

統一編號

1009903928

國中小數學教材與教學探討
· 幾何篇(五)
國家教育研究院籌備處出版

國中小數學教材與教學探討 - 幾何篇(五)



ISBN 978-986-02-5497-6



99.12.1000
定價：420元



國家教育研究院籌備處 出版

國中小數學教材與教學探討 - 幾何篇(五)

國家教育研究院籌備處 出版

中華民國九十九年十二月

陳主任序

1970 年代以前的教師訓練相當重視學科知識的學習，此後，教學知識的理論和教學方法開始成為教師訓練和授證的重點項目。1970 年代到 1980 年代間的教學研究傾向聚焦於一般的教學技巧，而非教學內容之理解。在這段期間，許多研究對於過程--成果(process-product)、教師行為(teacher behavior)、教學效能 (teaching effectiveness) 作了許多描述，這些研究企圖在不考慮學科知識的情形下，尋求界定足以提升學生學習和促進學術成就的教學因素(Berliner & Rosenshine, 1977; Rosenshine & Stevens, 1986)，這種注重一般教學技巧的師資培育方式，受到許多數學家及數學教育家的批評，Shulman (1986)便強調教師學科內容知識的重要性，他使用 “Missing Paradim”一語來形容一般教學研究之盲點在於未能著眼於學科內容知識對於教學行為的影響。此外，許多研究亦指出另一值得關注的方向：許多職前教師對於數學的了解不足，並且多侷限於數學算則的學習 (Martin & Harel, 1989; Ma, 1999; Rowland et al., 2001; Goulding & Suggate, 2001)。

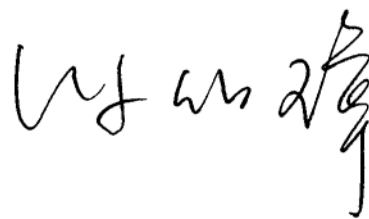
因此，近年來教師的專業成長方面的研究主要在於探討教學的知識庫，提供訓練課程以及專業活動中教學複雜度的示例 (Reynolds, 1989)。荷蘭的 MILE (multiple interactive learning environment, 2000) 計畫，強調情境式的教學實務，師範生或在職教師透過數位化的教學場景來將現實的教學場景轉化到學習的環境之中，透過進行反思性的對話來建構本身的數學教學知識。

本處周筱亭研究員與劉君毅助理研究員自 91 年度起，即開始進行「現實教學紀錄」對於數學教師專業成長影響之探討研究，以記錄教師們的「教學歷程」為主要的資料蒐集方式，包含以影像資料為主的「教學錄影專輯」、教師於教學前所作的「教學活動設計」以及錄影後所作的「教學後的省思」等三大部分。這個研究的最終目的在於建置一個適合國民中小學數學教師使用的「現實教學紀錄」資料庫，資料庫中擬包含數學內涵以及數學為主軸的統整課程教學情境。該研究擬定以國中小數學課程中的十個重要領域為主軸，根據該主軸在國民中小學階段的重點教學內涵，結合學者專家的專業以及國中小教師的實務知識，針對活動設計、數學內涵、班級經營、以及學生認知等向度進行分析與整理，來建置教學情境紀錄，以做為教師實務學習的資源，並從中

蒐集參與研習教師的反思及改變資訊。

這套叢書「國中小數學教材與教學探討」是前述資料庫內容的呈現方式之一，自93年度起已陸續出版以「長度」、「比例」、「時間」、「小數」、「國小幾何」、「分數」、「整數的乘除」、「因數與倍數」、「整數的數概念與加減運算」、「一元一次方程式」、「國中幾何」和「代數」為主題的各冊。今年出版的將以「國中幾何」和「國中代數」為主題，本書為『幾何篇（五）』。每本書都包含該主軸的各單元「教學活動設計」、「教學活動實錄」和「教學後的省思」，並附上各單元的教學實錄影音光碟。同時，研究群已展開進一步計畫，將本系列叢書內容(含文本與影片)與歷年來的研究成果逐步數位化，建置成「國中小數學教師專業成長網」(網址為：<http://math.naer.edu.tw>)，期盼以數位學習(e-Learning on Demand)、教師績效支援系統(Electronic Performance Support Systems)的模式，提供教師們更便利、及時、普及與多元的服務。

在這本書付梓之際，僅以此序向各位參與的人士表達誠摯的謝意，由於他們的專心投入與犧牲週末假日的無私奉獻，讓本處能出版、製作這些教學敘事，作為以學校為基地的數學教師成長學習資源。



於國家教育研究院籌備處

民國九十九年七月

編輯要旨

- 一、本書為國家教育研究院籌備處預定陸續出版的一系列與國中小數學教材和教學相關的叢書之一，去（98）年出版的兩本書是以「國中幾何」和「國中代數」為主題；今年預定出版的兩本仍分別以國中的「幾何」和「代數」為主題，本書「幾何篇（五）」，收錄國中二年級至三年級的教學主題單元。
- 二、出版這類叢書的主要目的在於提供國中小教師欲提升專業能力時，可以參考或共同討論的教學案例。
- 三、本書分為兩個部分：文本和數位影音光碟(DVD)，前者包括「幾何」主題的各單元活動設計、教學實錄、教學說明和教學者教學後的省思；後者則為各單元的教學實況錄影以及擔任教學的教師於教學後所錄製的教學說明。
- 四、讀者在觀看影音光碟時，可以對照文本中的教學實錄，將更有利於掌握教學細節。
- 五、本書並未涵蓋國中數學教材中所有「幾何」主題的相關題材，係就參與的老師們當時任教的年級與使用的版本，配合原訂的教材和教學進度，選取與「幾何」有關的重要概念，在教授們的指導之下，先設計教學活動，經過反覆的討論與修正，定案後，由本處委外錄製教學實況和教學說明。錄影紀錄皆為自然真實的上課過程，由於採用雙機錄影，影片中呈現的教學實況的畫面已經過剪輯，但音效方面則是教室現場原音重現。
- 六、由於每位教師的教學風格不同，所教學生的背景、經驗與知識也不盡相同，因而讀者不應將本書的各個案例視為「範例」。
- 七、基於環保理念，本書將逐年縮減紙本印製量，改採光碟發行，影音光碟部分則維持原形式不變，建議讀者可先將電子版「文本資料」內容載存於電腦硬碟中，再透過瀏覽工具開啓相關檔案閱讀，並可同步搭配觀看影音光碟影片。
- 八、本書內容(含文本與影片)未來將逐步數位化，以線上課程方式呈現，建置於本處「國中小數學教師專業成長網」(網址為：<http://math.naer.edu.tw>)，歡迎上網瀏覽最新資訊。
- 九、本處保留本書及影片內容之著作權及所有權利，讀者若需引用或有任何問題，歡迎逕洽本處。

目 次

平行	1
壹、教學活動設計	1
貳、教學實錄	13
參、教學說明	43
肆、教學後的省思	45
尺規作圖	46
壹、教學活動設計	46
貳、教學實錄	71
參、教學說明	95
肆、教學後的省思	98
勾股定理	99
壹、教學活動設計	99
貳、教學實錄	109
參、教學說明	148
肆、教學後的省思	155
三角形的全等性質	156
壹、教學活動設計	156
貳、教學實錄	172
參、教學說明	206
肆、教學後的省思	208
平行四邊形	209
壹、教學活動設計	209

貳、教學實錄	234
參、教學說明	276
肆、教學後的省思	278
三角形重心.....	280
壹、教學活動設計	280
貳、教學實錄	318
參、教學說明	346
肆、教學後的省思	349
圓冪性質探秘	351
壹、教學活動設計	351
貳、教學實錄	369
參、教學說明	412
肆、教學後的省思	415

平行

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級上學期

二、教 學 者：台北縣板橋國中 梁翠玲 老師

三、教學目標：

1. 能瞭解在平面上的兩直線平行的定義
2. 能瞭解兩平行線之間處處等距離。
3. 能瞭解兩平行線被一線所截時，同側內角、同位角、內錯角的關係。
4. 能將平行線同位角相等、內錯角相等、同側內角互補的性質應用在角度計算上。

四、活動目標：

【活動一】：能知道兩直線平行的定義，並能利用工具測量兩直線是否平行。

【活動二】：能瞭解兩平行線間距離的定義，並發覺兩平行線之間處處等距離。

【活動三】：(1)解瞭兩平行線被一截線所截，則它們的同側內角互補、同位角相等、內錯角相等。

(2)兩直線被一截線所截，若它們的同側內角互補或同位角相等或內錯角相等則這兩直線是平行線。

【活動四】：平行線性質的應用。

五、教學概要說明：

1. 先從平面上兩條直線的交點數做分類，讓同學知道沒有交點的兩條直線稱為平行線。但這樣的方法太過籠統，所以引導學生找出平行線的定義，並利用此定

義判斷及畫出平行線。

2. 一般老師都會覺得『平行線之間的距離』是很簡單的概念，但是學生其實對距離的定義並不是十分清楚，所以常常亂畫，因此本教案在講解『平行線之間的距離』概念之前先讓學生畫出點和點、點和直線的距離，確實感受距離的定義是『最短路徑』，之後再畫出兩平行線之間距離，就能很容易地發現平行線之間處處等距離的性質。
3. 一般證明平行的性質都是由定義先推至同位角相等，但是我發現先畫一條直線，再畫兩條同時垂直該直線的平行線，再畫一條與平行線不垂直的直線，學生較容易看到的是四邊形，所以本單元的教學設計是由定義先推至同側內角互補，再內錯角相等、同位角相等。並同時反推利用同側內角互補、內錯角相等、同位角相等判斷兩直線是否平行。
4. 學生對同位角、同側內角、內錯角的名詞無法瞭解，不容易熟記，所以對這些名詞加強解釋，如同側是指截線的同側，內角是指兩平行線之間，讓同學比較容易能記住這些名詞。
5. 最後的一個題目可以有很多解題方式，學生畫出不同的輔助線都可以解決問題，因為解題方法的多樣性，預期多數學生都能成功的解決問題，培養學生的學習信心，同時也加深同位角、同側內角、內錯角的熟悉度。

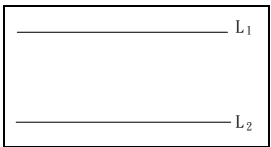
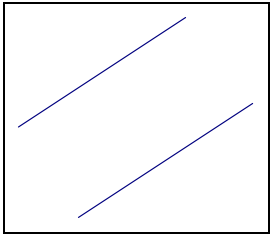
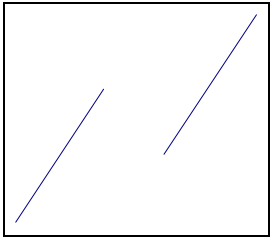
六、教學活動設計：

