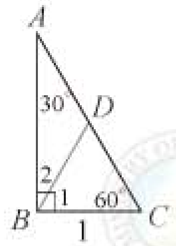
例10 Example

如右圖，$\triangle ABC$為直角三角形，$\angle A=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$，若$\overline{BC}=1$，求$\overline{BC}:\overline{AB}:\overline{AC}$。



解題說明

如右圖，作$\overline{BD}$，使得$\angle 1=60^\circ$。



又因為　$\angle C=60^\circ$

所以　$\angle BDC=180^\circ-60^\circ-60^\circ$　三角形內角和180°

$=60^\circ$

因此$\triangle BCD$是正三角形。

得　$\overline{DB}=\overline{DC}=\overline{BC}=1$

又因為　$\angle 2=90^\circ-\angle 1=30^\circ$

所以　$\angle 2=\angle A$

因此$\triangle ABD$是等腰三角形。　等角對等邊

即　$\overline{DA}=\overline{DB}=1$

所以　$\overline{AC}=\overline{DA}+\overline{DC}=2$

因此　$\overline{AB}=\sqrt{2^2-1^2}$　畢氏定理

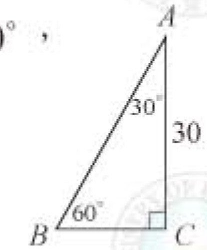
$=\sqrt{3}$

所以$\overline{BC}:\overline{AB}:\overline{AC}=1:\sqrt{3}:2$。

利用例10的方法可以得到，若一直角三角形的內角為30°、60°、90°，則其對邊的連比為$1:\sqrt{3}:2$。

例11 Example

$\triangle ABC$為直角三角形，其中$\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$，已知$\overline{AC}=30$，求$\overline{AB}$和$\overline{BC}$。



解題說明

由上述知　$\overline{BC}:30:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$

由　$\overline{BC}:30=1:\sqrt{3}$

得　$\overline{BC}=\dfrac{30\times1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overset{10}{\cancel{30}}\times1\times\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}}=10\sqrt{3}$

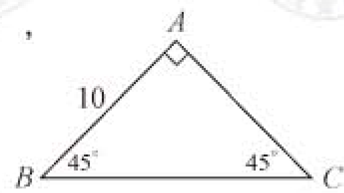
由$\overline{BC}:\overline{AB}=1:2$，可知$\overline{AB}$是$\overline{BC}$的2倍，所以$\overline{AB}=10\sqrt{3}\times2=20\sqrt{3}$。

隨・堂・練・習

$\triangle ABC$為直角三角形，其中$\angle A=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$，已知$\overline{BC}=5$，求$\overline{AB}$和$\overline{AC}$。

例12 Example

如右圖，直角三角形ABC的三內角為45°、45°、90°，且$\overline{AB}=10$，求$\overline{AC}$和$\overline{BC}$。



解題說明

由$\angle B=\angle C=45^\circ$，得

$\overline{AC}=\overline{AB}=10$　等角對等邊性質

由畢氏定理，得

$\overline{BC}=\sqrt{10^2\times10^2}=\sqrt{200}=\sqrt{10^2\times2}=10\sqrt{2}$

由例12可知，等腰直角三角形之三邊連比為$1:1:\sqrt{2}$。

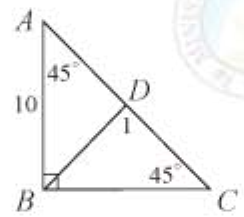
隨．堂．練．習

$\triangle ABC$為等腰直角三角形，$\angle B=90^\circ$，已知$\overline{AC}=10$，求$\overline{AB}$。

另外，從例10的說明我們還知道，$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$，也就是說，$D$正好是斜邊的中點。這個「斜邊中點$D$滿足$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$」的性質，事實上，對一般的直角三角形都是正確的，在第五冊時將會詳細說明。下面的隨堂練習是另一個例子。

隨．堂．練．習

$\triangle ABC$為等腰直角三角形，$\angle B=90^\circ$，已知$\overline{AB}=10$，D為$\overline{AC}$中點。



(1) 說明$\overline{BD}\perp\overline{AC}$。

(2) 求$\overline{DA}$。

(3) 用$\overline{DA}$求出$\overline{DB}$和$\overline{DC}$。

摘要

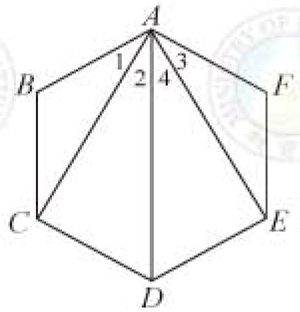
1. 三角形的兩邊和大於第三邊。
2. 等腰三角形的兩底角相等。兩底角相等的三角形必為等腰三角形。
3. 等腰三角形頂角的角平分線、底邊的高與底邊的中垂線均為同一直線。
4. 大邊對大角：三角形的大邊所對的角較大。
5. 大角對大邊：三角形的大角所對的邊較長。
6. $30^\circ-60^\circ-90^\circ$直角三角形各角對邊邊長之連比為$1:\sqrt{3}:2$。
7. 等腰直角三角形之三邊連比為$1:1:\sqrt{2}$。

3-3 自我評量

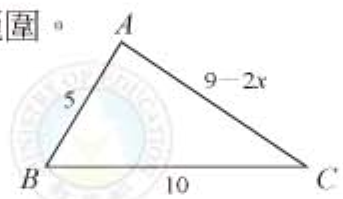
1. 已知$\overline{AB}=10$。若分別以A、B為圓心，半徑為3、7畫兩圓，問此兩圓相交於幾個點？

2. 若三角形三邊長從小到大為x、$x+5$、100，求x的範圍。

3. 如右圖，有一正六邊形$ABCDEF$。
   (1) 求$\angle 1$與$\angle 3$。
   (2) 試說明$\triangle ACD \cong \triangle AED$，並求$\angle 2$與$\angle 4$。
   (3) 試說明$\overline{AD}$是$\angle BAF$的角平分線。



4. 如右圖，已知$\angle C < \angle B < \angle A$，求$x$的範圍。



第 4 章

幾何圖形

4-1 平行四邊形

上一章討論了很多三角形的全等性質。當然，對於一般多邊形也可以討論如何判定兩多邊形全等的問題。應用3-1節討論SAS全等性質時的基本想法，很容易就可以知道，若兩多邊形的所有對應邊與對應角都相等，這兩個圖形就全等。

第三章中我們討論了許多三角形的全等性質（如SAS、ASA、SSS等全等性質），把原來的邊角的六個對應條件減少到三個條件。但是在一般多邊形的情況，想要大量減少全等判斷條件是不可能的。

舉例來說，四邊形並沒有SSSS這樣的全等性質。圖4-1中有三個四邊都是1的四邊形，其中只有一種是正方形，其他是各式各樣的菱形，圖4-1的三個圖形顯然不全等。

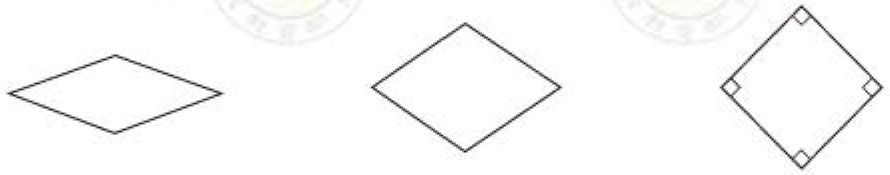


圖4-1

三角形的三邊長可以決定三角形的大小、形狀（SSS），而四邊形的四邊無法決定唯一的四邊形，這兩種特性在日常生活中都有很重要的應用。當我們需要固定支架或建築穩定的架構時，經常會利用三角形的SSS性質來幫忙，將各接點的相對距離鎖定。如圖4-2左圖是書架的支架，其他則是橋墩或鐵橋的撐架，其中可以看到很多三角形。

圖4-2

四邊形邊長固定卻可以有不同形狀的特性，可以利用來做出可伸展又可壓縮的結構。例如圖4-3左邊的紙箱，打開來可以裝東西，不用時則可以壓扁後再收納，其他的像拉門的開關、千斤頂的撐收也用到類似的性質。

圖4-3

由於多邊形的全等性質不像三角形簡潔，本章不再討論四邊形的全等，而是要利用第三章的三角形全等以及線對稱的概念，來討論各式各樣的四邊形性質。

平行四邊形擁有非常豐富的幾何性質，本節將討論平行四邊形對邊、對角、對角線的性質，但首先要知道如何判別兩直線是否平行。

平行線的判定性質

在2-3節中已經學過，若兩平行線被一直線所截，其同位角相等，內錯角相等，同側內角互補。現在要反過來問一個問題：

問題： 當兩直線M、N被一直線L所截時，如果「同位角相等」、「內錯角相等」或「同側內角互補」三個性質中，有一個性質成立，是否就能判定M平行於N？

想回答這個問題，要先自問如何判斷兩直線平行。由於兩直線M和N平行的意思是，可以找到另一直線同時垂直於M和N。因此，我們可以如圖4-4一樣，先在M上找一點A，並過點A作$\overline{AH}$垂直於N，其中H為垂足，然後再看看上述任一個性質成立時，$\angle 1$會不會是直角？

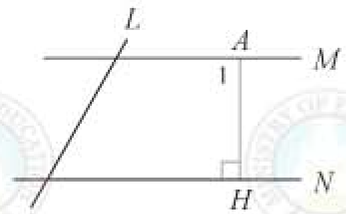
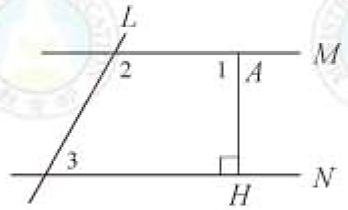


圖4-4

下面先看看「同側內角互補」的情形。

例1 Example



右圖中，$\angle 2+\angle 3=180^\circ$，$\overline{AH}\perp N$，

說明$\angle 1$是直角。

解題說明

由於　$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle H=360^\circ$　四邊形內角和為360°

但由題意知　$\angle H=90^\circ$

而且　$\angle 2+\angle 3=180^\circ$　同側內角互補

所以　$\angle 1+180^\circ+90^\circ=\angle 1+270^\circ=360^\circ$

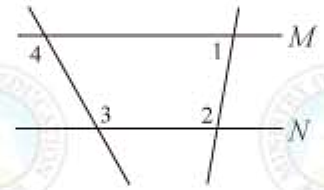
得　$\angle 1=90^\circ$

由例1可知，如果同側內角互補，則$\angle A$和$\angle H$都是直角，所以$M/\!/N$。但是如果條件換成「同位角相等」或「內錯角相等」時，還有必要像上面那樣再作圖討論嗎？

因為在2-3節的習作已經說明過，當兩直線被一直線所截時，如果「同位角相等」或「內錯角相等」，則同側內角一定會互補。既然這樣，從例1就知道此時$M/\!/N$。因此就得到下述的**平行線判定性質**

若兩直線被一直線所截的同位角相等，則此兩直線平行。
若兩直線被一直線所截的內錯角相等，則此兩直線平行。
若兩直線被一直線所截的同側內角互補，則此兩直線平行。

例2 Example



如右圖，若$\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=80^\circ$，求$\angle 2$。

解題說明

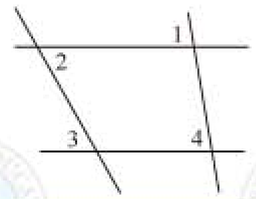
因為　$\angle 3=\angle 4$

所以　$M/\!/N$　平行線判定性質

因此　$\angle 1+\angle 2=180^\circ$　同側內角互補

但因為$\angle 1=80^\circ$，所以$\angle 2=180^\circ-80^\circ=100^\circ$。

隨・堂・練・習

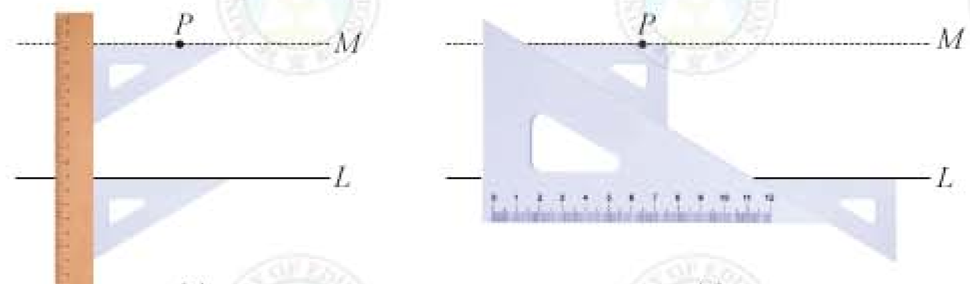


如右圖，$\angle 1=\angle 4=70^\circ$，

$\angle 2=60^\circ$，求$\angle 3$。

過線外一點作平行線

思考幾何問題時，有時需要在直線外的一點，做一條和該直線平行的直線。在小學時，我們曾經以圖4-5的方法做出這條平行直線，而其中的道理就藏在平行線判定性質裡，你知道是為什麼嗎？

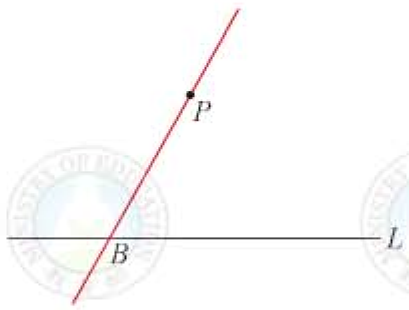
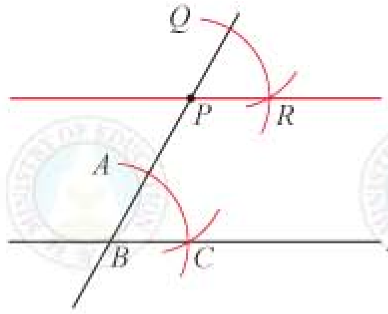


(a)　(b)

圖4-5

依圖4-5(a)，可以作出通過P點且平行於L的直線M，這是因為M和L同時垂直於直尺。至於圖4-5(b)，則是因為三角板的角度固定，利用「兩直線被一線所截的同位角相等，則此兩直線平行」的性質，就知道$M/\!/L$了。

上面的作法用到尺或三角板，如果手邊只有一把直尺和圓規時，則可以利用下面的方法來作平行線。

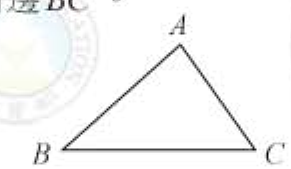
作　　法	作　　圖
(1) 先在L上取一點B，連接$\overleftrightarrow{BP}$。	
(2) 以P點為角的頂點，$\overrightarrow{BP}$為角的一邊，在$\angle ABC$的同位角位置，作$\angle QPR=\angle ABC$，那麼$\overleftrightarrow{PR}$即為所求。	

動・動・腦

上述作法中求得的$\overleftrightarrow{PR}$為什麼會與L平行？

隨・堂・練・習

如右圖，過$\triangle ABC$的頂點A，作一直線平行於對邊$\overline{BC}$。



根據隨堂練習，由於直線L平行於$\overline{BC}$（圖4-6），由內錯角相等的性質，可以知道，$\angle BAC+\angle 1+\angle 2=\angle BAC+\angle B+\angle C$。

等號左邊的角度和是180°，表示三個角構成平角（直線L）；等號右邊的角度和是180°，則是因為三角形內角和是180°。藉由平行線的性質可以發現，原來這兩個看起來不相干的性質有這麼有趣的關係。

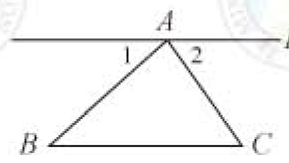
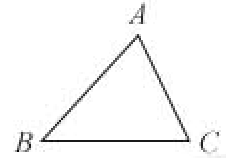


