

數字常識與過程導向教學

楊德清

國立嘉義大學數學教育研究所副教授

林宜蓀

國立嘉義大學國民教育研究所研究生

壹、過程導向的數字常識課程設計理念

黃政傑（1993）主張課程設計應該由內容和活動設計開始著手，注重教學過程和學生在此互動過程中的經驗，提供學生創造的機會，導引出各種的學習結果。而王文科（1999）也認為，課程的發展應著重於過程，然後在教學活動、經驗中加以修正。課程設計者（此指教師）不應在開放性的問題上，硬性地畫出範圍要求學生表現，而是應該允許學生自由創造（黃政傑，1993），以發展新的概念。因此，在這些原則下，本研究中的數字常識課程走向亦是本著注重教學過程中學生的參與情形，而不是傳統教學中的目標模式，在教學之前，對於學生的學習結果不預設立場，不預先設定行為目標；在教學過程當中，教師扮演資源提供者與活動流程調節者，促發教室內學生的學習能量；在教學後，針對課程與活動進行反思，為下一次更完善的教學做規劃。正如同王文科（1999）所說，教育是一種動態的過程，在教學中如何做有效的運用，是關注的要點，其重心應放在教學的脈絡上。

貳、過程導向的課程實施

雖然近幾年來我國中小學生在國際間之數學競賽中的成績皆名列前茅(AMC, 2000；Beaton et al., 1997；Gonzales et al., 2000；Stevenson, Chen, & Lee, 1993；Stevenson, Lee, Stigler, 1986；Stigler, Lee, & Stevenson, 1991)，但國際數學排名的意義又何在呢？經教育部的調查，學生對這門學科的討厭程度卻隨年級的增加而快速遞增（柯啓瑤，2001）；同時 Cai(2001)的研究顯示具有名列前茅的數學能力，並不代表其數學認知與思考的能力亦較高，同時呼籲大眾千萬別陷入國際排名的迷思中。楊德清(2000a, 2000b)的研究結果亦指出台灣學生的計算能力強並不代表學生了解數字與運算的意義。學生對於學習數學的意義和學習的樂趣，以及與生活的關

聯、生活上的應用等種種感受非常淡薄。有鑒於 Howden (1989) 所說的，當數學教育的走向是偏向於記憶基本事實與不斷地精熟計算時，學生便不被鼓勵去探測與發明數字間的關係，也因此喪失了學習數學的興趣與滿足感。爲了改變長久以來的教學生態與提昇學習的風氣，民國 85 年實施的新課程以建構式教學爲出發點，希望在課堂中引發學生的思考，讓學生在思考歷程中建立自己的觀點，亦是強調過程發展的重要性。

身爲專業教師，對於學生的學習與發展應該有其獨到之處。教師長年與學生們相處，當中的潛移默化是教師與學生自身所無法立即感受到的，教師所呈現的教學過程即爲學生的學習過程，教師從學生學習當下反應的回饋立即應變，馬上調整教學步驟與程序，這是每位人師在每日的課堂教學中所面臨的即席挑戰。即使採用的是所謂的傳統的教學，在教師呈現的當中，亦是一種過程，只是，在這過程中，教師們所懷抱的心態不同，所預期的反應不同，當然，學生回饋的方式與結果亦不相同。因此，研究者將深入探討何謂過程導向教學？並試圖架構它與數字常識教學的關係。

一些相關的研究(Jarvis 和 Blank, 1989；Fraivillig, 2001)主張過程導向(process-oriented)教學策略，重視的是學生的思考與推理的過程。並認爲教學中教師應該鼓勵學生勇於表達自己的想法，並要求學生解釋、辯證、或質疑他們的答案與解題過程。

Fraivillig(2001)更進一步探討如何促進兒童思考的教學架構，認爲應從引導、支持與擴展等三方面著手，以促進兒童的學習；她強調教師必須重視教學過程，以及在安全的環境中提供學生良好的學習機會。