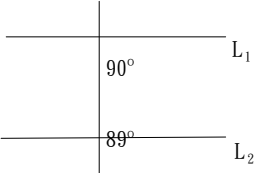
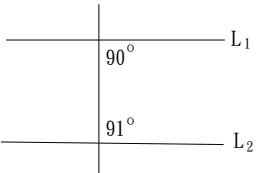
【活動一】：知道兩直線平行的定義，並能利用工具測量兩直線是否平行。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 平行線的意義	1.在平面上畫出兩直線，這兩條直線可能有什麼關係？從交點的個數	• 教師應和學生先溝通直線和直線段的意義。 • 學生可能回答如	• 能回答有三種關係。

	去思考看看。 2.如果兩直線有無限多交點稱為重合。如果兩直線沒有交點稱為什麼？ 3.在下圖中指出那兩條是平行線。  4.在日常生活中有那麼多看起來像是平行線的直線，但如何能確定它們真的平行呢？例如，黑板上有兩條直線，這兩條直	下： (1)兩直線相交於一點。 (2)兩直線沒有交點。 (3)兩直線有無限多交點。 若學生沒有(3)的說法，老師應追問，或畫出圖形，讓學生瞭解(3)的可能性。 • 學生可能回答： (1)是，因為它們沒有交點。 (2)是，因為它們永遠不會有交點。	• 能回答平行線。 • 學生能指認出哪兩條是平行線。 • 能說出平行線的定義。
--	---	--	--

	線是不是平行線 ？為什麼？ _____ L_1 _____ L_2 5.這兩條直線在很遠很遠的地方會不會有交點呢？所以土木師父在蓋房子時可以用目測嗎？ 6.那麼有沒有方法可以檢查這兩條直線是否平行呢？ 7.我們可以透過下面的方式來判斷兩條直線是否平行： 如果 L_1 和 L_2 都垂直於 L，則 L_1 和 L_2 是平行線。 8.若 L_1 和 L_2 是平行線，我們記為 $L_1//L_2$ 9.用三角板和直尺檢查看看 L_1 和 L_2 是否平行。	• 學生可能回答：畫一條直線，會和 L_1、L_2 都垂直 • 學生操作。	• 學生能回答：有可能有交點，所以不能目測。 • 能回答：有方法檢查。 • 知道平行的符號。 • 能利用三角板和尺檢驗兩條直線是否平行。
--	---	---	--

	(1)  (2)  (3)  10.利用三角板與直尺，畫出過 P 點且與 L_1 平行的直線 P •  11.教師佈題： (1)如圖一，如果有一條直線和 L_1 垂直，但是和 L_2 形成的夾角是 89°，L_1 和 L_2 會怎麼樣？	• 此佈題的目的是讓學生能利用平行線的定義作出平行線，以確認學生真的理解。 • 這個佈題的目的在於加強平行線同時垂直於一直線的概念。 • 會在右側有交點	• 能利用三角板與直尺作出過 P 點且與 L_1 平行的直線。 • 能回答：因為 L_2 的右邊會往上翹，所以會在右邊有交點。 • 能回答：右邊會
--	--	--	---

	為什麼？如果有交點，L_1和L_2的交角會是多少度？怎麼算出來的？  (圖一) (2)如果有一條直線和L_1垂直，但是和L_2形成的夾角是91°，L_1和L_2會怎麼樣？為什麼？如果有交點，L_1和L_2的交角會是多少度？怎麼算出來的？  (圖二) • 結論：兩直線若不平行就會有交點。	。 • (1)、(2)二題是希望學生能判別兩直線若不平行，會在截線的哪一側有交點。	形成一個三角形，L_1和L_2的角是1°。 • 能回答：會在左側有交點；L_1和L_2的交角是1°
--	--	---	---

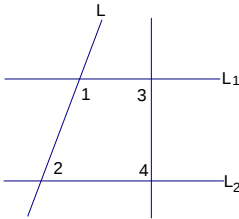
【活動二】：能瞭解兩平行線間距離的定義，並發覺兩平行線之間處處等距離。

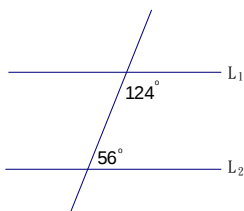
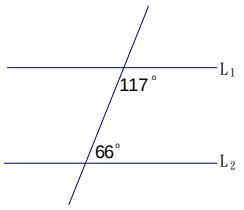
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 平行線之間處處等距離	1.A 點和 B 點之間的距離如何測量？	• 學生可能回答：連接 AB 兩點線段的長度，就是 AB 的距離。	• 能瞭解距離的意義。
	2.A 點到直線 L 的距離如何測量？	• 學生可能的回答如下： (1)從A點作直線L的垂直線，交直線L於B點，線段AB的長度就是。 (2)在直線L上隨便找一點B，線段AB的長度就是。 • 如果學生回答(1)則教師應引導了解，學生回到問題1「距離」是指最短路徑的長度。	
	3.若 $L_1//L_2$ ，這兩條平行線的距離如何測量？	• 學生可能回答：在直線 L_1 上任找一點A，過A點做直線 L_2 的垂線，交於B點，量線段AB的距離即是。	• 能說出測量距離的方法。

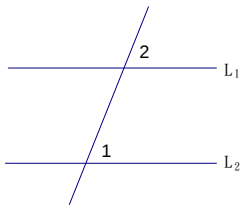
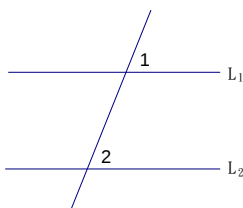
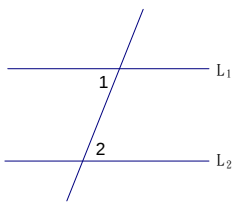
	4.這些畫出的線段圍成一個什麼形狀？ 5.線段 AB 和線段 CD 有什麼關係？ 6.結論：平行線之間的距離處處相等。 7. 如圖，$L_1//L_2$，$\triangle ADE$、$\triangle BDE$、及 $\triangle CDE$ 的面積分別為 a、b、c，請比較 a、b、c 的大小，並說明理由。	• 應用平行線之間處處等距離的概念。	• 能回答：長方形或矩形。 • 能回答： (1) 互相平行。 (2) 一樣長。 • 能回答： (1) $a=b=c$ (2) 因為它們的底相等，高也相等。
--	---	---------------------------	--

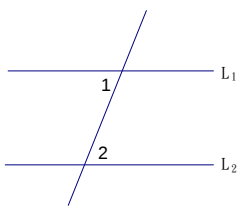
【活動三】：(1)解瞭兩平行線被一截線所截，則它們的同側內角互補、同位角相等、內錯角相等。

(2)兩直線被一截線所截，若它們的同側內角互補或同位角相等或內錯角相等，則這兩直線是平行線。

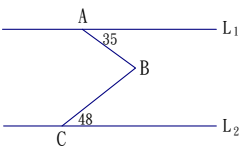
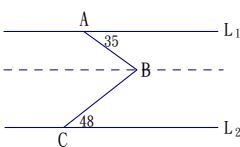
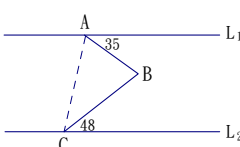
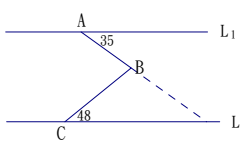
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
- 平行線的性質及判別方法 - 同側內角性質	1.有沒有別的辦法可以判別平行線呢？可不可以畫一條斜線呢？ • 若 L_1/L_2，那麼 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有什麼關係？  • 若 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互補，L_1 和 L_2 會不會平行？ • 若 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 不互補，L_1 和 L_2 會不會平行？ • 結論：我們稱 $\angle 1$、$\angle 2$ 為截線 L 和 L_1、L_2 所截出的一組同側內角	• 教師應引導學生由四邊形的內角和推導出 $L_1+L_2=180^\circ$。 • 教師應引導學生由平行線的基本定義說明兩直線平行。	• 可能回答：$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$。 • 能回答：$L_1$ 和 L_2 會平行。 • 能回答：不會平行。

• 同位角性質	。 • 若兩直線平行，則所截出的同側內角互補。反之，若一組同側內角互補，則 $L_1//L_2$ 2.練習 (1)如下圖，L_1和L_2會不會平行？為什麼？  (2)如下圖，L_1和L_2會不會平行？為什麼？  3.(1)如下圖，$L_1//L_2$，$\angle 1=a^\circ$，則$\angle 2=?$ $\angle 1$和$\angle 2$有什麼關係？	• 利用同側內角互補判別兩直線是否平行。 • 瞭解 $L_1//L_2 \Leftrightarrow$ 同位角相等。 • 教師應引導學生先算出$\angle 1$的同側內角，再算出$\angle 2$，以發現$\angle 1=\angle 2$的關係。	• 能回答： (1)會，同側內角互補。 (2)因為$124+56=180^\circ$。 • 能回答： (1)不會，因為同側內角不互補。 (2)不會，因為$117+66 \neq 180^\circ$。 • 能回答： $\angle 2=a^\circ$，$\angle 2=\angle 1$
----------------	--	---	---

• 內錯角性質	 (2)如下圖，$\angle 1 = \angle 2$，那麼L_1和L_2會不會平行？為什麼？  • 我們稱$\angle 1$、$\angle 2$為截線L和L_1、L_2所截出的一組同位角。 • 若同側內角互補，則$L_1 // L_2$ 4.(1)如下圖，$L_1 // L_2$，$\angle 1 = a^\circ$，則$\angle 2 = ?$ $\angle 1$和$\angle 2$有什麼關係？  (2)如下圖，$\angle 1 = \angle 2$，L_1和	• 教師可以先幫學生複習，到目前為止，欲證明$\angle 1 // \angle 2$的方法有兩種： (1) 平行線的定義。 (2) 同側內角互補，則$\angle 1 // \angle 2$。 再由學生決定採用哪一種方法。 • $L_1 // L_2 \Leftrightarrow$內錯角相等。 • 教師可以對學生重申，此時證明	• 能回答：會平行，因為同位角相等。 • 能回答：$\angle 2 = a^\circ$，$\angle 2 = \angle 1$ • 能回答：會，因為內錯角相等。
----------------	--	--	--

	L_2 會不會平行？為什麼？ 	$\angle 1 \parallel \angle 2$ 的方法有三種： (1) 平行線的定義。 (2) 同側內角互補，則 $\angle 1 \parallel \angle 2$。 (3) 同位角相等，則 $\angle 1 \parallel \angle 2$。 再由學生決定採用哪一種方法。	
--	--	---	--