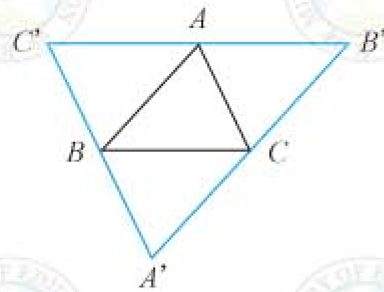
圖4-6

例 3 Example

過$\triangle ABC$的每個頂點，各作一條平行於其對邊的平行線，這三條平行線構成一個三角形，說明這個新三角形的內角與$\triangle ABC$的內角對應相等，而且面積是$\triangle ABC$面積的4倍。



解題說明



如右圖，由原來的$\triangle ABC$做出新的$\triangle A'B'C'$。

（其中A'讀作A prime，當圖形有明顯的對應時，經常使用這樣的記法。）

由於　$\overline{A'B}\,/\!/\,\overline{AC}$ 而且 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{A'C}$，

所以四邊形$ABA'C$是一個平行四邊形，　平行四邊形的定義

因此　$\angle A=\angle A'$　平行四邊形對角相等

同理　$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$

因此，新三角形$A'B'C'$的內角與原三角形ABC的內角對應相等。

又因為　$\triangle ABC\cong\triangle A'CB$　對角線將平行四邊形分成兩個全等三角形

所以　$\triangle ABC$的面積$=\triangle A'CB$的面積

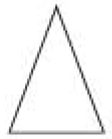
同理　$\triangle ABC$的面積$=\triangle CB'A$的面積$=\triangle BAC'$的面積

所以　$\triangle A'B'C'$的面積$=\triangle ABC$的面積$\times 4$

隨·堂·練·習

(1) 如右圖，過等腰三角形的每個頂點，各作一條平行於其對邊的平行線。

(2) 這三條平行線構成的三角形也是一個等腰三角形嗎？說明你的理由。



平行四邊形的判定

由2-3節例4、3-2節例8及其隨堂練習知道，平行四邊形有許多性質，總結如下：

(1)兩組對邊相等。

(2)兩組對角相等。

(3)對角線互相平分。

由於矩形的兩組對邊平行，因此矩形是一種特殊的平行四邊形，但是由於任何平行四邊形都有上述三個性質，所以任何矩形也都滿足這三個性質，說明如下：

矩形兩組對邊相等	（兩組對邊相等）
矩形四角都是直角	（所以兩組對角當然相等）
矩形對角線等長且互相平分	（所以對角線當然互相平分）

由上述知道，矩形確實是一種平行四邊形，卻也有自己特殊的性質（例如對角線等長，內角為直角），任意平行四邊形並不一定會有這些特殊的性質。這就像人類是一種動物，但並不是所有動物都是人類一樣。一般經常用圖4-7的圖示表示這樣的關係。

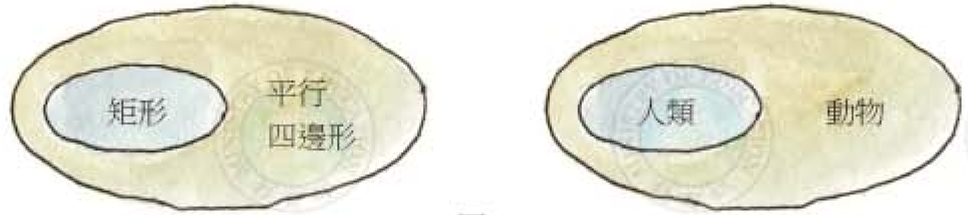


圖4-7

隨·堂·練·習

完成下表，盡量填入正方形本身的特別性質。

	正方形	矩形
邊的性質		兩組對邊相等
角的性質		四角都是直角
對角線		對角線等長且互相平分

由隨堂練習可知，正方形滿足矩形的定義：四角皆為直角，因此正方形是一種矩形，但正方形有自己特殊的性質（例如四邊等長，對角線互相垂直），一般的矩形並不會有這些性質。結合上面的討論，可以將正方形、矩形、平行四邊形的關係表示如圖4-8。

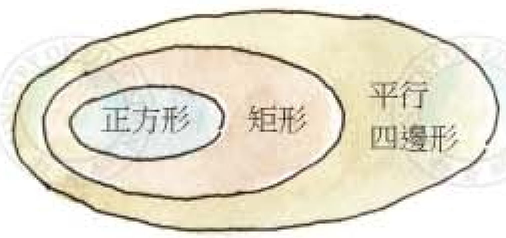


圖4-8

但是如果想利用平行四邊形的性質來探討菱形是否具備這些性質時，馬上就會碰到一個問題：我們知道，菱形是四邊等長的四邊形，菱形看起來也像平行四邊形，但是菱形真的是平行四邊形嗎？

有人或許會說：「菱形的兩組對邊都相等，而平行四邊形的兩組對邊相等，所以菱形一定是平行四邊形。」

但是這樣的說法是不對的，我們看看底下這段話：「小明是二年3班的學生，而跌倒的學生是二年3班的學生，所以跌倒的學生一定是小明。」

這種經常造成誤解的說法顯然是錯誤的。這種說法之所以錯誤在於，即使「跌倒的學生是二年3班的學生」，但是「二年3班的學生並不見得是跌倒的學生」，所以無法判斷小明是否跌倒。

對照之下可以知道，這裡該關心的關鍵問題是：

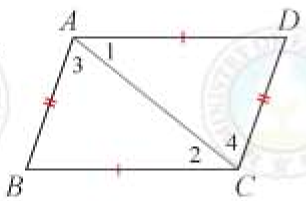
問題： 兩組對邊相等的四邊形一定是平行四邊形嗎？

如果這是對的，由於菱形四邊相等，所以兩組對邊當然相等，這樣就知道菱形是平行四邊形。而且這麼一來，除了「兩組對邊平行」之外，又多了一個刻畫或判定平行四邊形的方法。

例 4 Example

說明兩組對邊相等的四邊形一定是平行四邊形。

解題說明



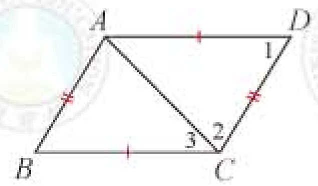
如右圖，假設四邊形$ABCD$中$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{BC}=\overline{AD}$，並做對角線$\overline{AC}$。

因為	$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{BC}=\overline{AD}$	已知
又	$\overline{AC}=\overline{AC}$	共邊
所以	$\triangle ABC\cong\triangle CDA$	SSS全等性質
得	$\angle 1=\angle 2$	對應角相等
因此	$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$	內錯角相等之平行線判定性質

同理，因為$\angle 3=\angle 4$，所以$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$。

由前兩行的結論知道，$ABCD$為平行四邊形。

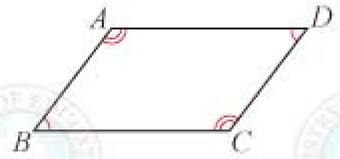
隨・堂・練・習



如右圖，$\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，已知$\angle 1+\angle 2=135^\circ$，求$\angle 3$。

事實上，另外兩個平行四邊形的性質，也都可以反過來判定一個四邊形是不是平行四邊形。

隨・堂・練・習



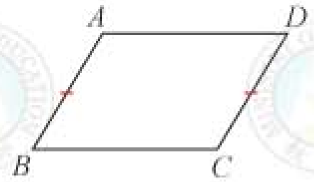
四邊形$ABCD$中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$。請在下列空格中填入適當的理由，說明$ABCD$為平行四邊形。

	$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$	(＿＿＿＿＿＿)
	$2\angle A+2\angle B=360^\circ$	(＿＿＿＿＿＿)
因此	$\angle A+\angle B=180^\circ$	
所以	$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$	(＿＿＿＿＿＿)
同理	$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$	

所以$ABCD$為一平行四邊形。

由上可知，兩組對角相等的四邊形一定是平行四邊形。

例 5 Example



四邊形$ABCD$中，已知$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$，且$\overline{AB}=\overline{CD}$，說明$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$。

解題說明

如右圖，作對角線$\overline{AC}$。在$\triangle ABC$與$\triangle CDA$中，

因為 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 已知

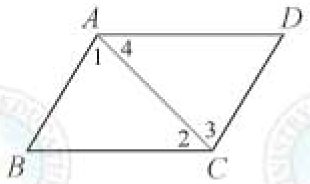
$\angle 1=\angle 3$ 內錯角相等

$\overline{AC}=\overline{AC}$ 共邊

所以 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$ SAS全等性質

得 $\angle 2=\angle 4$

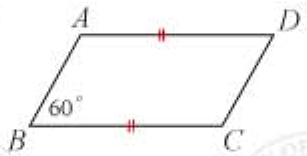
因此 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$ 內錯角相等之平行線判定性質



由例5得到，一組對邊平行且相等的四邊形一定是平行四邊形。

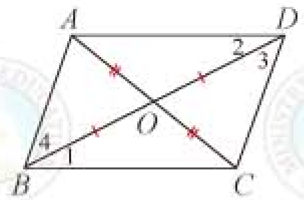
隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，且$\overline{AD}=\overline{BC}$，已知$\angle B=60^\circ$，求$\angle A$和$\angle D$。



隨・堂・練・習

如右圖，四邊形$ABCD$中，對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$交於點O，並且$\overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$。請在下列空格中填入適當的理由，說明$ABCD$為一平行四邊形。



觀察$\triangle ODA$和$\triangle OBC$，由於$\overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OD}=\overline{OB}$

而且 $\angle AOD=\angle COB$ (＿＿＿＿＿＿＿＿)

所以 $\triangle ODA\cong\triangle OBC$ (＿＿＿＿＿＿＿＿)

得 $\angle 1=\angle 2$，$\overline{AD}=\overline{BC}$ (＿＿＿＿＿＿＿＿)

因此 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$ (＿＿＿＿＿＿＿＿)

由$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，以及$\overline{AD}=\overline{BC}$，$ABCD$為一平行四邊形。

由隨堂練習知道，兩對角線互相平分的四邊形一定是平行四邊形。

綜合上述可知

滿足下列任何一個性質的四邊形，一定是平行四邊形：

(1) 兩組對邊相等。

(2) 兩組對角相等。

(3) 兩對角線互相平分。

(4) 一組對邊平行且相等。

這些判定平行四邊形的性質，都很有用。例如可以據此設計出專門畫平行線的尺（圖4-9），其中應用到的原理就是「兩組對邊相等的四邊形一定是平行四邊形」。

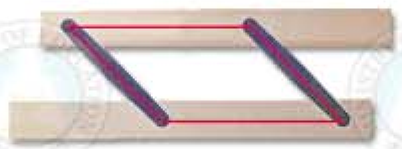
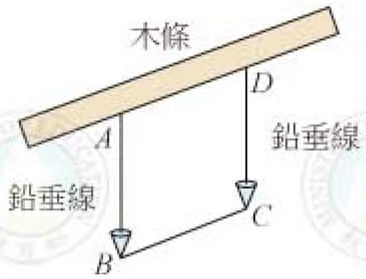


圖4-9

隨・堂・練・習

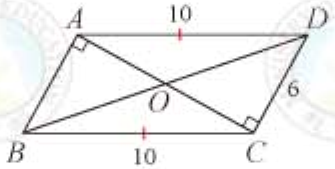
1. 右圖是一種平行鉗，請按圖中的提示，說明鉗嘴會固定平行的理由。

2. 如右圖所示，兩等長的鉛垂線$\overline{AB}$與$\overline{CD}$分別固定在木條上A、D兩點的位置。四邊形$ABCD$是否為一平行四邊形？為什麼？



例6 Example

如右圖，$\overline{AC}\perp\overline{CD}$，$\overline{AC}\perp\overline{AB}$，$\overline{AD}=\overline{BC}=10$，$\overline{CD}=6$，求$\overline{OA}$和$\overline{OB}$。



解題說明

由題意知，$\triangle CDA$是直角三角形，

因此 $\overline{AC}=\sqrt{10^2-6^2}=8$ 畢氏定理

由於 $\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$ RHS全等性質

得 $\overline{AB}=\overline{CD}=6$ 對應邊相等

所以$ABCD$為平行四邊形， 兩組對邊相等

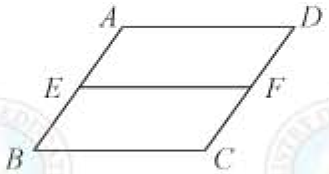
得 $\overline{OA}=\overline{AC}\times\frac{1}{2}=4$ 對角線互相平分

由於 $\overline{OB}^2=\overline{AB}^2+\overline{OA}^2=36+16=52$ 畢氏定理

得 $\overline{OB}=\sqrt{52}=\sqrt{2^2\times13}=2\sqrt{13}$

隨・堂・練・習

如右圖，在平行四邊形$ABCD$的兩對邊$\overline{AB}$和$\overline{CD}$上，各取其中點E和F，連接線段$\overline{EF}$，說明$AEFD$是一個平行四邊形。



梯形

四邊形$ABCD$中，若有一組對邊$\overline{AD}$、$\overline{BC}$互相平行，而另一組對邊$\overline{AB}$、$\overline{CD}$不平行，則稱$ABCD$為梯形，如圖4-10。

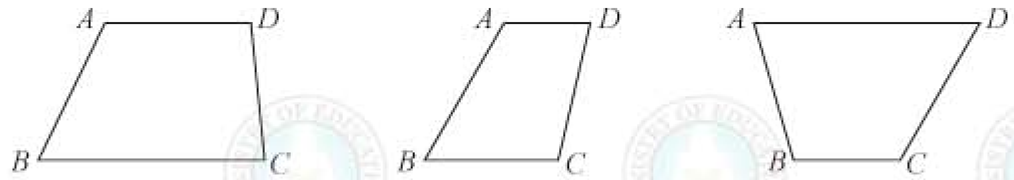


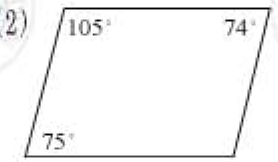
圖4-10

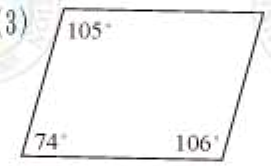
平行線的判定性質，可以用來判斷一個四邊形是不是梯形。

隨・堂・練・習

下列圖形中，哪些四邊形是梯形？試說明你的理由。

(1)


(2)


(3)


梯形中不平行的兩邊稱為梯形的腰。若梯形兩腰相等，則稱為**等腰梯形**，如圖4-11中，$\overline{AB}=\overline{CD}$，其中$\angle B$、$\angle C$稱為等腰梯形的一組底角，$\angle A$、$\angle D$則是另一組底角。

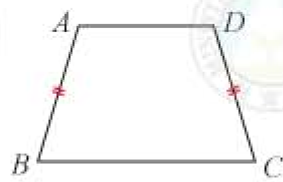
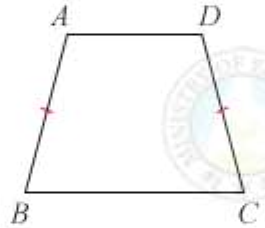


圖4-11

例 7 Example

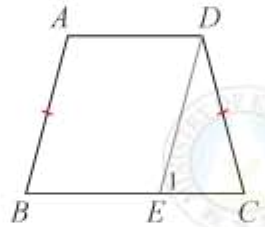
如右圖，已知$ABCD$為一等腰梯形，且$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，

試說明$\angle B=\angle C$。



解題說明

如右圖，作$\overline{DE}$平行於$\overline{AB}$，則$ABED$為平行四邊形。



由	$\overline{DE}=\overline{AB}$	兩組對邊相等
及	$\overline{DC}=\overline{AB}$	已知
得	$\overline{DE}=\overline{DC}$	
所以	$\angle 1=\angle C$	等腰三角形兩底角相等
但因為	$\angle 1=\angle B$	同位角相等
因此	$\angle B=\angle C$	