美國數學教育家 Reys 等(1991)以及 Reys(1994)認爲幫助兒童發展數字常識的最佳途徑，乃是發展過程導向(Process-oriented)的數字常識教學活動，同時在教學的過程中，教師是扮演協調者與引導者的角色，以學生爲中心，營造教室內的對話氣氛，鼓勵學生對於問題提出質疑與辯證，並且可以運用創造力嘗試不同的解題策略，同時可以自我檢視過程或答案的合理性，讓學生有意義地學習數學。

研究者參考上述各學者所提之過程導向教學，將數字常識過程導向的教學定義爲：

教師創造課室學習情境與提供具數學價值之活動，以鼓勵學生參與討論、探索、以及促進思考，以提昇兒童之數字常識能力。此教學活動強調教學過程：鼓勵兒童以他們自己的方式思考以解題，以及勇於與他人溝通、分享他們的思考模式與解題方法。同時提倡與鼓勵兒童使用不同與多種之解題策略。

研究者同時參考相關的數字常識教學過程(徐俊仁，民 90；楊德清，2001；Reys, et al., 1991; Reys, 1994；Yang & Reys, 2001a, 2001b)，並配合研究者自身的教學經歷，提出如圖 2-3-2 的過程導向教學流程。當然，萬法爲心造，沒有特定的哪一種方式可以適用於全體的學生或是每一種情境，教學的流程也可視班級互動情形而做調整或是增刪，但是整體而言，此教學流程仍具有參考的價值與引發後續發展的可能性。