【活動四】：平行線性質的應用。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 平行線間同位角、內錯角、同側內角的應用	• 如圖，$L_1 \parallel L_2$，求 $\angle ABC$ (提示：畫出一條輔助線) 	• 學生可能想到的狀況如下： (1)  (2)  (3) 	• 能應用平行線的性質。

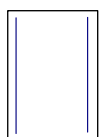
貳、教學實錄

【第一節】

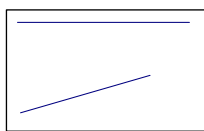
1. 老師：要開始上課囉，來，我們看一下這邊，這個是我找的一張圖，我隨便找一張，就有我們今天要教的東西，可見在日常生活中我們今天要教的主題非常的常見，你知道我們要教什麼主題嗎？趕快猜，全民大猜獎，什麼？月份？月曆喔？不對，跟旁邊數字沒關係，要看圖啦！看美麗的圖案。
2. 學生：形狀。
3. 老師：形狀？大聲一點，我聽不見。和線條有關，線條，你有沒有看到它們的線條有沒有什麼關係？答對了，說大聲一點。
4. 學生：平行。
5. 老師：答對了，平行。你有看到平行線嗎？
6. 學生：有。
7. 老師：有嗎？你看到多少平行線？很多，對不對？在我們的日常生活裡面真的有很多平行線。來，林君宇，你來指出兩條平行線給我看看。對，上來指。對，這兩條是平行線，對不對？好，謝謝你。我們給他小小的掌聲。再來，還有沒有？張勻暄，還有沒有找到別的平行線？你們看這邊，這兩條也是平行線，對不對？這個是一個檯子，這也是兩條平行線，對不對？很好，也給他小小的掌聲。其實你們還可以看到很多的平行線，對不對？可是我問你們，可不可以隨便在我給你的紙上畫兩條直線出來，隨便畫兩條，不一定要平行喔！隨便畫兩條直線，會有哪些不同的樣子出現，你可以畫出幾種樣子？我看到了喔！不錯，大膽的畫，不要害怕，反正你就畫兩條。你可以畫出什麼？來，你上去畫你的給大家看，你們怎麼受剛才的影響，結果全部都畫一樣的啊！好，你很好，你畫出了另外一種，來，你畫在

黑板上。好，換你，你上來畫，我看看還有沒有別的啊？還有沒有別的？好，來，把你這一張畫在黑板上給大家看。好，我看到大部份人畫這樣子，這個是最常見，因為剛剛你們知道我說我要講什麼主題？平行線，對不對？所以很多同學都畫了第一種狀況(圖一)，就是平行線，那這一種呢(圖二)？他畫的兩條直線，叫做什麼？線段。直線其實可以怎麼樣？可以一直拉長對不對？它是可以無限延伸的，對不對？所以你們看到的這些直線可不可以做一些分類，你會不會分類？你覺得他們畫的直線，哪幾種可以歸為一類？好，張舒涵你說。

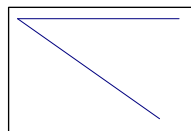
8. 舒涵：第二個圖可以延伸然後形成一個交點，第一個跟第四個沒辦法形成一個交點，二條線不能匯聚在一起。
9. 老師：這裡沒有交點？往前延伸沒有交點？
10. 舒涵：沒辦法碰到。
11. 老師：所以他用有沒有交點來分類，是不是？好，請問你這二條直線有沒有交點？其實還是有，對不對？所以他用的分類方式是有沒有交點，所以請問這二條有沒有交點(圖一)？沒有，這是 0 個交點，對不對？這裡呢(圖二)？這裡有沒有交點？他剛剛這樣畫的時候是沒有交點的，可是直線是可以無限延伸的，所以其實我們不能說這裡看不到交點就說它們是沒有交點的，要用你的想像力去想一下，如果我把它們延長會不會有交點呢？會，對不對？所以這個是一個交點。這個呢(圖三)？有沒有交點？幾個？



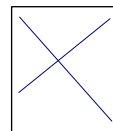
圖一



圖二

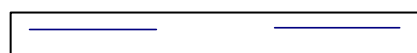


圖三



圖四

12. 學生：一個。
13. 老師：好，這也是 1 個交點，那這個有幾個交點(圖四)？也是 1 個交點，對不對？
有沒有同學可以畫出兩個交點、三個交點、四個交點或五個交點的兩條直線？
14. 學生：可以。
15. 老師：郭信德，你說可以，那你來畫畫看，兩條直線，可以有幾個交點？
16. 信德：無限。
17. 老師：無限？怎麼畫呢？他用不同顏色喔，他把兩條線怎麼樣？
18. 學生：重疊。
19. 老師：重疊在一起了，這兩條直線重疊在一起了，這樣叫做無限多個交點。所以這樣叫兩條直線，你接受嗎？
20. 學生：可以。
21. 老師：那我可不可以這樣畫(圖五)？
這樣的兩條直線跟他(郭信德)畫的一樣嗎？
22. 學生：不一樣。
23. 老師：不一樣？
24. 學生：一樣。
25. 老師：一樣？到底一不一樣？
26. 學生：一樣。
27. 老師：為什麼一樣？好，姿萱，你說為什麼會一樣？
28. 姿萱：因為它可以無限延伸。
29. 老師：對，答對了，因為可以無限延伸，所以畫起來跟它一樣就是無限多個交點。
。有沒有同學可以畫出兩個交點、三個交點的？有沒有？



圖五

30. 學生：沒有。

31. 老師：所以我們要畫兩條直線來分類的話，有三種方式，第一種叫做「沒有交點」，第二種是「一個交點」，第三種是「無限多個交點」，我們今天要講的是哪一個主題啊？

32. 學生：0 個交點。

33. 老師：所以今天我們要講的主題是「平行線」。剛剛已經知道平行線是沒有交點，可是小學是這樣教的嗎？小學學平行的時候，是說沒有交點嗎？那是怎麼做的，你怎麼樣去判別他畫的這兩條真的是平行線？就像剛剛那個陳思安畫的一樣(圖二)，他只有畫一截而已，它們也沒有交點啊，你為什麼會說它們會有一個交點？是因為你可以去想像。可是這種圖形(圖一)你看起來好像平行，可是事實上有沒有交點？你知道嗎。我問你土木工程師在蓋窗戶時，上下要不要平行？你不能說，我蓋起來好像平行就好了，其實有沒有可能歪掉？也許窗戶就裝不上去了。所以你覺得那個土木工程師要怎麼去弄那個窗戶，才會說這兩條是平行線呢？小學教的記不記得？你可不可以用工具去判斷它們會是平行線？

34. 學生：尺。

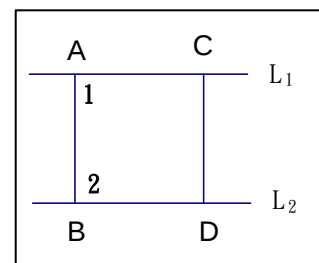
35. 老師：用尺，沒錯啊，可是怎麼用呢？郭信德，你說。

36. 信德：量它的那個距離是不是一樣。

37. 老師：你要量距離是不是一樣？

38. 信德：量這邊到這邊的長度(如圖六 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$)。

39. 老師：距離會一樣，是不是？為什麼會這樣呢？他說量這一段的距離跟這一段的距離，看一不一樣長就知道是不是平行線。可是你用三角板的一股去對齊(L)，你的目的是什麼(圖七)？為什麼不用斜邊？



圖六

40. 信德：這邊要垂直。(圖六, L_1)

41. 老師：他說這邊要垂直，那你畫下來，你覺得下面這個角(圖六, L_2)，會怎麼樣？

42. 信德：垂直。

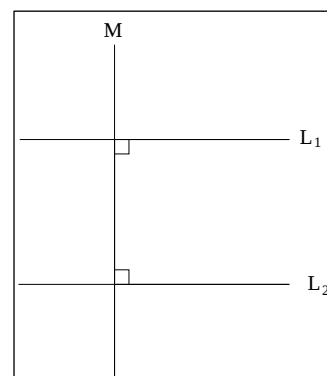
43. 老師：對，也會垂直。所以其實判別平行線不用兩條，一條就夠了。再說一次，先畫一條直線跟 L 垂直，然後也要跟 M 垂直，剛剛郭信德已經示範一次了，老師再做一次給你們看。要判別這二條是不是平行線，第一步，你必需畫出和 L 垂直的直線，所以我這個直角頂的一邊對齊第一條直線然後畫下來，然後你要怎麼測量這是不是 90° ($\angle 2$)？你要怎麼測量？

44. 學生：三角板。

45. 老師：對，再拿三角板。把直角頂轉過來看看兩邊(兩股)有沒有對齊，你看這一股對齊了，可是這一股呢？你看是不是不見了，所以我畫的是不是平行線？

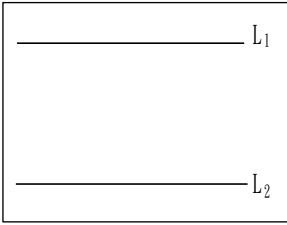
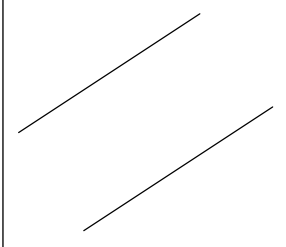
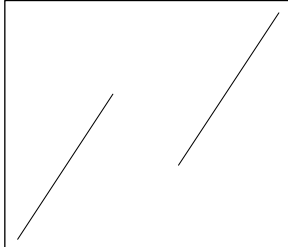
46. 學生：不是。

47. 老師：不是平行線喔。所以你要判別的話，是不是這一股要對齊，第二股也要對齊。所以，我們就發現要怎麼樣去判別 L_1 跟 L_2 是平行的？我要找一條線，這條直線假設叫做 M ，所以如果 M 垂直於 L_1 ，而且 M 也垂直 L_2 的話，那麼我們就會說 L_1 跟 L_2 平行(圖八)。這個符號($//$)就是平行的符號。



圖八

48. 老師：好，現在要你們實際操作看看，我這裡有三小題(圖九)，你們要實際操作看看會不會測量平行線喔，而且你們要把測量出來是直角的地方畫出來。等一下我會找同學上來練習。

學習單： 1.用三角板和直尺檢查看看 L_1 和 L_2 是否平行		
(1) 	(2) 	(3) 