動・動・腦

續例7，怎麼說明$\angle A=\angle D$？

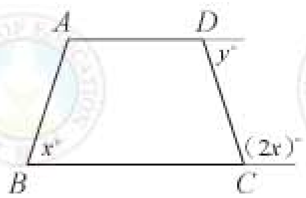
由例7與動動腦得到

等腰梯形的兩組底角相等。

隨・堂・練・習

如右圖，四邊形$ABCD$為一等腰梯形，

求x、y的值。



摘要

1. 平行線判定性質：

 兩直線被一直線所截時，若同位角相等或內錯角相等或同側內角互補，則此兩直線平行。

2. 平行四邊形性質：

 兩組對邊相等。

 兩組對角相等。

 兩對角線互相平分。

3. 平行四邊形判別性質：

 兩組對角相等的四邊形一定是平行四邊形。

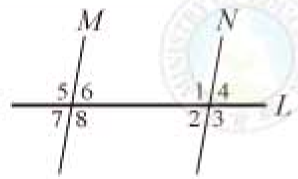
 兩組對邊相等的四邊形一定是平行四邊形。

 兩對角線互相平分的四邊形一定是平行四邊形。

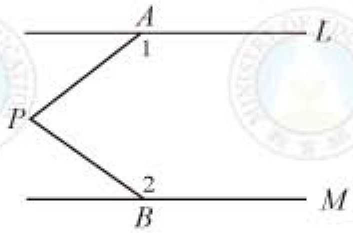
 一組對邊平行且相等的四邊形一定是平行四邊形。

4-1 自我評量

1. (　　) 如右圖，L是M、N的截線，下列哪一個條件不一定能推得$M // N$？
   (A) $\angle 8 = \angle 3$　　(B) $\angle 6 + \angle 1 = 180^\circ$
   (C) $\angle 5 + \angle 3 = 180^\circ$　　(D) $\angle 6 = \angle 2$。

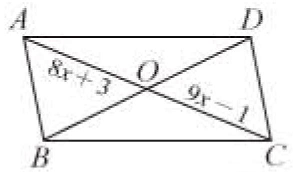


2. 如右圖，$L // M$，計算$\angle 1 + \angle 2 + \angle APB$。

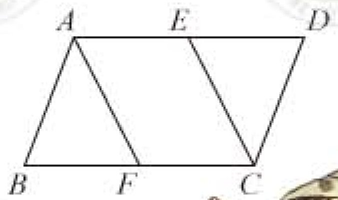


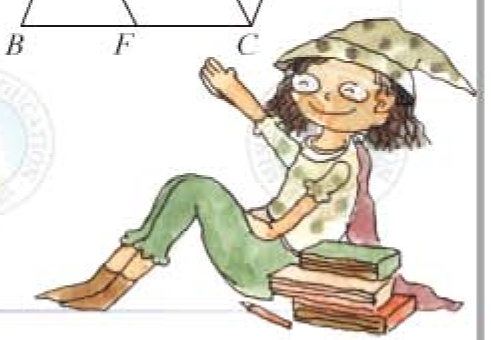
3. 已知一平行四邊形$ABCD$的周長為62，若$\overline{BC} - \overline{AB} = 9$，則$\overline{AD} =$ ______。

4. 如右圖，平行四邊形$ABCD$的兩對角線相交於O，且$\overline{OA} = 8x + 3$，$\overline{OC} = 9x - 1$，則$\overline{AC} =$ ______。



5. 如右圖，平行四邊形$ABCD$中，E、F分別為$\overline{AD}$和$\overline{BC}$的中點，試說明四邊形$AFCE$是平行四邊形。





4-2 線對稱與幾何圖形

日常生活中經常看到對稱的現象。例如地球上各種動物，要在有地球引力的環境中順利移動，最後演化出來的對稱形狀令人歎為觀止。同樣的，人類所發明的許多建築、用具、機械、圖案，在結構上也經常有對稱的形狀（圖4-12）。由於幾何學研究各種圖形的性質，因此對稱的概念是幾何學的核心之一，值得深入學習。

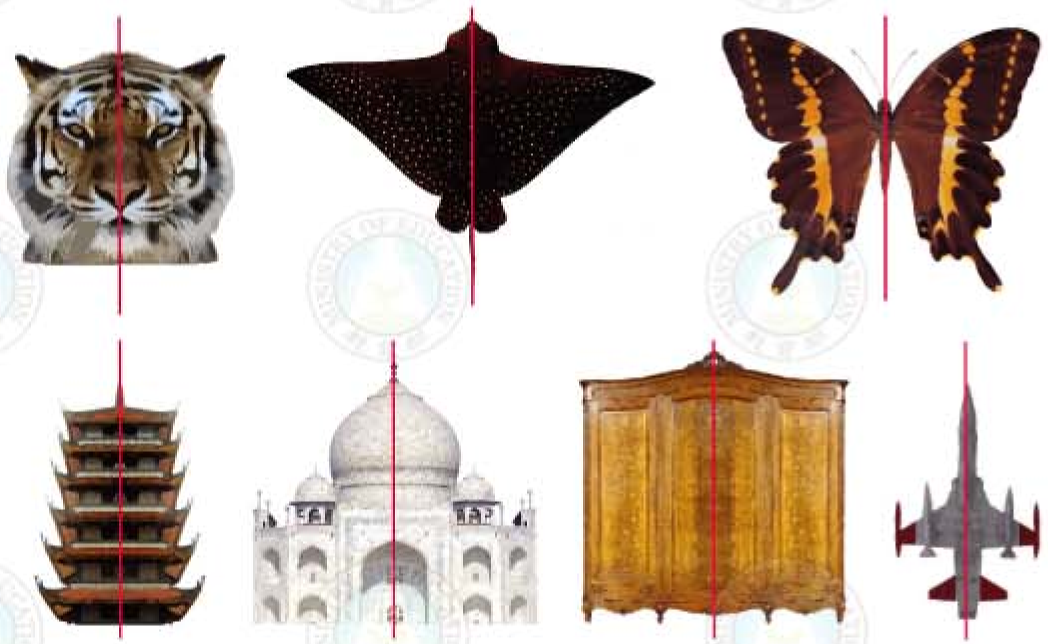


圖4-12

圖4-12中的圖形，從書頁上來看，紅線左、右兩側的圖形，看起來大致上相同。這樣的圖形稱為**線對稱圖形**，圖上的紅線稱為**對稱軸**。換句話說，**線對稱圖形對稱軸兩側的圖形會全等**。

小學時我們經常用摺紙來學習線對稱圖形，其中的摺痕就是對稱軸。延續這個經驗，我們可以利用摺紙來當做製作、檢驗、理解線對稱圖形的思考工具。

例如想像把圖4-13(a)左邊的圖形，沿直線L「摺到」右邊，並描繪下來（全等疊合），就會得到圖4-13(b)的線對稱圖形，其中B和B'互為**對稱點**，C和C'互為對稱點，依此類推；$\overline{AB}$和$\overline{AB'}$互為**對稱邊**，$\overline{CD}$和$\overline{C'D'}$互為對稱邊，以及$\angle ABC$和$\angle AB'C'$互為對稱角。在這裡我們注意到，因為A、F在對稱軸上，所以它們的對稱點是A、F本身。

而由線對稱圖形對稱軸左右兩側圖形全等的意義，可知線對稱圖形中的對稱邊等長，對稱角相等。

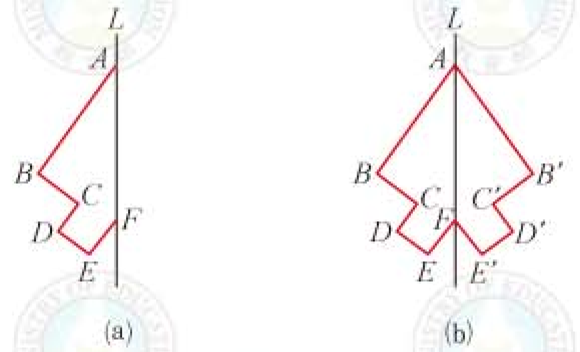


圖4-13

舉例來說，圖4-14是一個等腰三角形ABC。由3-3節知道，若取A在$\overline{BC}$的垂足H，則$\triangle ABH \cong \triangle ACH$，也就是說將$\triangle ABC$沿著$\overleftrightarrow{AH}$對摺剛好會互相疊合，因此等腰三角形$ABC$就是一個線對稱圖形，而$\overleftrightarrow{AH}$就是$\triangle ABC$的對稱軸。

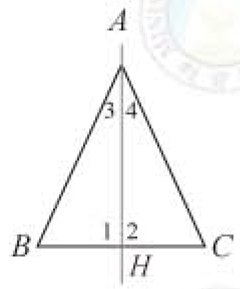


圖4-14

利用線對稱可以掌握等腰三角形的許多性質，由表4-1可知，等腰三角形的對稱軸，就是底邊上的高、底邊的中垂線、頂角的角平分線。

表4-1

$\overline{AB}=\overline{AC}$	對稱邊相等	等腰三角形的定義
$\angle B=\angle C$	對稱角相等	等腰三角形底角相等
$\overline{BH}=\overline{HC}$ $\angle 1=\angle 2=90^\circ$	對稱邊相等 對稱角相等且互補	等腰三角形底邊的高 垂直平分底邊
$\angle 3=\angle 4$	對稱角相等	等腰三角形底邊的高 為頂角的角平分線

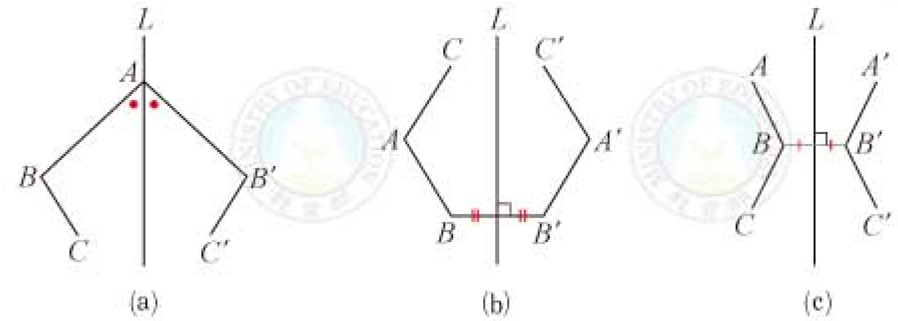


圖4-15

從摺紙的經驗知道，線對稱圖形的對稱軸L有一些基本的性質：

(1) 若L通過圖形的頂點A，如圖4-15(a)，則L是$\angle A$的角平分線。

(2) 若L通過此圖形中的$\overline{BB'}$，如圖4-15(b)，則L是$\overline{BB'}$的中垂線。

(3) L是任兩對稱點連線段的中垂線，如圖4-15(c)中的$\overline{BB'}$。

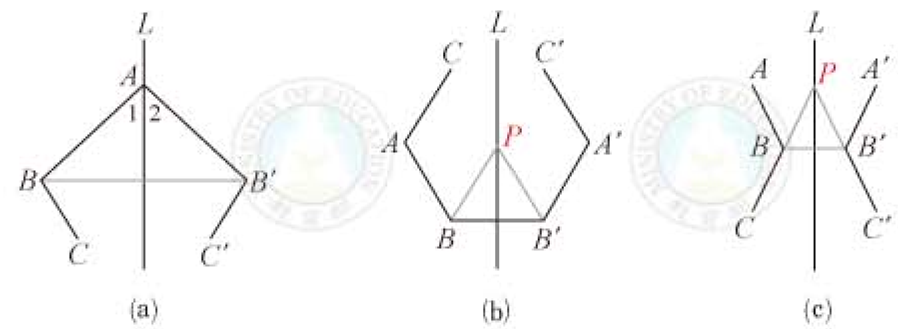


圖4-16

上面這些性質都可以利用等腰三角形的線對稱性質說明的更清楚。例如在圖4-15(a)中把B和B'連起來，如圖4-16(a)，由於B和B'互為對稱點，所以$\overline{AB}=\overline{AB'}$，因此$\triangle ABB'$為等腰三角形，由於$L$是$\triangle ABB'$的對稱軸，所以$L$是頂角$\angle A$的角平分線。

又如圖4-15(b)和(c)，我們可以在L上任取一點P，在P、B、B'間作連線段，如圖4-16(b)和(c)。由於B、B'互為對稱點，所以$\overline{PB}=\overline{PB'}$，因此$\triangle PBB'$為等腰三角形，所以$L$為$\overline{BB'}$的中垂線。

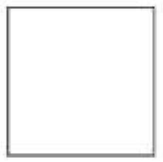
上面的性質(2)、(3)可以記為

對稱軸會垂直平分對稱點的連線段。

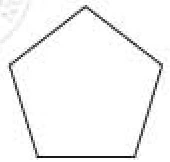
隨．堂．練．習

下列各圖中，哪些是線對稱圖形？如果是，請將對稱軸畫出來。

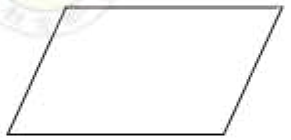
(1)



(2)



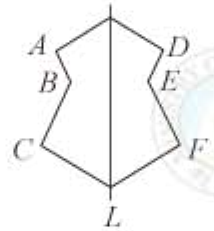
(3)



隨．堂．練．習

L 是右圖的對稱軸，試問 L 是下列哪些線段的中垂線？

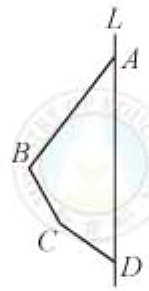
(1) $\overline{AD}$　(2) $\overline{AE}$　(3) $\overline{BE}$　(4) $\overline{BF}$



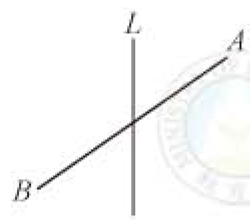
利用上面三個性質，可以讓我們更容易處理和線對稱圖形有關的問題，如下面的例子所示。

例 1 Example

1. 試畫出圖(a)中四邊形 $ABCD$ 對 L 的線對稱圖形。
2. 試以 L 為對稱軸，畫出 $\overline{A'B'}$，使得 $\overline{A'B'}$ 和 $\overline{AB}$ 對 L 線對稱。

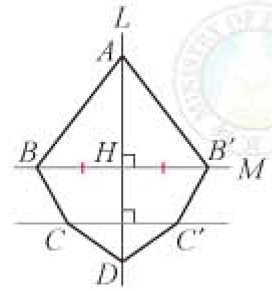


(a)



(b)

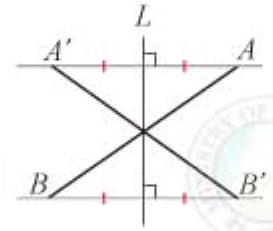
解題說明



1. 因為 A、D 在對稱軸 L 上，所以它們的對稱點就是 A、D 本身。由於 L 是對稱軸，因此若取 B' 為 B 的對稱點，則 L 必須是 $\overline{BB'}$ 的中垂線。

   因此要找出 B' 點，可先作一通過 B 點的直線 M，交 L 於 H，而且 $M \perp L$。然後於 L 的另一側，在 M 上取 B'，使得 $\overline{BH}=\overline{B'H}$。以同樣的方法，可取得 C'。

   因此 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 對 L 上的對稱線段就是 $\overline{AB'}$、$\overline{B'C'}$、$\overline{C'D}$，故 $ABCD$ 對 L 的線對稱圖形為 $AB'C'D$。當然我們也可以說六邊形 $ABCDC'B'$ 是一個以 L 為對稱軸的線對稱圖形。

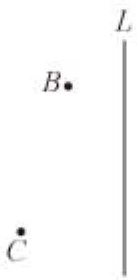


2. 用 1. 的方法，取 A' 為 A 的對稱點，B' 為 B 的對稱點，則 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 即所求。

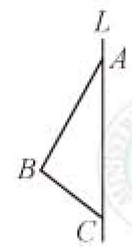
   注意到，對稱軸 L、$\overleftrightarrow{AB}$ 以及其對稱直線 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 相交於同一點。

隨．堂．練．習

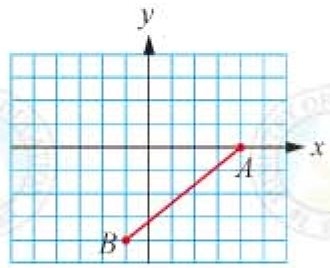
1. 如右圖，以 L 為對稱軸，試找出 B、C 的對稱點 B'、C'。$\overline{BB'}$ 會平行於 $\overline{CC'}$ 嗎？