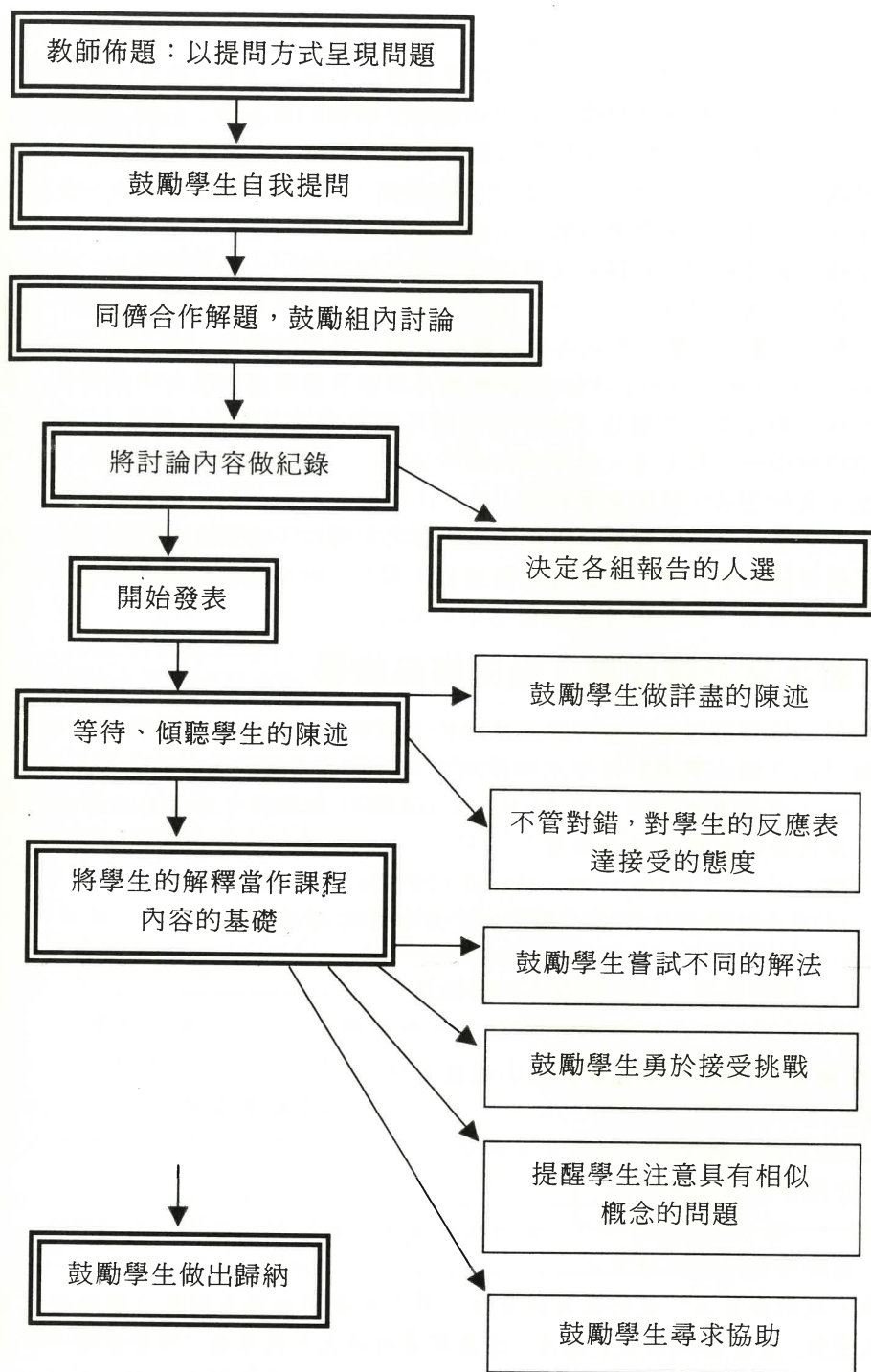


圖 1. 過程導向教學流程

根據圖 1 所示，只是教學過程中的一隅，後續仍有許多可以發展的空間，但是卻可以清晰看出教師的信念何在，先是營造易於討論的情境，讓學生在過程中從事於概念的發展、發展解決問題的思考與策略。學習的發生是「引發」的而不是「被教」的，這與傳統常用的直接教學方式，有極大的差異。至於何者為現今數學教育的發展趨勢呢？在美國課程與評量標準中提到，5—8 年級的數學課程應該加強發展數字常識，其中提到應發展數字常識，減少規則與算法的背誦；發展運算能力，減少反覆的紙筆練習；強調算法與過程，減少強調唯一一個正確答案；使用估測來解決問題以及檢核結果的合理性，減少不詳加理解而採取機械式的記憶計算過程；探究全數、分數、小數、整數與有理數的表徵與運算的關係，減少學習孤立的單元（Reys, et al., 1991；Reys, 1994）。這些變革，除了教科書必須有所改變外，教師所扮演的角色更是其中的靈活人物。不知道在哪裡聽過這樣的一段話：「教師進了學校便與社會隔絕，教師進入教室便與學校隔絕。」這段話相當耐人尋味，聽者會各自產生不同的想法，就研究者而言，最大的感想在於教師對於教室內已發生的、正在發生、將要發生的所有事，佔有一個重要的主導性，特別是對於國小階段的師生型態，級任教師猶如學生在學校的監護者，因此，級任教師如何來經營教學、帶領學生，營造氣氛，學生們便會浸染這樣的氣息。

參、數字常識課程融入過程導向教學

對於一位想指導學生發展數字常識的老師與一位想嘗試改變教法的老師，可以怎麼做？以下便以實際的教學案例探討如何將數字常識教學活動融入教學中。

題目：小玉用電算器求得 $638.5 \times 0.254 = 162179$ ，但漏掉了小數點的位置，請幫小玉找出小數點的正確位置：

- (1) 1.62179 (2) 16.2179 (3) 162.179 (4) 1621.79
(5) 沒有計算無法找出 為什麼？請解釋你的原因。

教師佈題：以提問方式呈現問題

T：（唸題目）162179 有沒有點出小數點來？

S：沒有。

鼓勵學生自我提問

S12：老師可不可以計算？

T：哦，我們不計算，我們來判斷看看，用你的數學知識來判斷小數點的位置應該在哪裡，老師提醒各位小朋友，你應該運用不止一種方法，來看看這一個問題...