圖九

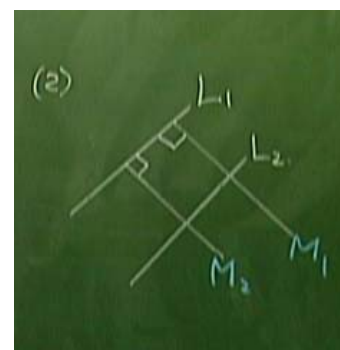
49. 老師：不會的話，旁邊可以問一下。

50. 老師：如果兩條直線互相平行，應該會有幾個直角？

51. 學生：二個。

52. 老師：答對了，所以應該每一個小題的圖上要有二個直角的符號，如果只有一個直角，另外一個不是直角，那麼就表示它們不是平行線。

53. 老師：有沒有同學自願上台畫的啊？好，趙祖鞍來，第一題我已經畫了喔，那二個直角在這邊跟這邊。第二題給你畫。



圖十

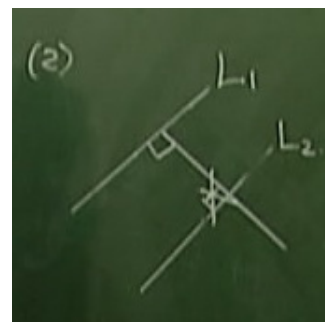
54. 老師：來我們看他畫的，他畫的兩個直角在哪裡（圖十）？

55. 老師：好，你們看一下喔，我剛剛說的，要畫一條直線跟 L_1 垂直而且又要跟 L_2 垂直， L_1 和 L_2 就會平行，所以我們只要自己多畫一條線就好了，結果趙祖鞍畫了幾條線？兩條線，他的兩個直角在這裡，所以你們知不知道他畫的時候其實哪兩條才是平行線？這兩條是我的 L_1 、 L_2 ，他畫的兩條是 M_1 跟 M_2 （圖十），你們知道他畫這樣子是誰跟誰平行？

56. 學生： M_1 跟 M_2 。

57. 老師：答對了，趙祖鞍，這兩個角垂直的時候是 M_1 跟 M_2 平行，所以錯了，重來一次，馬景胤，換你。

58. 老師：你好酷喔，好，謝謝(圖十一)！因為老師在黑板上是隨便畫的，結果他給我打一個 X，他說我畫的沒有平行，老師畫的不夠好，對不對？沒關係，所以他量出來這邊有沒有垂直？沒有垂直，所以這樣是不平行的。那你們的有沒有垂直？



圖十一

59. 學生：有。

60. 老師：你有沒有真的用這個直角頂去量啊？要真的量，不要用肉眼看喔！如果那個蓋房子的土木工程師通通都用看的，就會造出很多很多的比薩斜塔，所有的房子都是倒一邊的喔！好，再來第三題，我們請余憶葳來，他需要掌聲。

61. 老師：他有答對嗎(圖十二)？覺得他答對的舉手，沒有耶。有人捧場了，可是覺得他答錯的舉手，沒有人敢說話。耶！小老師很勇敢。好，來告訴他，他哪裡做錯？大聲一點沒關係。

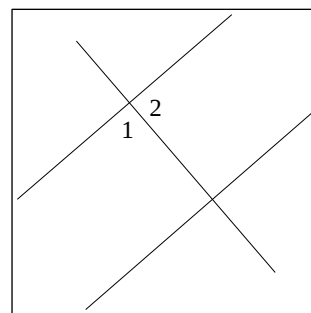


圖十二

62. 學生：他沒有拿三角板量他的直角。

63. 老師：對，坐下，很好，我們要給小老師很大的掌聲。不過，余憶葳真的很不錯喔！至少第一個角他知道要這樣比垂直，可是我剛剛說啦，第二個角要不要量一下？要啊，你有沒有量？沒有，你用看的啊！所以這邊也要量一下。這裡真的是 90 度喔！所以這兩條真的是平行線，這樣有沒有問題？所以喔！第一個角要量，第二個角要不要量？也要量！你們有沒有畫對？畫對的舉手，好放下。

64. 老師：再問一個問題(圖十三)，這邊是 90 度($\angle 1$)，對面呢($\angle 2$)？也是 90，對不對？因為這邊是一條直線，這裡總共 180 度，所以這邊 90 度，對面也會是 90 度，所以你畫 90 度符號的時候，畫這邊也可以，畫對面也可以，沒有關係。



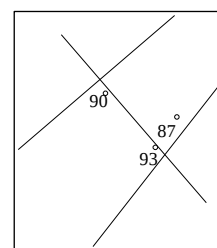
圖十三

65. 老師：再問一個問題，為什麼剛剛說一定要 90 度啊？
你知道嗎？

66. 學生：小學教的。

67. 學生：因為沒有垂直。

68. 老師：這沒有回答喔！為什麼一定要 90 度？給你一個思考空間。你看，如果第一個角量出是 90 度，第二個角量出來比 90 度還要大，我看了一下是 93 度(圖十四)，你猜會怎麼樣？



圖十四

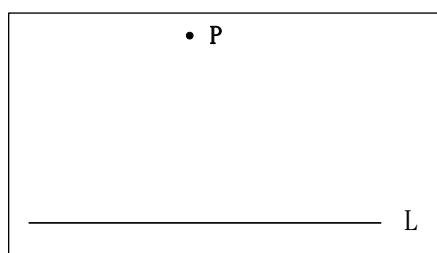
69. 學生：不會平行。
70. 老師：對啊，不會平行，為什麼不會平行了？
71. 學生：超過 180 度。
72. 老師：喔！超過 180 度，還有呢？再大聲一點。
73. 學生：一條線是 180 度。
74. 老師：一條是 180，那是這裡跟這裡啊，這邊就變 87 度了啊，來，你想像一下，像剛剛陳思安畫的，陳思安畫這樣是不是平行線？不是啊，為什麼你會說它們不是平行線？因為它們延長以後會有交點，所以這邊延長以後，會有交點，對不對？在哪裡會有交點？這條截線的上面還是下面？
75. 學生：上面。

76. 老師：對，在上面會產生一個交點，在很遙遠的地方，既然有交點，就絕對不會是平行線。可是這種有交點很抽象，所以我們必需要用比較數學式的想法來講，就是說要做一條跟它們同時垂直的直線，這樣才叫平行。反過來，如果我今天這兩條直線是平行的話，那畫了和第一條(L_1)垂直的直線(M)，和第二條(L_2)也會垂直，所以這裡是可以推過去，推過來(若 $M \perp L_1$ 且 $M \perp L_2 \Leftrightarrow L_1 // L_2$)，這是我們第一個要講的東西。

77. 老師：接下來，我已經教你判別平行線了，現在，給你一條直線 L ，還有一個 P 點，你會不會用三角板畫出一條和 L 平行的平行線，而且要通過 P 點(圖十五)。大家來動動腦，這有點挑戰性，沒那麼簡單了喔！

學習單：

2.利用三角板與直尺，畫出過 P 點且與 L 平行的直線



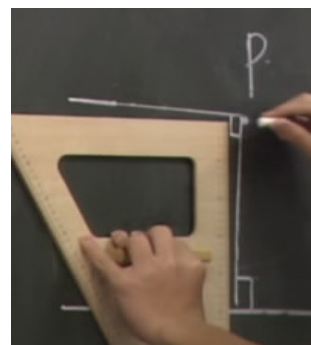
圖十五

78. 老師：你只要有用到直角頂，直角的符號就要畫出來，讓我知道你在哪邊用直角。好像都會畫喔！好，我們請賴威凱上來畫。

79. 老師：好，他哪裡做了直角(圖十六)？直角的記號要畫出來。好，可以把過 P 點那條線延長嗎？你怎麼知道這樣不會斷成二截(圖十七)？好，有沒有做對？有沒有跟他一樣？有！大家概念都蠻清楚的喔！

80. 老師：第一步，他在通過 P 點的地方，對著這一條(L)畫垂直線，因為我剛剛說過要經過 P 點，所以他經過 P 點這邊畫了一個直角，然後呢？再在 P 點這邊

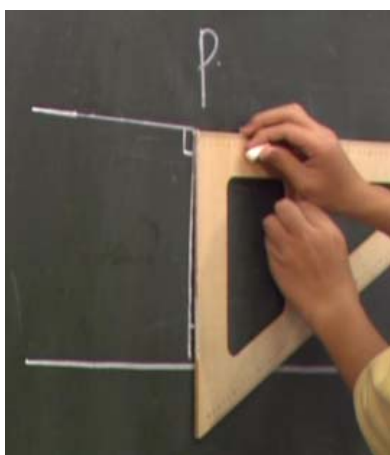
又畫了另一個直角對不對，他唯一有一個小小不完美的地方是什麼？延長那條線的時候，他是隨便畫的？應該怎樣？好，趙祖鞍，你示範一次，他剛剛那樣子畫有可能會翹起來喔，所以，應該要怎麼畫？



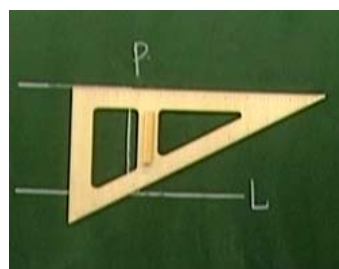
圖十六

81. 老師：好，謝謝，他說要這樣子畫(圖十八)，對不對？好，

我們給賴威凱跟趙祖鞍掌聲，那我要問賴威凱喔(圖十七)，他畫的跟你畫的有什麼差別？



圖十七 賴威凱的畫法



圖十八 趙祖鞍的畫法

82. 威凱：要往後面移過去一點，和原來有一點重疊，這樣就會平行。

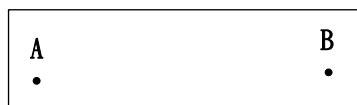
83. 老師：對，要重疊一點，懂嗎？這樣畫的時候才會是同一條直線，那剛剛只有接到 P 點就畫直線，有沒有可能它歪一點點，可是你看不出來？所以只要延長一條直線，就要重疊一點點再畫。

84. 老師：現在對於平行線，你們已經很有概念了。接下來我們就要講平行線有什麼性質，在講性質之前，先問一個問題，你知不知道兩個點的距離要怎麼量？在我給你的題目紙上面有 A、B 二點，請你量量看 A、B 的距離是多少(

圖十九)？

學習單：

3. A 點和 B 點之間的距離如何測量？



圖十九

85. 老師：謝銘曜，多少？

86. 銘曜：3.9。

87. 老師：3.9，什麼單位？

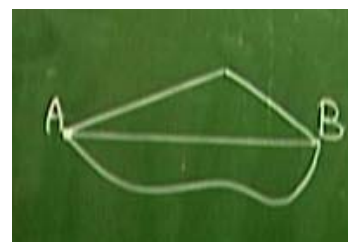
88. 老師：公尺？謝銘曜？

89. 銘曜：公分。

90. 老師：好，3.9 公分。余家安，你一直在微笑，你多少？

91. 家安：3.9。

92. 老師：你也是 3.9 公分，你們的尺都一樣嗎？劉瑜婷，你呢？你也是，你們的尺都超準的耶！以前我在教的時候，一定有人也會說 4、4.1 或 3.8 都有，你們的尺超準的。好，我發現你們量出來的