2. 如右圖，以 L 為對稱軸，試找出 B 的對稱點 B'。四邊形 $ABCB'$ 的邊長彼此之間有什麼特別的關係？



例2 Example

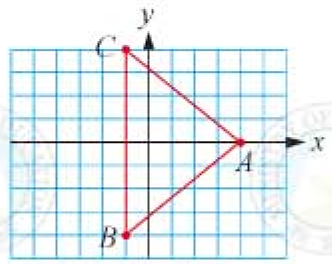


如右圖，在坐標平面上找出點C，使得$\triangle ABC$是以x軸為線對稱軸的等腰三角形。

解題說明

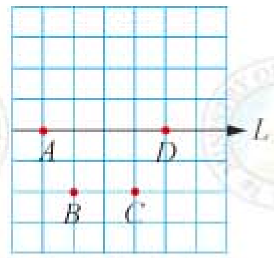
想像我們把書頁對x軸對摺，很容易就知道，C點是由$B(-1,-4)$往上走8格的點，也就是$(-1,4)$。因此，$\triangle ABC$就如右圖所示。

同樣可以自行檢驗，x軸的確是$\overline{BC}$的中垂線。



隨．堂．練．習

如右圖，找出C'、B'做出以L為對稱軸的六邊形$ABCDC'B'$。



既然具有線對稱的圖形那麼重要，我們可以反過來問一個問題：

問題：除了等腰三角形，還有其他具有線對稱特性的三角形嗎？

首先注意到，三角形是由三角形的三個頂點所決定的，只要頂點的位置確定，再用直尺畫出三邊就可以得到這個三角形。

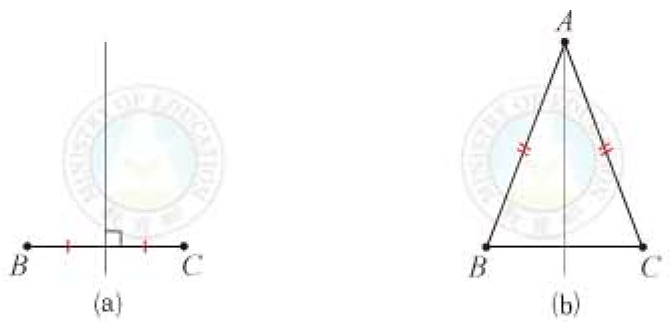


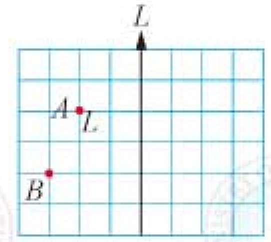
圖4-17

假設這個三角形有一條對稱軸，因此這三個頂點，一定有兩點（設為B、C）互為對稱點，由3-1節的討論知道，這條對稱軸就是$\overline{BC}$的中垂線（圖4-17(a)）。

剩下的頂點不能擺在對稱軸之外，不然它的對稱點就會變成第四個頂點，所以第三個頂點A，一定要落在對稱軸上（圖4-17(b)）。於是$\overline{AB}$和$\overline{AC}$互為對稱邊，$\overline{AB}=\overline{AC}$，這表示具有線對稱性質的三角形，一定是等腰三角形。

隨．堂．練．習

若有一四邊形是以L為對稱軸的線對稱圖形，而且A、B兩點是其頂點，畫出此圖形，此四邊形是等腰梯形嗎？



動．動．腦

如果有一個四邊形是一個線對稱圖形，而且頂點都不落在對稱軸上，那它一定是等腰梯形或矩形嗎？

箏形

四邊形$ABCD$（圖4-18）如果有兩組鄰邊相等（$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$），則稱為**箏形**。

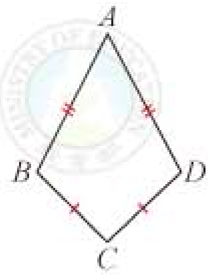
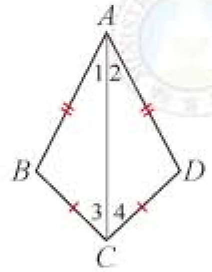


圖4-18

例 3 Example

如右圖，在箏形$ABCD$中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，說明$\triangle ABC\cong\triangle ADC$。



解題說明

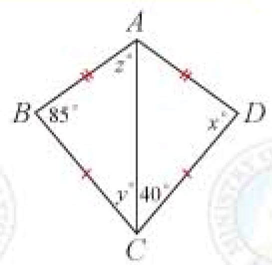
由於$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，再加上$\overline{AC}=\overline{AC}$，因此由三角形SSS全等性質，知道$\triangle ABC\cong\triangle ADC$。

由於$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，因此$\overline{AC}$為箏形$ABCD$的對稱軸，也就是說箏形是一種線對稱圖形。利用線對稱或三角形全等，很容易就知道$\angle B=\angle D$，而且$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。所以箏形有下列性質：

(1) 箏形有一組對角相等。
(2) 箏形的對稱軸平分其一組對角。

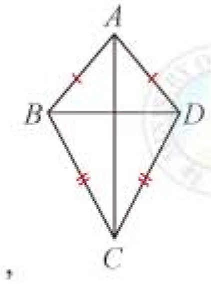
隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，求$x$、$y$、$z$的值。



例 4 Example

如右圖，在箏形$ABCD$中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，說明$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$。



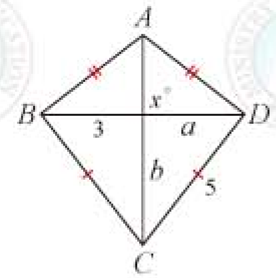
解題說明

由於$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，所以$\overline{AC}$是箏形$ABCD$的對稱軸，又因為$B$、$D$互為對稱點，因此$\overline{AC}$是其連線段$BD$的中垂線，也就是說，$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$。

箏形的對稱軸垂直平分另一條對角線。

隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，求$x$、$a$、$b$。



如果同學做過風箏，就知道最簡單的風箏骨架是形如圖4-19中間的圖形。以這個骨架為基礎，就可以做出具有線對稱性質的風箏造形。


圖4-19

風箏的骨架有一邊會垂直平分另一邊，和例4的性質一樣，這正是箏形得名的由來。又因為風箏也叫紙鳶，所以箏形有時也稱為鳶形。

為了判定一個四邊形是不是箏形，我們可以反過來提出下面的問題：

問題1：如果四邊形有一條對角線是線對稱軸，這個四邊形是箏形嗎？

問題2：如果四邊形有一對角線垂直平分另一對角線，這個四邊形是箏形嗎？

問題1很容易回答，由於這個四邊形的一條對角線是對稱軸，這表示四個頂點已經有兩點A、C落在對稱軸上，而且因為B點和D點互為對稱點，所以$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，因此這個四邊形一定是箏形，見圖4-20。

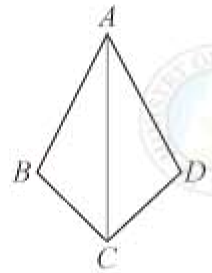
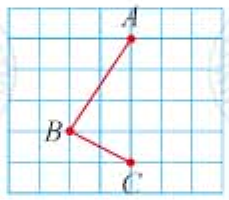


圖4-20

隨・堂・練・習

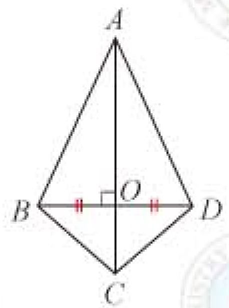
如右圖，完成此箏形$ABCD$。



底下的例題可以回答前面的問題2。

例5 Example

如右圖，在四邊形$ABCD$中，若$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，而且$\overline{OB}=\overline{OD}$，說明$ABCD$為箏形。



解題說明

因為$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$，所以$\overline{AC}$是$\overline{BD}$的對稱軸，

因此$\overline{AD}$、$\overline{CD}$分別是$\overline{AB}$、$\overline{CB}$的對稱邊，由此可知

$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$

所以四邊形$ABCD$是箏形。

隨・堂・練・習

同例5，改用畢氏定理，說明$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$。

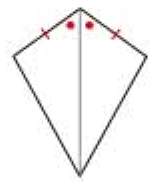
由上面討論可知

有一對角線垂直平分另一對角線的四邊形一定是箏形。

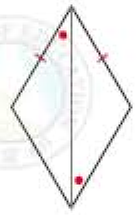
隨・堂・練・習

根據下列四邊形給定的邊角條件，哪些一定是箏形？

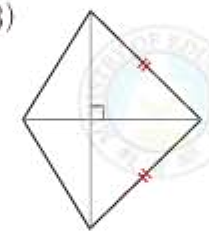
(1)



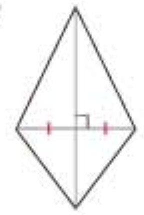
(2)



(3)

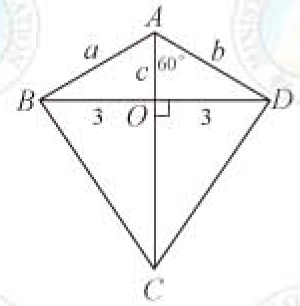


(4)



例6 Example

如右圖，在四邊形$ABCD$中，$\overline{OB}=\overline{OD}=3$，$\angle COD=90^\circ$，$\angle OAD=60^\circ$，求$a$、$b$、$c$。



解題說明

由於$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\angle OAD=60^\circ$，

因此$\triangle DAO$為$30^\circ-60^\circ-90^\circ$三角形，

由邊長的連比性質知道

$$c:3:b=1:\sqrt{3}:2$$

由$c:3=1:\sqrt{3}$，知$c=\dfrac{3\times1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\sqrt{3}=\sqrt{3}$。

由 $c：b=1：2$，知 $b=2c=2\sqrt{3}$。

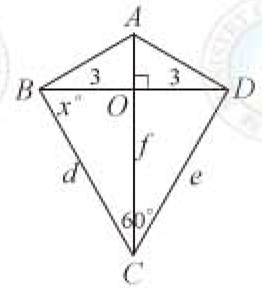
又由於 $\overline{OB}=\overline{OD}=3$，且 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，

所以 $\overline{AC}$ 為 $\overline{BD}$ 的對稱軸，或說 $\overline{AC}$ 是 $\overline{BD}$ 的中垂線。

所以 $a=b$，因此 $a=b=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{3}$。

隨．堂．練．習

續上題，若知道 $\angle BCD=60^\circ$，求 x、d、e、f。

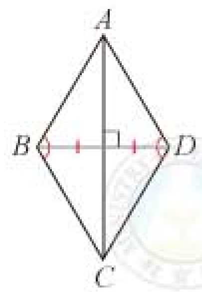


菱形

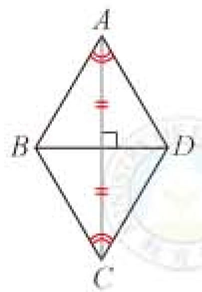
菱形是四邊等長的四邊形，當然有兩組鄰邊等長，因此菱形是箏形的一種。利用箏形的線對稱性質，菱形有下面的性質（圖4-21）：

(一) $\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，所以 $\overline{AC}$ 為四邊形 $ABCD$ 的對稱軸，由此，$\angle BAC=\angle DAC$，$\angle BCA=\angle DCA$，$\angle B=\angle D$，而且 $\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$（圖4-21(a)）。

(二) $\overline{BA}=\overline{BC}$，$\overline{DA}=\overline{DC}$，所以 $\overline{BD}$ 也是四邊形 $ABCD$ 的對稱軸，由此，$\angle ABD=\angle CBD$，$\angle ADB=\angle CDB$，$\angle A=\angle C$，而且 $\overline{BD}$ 垂直平分 $\overline{AC}$（圖4-21(b)）。



(a)



(b)

圖4-21

由(一)、(二)知，菱形的兩對角線均為對稱軸，因此有

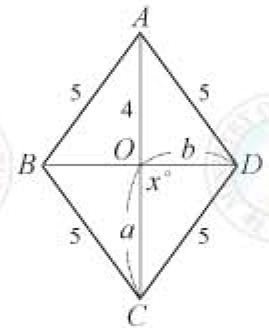
(1) 菱形的兩組對角相等。
(2) 菱形的兩對角線各平分此菱形之兩組對角。
(3) 菱形的兩對角線互相垂直平分。

其中，兩組對角相等，也可以想成是因為菱形也是平行四邊形的結果。事實上，上面的菱形性質在本冊的第100頁曾經討論過，但在這裡更強調線對稱概念的應用。

隨．堂．練．習

如右圖，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=5$，$\overline{OA}=4$，

求 x、a、b 的值。



為了判定一個四邊形是不是菱形，可以反過來提出下面的問題：

問題1：如果四邊形兩條對角線都是線對稱軸，這個四邊形是菱形嗎？

問題2：如果四邊形兩對角線互相垂直平分，這個四邊形是菱形嗎？

問題1很容易回答，從前面箏形的討論知道，如果 $\overline{AC}$ 是對稱軸，則 $\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$。但 $\overline{BD}$ 也是對稱軸，所以 $\overline{AB}=\overline{CB}$，$\overline{DA}=\overline{DC}$。因此 $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{CB}=\overline{CD}$（圖4-22），這個四邊形四邊相等，因此一定是菱形。

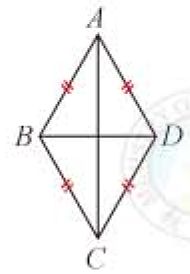


圖4-22

當我們在美術課用對摺的色紙與剪刀作剪紙藝術時，利用的就是這種線對稱的特質，見圖4-23。

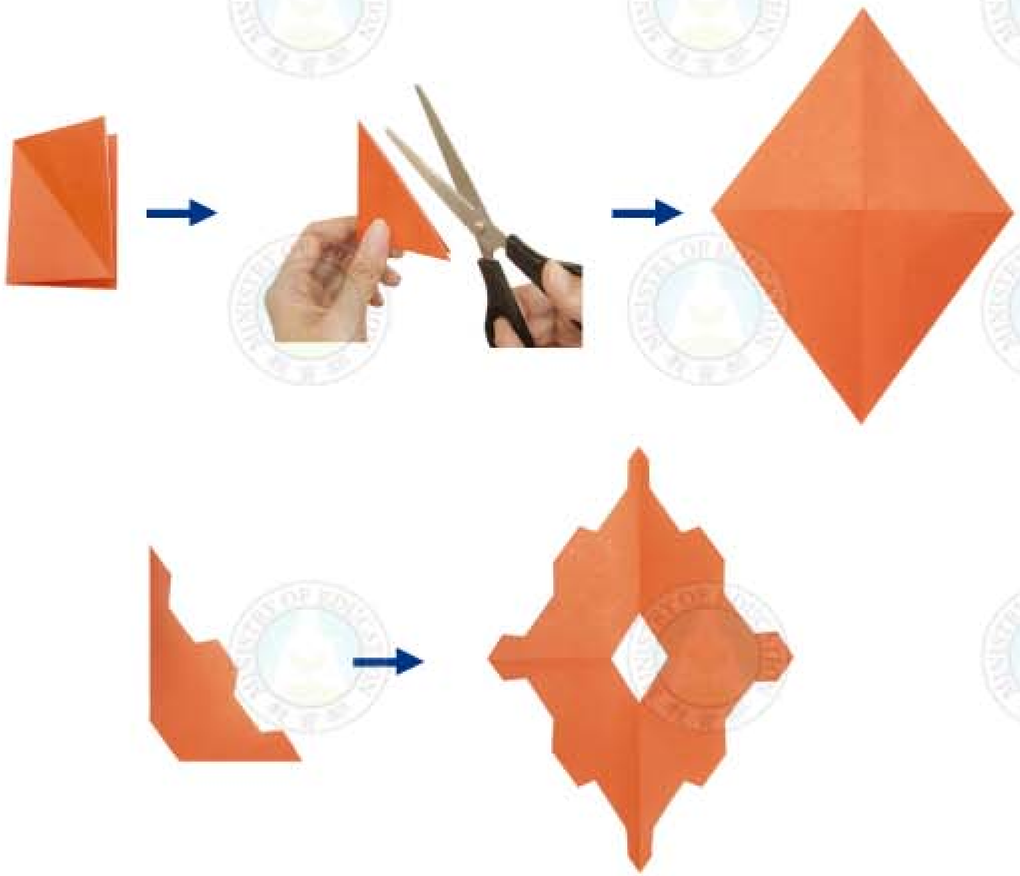
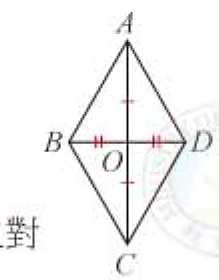