鼓勵同儕合作解題與組內討論

（分組討論）

開始發表

決定各組報告的人選

T：好，我們現在先請問第一組，你們的答案是第幾個呢？

S4：第二個，16.2179。

等待、傾聽學生的陳述

T：第二個，16.2179，為什麼？

S4：因為 638.5 和 0.254 共有四位小數，所以答案也要有四位小數。

將學生的解釋當作課程內容的基礎

T：哦，是這樣子的，因為 638.5 和 0.254 前後共有四個小數，所以答案也要有四位小數。好，現在我們請這兩位小朋友到這邊來，．．，好，有問題的小朋友，請舉手，好，S10。

鼓勵學生勇於接受挑戰

S10：請問 638.5 和 0.254 後面各有四個小數嗎？

S4：不是，是兩個加起來總共有四個。

S10：是哪個加哪個呢？

S4：638.5 後面一個，0.254 後面三個啊！

T：638.5 後面一個，0.254 後面三個，好，來，繼續發問，好，S18。

S18：為什麼要 1+3 呢？

鼓勵學生嘗試不同的解決方法

T：第一組有沒有小朋友要補充的？

S8：因為 638.5 有一位，0.254 有三位，加起來共有四位，那乘積也要有四位啊！

不管對錯，對學生的反應表達接受的態度

T：好，補充得非常好，來，下一組，S28。

S28： $5 \times 4 = 20$ ，後面應該還有一個 0。

鼓勵學生做詳盡的陳述

T：哦， $5 \times 4 = 0$ ，後面應該還有一個 0，然後呢？

S28：如果這樣的話，後面應該還要加一個 0。所以答案是(3)162.179

S13：小數點後面的 0 可以劃掉啊！

S28：如果劃掉的話，小數點後面應該只剩下三位啊！

T：還有沒有問題，好...，接下來，...，第四組，請問你們的答案是哪一個呢？...

提醒學生注意具有相似概念的問題

T：這個 638.5 很接近哪一個整數？

S：600、650（小朋友講出了兩種答案）

T：很好！那這個 0.254 很接近多少？

S：0.25，0.2（小朋友舉出兩種不同的數字）。

T：那 0.25 大約是幾分之幾？

S：0.25 是 $\frac{1}{4}$ 。

T：請問各位 600 的 $\frac{1}{4}$ 大約是多少？

S：150。

T：150，非常好，好厲害啊，這麼快就把答案算出來。那這兩個數乘起來應該是一百多啊，有沒有可能是 16.2179 這個答案？

S：不可能。（小聲地回答）

鼓勵學生做出歸納

T：所以應該是哪一個答案是最可能的？

S：第三個。

T：所以我們如果能夠用數字的大小或是參考點來估算答案的話，那就不會被算則給怎樣啊...誤導，以前小朋友都是用紙筆來計算答案，所以小朋友都可以很清楚地看出到底小數點後面有幾個 0，可是如果我們不用紙筆計算的話，我們看到的是刪掉 0 之後的結果，那我們很可能就不曉得小數點應該在什麼地方了。

祈盼藉由上述之教學實例，引發教師體會數字常識教學活動融入過程導向教學之精神。然教學情境因人、事、時、地之不同而有顯著之差異，故學生學習情境之創造，端賴教師臨場之應變，以營造符合自己學生之學習環境。

肆、結論

當教師相信讓學生能夠有意義的學習數學比精通公式與算則更重要時，學生才會重視數字常識（Reys, 1994）。許多教師在教學時，只注意到學生會不會算、算式排得對不對，當學生可以將過程及答案正確無誤地表達出來時，便認為學生懂了，

其實，需注意的是，學生的學習可能受限於學生的表達方式，或思考的範疇。他們可能只學習到與教師所呈現出來的符號間的交互作用，而不是與符號真正欲表達的概念具有關聯性（Greeno, 1991）。雖然學生們有能力可以發展或創造出自己的解題策略，但是當學生們只努力專注於套入公式或以紙筆運算來解題時，這便會妨礙學生利用非正式的方法來思考數學的能力（McIntosh, Reys, & Reys, 1992）。諷刺地，當學生的數學知識技能提昇時，他們所會運用的策略廣度卻變狹隘了（楊德清，2000b；McIntosh, Reys, & Reys, 1992；Reys, & Yang, 1998）。