圖二十

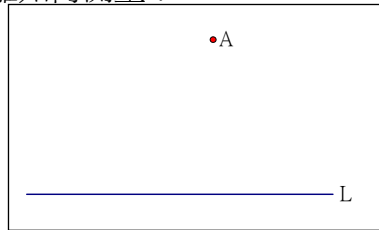
距離都一樣，為什麼呢？距離是不是只有一種說法，有沒有人會去這樣子量(如圖二十中之折線)？有沒有人會這樣量(如圖二十中之曲線)？

93. 學生：不會。

94. 老師：不會，對不對？所以你們都知道要用直線距離。好，再來一題喔，這裡有一個點叫做 A，然後這裡有一條直線叫做 L，在你的題目紙上第 4 題(圖二十一)，量量看 A 到這個直線 L 的距離是多少呢？不要偷看旁邊的喔！幾公分要量出數據來喔！

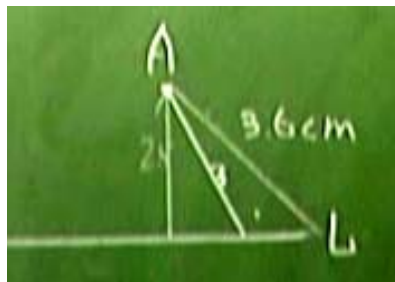
學習單：

4.A 點到直線 L 的距離如何測量？

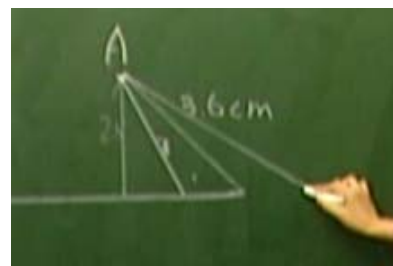


圖二十一

95. 老師：你沒有量出多少啊，要量出來。
96. 老師：好，王語薇，你上去畫，你怎麼量的？
97. 老師：你剛剛量出的數據是多少，你就寫上去。
98. 老師：好，他是這樣量，量出 3.6 公分的(圖二十二)。姜丞璿換你了，來，我看到他有兩種計算方法，兩種方法都把它畫出來。
99. 老師：另外一種啊，跟他差不多，是不是？好，我剛剛看到姜丞璿還有多一條在這邊，3 公分(圖二十二)。
100. 老師：我還有看到一個同學這樣畫，然後他就不知道要畫到哪裡去了(圖二十三)。



圖二十二



圖二十三

101. 老師：你們有沒有發現好多同學答案都不一樣耶，那到底什麼是距離啊？剛剛講了 A、B 兩點的距離，有沒有人會這樣畫(折線)？有沒有人會這樣畫(曲線)

)(圖二十)？

102. 學生：沒有。

103. 老師：為什麼沒有？

104. 學生：直線距離。

105. 老師：直線，為什麼你會選擇直線？

106. 學生：最短。

107. 老師：喔！說的好，最短。因為最短，同樣的，我現在 A 點到這個直線要找最短距離，請問要怎麼找才會最短？

108. 學生：垂直。

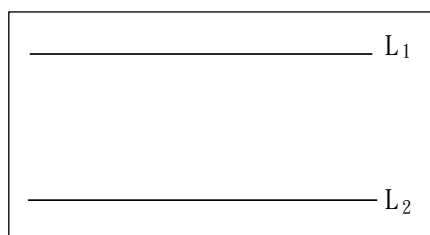
109. 老師：垂直，對！所以我剛剛看到姜丞璿在畫了這個以後，他猛然就想到應該畫垂直，所以我有看到，他不是隨便亂畫的，剛剛有同學，是拿了尺，就這樣隨便就畫下來了，可是姜丞璿不是，他是怎麼畫的？他把直角頂的一邊(股)對齊 L，另一邊(股)對準 A 畫下來，然後才找到最短距離，這樣懂嗎？所以我們不管要測量誰跟誰的距離都要想「最短在哪裡？」，所以點到直線的距離要畫垂直的才對。我剛剛看到除了這五個以外，其它通通都對了，只是不知道你有沒有把這個垂直畫出來，垂直的用意是要找最短距離，好，接下來就進行到我們今天說的是什麼主題啊？

110. 學生：平行。

111. 老師：對，你們覺得平行線的距離要怎麼量？看學習單的第 5 題(圖二十四)，你覺得這兩條平行線的距離是多少？

學習單：

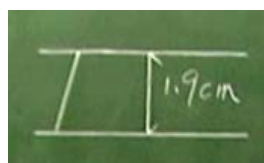
5.若 $L_1 \parallel L_2$ ，這兩條平行線的距離如何測量？



圖二十四

112. 老師：來，你上去畫。

113. 老師：好，謝謝，拍拍小手。你有沒有看到他也用直角頂？你可不可以這樣畫？（
如圖二十五左邊的斜線）

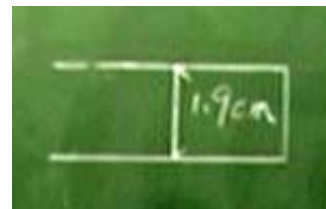


圖二十五

114. 老師：顯然這一條(左邊的斜線)一定比它(右邊的垂直線段)長，所以我們剛剛說所謂的距離一定要找什麼？

115. 學生：最短。

116. 老師：對，最短的距離。所以這個比較長，不一樣。所以，我們要找的是最短的距離。有沒有人畫的位置跟他不一樣？但是量出來的竟然是一樣的數據，有沒有？我有看到張芷瑄，來，你畫你的。（



圖二十六

圖二十六右邊的垂直線段)

117. 老師：他畫在不一樣的地方，他也有用直角喔，你量的出來也是 1.9 嗎？對，好，來，謝謝他。我發現張景雯，他是用這邊是直角，可是因為我已經說這個 L_1 跟 L_2 是平行線了，所以，這裡是直角，下面就一定會是直角，然後呢，剛剛張芷瑄是用下面直角，那上面就一定會是直角，結果他們不管是在

哪裡量出來的距離都一樣，為什麼？為什麼量出來會一樣長？

118. 學生：因為它們是平行線。

119. 老師：因為它們平行？為什麼平行就會一樣長呢？林君宇，你知道嗎？為什麼這是平行線，這裡就會一樣長？

120. 君宇：因為它延伸出去沒有交點。

121. 老師：那個是平行啊，為什麼平行量出來它們的距離就會一樣？好，你站起來說。

122. 學生：因為距離如果不一樣，就沒有平行。

123. 老師：你們用感覺，對不對？他說如果距離不一樣長，比如說，越來越短就會怎麼樣？就會有交點，就沒有平行。來，郭信德，你想到什麼？為什麼這兩段會相等？

124. 信德：長方形。

125. 老師：對，這是一個什麼形？四個角都是 90 度的叫做什麼形？

126. 學生：正方形。

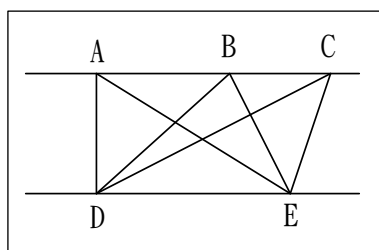
127. 老師：啊？正方形？四個角都是 90 度的叫做什麼形？矩形、長方形，長方形的對邊會不會一樣長？會啊！所以我們得到一個平行線的性質，是什麼呢？平行線之間會怎樣？距離永遠相等。要量距離的話，你可不可以從這點畫下來，從這一點畫下來，或從這點畫下來，請問這裡通通都是多少？通通都是 1.9 公分，對不對？所以我們會發現，只要是兩條平行線，不管在哪裡，我們量到的距離通通都一樣，我們把它說成「平行線之間處處等距離」。下一節課，有一個例題會讓你們看看這個性質要怎麼用，我們先下課，下一節準時回來！

【第二節】

128. 老師：剛剛我已經教你們平行線之間處處等距離，我們來看它的應用(圖二十七)
- ，這裡有二條平行線， L_1 跟 L_2 是平行的，然後我在這裡畫一個 $\triangle ADE$ ，是一個直角三角形，它的面積我們叫做 a ，我把它用紅色的筆畫起來，然後再畫一個三角形，我沒有說它是等腰喔，這個藍色的三角形叫做 $\triangle BDE$ ，最後再畫一個鈍角 $\triangle CDE$ 。這三個三角形的面積，我們把紅色的 $\triangle ADE$ 叫做 a ， $\triangle BDE$ 的面積是 b ， $\triangle CDE$ 的面積是小寫的 c ，這三個三角形的面積有什麼關係？我都沒有給你們數據喔，你覺得它們的面積要怎麼算？ a 、 b 、 c 可不可以比較出它們的大小關係，誰最大，誰最小？還要告訴我為什麼！不要直接告訴我，就這樣嘛。

學習單：

- 6.如圖， $L_1//L_2$ ， $\triangle ADE$ 、 $\triangle BDE$ 、及 $\triangle CDE$ 的面積分別為 a 、 b 、 c ，請比較 a 、 b 、 c 的大小，並說明理由。



圖二十七

129. 老師：不用量！需要量嗎？好，量也是一個方法。今天好像很多人都變聰明囉，都會。好，怡靜，你告訴我，你的答案是什麼？
130. 怡靜：一樣。
131. 老師：一樣，他說 $a=b=c$ ，為什麼會一樣？
132. 怡靜：底 $\times$ 高 $\div 2$ 。
133. 老師：底 $\times$ 高 $\div 2$ ，然後呢？大聲一點，底 $\times$ 高 $\div 2$ ，我也知道，三角形面積公式大家

都知道，為什麼就會一樣？底一不一樣？

134. 學生：一樣。

135. 老師：一樣，三個三角形的高呢？

136. 學生：一樣。

137. 老師：也一樣，所以面積一樣。好，坐下，大家好像反應都很好，來，我們看到紅色三角形的底是誰？

138. 學生： $\overline{DE}$ 。

139. 老師：藍色三角形的底是誰？

140. 學生： $\overline{DE}$ 。

141. 老師：黃色三角形的底是誰？

142. 學生： $\overline{DE}$ 。

143. 老師：有沒有一樣？

144. 學生：有。

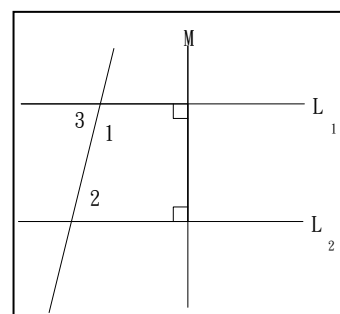
145. 老師：好，紅色三角形的高，因為它是直角三角形，所以這個($\overline{AD}$)就是高了，好，藍色三角形的高在這邊，黃色三角形的高在這邊，所以你發現這三段怎麼樣？