圖4-23

下面的例題可以回答上面的問題2。

例7 Example

如右圖，四邊形$ABCD$中，若$\overline{AC} \perp \overline{BD}$，而且$\overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$，說明$ABCD$為菱形。



解題說明

由於兩對角線互相垂直平分，這表示$\overline{AC}$、$\overline{BD}$互為對方之對稱軸，所以四邊形$ABCD$的四邊皆相等，因此是菱形。

動．動．腦

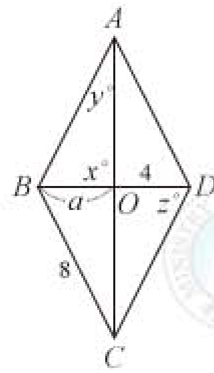
試試看，用畢氏定理或三角形全等性質，也可以說明例7。

由上面討論可知

兩對角線互相垂直平分的四邊形一定是菱形。

例8 Example

如右圖，若$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為四邊形$ABCD$的對稱軸，求a、x、y、z的值。



解題說明

由於$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為四邊形$ABCD$的對稱軸，

因此　$x=90$，$a=4$　　$\overline{AC}$為對稱軸

而且　$\overline{BD}=2a=8$　　$\overline{AC}$為對稱軸

另外　$\overline{CD}=\overline{CB}=8$　　$\overline{AC}$為對稱軸

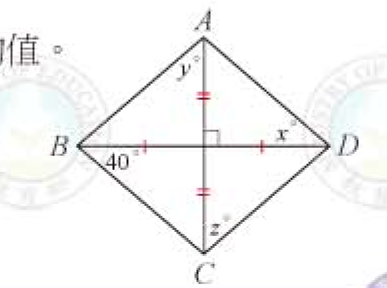
可知$\triangle BCD$和$\triangle BAD$都是正三角形，　$\overline{BD}$為對稱軸

因此　$z=60$

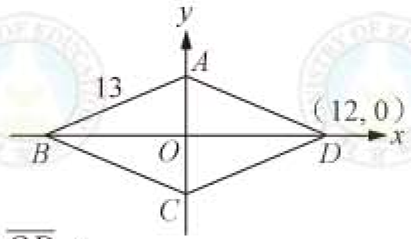
且　$y=60\times\frac{1}{2}=30$　　$\overline{AC}$為對稱軸

隨．堂．練．習

如右圖，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$互相垂直平分，求x、y、z的值。



例 9 Example



如右圖，坐標平面上有一菱形$ABCD$，且x軸和y軸為其對稱軸，求A、B、C點的坐標。

解題說明

由於B、D互為對稱於y軸之對稱點，因此$\overline{OB}=\overline{OD}$，

所以B的坐標為$(-12, 0)$。

又因為　$\overline{AD}=\overline{AB}=13$，$\overline{OD}=12$

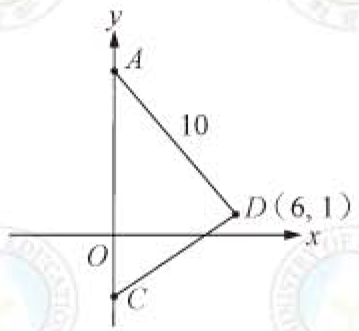
由畢氏定理得

$$\overline{OA}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{OD}^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$$

因此A的坐標為$(0, 5)$，而且A、C互為對x軸之對稱點，所以$\overline{OA}=\overline{OC}$，

因此C的坐標為$(0, -5)$。

隨．堂．練．習



如右圖，坐標平面上有A、C、D三點。

(1) 求A的坐標。

(2) 求B的坐標，使得四邊形$ABCD$為以y軸為對稱軸的箏形。

(3) $\overline{BD}$是否平行於x軸？

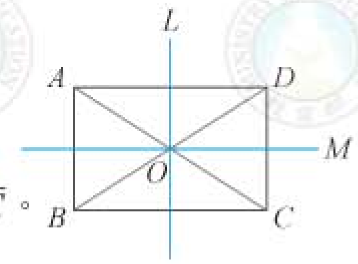
正方形與矩形

正方形和矩形是我們最熟悉的四邊形，它們也有豐富的對稱性質。由圖4-24知，一般矩形有兩條對稱軸，是穿過對邊中點的直線；而正方形則有四條對稱軸，除了對邊中點連線之外，還多了兩條對角線。

圖4-24

許多以前學過的正方形和矩形性質，都可以用線對稱來重新理解。

例 10 Example



利用線對稱的特性，說明矩形的對角線平分且等長。

解題說明

如右圖，由於矩形$ABCD$對直線L和M對稱，所以對角線$\overline{BD}$經由線對稱後，會得到另外一條對角線$\overline{AC}$。

因此　$\overline{BD}=\overline{AC}$

但因為$\overline{BD}$和$\overline{AC}$的交點必須在對稱軸上，因此就是L和M的交點O。

於是　$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$

所以矩形的兩條對角線平分且等長。

動．動．腦

為什麼對角線$\overline{BD}$和$\overline{AC}$的交點，必須在對稱軸上？

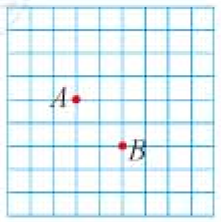
由於正方形比長方形多了兩條對角線方向的對稱軸，所以正方形除了具有長方形的性質外，還多了一些屬於正方形自己特有的性質。

隨．堂．練．習

利用線對稱的特性，試說明正方形的對角線互相垂直平分且等長。

例11 Example

如右圖，在格子紙上找出可能的另兩個頂點，使得這四點及其連線構成一正方形。

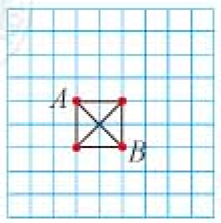


解題說明

由於四邊形兩頂點的關係可能是相鄰也可能是對角線的端點，所以要分成兩種情況討論。

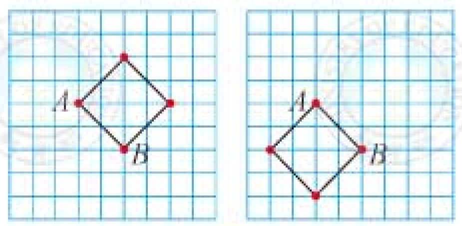
(1) $\overline{AB}$是對角線：

由正方形「兩對角線互相垂直平分且等長的性質」或直接從圖形，很容易看出另外兩個頂點的位置（如右圖）。



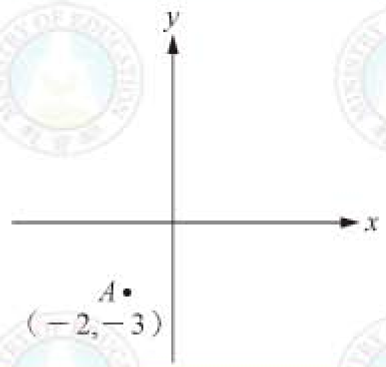
(2) $\overline{AB}$為正方形的一邊：

因為與$\overline{AB}$相鄰的邊必須垂直於$\overline{AB}$並與$\overline{AB}$等長，所以如右圖的兩種取法，都可以做出以$\overline{AB}$為一邊的正方形。



隨．堂．練．習

如右圖，在坐標平面上有一點A，坐標為$(-2,-3)$，找出三點B、C、D，使得四邊形$ABCD$是以x軸、y軸為對稱軸的矩形。



四邊形的關係

在上一節和這一節，我們透過各種四邊形的性質比較，發現四邊形之間有特別的關係。

例如在4-1節，我們利用「兩組對邊相等的四邊形一定是平行四邊形」的判定性質，知道菱形是一種平行四邊形，因此不需另外說明，就知道菱形的兩組對角會相等。

同樣的，在這一節裡，透過菱形四邊等長的定義，我們知道菱形是一種箏形，因此不需再另外說明，就得到「菱形兩對角線都是線對稱軸」、「菱形兩對角線互相垂直平分」的性質。

另外一種有趣的思考方式，是像下面這樣的例子。

例12 Example

如果一個四邊形，既是矩形，又是菱形，說明此四邊形一定是正方形。

解題說明

一個矩形的四角一定是直角，而一個菱形必定四邊相等。既然這個四邊形既是矩形又是菱形，所以是一個四邊相等、四角都是直角的四邊形，因此這個四邊形是正方形。

我們將正方形、矩形、菱形、平行四邊形的關係表示如圖4-25。

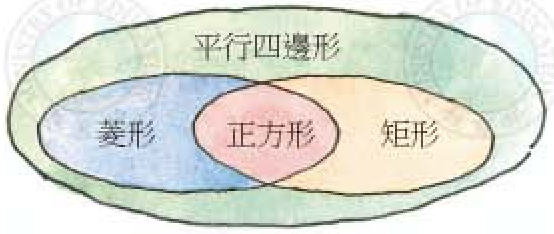


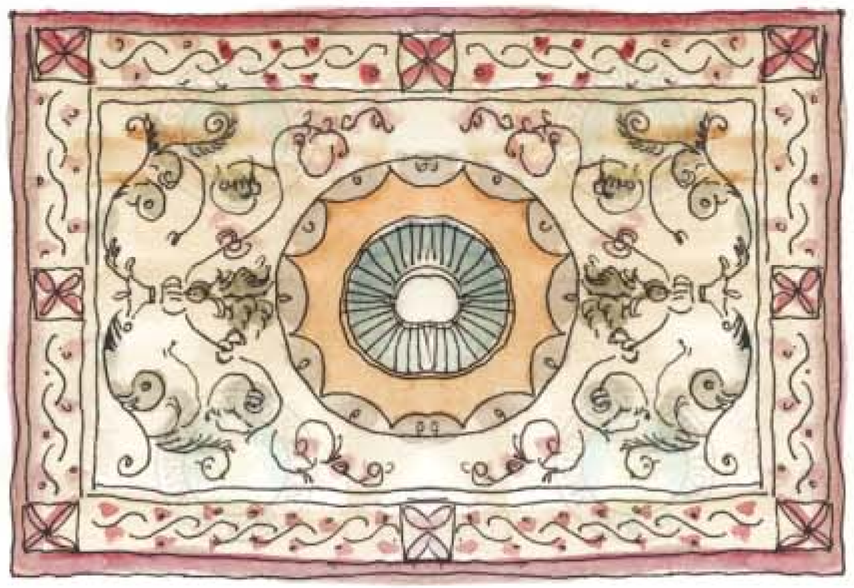
圖4-25

隨・堂・練・習

如果一個四邊形，既是箏形，又是平行四邊形，試說明它一定是菱形。

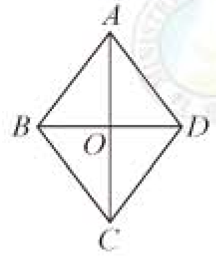
摘要

1. 線對稱圖形對稱軸兩側的圖形會全等。
2. 對稱軸會垂直平分對稱點的連線段。
3. 箏形是一個線對稱圖形，其對稱軸為一對角線。
4. (1)箏形有一組對角相等。
   (2)箏形的對稱軸平分其一組對角。
   (3)箏形的對稱軸垂直平分另一條對角線。
5. 有一對角線垂直平分另一對角線的四邊形一定是箏形。
6. 菱形是一個線對稱圖形，它有兩條對稱軸，就是菱形的對角線。
7. (1)菱形的兩組對角相等。
   (2)菱形的兩對角線各平分此菱形之兩組對角。
   (3)菱形的兩對角線互相垂直平分。
8. 兩對角線互相垂直平分的四邊形一定是菱形。

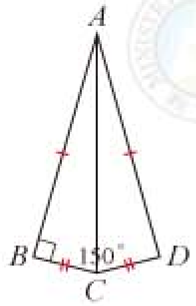


4-2 自我評量

1. 如右圖，四邊形$ABCD$為一菱形，已知$\overline{AB}=15$，$\overline{AC}=24$，求$\overline{BD}$。



2. 如右圖，已知$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，$\angle BCD=150^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，求$\angle CAD$。

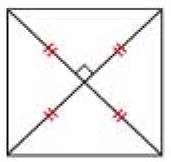


3. 在空格中填入適當的圖形號碼。（注意到正方形、長方形、菱形都是平行四邊形，以此類推。）

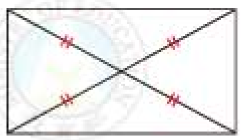
平行四邊形：＿＿＿＿＿＿　正方形：＿＿＿＿＿＿

菱形：＿＿＿＿＿＿　長方形：＿＿＿＿＿＿

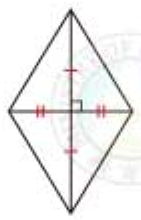
箏形：＿＿＿＿＿＿



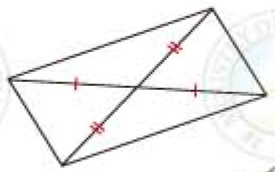
(A)



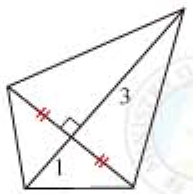
(B)



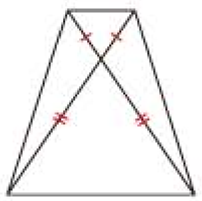
(C)



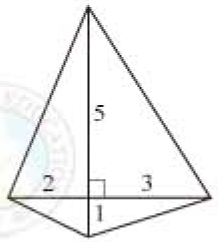
(D)



(E)



(F)



(G)

4-3 周長與面積

在日常生活中，經常會遇到周長、面積的問題，例如跑道一圈的長度、土地的面積、住宅的面積、各種物體的表面積等；因此從小學開始，就要學習各種平面圖形的周長或面積。本節將先複習常用的周長和面積公式，並做其他的延伸討論。

基本圖形的周長與面積公式

正方形：邊長為a的正方形，如圖4-26。

周長＝邊長×4＝$4a$

面積＝邊長×邊長＝a^2

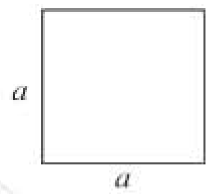


圖4-26

矩形：邊長為a、b的矩形，如圖4-27。

周長＝2×(長＋寬)＝$2(a+b)$

面積＝長×寬＝ab

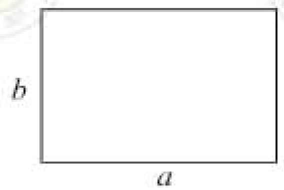


圖4-27

平行四邊形：底為a，高為h的平行四邊形，如圖4-28。

面積＝底×高＝ah

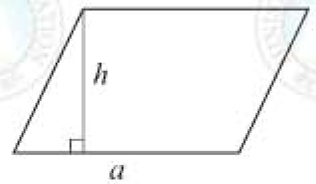


圖4-28

三角形：底為a，高為h的三角形，如圖4-29。

面積$=\dfrac{底\times高}{2}=\dfrac{ah}{2}$

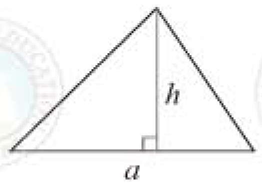
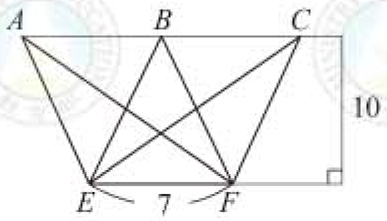