因此，教學的過程即是一種幫助學生發覺、思考、了解的歷程，教師慎重地計劃如何呈現算術的意義以及經由這樣的數學課程讓學生可察覺到算術的真義。許多人認為直接教導學生計算的策略是最快速、最有效率、最有用的方法，有助於達到齊一性的目標。但是如果我們希望學生所獲得的技巧是能夠產生一種知識，知道在所處環境中的何處、有哪些東西在附近、哪些東西容易取得、如何彈性的組合、有效率地達到目標、使用多重的方法來檢核結果的合理性，此時，就如同 Sowder（1992）所言，我們應該考量一種非直接的教學法，來協助學生發展數字常識。

參考文獻

- 王文科（民 88）。課程與教學論。台北市：五南。
- 柯啓瑤（民 90）。挽救學生「閱讀和寫作能力」的瓦解危機。翰林文教雜誌，19，1—2。
- 徐俊仁（民 90）。發展國小六年級學生數字常識能力之研究。國立嘉義大學國民教育研究所教學碩士班論文，未出版。
- 黃政傑（1993）。課程設計。台北市：東華。
- 楊德清（民 89a）。數字常識與筆算能力，教師之友，41（2），30-35。
- 楊德清（民 89b）。國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法，科學教育學刊，8(4)，379-394。
- 楊德清（民 90）。從程序導向(Process-oriented)的教學活動中幫助國小五年級學生發展數字常識能力之研究。國科會 90 年度補助研究計畫。(NSC 90-2521-S-415-001)
- AMC (2000)。澳洲數學測驗中心與國立臺灣師範大學教育測驗中心所合辦之數學能力檢定。// WWW.rcpet.ntnu.edu.tw//。
- Beaton, A. E., Mullis, I., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1997). *Mathematics achievement in the middle school years, IEA's third international mathematics and science study*, Chestnut Hill, MA: Boston College, Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy.
- Fraivillig, J. (2001). Strategies for advancing children's mathematical thinking. *Teaching Children Mathematics*, 454—459.
- Gonzales, P., Calsyn, C., Jocelyn, L., Mark, K., Kastberg, D., Arafah, S., Williams, T., & Tsen, W. (2000). *Highlights from TIMSS-R* Retrieved from: <http://nces.ed.gov/>

- pubsearch/pubsinfo.asp? pubid =2001027.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a Conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 170-218.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 6-11.
- Jarvis, C. H. & Blank, B. B. (1989). *Great starts mathematics approach 1987-88*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED316339)
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1 (2), 114-120.
- Reys, B. J., Barger, R., Dougherty, B., Hope, J., Lembke, L., Markovits, Z., Parnas, A., Reehm, S., Sturdevant, R., Weber, M., & Bruckheimer, M. (1991). *Developing number sense in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 225-237.
- Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leihardt, R. & R. Hatrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Stevenson, H. W., Chen, C., & Lee, S. Y. (1993). Mathematical achievement of Chinese, Japanese, & American children: Ten years later. *Science*, 259, 53-58.
- Stevenson, H. W., Lee, S. Y., & Stigler, J. W. (1986). Mathematical achievement of Chinese, Japanese, and American children, *Science*, 231, 693-699.
- Stigler, J. W., Lee, S. Y., & Stevenson, H. W. (1991). *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children*, Reston, VA: NCTM.
- Yang, D. C., & Reys, R. E. (2001) Developing number sense, *mathematics teaching*, 176, 39-41.
- Yang, D. C., & Reys, R. E. (2001). One fraction problem: Many solution paths, *mathematics teaching in the middle school*. 7(3), 164-166.

誌謝

本文為國科會專題計畫補助之一部分，計畫編號 NSC 90-2521-S-415-001，特誌申謝；文中所提論點純屬作者個人之意見，並不代表國科會立場。