146. 學生：一樣。

147. 老師：一樣嘛，對不對？它們為什麼會一樣？有一句話叫做什麼？「平行線之間處處等距離」，答對了，底相同，高也相同，所以它們的面積就會一樣，這樣懂了嗎？這個是平行線的應用。

148. 老師：接下來我要講第三個東西，你們有沒有發現，剛剛我們在判別平行線或者要畫二條平行線的時候，我們必需要用到一條 M 同時垂直於 L_1 跟 L_2 ，所以我們就產生了這樣子的一個圖形(圖二十八)，可是每次都要畫垂直，請問

你會隨身攜帶三角板嗎？不會，所以我們也不見得一定要用直角，我就想說，可不可以畫一條斜直線來做判別？我問你們，如果 L_1 跟 L_2 平行，你覺得 $\angle 1$ 跟 $\angle 2$ 會有什麼關係？好像很多人舉手。好，張舒涵，你說。



圖二十八

149. 舒涵： $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ 。

150. 老師：為什麼？陳志豪，你說為什麼？

151. 志豪：因為它是一條直線。

152. 老師：不對，有沒有人發現？小老師，好，你說。

153. 學生：直線裡的角度是 180° 。

154. 老師：直線的角度是 180 ，直線的角度 180 是指鄰角。怎麼會扯到這邊來呢？王永欣，你說說看。

155. 永欣：旁邊那個角度($\angle 3$)跟 $\angle 2$ 一樣。

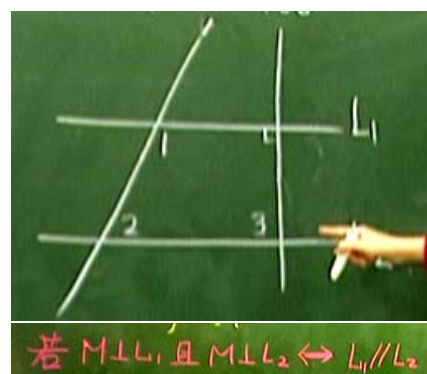
156. 老師：為什麼跟 $\angle 2$ 一樣？誰告訴你的？沒有喔，好坐下，陳思安，你說。

157. 思安：因為它是平行線。

158. 老師：就是問你為什麼平行線，這裡就會相等？

159. 思安：旁邊那個($\angle 3$)就是 $\angle 2$ 。

160. 老師：旁邊那個就是 $\angle 2$ ，為什麼？你說的跟王永欣一樣，不對，坐下。再提示一點點，我們剛剛說 L_1 跟 L_2 會平行的話，這樣畫是不



圖二十九

是兩個都是直角？那 $\angle 1 + \angle 2$ 你們覺得會等於 180 度，為什麼呢？這邊是 90 度，為什麼 $\angle 1 + \angle 2$ 就會是 180° (圖二十九)？有沒有人想出來了？好，你站起來說，你說對了，快點，等一下有獎品喔！

161. 祖鞍：就是四邊形的四個角加起來會等於 360° 。所以 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ 。
162. 老師：答對了，哇！太厲害了！所以上課要看這邊，老師的手一直比、一直比都沒有理我，這裡我比了這一整個形狀是四邊形啊！四邊形內角和幾度？
163. 學生： 360° 。
164. 老師： 360° ，這裡 90° 度，還剩下 270° ，再扣掉一個 90° 度，剩下 180° ，所以這兩個角加起來就等於 180° ，我們就知道，如果這兩條是平行的話，那麼這兩個角加起來就會等於 180° 度，我們就得到，如果 L_1 跟 L_2 平行的話，我們就把這個 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 取了一個名稱，叫做什麼角？因為我們把這兩條(L_1 跟 L_2)叫平行線，這一條(M)叫做截線， $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 在截線的同一側，可是在兩條平行線的裡面，所以我們就把它們叫做同側內角，而加起來 180° 度，在數學上有一個術語叫做「互補」，所謂互補就是兩個角加起來等於 180° ，所以平行線的同側內角會互補，那同樣喔！剛剛我們是不是有雙箭頭？表示可以推過來，也可以當做推回去的依據。如果，現在這裡有兩條線，我不知道它們是不是平行，可是我畫了一條斜線後，發現 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，請問，它們會不會平行？
165. 學生：會。
166. 老師：為什麼？我們現在還沒有說明同側內角加起來 180° 度就會平行，所以你不能告訴我說因為加起來 180° 就是平行，請問，我們現在唯一可以用的依據是什麼？怎麼樣可以說它們是兩條平行線？垂直，對不對？所以我們是不是要另外補一條跟這邊(L_1)垂直的直線？可是因為今天這兩條線我還不知道有沒有平行，所以這邊($\angle 3$)會不會垂直？不知道！吳東穎，這個 $\angle 3$ 會不會是 90° 度？請問你， $\angle 3$ 要怎麼算？這四邊形的內角和幾度？
167. 東穎： 360° 度。

168. 老師：然後呢？我要算 $\angle 3$ ，所以我要把誰扣掉？

169. 東穎：90°。

170. 老師：還要扣掉誰？

171. 東穎：180°。

172. 老師：為什麼有 180°？

173. 東穎： $\angle 1$ 跟 $\angle 2$ 是 180° 。

174. 老師：所以 $\angle 3$ 是幾度啊？

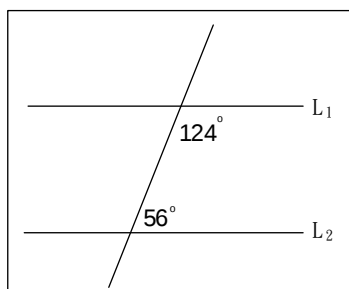
175. 東穎：90 度。

176. 老師：這樣證明了它們會是平行線，所以我們就會發現，我只要這裡畫一條垂直線，這裡自然會垂直($\angle 3$)，為什麼這裡($\angle 3$)會垂直？因為 $\angle 1$ 加 $\angle 2$ 是 180° ，所以我們就可以省略所有的步驟了，我們就可以說，同側內角如果互補的話，那兩條線就會是平行線，所以，一定要做垂直線嗎？不用，做什麼線也可以？斜的！可是斜的的時候，這兩個角加起來一定要幾度？ 180° 。現在你看一下我們的學習單第 7 題(圖三十)。

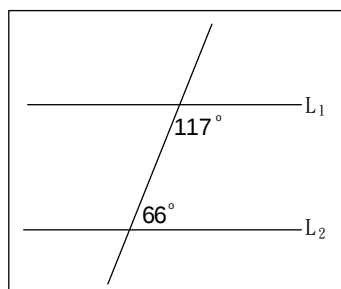
學習單：

7. 如下圖， L_1 和 L_2 會不會平行？為什麼？

(1)



(2)



圖三十

177. 老師：吳映璇，第(1)小題的這兩條會不會是平行線？為什麼？

178. 映璇：會，因為加起來等於 180° 。

179. 老師：對，那我們要用專業術語來呈現你的數學素養，你要講什麼？

180. 映璇：因為同側內角互補。

181. 老師：很好，因為同側內角互補，所以它們就會是平行線。第(2)小題，彭郁筑，有沒有平行？

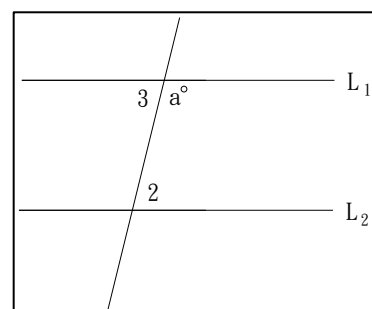
182. 郁筑：沒有， $\angle 1$ 跟 $\angle 2$ 相加不等於 180° 。

183. 老師：同樣用專業一點的術語回答，叫做什麼？

184. 郁筑：同側內角不互補。

185. 老師：好，答對了，所以我叫你們看這兩條直線有沒有平行，你就可以去看它們的同側內角，同側內角必需怎麼樣才會平行？互補，就是加起來等於 180° 。第(2)小題加起來是多少？ 183° ，並沒有等於 180° ，所以會不會平行？不會。

186. 老師：接下來我再問，剛剛有同學覺得這個是 $\angle 2$ ， $\angle 1$ 的旁邊就會是 $\angle 2$ ，為什麼？可不可以照剛剛的推論講給我聽？這高難度，要證明就比較難了，你可不可以用剛剛的說法說給我聽，就是說，我假設這裡是 a 度，題目告訴你 L_1 平行 L_2 ，請問這裡($\angle 2$)會幾度(圖三十一)？



圖三十一

187. 學生： $180 - a^\circ$ 。

188. 老師：那隔壁($\angle 3$)呢？我們剛剛說因為這是一條直線，所以鄰角加起來 180° 度，叫做互補，所以這邊($\angle 3$)會是？

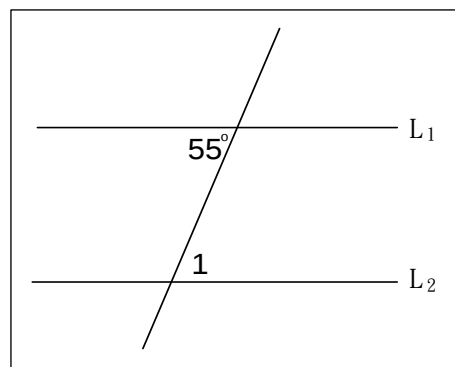
189. 學生： $180 - a^\circ$ 。

190. 老師：所以有沒有發現這兩個角怎麼樣？

191. 學生：一樣。

192. 老師：所以我們發現如果這兩條是平行線的話

，這兩個角會一樣，我們也給這兩個角一個名稱吧！這兩個叫什麼角啊？同樣在平行線裡面，所以也是「內」，可是它們在截線的不同邊，所以它們是交錯的，我們就叫做內錯角。所以我們現