圖4-29

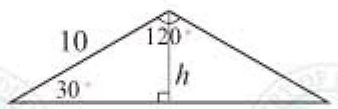
隨・堂・練・習

如右圖，$\triangle AEF$、$\triangle BEF$、$\triangle CEF$的底$\overline{EF}=7$，$\overline{EF}$上的高都是10，求$\triangle AEF$、$\triangle BEF$、$\triangle CEF$的面積。哪一個三角形的面積最大？



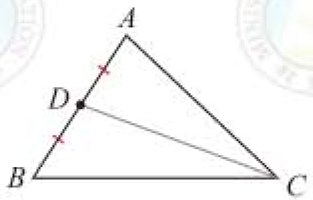
隨・堂・練・習

如右圖，求三角形的面積。（提示：先求長邊上的高h）



例 1 Example

如右圖，D為$\overline{AB}$的中點，若$\triangle ABC$的面積為6，求$\triangle ADC$的面積。



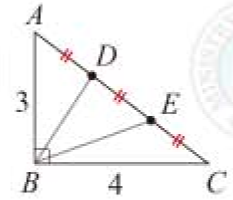
解題說明

因為D是$\overline{AB}$的中點，所以$\overline{AB}=2\,\overline{AD}$。但因為$\triangle ABC$在$\overline{AB}$上的高等於$\triangle ADC$在$\overline{AD}$的高，由三角形面積公式知，$\triangle ABC$的面積是$\triangle ADC$的兩倍。因此

$$\triangle ADC\text{的面積}=6\times\frac{1}{2}=3$$

隨・堂・練・習

如右圖，D、E把$\overline{AC}$三等分，求$\triangle BDC$的面積。



梯形：上底、下底分別為a、b，高為h的梯形，如圖4-30。

$$\text{面積}=\frac{(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}}{2}=\frac{(a+b)h}{2}$$

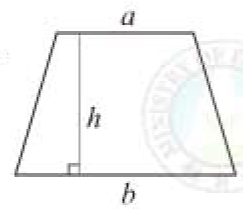
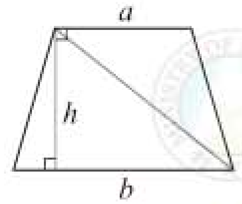


圖4-30

隨・堂・練・習

利用右圖的分割，試說明梯形面積$=\dfrac{(a+b)h}{2}$。



菱形：兩對角線長各為a、b的菱形，如圖4-31。

$$\text{面積}=\text{對角線相乘}\div 2=\frac{ab}{2}$$

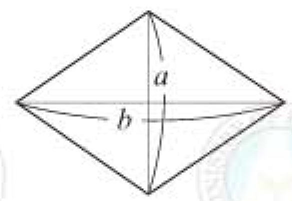
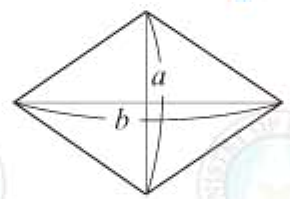


圖4-31

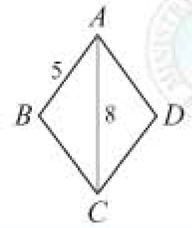
動・動・腦

如右圖，菱形的對角線長各為a、b，試說明菱形的周長為$2\sqrt{a^2+b^2}$，面積為$\dfrac{ab}{2}$。



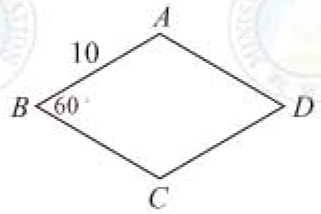
隨．堂．練．習

如右圖，$ABCD$ 為一菱形，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=8$，求對角線 $\overline{BD}$ 的長及 $ABCD$ 的面積。



例 2 Example

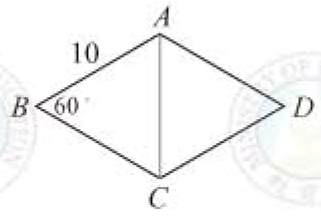
如右圖，$ABCD$ 為邊長10的菱形，若已知 $\angle B=60^\circ$，求 $ABCD$ 的面積。



解題說明

如右圖，連接對角線 $\overline{AC}$，由菱形邊長相等的性質，可知 $\triangle ABC$ 為頂角 60° 的等腰三角形，因此是一個邊長為10的正三角形。所以

$$\triangle ABC\text{面積}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2=25\sqrt{3}$$



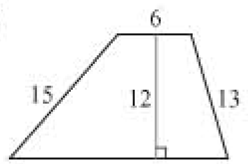
又 $\overline{AC}$ 為此菱形的對稱軸，因此 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$。則

$$\text{菱形}ABCD\text{面積}=25\sqrt{3}\times 2=50\sqrt{3}$$

隨．堂．練．習

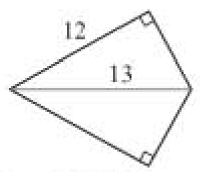
求下列各四邊形的面積：

(1)



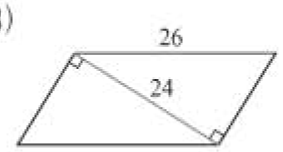
（梯形）

(2)



（箏形）

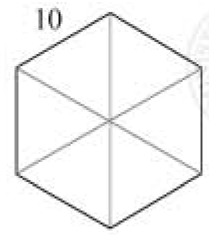
(3)



（平行四邊形）

例 3 Example

如右圖，有一邊長為10的正六邊形，求其面積。



解題說明

由右圖知道，此正六邊形可分割成6個邊長為10的正三角形，因為

$$\text{正三角形面積}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\text{邊長})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2=25\sqrt{3}$$

所以正六邊形面積 $=25\sqrt{3}\times 6=150\sqrt{3}$。

隨．堂．練．習

若一正六邊形邊長為6，求其面積。

弧長與扇形面積

以 O 為圓心的圓稱為**圓** O，例如圖4-32的圓 O 是一個半徑為 r 的圓，其中 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$。

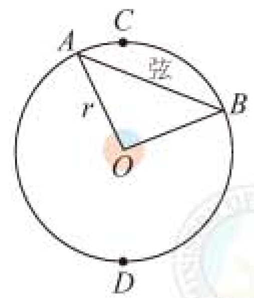


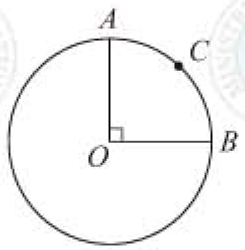
圖4-32

圓上相異兩點 A、B 決定的連線段 $\overline{AB}$ 稱為**弦**，弦 $\overline{AB}$ 把圓分成兩部分，都稱為**弧**，即弧 ACB（記成 $\overparen{ACB}$）與弧 ADB（記成 $\overparen{ADB}$）。線段 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 和頂點 O 所決定的兩個角，都稱為**圓心角**。圖4-32中藍色部分的圓心角所對的弧為 $\overparen{ACB}$，紅色部分圓心角所對的弧為 $\overparen{ADB}$。

顯然，圓心角的大小與所對弧的大小有關。如果圓心角是整個周角 360°，所對的弧就是整個圓。而若圓心角是平角 180°，所對的弧就是半圓，圖4-32中藍色圓心角小於 180°，所對的 $\overparen{ACB}$ 小於半圓長，而紅色圓心角大於 180°，因此 $\overparen{ADB}$ 大於半圓長。通常小於半圓長的弧稱為**劣弧**，大於半圓長的弧稱為**優弧**。

隨・堂・練・習

如右圖，若圓心角是90°，則所對的$\overset{\frown}{ACB}$是圓的幾分之幾？



我們知道半徑r的圓周長為$2\pi r$，其中π為圓周率。那麼一般弧的弧長要如何計算呢？如圖4-33(a)，以60°的圓心角所對的弧長為例，首先想想一個周角可以分成幾個60°的圓心角。

(a) (b)

圖4-33

由於$360 \div 60 = 6$，得到一個周角可以分成6個60°的圓心角，如圖4-33(b)所示。因此60°所對的弧長等於圓周長的$\frac{1}{6}$，得

$$60°\text{圓心角所對的弧長} = 2\pi r \times \frac{60}{360} = 2\pi r \times \frac{1}{6} = \frac{\pi r}{3}$$

一般來說，我們有下述的比例關係：

弧長：圓周長＝弧所對的圓心角度數：360

因此

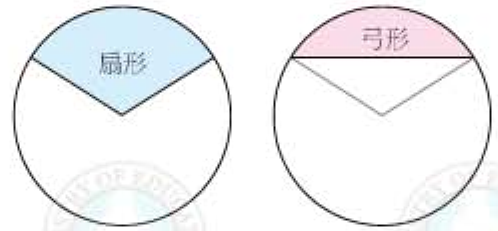
$$\textbf{弧長} = \textbf{圓周長} \times \frac{\textbf{弧所對圓心角度數}}{\textbf{360}}$$

隨・堂・練・習

1. 如果一圓的半徑為r，求90°圓心角所對的弧長。

2. 如果一圓中120°圓心角所對的弧長為8，求此圓的周長。

接下來，我們要討論扇形及弓形。圓中兩半徑和其所夾的弧所圍成的區域稱為**扇形**，如圖4-34(a)。圓上一弦和其所對的弧所圍成的區域稱做**弓形**，如圖4-34(b)。

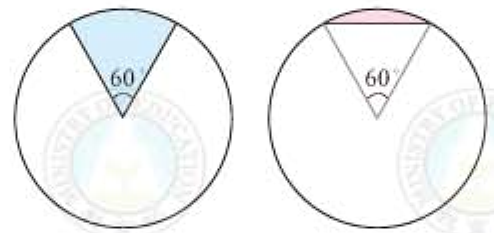


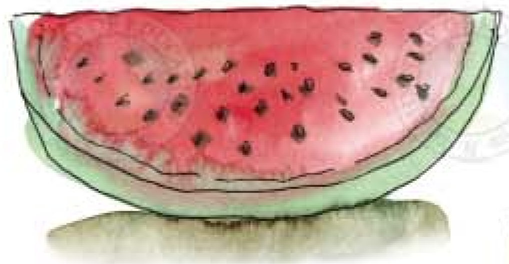
(a) (b)

圖4-34

隨・堂・練・習

右圖為圓心角是60°的扇形與弓形，已知半徑為100，求此扇形與弓形的周長。





半徑r 的圓面積為 πr^2，利用前面求弧長的比例想法，一樣可以求出扇形的面積。例如60°圓心角所圍成的扇形面積就會是圓面積的$\frac{1}{6}$。由於

扇形面積：圓面積＝扇形圓心角度數：360

因此扇形的面積為

$$\textbf{扇形面積}=\textbf{圓面積}\times\frac{\textbf{扇形圓心角度數}}{\textbf{360}}$$

利用前面兩個比例式，可以得到一個有趣的結果，如圖4-35。由於

扇形面積：圓面積＝扇形圓心角度數：360

扇形弧長：圓周長＝扇形圓心角度數：360

所以　扇形面積：圓面積＝扇形弧長：圓周長

即　$扇形面積=\frac{扇形弧長}{圓周長}\times 圓面積$

$$=\frac{弧長}{2\cancel{\pi r}}\times\cancel{\pi}r^{\cancel{2}}=\frac{弧長\times r}{2}$$

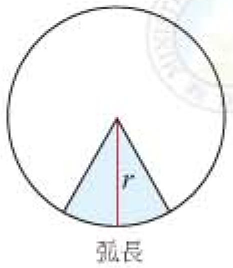


圖4-35

也就是說

$$\textbf{扇形面積}=\frac{\textbf{弧長}\times\textbf{半徑}}{\textbf{2}}$$

如果將扇形想成一個「三角形」(圖4-35)，弧長是底，半徑是高，這兩種圖形的面積公式是不是很類似！

例 4 Example

1. 有一扇形半徑為20公分，其所對弧長為10公分，求此扇形面積。
2. 已知一圓的半徑為10公分，求圓心角為60°的扇形面積。

解題說明

1. 扇形面積$=\frac{半徑\times弧長}{2}=\frac{20\times10}{2}=100$ (平方公分)

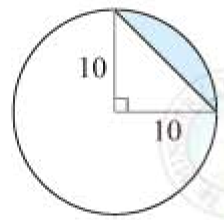
2. 60°圓心角的扇形面積＝圓面積$\times\frac{60}{360}$

$$=\pi\times(10)^2\times\frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}_{6}}$$

$$=\pi\times\frac{\cancel{100}^{50}}{\cancel{6}_{3}}=\frac{50}{3}\pi\ (平方公分)$$

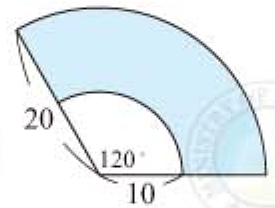
隨·堂·練·習

1. 已知一圓的面積為120平方公分，求圓心角為120°的扇形面積。
2. 有一扇形半徑為30公分，其弧長為20公分，求此扇形面積。
3. 如右圖，有一半徑是10的圓，求其90°圓心角所對的弓形面積。



例 5 Example

如右圖，有兩120°圓心角的扇形，其半徑分別為10公分和20公分，求藍色區域的周長與面積。



解題說明

藍色區域周長＝(大扇形弧長)＋(小扇形弧長)＋2×(兩半徑之差)

$$=2\pi\times20\times\frac{120}{360}+2\pi\times10\times\frac{120}{360}+2\times(20-10)$$

$$=2\pi\times10+20=20\pi+20\ (公分)$$

藍色區域面積＝(大扇形面積)－(小扇形面積)

$$=\pi\times20^2\times\frac{120}{360}-\pi\times10^2\times\frac{120}{360}$$

$$=\pi\times\cancel{300}^{100}\times\frac{\cancel{120}^{1}}{\cancel{360}_{\cancel{3}_{1}}}=100\pi\ (平方公分)$$

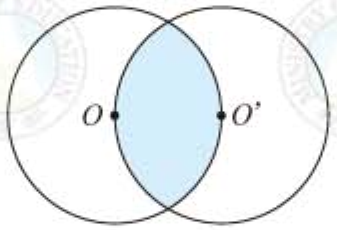
隨・堂・練・習

哥哥射飛鏢，標靶如右圖所示，各圓的半徑分別為10、20、30、40（公分）。

(1) 求黃色環形區域C的面積。

(2) 求A、B兩區域的面積比。

例6 Example

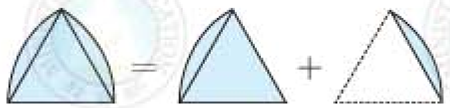


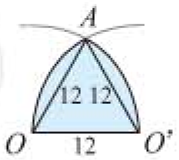
如右圖，有兩半徑同為12的圓O與圓O'，求兩圓相交的藍色區域面積。

解題說明

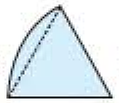
由右圖知 $\overline{OO'}$ 是圓O與圓O'的半徑，因此 $\overline{OO'}=12$。

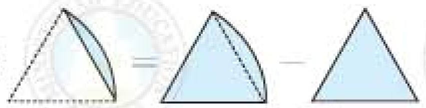
觀察右圖，知藍色區域上半部的面積滿足下列等式：





但$\triangle OO'A$為正三角形，因此$\angle OO'A=60°$，

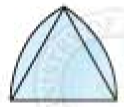
所以　扇形面積  $=\pi\times12\times\cancel{12}^{2}\times\frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}_{\cancel{6}\,1}}=24\pi$

而　　弓形面積 

$=24\pi-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}_{1}}\times\cancel{12}^{3}\times12$　邊長a的正三角形面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$=24\pi-36\sqrt{3}$