圖三十二

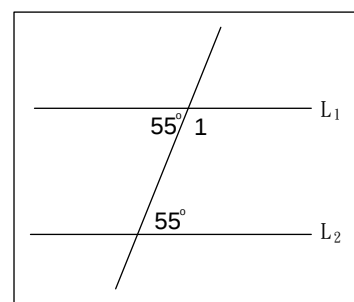
在就發現，如果 L_1 平行 L_2 ，我們就得到內錯角會相等。所以如果我今天畫 L_1 跟 L_2 是平行的，這裡是 55° ，那麼這裡($\angle 1$)會是幾度(圖三十二)？

193. 學生： 55° 。

194. 老師：因為這兩個是什麼？

195. 學生：內錯角。

196. 老師：內錯角會相等，所以這裡 55° ，這裡($\angle 1$)就是 55° 。



圖三十三

197. 老師：如果我今天反過來，我不知道它們有沒有平行，可是我知道這裡 55° ，這裡也 55° ，你可不可以告訴我它們會平行，你要怎麼證(圖三十三)？我們現在判別平行有幾種方法了？

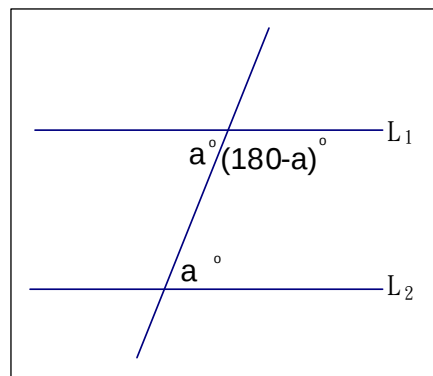
198. 學生：兩種。

199. 老師：哪兩種？一、用什麼？垂直，二條線都同時垂直於某一條直線，它們就會平行。還有一種方法是什麼？同側內角互補。你覺得要用什麼來講比較快？

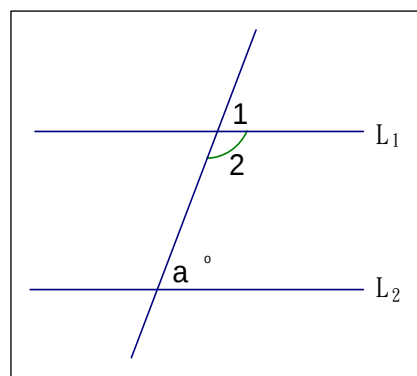
200. 學生：同側內角。

201. 老師：好，你告訴我，這個 55° 度(下方的)的同側內角在哪邊(圖三十三)？盧易成，你上來，跟我一樣做記號。

202. 老師：好，他說同側內角在這裡，對不對啊？所謂同側是指在哪的同側？截線的同側，好，這兩個叫同側內角，這裡是 55° ，這裡($\angle 1$)應該是幾度？因為這是直線，直線一定是 180° ，這裡 55° ，所以這裡($\angle 1$)幾度？ 125° ， $180-55$ 所以是 125° ，它們加起來有沒有 180° ？有，同側內角互補，是不是就可以說平行了？同樣的道理，不一定是 55° ，如果這邊是 a° ，那這裡是什麼(圖三十四)？跟它是不是加起來會是 180° ？所以這裡就是 $(180-a)^\circ$ ，那這兩個加起來有沒有等於 180° ？有，所以它們兩條就會平行，我們同樣也推過去。



圖三十四



圖三十五

203. 老師：可是還有一個更漂亮的地方，你看(圖三十五)，這裡是 a° 度，請問你這個角($\angle 1$)幾度？如果 L_1 跟 L_2 平行，你剛剛已經學過，只要看到平行，你可以推出什麼？同側內角互補，還有內錯角相等，所以請問，它的內錯角在哪裡？張勻暄，哪裡叫內錯角？上來畫一下。好，他畫的這個($\angle 2$)叫什麼角？

204. 學生：同側內角。

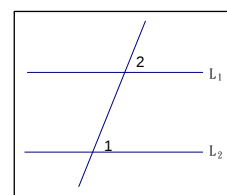
205. 老師：好，沒關係，他要用同側內角來證明，那同側內角跟它(a°)會怎麼樣？

206. 學生：互補。

207. 老師：互補。所以這裡要怎麼算？這裡是 a ，這邊($\angle 2$)多少？ $180-a$ ，那這兩個($\angle 1$ 和 $\angle 2$)又是一個直線，所以這個角($\angle 1$)是不是又要用 180 再減它($\angle 2$)，對不對？所以你看喔， 180 減掉這一個角，這個角是 $180-a$ ，所以去括號要 $180 - 180 + a$ ，所以 180 消掉，變成多少？ a ，有沒有發現這兩個角竟然會怎麼樣？

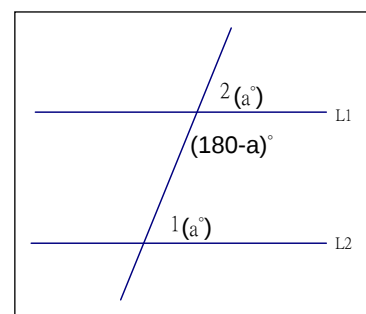
208. 學生：一樣。

209. 老師：一樣耶！有沒有看到？有沒有發現這兩個角一樣？如果 L_1 跟 L_2 平行的話，這兩個角會一樣，這兩個角給它們什麼名稱呢(圖三十六)？



圖三十六

210. 老師：想一下喔，你看這裡($\angle 1$)跟這裡($\angle 2$)有沒有都在十字路口的右上方，有沒有發現位置是一樣的？位置相同，我們就叫做同位角。所以，我們就發現第四個喔， L_1 平行 L_2 ，我們就可以證明到同位角是相等的，可以嗎？



圖三十七

211. 老師：同樣的，我現在要問，那可不可以推回去？我

現在如果不知道兩條線有沒有平行，可不可以推回去？不知道它們有沒有平行喔，我現在知道這裡是 a 度($\angle 1$)，這裡是 a 度($\angle 2$)，請問你這兩條直線會不會平行(圖三十七)？為什麼？現在我們還不知道這個對不對(指同位角相等則平行的性質)，但是上面有三種方法，你要用哪一種方法來證？

212. 學生：同側內角。

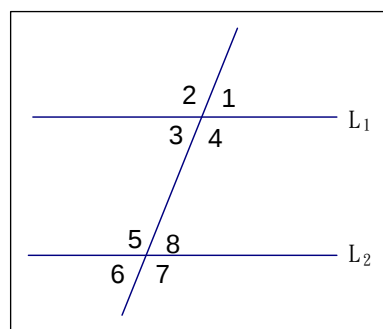
213. 老師：你要用同側內角是不是？好，那這個 a° 的同側內角在哪邊？陳志豪你今天好像都沒上台，來，換你，

214. 老師：對，那邊幾度？
215. 志豪：這個是 $(180-a)^\circ$ 。
216. 老師：為什麼？
217. 志豪：因為它互補的話。
218. 老師：我現在不知道平行，我沒有說它平行喔！
219. 志豪：直線 180 度。
220. 老師：對，好，謝謝你。我現在還不知道平不平行，只知道這兩個都是 a 度，可是至少這是一條直線(指截線)，直線的話，這兩個角加起來會等於 180 度，所以這裡是 a° ，這裡就是 $(180-a)^\circ$ ，然後剛剛你們說要用什麼方法證明？要用同側內角加起來有沒有等於 180 來證明它是平行線，對不對？所以我們就要先算這兩個加起來有沒有等於 180 呢？我們算算看， $180-a$ 再加上這個 a ，請問有沒有等於 180？有，剛好 $-a$ 跟 $+a$ 消掉就等於 180，我們就發現它們是平行的。所以，我們現在就發現，這個也可以推回去的。我們現在，注意喔！結論：第一個是平行線的判別方法有幾種？兩條線我一畫出來，不知道它是不是平行的時候，可以有幾種方法去判別？四種，哪四種？第一種畫一條？
221. 學生：垂直線。
222. 老師：垂直線，跟第一條垂直也會跟第二條垂直，對不對？同時垂直於這個 L_1 跟 L_2 的。第二個方法是什麼？同側內角加起來有沒有等於 180° 。第三種方法是內錯角有沒有相等。第四種方法是同位角有沒有相等。只要其中有一個成立，它們就會是平行線。反過來，我只要一告訴你平行線，你就可以知道什麼角會一樣？同側內角會一樣嗎？同側內角會怎樣？
223. 學生：互補。

224. 老師：然後什麼角會一樣？

225. 學生：內錯角跟同位角。

226. 老師：我剛剛發現你們不太會看那個角度的關係，
所以，我再讓你們練習一下，這裡有 1、2、
3、4、5、6、7、8，八個角，同位角有哪些
？誰跟誰是同位角？這裡有二個 family 喔，
 $\angle 1$ 跟誰是同位角(圖三十八)？



圖三十八

227. 學生： $\angle 8$ 。

228. 老師： $\angle 2$ 呢？

229. 學生： $\angle 5$ 。

230. 老師： $\angle 3$ 呢？

231. 學生： $\angle 6$ 。

232. 老師： $\angle 4$ 呢？

233. 學生： $\angle 7$ 。

234. 老師：所以同位角是不是最容易看？再來，內錯角，既然講「內」喔，所以一定
在這兩條平行線的裡面，所以裡面有幾個角？

235. 學生：四個。

236. 老師：四個角，所以分組只能分到幾組？

237. 學生：兩組。

238. 老師：所以內錯角只有兩組， $\angle 3$ 跟誰？

239. 學生： $\angle 8$ 。

240. 老師： $\angle 4$ 跟？

241. 學生： $\angle 5$ 。

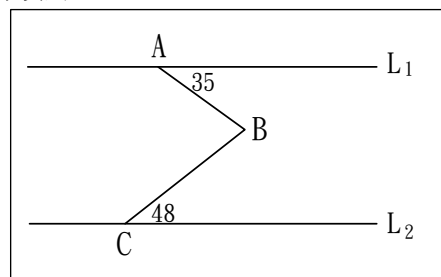
242. 老師：還有一個什麼角？同側內角，同側內角要在截線的同一邊，而且要在兩條平行線的裡面，所以 $\angle 4$ 跟誰是同側內角？
243. 學生： $\angle 8$ 。
244. 老師： $\angle 3$ 跟？
245. 學生： $\angle 5$ 。
246. 老師：要在截線的同一側，所以就只有3跟5，4跟8。再說一次，同位角有幾組？
247. 學生：4組。
248. 老師：有4組，1跟8，2跟5，3跟6，4跟7，有四組喔！同側內角有幾組？2組，3跟5，4跟8。再來還有一個叫做什麼角？內錯角，有幾組？
249. 學生：兩組。
250. 老師：誰跟誰？
251. 學生： $\angle 3$ 跟 $\angle 8$ ， $\angle 4$ 跟 $\angle 5$ ，
252. 老師：好，這樣角度會看了沒？
253. 老師：好，最後一個大難題囉(圖三十九)！ L_1 平行 L_2 ，我這樣畫，畫一個轉折，這裡是35度，這裡48度，請問這個角($\angle ABC$)幾度？你會不會算，在我的學習單最後一題，第8題，提示：要畫一條輔助線，你會怎麼畫那個輔助線呢？我寫了方法一、方法二，其實這一題有好多方法，你只要大膽，敢畫出一條線，就可以算了，所以你要怎麼算呢？