因此

 $=24\pi+(24\pi-36\sqrt{3})$

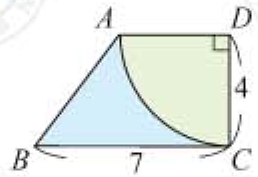
$=48\pi-36\sqrt{3}$

所以整個藍色區域面積為

$(48\pi-36\sqrt{3})\times2=96\pi-72\sqrt{3}$

隨・堂・練・習

如右圖，四邊形$ABCD$為梯形，綠色區域為扇形，求藍色區域的面積。

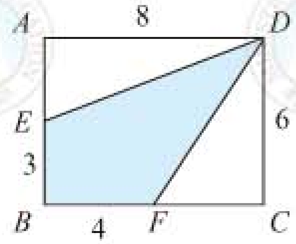


摘要

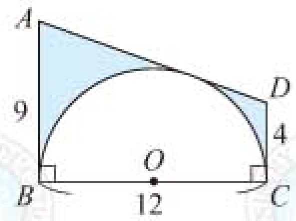
1. 菱形面積$=\frac{1}{2}$（對角線相乘）。
2. 弧長$=$圓周長$\times\frac{\text{弧所對圓心角度數}}{360}$。
3. 扇形面積$=\frac{\text{弧長}\times\text{半徑}}{2}=$圓面積$\times(\frac{\text{扇形圓心角度數}}{360})$

4-3 自我評量

1. 如右圖，有一矩形$ABCD$，$\overline{AD}=8$，$\overline{CD}=6$，$\overline{EB}=3$，$\overline{BF}=4$，求藍色區域之面積。

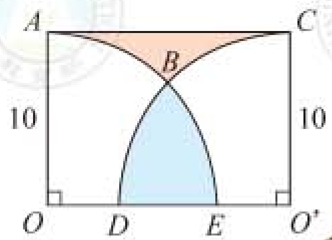


2. 如右圖，$ABCD$為一梯形，$\overline{BC}$為半圓的直徑，且$\overline{AD}$只交半圓於一點，$\overline{AB}=9$，$\overline{CD}=4$，$\overline{BC}=12$，求藍色區域之面積。



3. 有一邊長為10的菱形，若其中一對角線長為$10\sqrt{2}$，求此菱形面積。

4. 如右圖，四邊形$AOO'C$為一矩形，$\overset{\frown}{ABE}$、$\overset{\frown}{CBD}$分別為以O與O'為圓心，半徑為10的弧。已知紅色區域面積等於藍色區域面積，求$\overline{OO'}$。



4-4 表面積與體積

前面我們學了許多平面圖形的性質，但我們生活的世界是一個立體的世界，生活中充滿了各式各樣立體形狀的物品，如圖4-36。

圖4-36

小學已經學過一些基本立體圖形，在這一節，我們要探討如何計算立體圖形的表面積和體積。

首先，我們要討論線與面、面與面的垂直關係。這個垂直關係可以借用正方體來理解。圖4-37是一個正方體，其表面是六個相同的正方形。正方體相鄰的兩面互相垂直，例如在圖4-37中，正方形$ABCD$所形成的面與$ABFE$所成的面互相垂直。

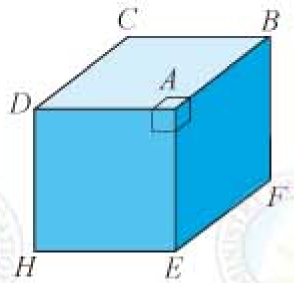
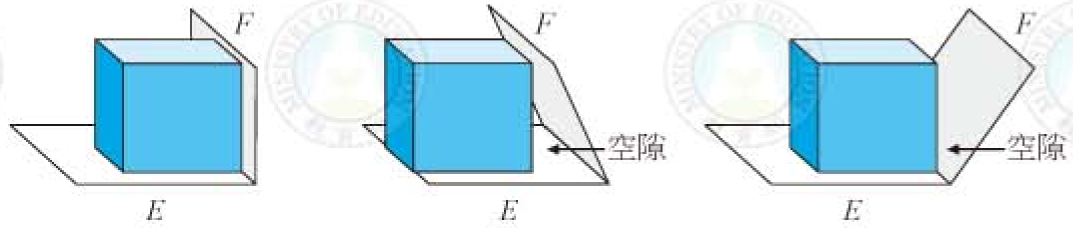


圖4-37

利用正方體相鄰兩面互相垂直的性質，可以判斷兩相交平面是不是互相垂直。

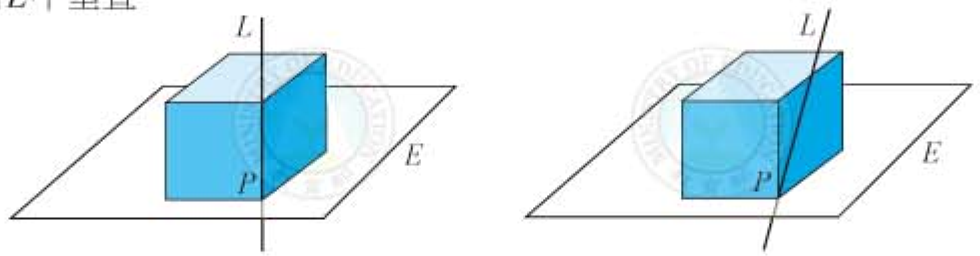
就像點、線的情況，我們也常用英文字母來代表平面，例如圖4-38中的平面E和平面F。要知道平面E、平面F是不是垂直，可以將一正方體放在平面E、平面F之間，若正方體的相鄰兩面和E、F兩平面完全密合，如圖4-38(a)，我們就說平面E和F互相垂直，或平面E垂直於平面F。若正方體和兩平面無法密合，產生如圖4-38(b)或圖4-38(c)的空隙，則這兩平面就不互相垂直。



(a) E和F互相垂直　(b) E和F不垂直　(c) E和F不垂直

圖4-38

同樣的，如果要判斷直線L與平面E是否會垂直，也可將一正方體放在平面E上，如果直線L能夠以圖4-39(a)的方式與正方體的一邊重疊，我們就說直線L與平面E垂直，此時L與平面E的交點P，稱為直線L在平面E上的垂足。而圖4-39(b)中，正方體的一邊和圖中的直線L無法重疊，因此L和平面E不垂直。



(a) L垂直於平面E　(b) L不垂直於平面E

圖4-39

若直線L與平面E垂直於P點，且M為平面E上過P點的任一直線，如圖4-40。我們要討論L和M的垂直關係。

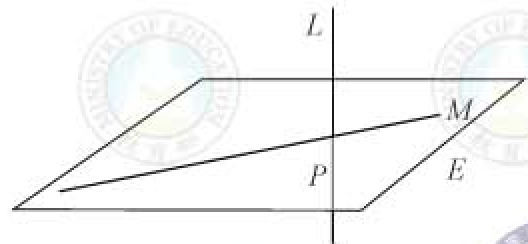


圖4-40

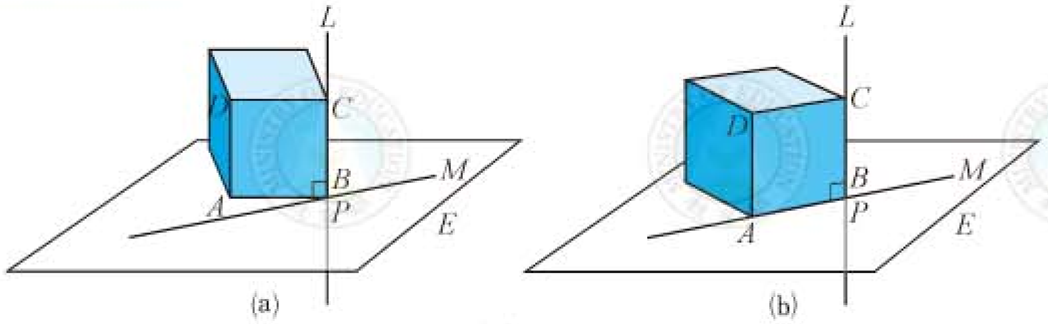
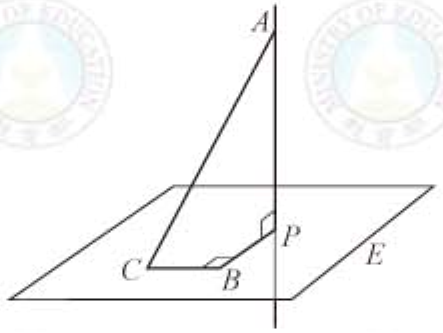


圖4-41

將一正方體放在平面E上，如圖4-41(a)，使得其中一頂點B和P重合，且$\overleftrightarrow{BC}$和L重合。接著以L為旋轉軸，把正方體旋轉一個角度，使得$\overleftrightarrow{AB}$和M線重合，如圖4-41(b)。由於L、M分別和正方體的兩鄰邊重合，所以L和M互相垂直。綜合上述，我們知道若直線L垂直於平面E，P為垂足，則平面E上過P的任一直線都會垂直於L。

例1 Example

如右圖，B、C、P是平面E上的三點，且$\overleftrightarrow{AP}$垂直於平面E。已知$\overline{AP}=12$，$\overline{BC}=3$，$\overline{BP}=4$，且$\overline{BC}\perp\overline{BP}$，求$\overline{AC}$。



解題說明

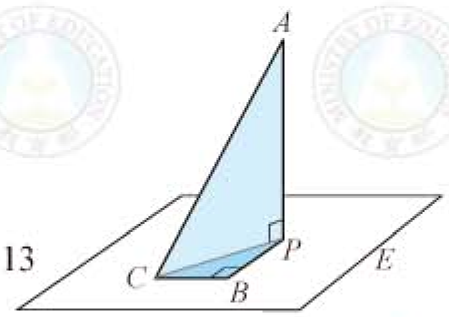
連接$\overline{CP}$，由上述性質知道，$\overline{CP}$垂直於$\overline{AP}$

所以可得兩直角三角形ACP與BCP

因此 $\overline{CP}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{BP}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

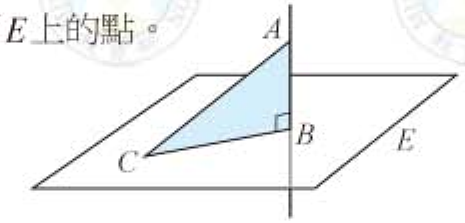
因為$\overline{AC}$為直角三角形ACP的斜邊，

所以 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{CP}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$

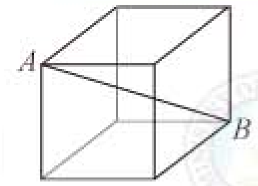


隨．堂．練．習

1. 如右圖，$\overleftrightarrow{AB}$垂直平面E於B，C是平面E上的點。已知$\overline{AC}=25$，$\overline{BC}=20$，求$\overline{AB}$。



2. 如右圖，有一邊長為10的正方體，求$\overline{AB}$。



直柱體

圖4-42的立體圖形稱為**直角柱**，其特徵是側面都與底面垂直，且上底與下底是兩個全等的多邊形，例如長方體就是底面為長方形的四角柱。若直角柱的上下兩底均為正多邊形，則稱為**正角柱**。例如正三角柱就是底為正三角形的直角柱，如圖4-42(a)。

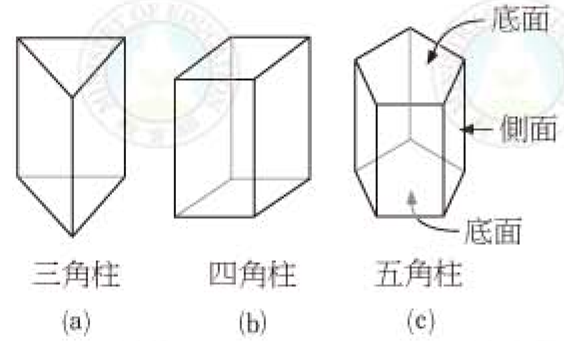


圖4-42

另一種常見的柱體是**直圓柱**，如圖4-43，直圓柱的上下兩底是半徑相同的圓，兩圓心的連線段（即此直圓柱的高）與上下兩底垂直。一般來說，直角柱和直圓柱統稱為**直柱體**。

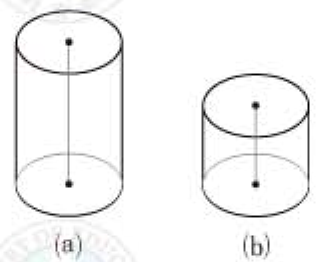


圖4-43

長方體是大家熟悉的四角柱，其體積是：長×寬×高，但因為長寬的乘積等於底面積，所以其體積也可以寫成：底面積×高。這個體積公式也適用於一般的直柱體，如圖4-44：

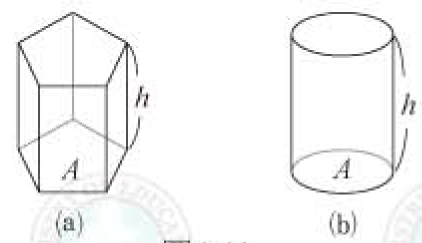
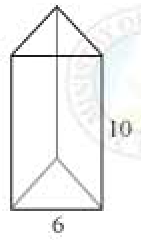


圖4-44

直柱體的體積＝底面積×高＝Ah

例 2 Example

右圖是高為10的正三角柱，若其底面的邊長為6，求其體積。



解題說明

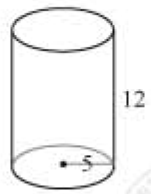
因為此直角柱的底面是邊長為6的正三角形，所以

$$底面積=\frac{\sqrt{3}}{4}(邊長)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}_{1}}\times \cancel{36}^{9}=9\sqrt{3}$$

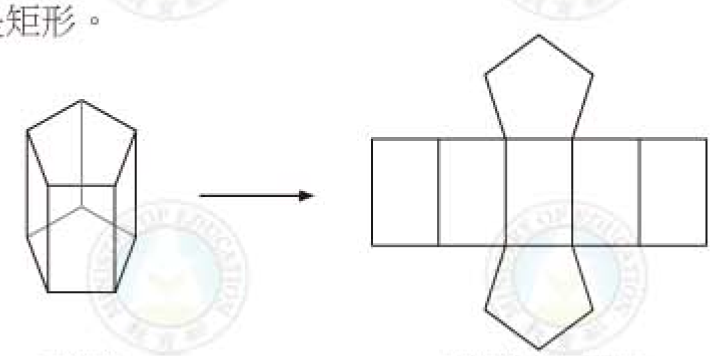
因此，體積＝底面積×高＝$9\sqrt{3}\times 10=90\sqrt{3}$。

隨．堂．練．習

如右圖，直圓柱底圓的半徑為5，高是12，求此直圓柱的體積。

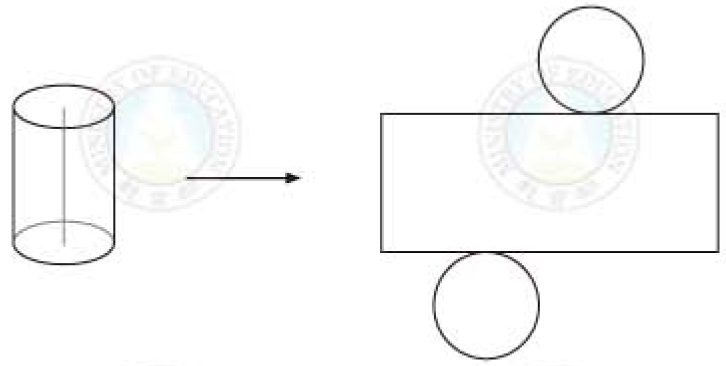


許多立體圖形就像禮物包裝盒一樣，表面可以拆成平面圖形的組合。如果將直柱體沿著某些邊剪開，張開後攤平就成了直柱體的展開圖，如圖4-45與圖4-46。由這兩個圖知道，無論是直角柱或直圓柱，它們側面的展開圖都是矩形。



五角柱　　五角柱的展開圖

圖4-45



直圓柱　　直圓柱的展開圖

圖4-46

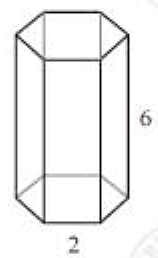
由展開圖可以看出直柱體表面積的求法：

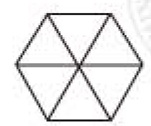
直角柱表面積＝所有側面矩形的面積和＋兩底面積和

直圓柱表面積＝底面圓周長×高＋兩底圓面積和

例 3 Example

如右圖，有一正六角柱的底面是邊長為2的正六邊形，高是6，求此正六角柱的(1)底面積 (2)體積 (3)表面積。





解題說明

(1) 由右圖可知，一個正六邊形是由六個正三角形所組成，且每一三角形之邊長皆等於該六邊形的邊長。因此，利用正三角形面積公式可得原正六角柱的底面積為

$$6\times\frac{1}{4}\times\sqrt{3}\times 2^2=6\sqrt{3}$$

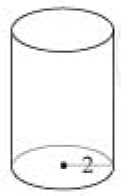
(2) 體積＝底面積×高＝$6\sqrt{3}\times 6=36\sqrt{3}$

(3) 表面積＝六個側面矩形的面積和＋兩底面積和

$$=6\times 2\times 6+6\sqrt{3}\times 2=72+12\sqrt{3}$$

隨・堂・練・習

如右圖，有一形如直圓柱、底面半徑2公分的容器。



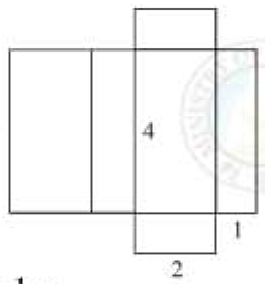
(1) 求容器的底面積。

(2) 將50立方公分的水倒入該容器，若水未溢出，求水的高度。

由於從立體圖形的展開圖可以還原此立體圖形，因此直接測量展開圖，也可以求得此立體圖形的表面積與體積。

例 4 Example

如右圖，有一直柱體的展開圖，求此直柱體的表面積與體積。



解題說明

將此展開圖還原的直柱體為長方體，且其三邊為4、2、1，

長方體的體積 $=4\times2\times1=8$

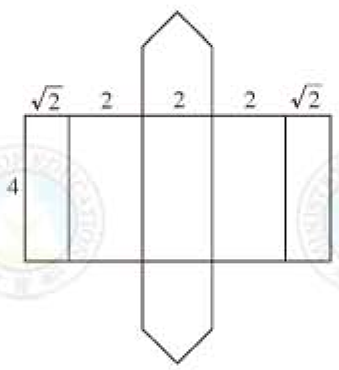
長方體的表面積 $=2\times(2\times1+1\times4+2\times4)=28$

隨・堂・練・習

如右圖，有一直柱體的展開圖。

(1) 求此直柱體的上、下底面積。

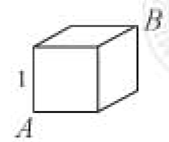
(2) 求此直柱體的體積。



展開圖可以用來幫助思考一些問題，下面的例5即為常見的例子。

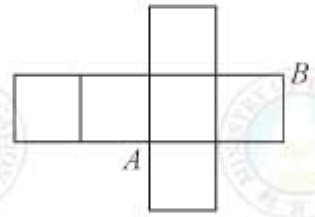
例 5 Example

如右圖，有一邊長為1的正方體，如果只在正方體表面移動，求從A走到B的最短距離。



解題說明

先作出正方體的展開圖，如右圖。

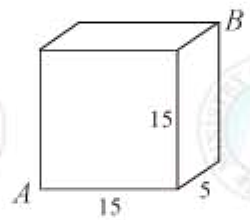


由圖可知，從A到B的最短距離就是$\overline{AB}$，

因此 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

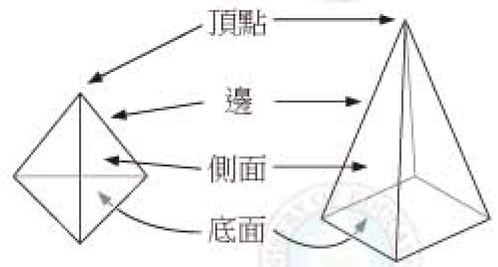
隨・堂・練・習

如右圖，有一邊長15、5、15的長方體，如果只在長方體表面移動，求A走到B的最短距離。



直錐體

圖4-47的立體圖形稱為**正角錐**，其特徵為底面是一個正多邊形且每個側面都是全等的等腰三角形，圖4-48中的金字塔即為一正四角錐。



正三角錐 (a)　　正四角錐 (b)

圖4-47

圖4-48

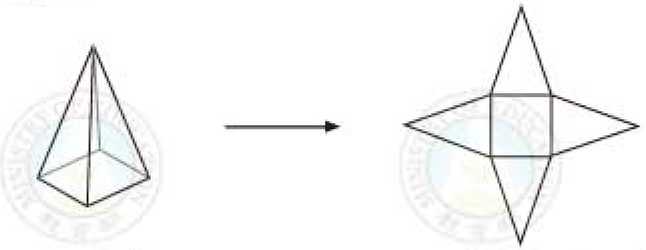


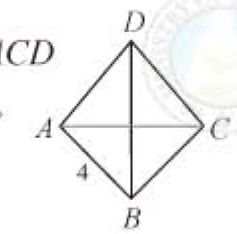
圖4-49

和直柱體一樣，我們也可以考慮正角錐的展開圖。以正四角錐為例，圖4-49就是常見的展開方式。因此，正角錐的表面積為

正角錐的表面積＝所有側面等腰三角形的面積和＋底面積。

例6 Example

右圖為一正三角錐，其中△ABC、△BCD、△ABD、△ACD 皆為正三角形，若 $\overline{AB}=4$ 公分，求此正三角錐之表面積。



解題說明

由於此正三角錐的四面皆為邊長4公分的正三角形，

而邊長為4的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$，

因此此正三角錐之表面積為

$4\sqrt{3}\times 4=16\sqrt{3}$（平方公分）

像例5這種四面都是正三角形的正三角錐，一般稱為**正四面體**。

隨・堂・練・習

如右圖，有一正四角錐之底面邊長為6公分，側面等腰三角形的腰為5公分，求此正四角錐側面的表面積。

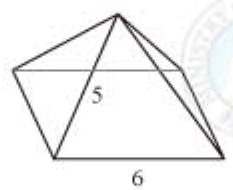


圖4-50的立體圖形稱為**直圓錐**，其底面為圓，而且頂點與底圓圓心的連線段（即此直圓錐之高）垂直於底面。直圓錐側面的展開方法就像拆開冰淇淋甜筒的包裝，會得到一個扇形，且其**弧長等於底圓的周長**。圖4-51即為直圓錐的展開圖。

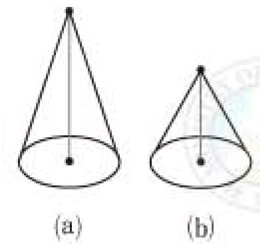


圖4-50

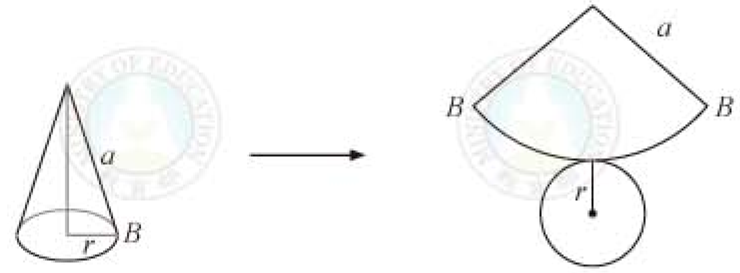


圖4-51

由圖4-51的展開圖，可知直圓錐側面展開的扇形與底圓有下面的關係：

扇形弧長＝底圓周長＝$2\pi r$

因此，由4-3節扇形的面積公式可知，直圓錐側面的表面積為

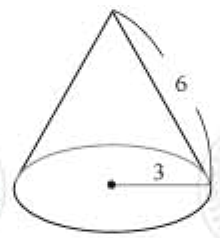
$$\frac{\text{扇形弧長}\times\text{扇形半徑}}{2}=\frac{\cancel{2}^{1}\pi r\times a}{\cancel{2}_{1}}=\pi ar$$

綜合上述得知

直圓錐表面積＝π×扇形半徑×底圓半徑＋底圓面積

例7 Example

右圖為一直圓錐，求其表面積。



解題說明

直圓錐表面積＝π×扇形半徑×底圓半徑＋底圓面積

$=\pi\times 6\times 3+\pi\times 3\times 3$

$=18\pi+9\pi=27\pi$

隨・堂・練・習

如右圖，有一像冰淇淋甜筒之直圓錐形容器（不含底面），其開口處半徑為2，求此容器之表面積。

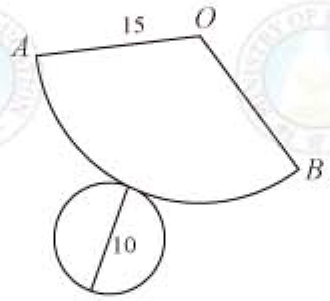
另外，由扇形弧長的公式，還可計算直圓錐展開後扇形的圓心角：

$$扇形的圓心角角度=360^\circ\times\frac{扇形的弧長}{半徑a的圓周長}$$

$$=360^\circ\times\frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}\pi a}=360^\circ\times\frac{r}{a}$$

例 8 Example

如右圖，有一直圓錐的展開圖，$\overline{OA}=15$，小圓直徑為10，求弧AB的長及$\angle AOB$。



解題說明

因為　弧AB的長＝底面圓的周長＝10π

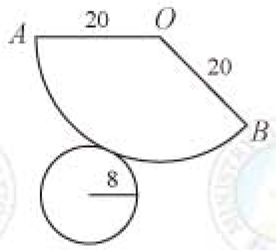
而　　$a=15$，$r=\frac{10}{2}=5$

所以　$\angle AOB=\overset{120^\circ}{\cancel{360}}{}^\circ\times\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}}=120^\circ$

隨・堂・練・習

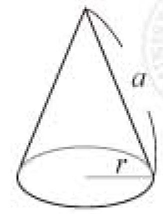
如右圖，有一直圓錐的展開圖，$\overline{OA}=20$，底圓的半徑是8，求

(1) 弧AB的長。　(2) $\angle AOB$。　(3) 扇形面積。



動・動・腦

如右圖，有一直圓錐，說明a和r的大小關係。



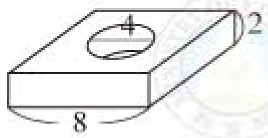
摘要

1. 若直線L垂直於平面E，則平面E上任一過垂足的直線都與L垂直。
2. 直柱體體積＝底面積×高。
   直角柱表面積＝所有側面矩形的面積和＋兩底面積和。
   直圓柱表面積＝底面圓周長×高＋兩底圓面積和。
3. 正角錐表面積＝所有側面等腰三角形的面積和＋底面積。
4. 直圓錐表面積＝π×扇形半徑×底圓半徑＋底圓面積。

4-4 自我評量

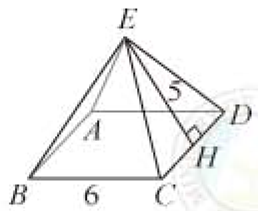
1. 右圖為一長方體，求$\overline{AB}$長。

2. 如右圖，在一底面為正方形的正四角柱中間挖掉一個直徑為4的直圓柱，問剩下的體積是多少？

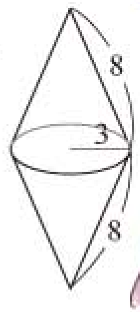


3. 如右圖，有一個水泥階梯，任意相鄰兩面都互相垂直，階梯每階高0.5公尺，深0.6公尺，寬3公尺，求此水泥階梯的體積。

4. 右圖為一正四角錐，$\overline{EH} \perp \overline{CD}$，$\overline{BC}=6$，$\overline{EH}=5$，求此正四角錐的表面積。



5. 右圖為兩直圓錐疊合而成的立體圖形，求其表面積。



國民中學　數學課本　第四冊（二下）

主 編 者：國家教育研究院
編 審 者：數學領域部編本教科書編輯委員會
主任委員：鄭國順
委　　員：于　靖　吳清山　李慶祥　林世華
林明碧　林清平　林淑君　林惠雯
林震燦　林鴻哲　洪志成　洪若烈
胡志偉　翁秉仁　許世璧　陳　宏
陳昭地　陳俊瑜　陳清溪　程守慶
張麟偉　葉芳栢　鄭人豪　賴文宗
盧銘法（依姓氏筆畫順序排列）
編輯小組：林長壽　林明碧　林政魏　林淑君
林震燦　林鴻哲　翁秉仁　陳裕益
賴文宗（依姓氏筆畫順序排列）
審查小組：林清平　林惠雯　胡志偉　陳建隆
程守慶　蔡東和
（依姓氏筆畫順序排列）
本冊修訂：林長壽　林淑君　翁秉仁
（依姓氏筆畫順序排列）
總 訂 正：鄭國順
封面設計：李美玲設計工作室
內頁插圖：李美玲設計工作室
美術編輯：翰林出版事業股份有限公司
出 版 者：國家教育研究院
部編教科書網站：http://mathtext.project.edu.tw
國家教育研究院網站：http://www.naer.edu.tw

※本書經國立編譯館民國96年10月30日
國教國字第0960004770號函准予修訂

民國九十六年一月初版
民國九十七年一月二版
民國九十八年一月二版二刷
民國九十九年一月二版三刷
民國一百年一月二版四刷
民國一百零一年一月二版五刷

ISBN：978-986-02-9491-0
GPN：1010003201


教育部教科圖書審定執照
國審字第0958號
據 國立教育研究院籌備處 所送教科圖書，業經本部審定，特發給執照並摘錄事項如下：
圖書名稱：國民中學數學第四冊
編 著 者：何福田等
適用年級：二年級下學期
有效期限：六年（95年12月04日~101年12月03日）
部長 杜正勝
中華民國 95 年 12 月 04 日

營業總部暨營業所在地：
70248 臺南市南區新樂路76號（安平工業區）
電話／（06）263-1188（代表號）
出版登記：新聞局局版臺業字第5853號
承 印 者：翰林出版事業股份有限公司
發 行 者：翰林出版事業股份有限公司
讀者訂書專線：電話／（06）263-7923
傳真／（06）264-5852
客戶服務專用帳號：service@hanlin.com.tw
郵政劃撥：31376678
翰林出版事業股份有限公司
法律顧問：北辰律師事務所
蕭雄淋律師　嚴裕欽律師　幸秋妙律師
翰林我的網：http://www.worldone.com.tw
翰林文教網：http://www.hle.com.tw
翰 林 書 城：http://books.worldone.com.tw

政府出版品展售門市：
國家書店松江門市
地址：10485 臺北市中山區松江路209號1樓
電話：（02）2518-0207（代表號）
國家網路書店：http://www.govbooks.com.tw
五南文化廣場
地址：40042 臺中市中區中山路6號
電話：（04）2226-0330
網址：http://www.wunanbooks.com.tw

國中教科書全國服務中心

北區服務中心（臺北、基隆、宜蘭、花蓮、金門）
地址／23585 新北市中和區建一路136號9樓
電話／（02）3234-4718　傳真／（02）3234-4720

桃竹區服務中心（桃園、新竹、苗栗）
地址／32455 桃園縣平鎮市興埔路232之2號
電話／（03）468-8066　傳真／（03）468-8120

中區服務中心（臺中、南投、彰化）
地址／40854 臺中市南屯區東興路一段480號
電話／（04）2473-8515　傳真／（04）2472-8505

雲嘉區服務中心（雲林、嘉義）
地址／60085 嘉義市西區國賢一街38號
電話／（05）281-2656　傳真／（05）231-2415

南區服務中心（臺南）
地址／70248 臺南市南區新樂路76號（安平工業區）
電話／（06）263-7923　傳真／（06）264-5852

高屏區服務中心（高雄、屏東、臺東、澎湖）
地址／80794 高雄市三民區民族一路373巷15號
電話／（07）397-2288　傳真／（07）397-1199

● 本書如有缺頁、倒裝、嚴重汙損等情形，請接受本公司誠摯的道歉；
並請撥讀者免費服務專線：0800-007-678告知，我們將迅速為您服務。