學習單：

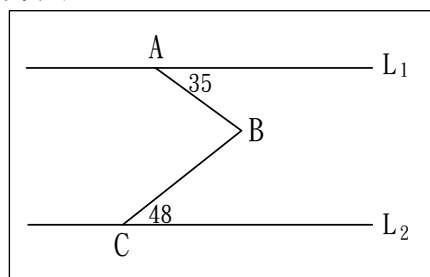
8.如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，求 $\angle ABC$

(提示：畫出一條輔助線)

方法一：



方法二：



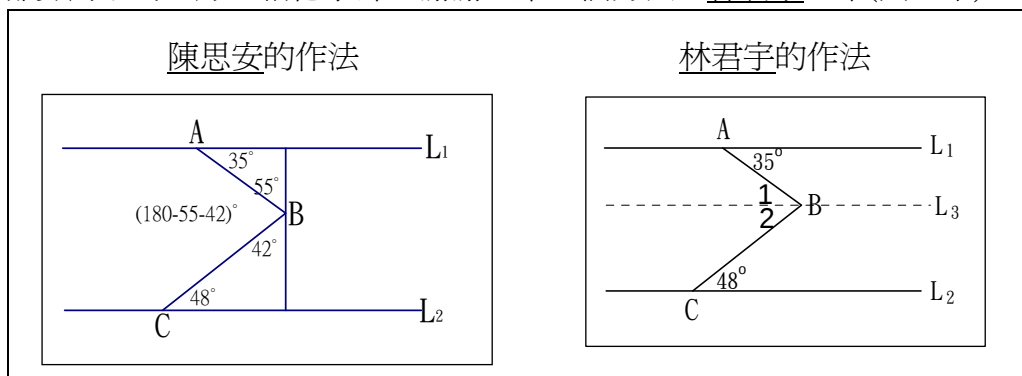
圖三十九

254. 老師：你可以把線延長，或者是把誰連起來都可以。你好快喔！你的方法對喔！我又看到一個方法了，張舒涵，還不錯。你這樣也可以算，想一下，你的也可以喔！隨便畫一條補助線你就可以算，這方法好。不錯，你算出來了。好，等一下，你來一個。好快耶！你趕快，有沒有 idea？你已經有一個方法了，是不是？你也算出來了。你的方法也不錯。這個左邊這個，你算出來了嗎？你有沒有？耶！兩種，這個不錯。
255. 老師：我剛剛看到了有幾種方法，第一種，過 B 點畫垂直於 L_1 ，那也會和 L_2 垂直，好，這誰是這樣子的？陳思安，你來算這一題。剛剛還有同學的輔助線是從 B 點作平行線，是誰？這麼厲害，很獨特，林君宇，這給你。剛剛還有，有人連 A 點和 C 點的，誰有算出來？沒有啊！有這樣連的舉手，但是沒有算出來，是不是？我告訴你，這是可以算的，等一下看誰厲害，把它算出來。還有誰有別的方法？喔！剛剛還有一個，這個方法很好，延長 AB，盧易成，等一下你再上來寫。陳思安，你先告訴大家你怎麼算的。
256. 思安：就先用 180 把 35 和 90 度減掉，算出這個角度(55°)，再用 180° 減掉 48 跟 90 度算出這個角度(42°)，最後 180 減掉 55 度和 42 度，就算出 $\angle ABC$ (圖四十)

257. 老師：爲什麼最後要用 180 來減？

258. 思安：因爲這個角是 180。

259. 老師：因爲那邊是一條直線，所以會是 180° ，對不對？用這種方法的舉手，你們都算對了嗎？好，給他掌聲，謝謝！第二個方法，林君宇，來(圖四十)。



圖四十

260. 老師：他這個方法你看看。

261. 學生： 35° 角跟 $\angle 1$ 一樣， 48° 角跟 $\angle 2$ 一樣。

262. 老師：爲什麼一樣？

263. 學生：內錯角。

264. 老師：內錯角相等。

265. 學生：然後兩個加起來就是 83° 。

266. 老師：有沒有簡單明瞭，厲害！給他大一點的掌聲。他是過 B 點去做一條平行線，那這兩條平行線(L_1/L_3)的內錯角會相等都是 35° ，同樣的 L_3 跟 L_2 也會平行，所以這兩個內錯角也會相等，所以就都是 48° ，這個 $\angle ABC$ 被分割成兩部份，一部份是 35° ，一部份是 48° ，所以加起來多少？ 83° ，很好喔！好這個誰？沒有，郭信德，這個給你。這個，盧易成，不要害羞，你直接說你怎麼算，然後就把數據寫上去，上面可以當計算紙。說一下，名稱忘記，這

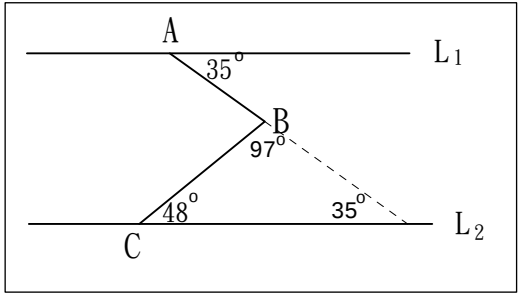
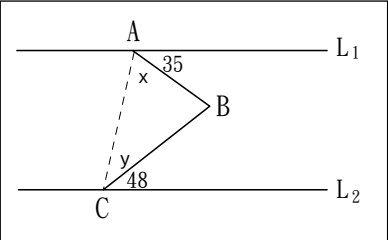
裡可以借你看，我有小抄，不要害羞嘛！好，第一個 35° 是怎麼來的？

267. 易成：內錯角(圖四十一)。

268. 老師：內錯角會相等，所以 35° 就算出來了，知道嗎？

269. 易成：然後三角形內角和 180，180 減掉這兩個(48° 和 35°)就是 97° ，然後 180 再減掉 97 就是了。

270. 老師：有沒有聽懂？好，我幫他說好了，他太內向了。他說，他剛剛是從這一條 $\overline{AB}$ 延長出來的，所以直線 AB 就相當於一條截線，這兩個內錯角相等，都是 35° ，然後有一個三角形內角和 180° ，180 扣掉 48 扣掉 35 就剩下 97° ，然後因為它這裡是一條直線啊，所以這兩個角是不是又是 180° ？所以 180 再扣一次 97，就得到 $\angle ABC$ 幾度？ 83° ，好，謝謝他。最後一個，郭信德，果然不負眾望想出來了，上來說明一下吧！

<u>盧易成的作法</u>	<u>郭信德的作法</u>
	$x + 35 + y + 48 = 180$ $x + y + 83 = 180$ $x + y = 97$ 

圖四十一

271. 信德：這邊設 x ，這邊設 y 。

272. 老師：把二元一次方程式都搬出來了。

273. 信德：這兩個角加起來會等於 180。

274. 老師：他說設這裡 x 這裡 y ，這兩個角為什麼加起來 180？

275. 信德：因為是同側內角互補。

276. 老師：同側內角互補。然後呢？

277. 信德：三角形內角和是 180 度， $x+y$ 是 97，所以 $\angle ABC$ 是 83°

278. 老師：好，謝謝，太厲害了，隨便加一條輔助線，他就又想出來了。這兩個是同側內角，所以這個式子($x + 35 + y + 48 = 180$)有沒有問題？然後這兩個($35+48$)加起來是 83，所以移過去減，就剩下 97° ，在這裡有一個三角形 ABC，三角形的內角和是 180° ，其中 x 跟 y 加起來是 97° ，所以 180 減 97，剩下的 83° 就是 $\angle ABC$ ，這樣有沒有問題？還有沒有人有別的辦法？沒有，回去還可以想想喔！其實這一題證明的方法還不只四種，想到有重賞喔！我們今天的課就上到這邊。

參、教學說明

這個單元是平行，在教案設計方面，一般來講，「平行」，小學已經有教過，那是說：「同時跟一條直線垂直的兩條直線叫做平行線」，我平常在教的時候，他們其實都忘記了，大部份都是想說「永遠沒有交點」，他們都是從這邊切入，所以，幾乎我的整個教案是把小學的東西再重頭帶過一次，而且我在開始的時候，讓他們先去畫兩條直線的關係，讓他們更明確的了解直線是可以無限延伸，然後可以延長到沒有交點，再去跟他們說，真的測量是要用垂直線的。另外，國中一般在證明平行線的時候，大概是都是從同位角去切入，可是我教學這麼多年發現，學生比較容易去想的是用「有沒有交點？」，而有沒有交點的判別，我比較贊成從同側內角去切入，所以我都是用內側內角去帶出其它的同位角跟內錯角的證明，這是我這次教案較不一樣的地方。另一點就是我有加進「點跟點的距離」，「點跟直線的距離」，「二條平行線的距離」，讓他們比較清楚的了解距離的定義，這樣他們在測量距離的時候比較不會混淆，到底兩條平行

線的距離要畫垂直還是要畫斜的？我在最後面教案設計的時候，因為我覺得學生平常在做同側內角、同位角的時候，對名詞都比較不容易背起來，所以這個名詞的部份可能就是要再多講解、多練習一下，但是因為我覺得這個應該是他們要回家練習的，所以我在課堂上的教案設計裡面就沒有特別的加進去，只是上課稍微帶一下這些名稱的認識。我最後有設計一個題目讓他們的證明方法是可以用同側內角，也可以用內錯角來證明，就是希望學生可以自己去發現同側內角、同位角、內錯角在平行線的計算都是可以用上去的。

現在講一下今天上課學生的反應，我覺得學生其實在描述平行線的時候，真的就如我預期所說的，他們都覺得平行線就是沒有交點，但是很出乎意外的是有一個同學直接用了平行線的性質，就是平行線之間處處等距離，做為測量平行的工具，他直接就畫了兩條垂直線段，然後說，那兩條如果距離相等的話，就是平行線，他已經用到蠻後面的性質，所以我就把他拉回來，「如果只能畫一條線的話怎麼辦？」他們最後才說出我要的「同時垂直於同一條直線的線段」。再來就是教他們用三角板畫平行線，我發現，本來這個班上是有有一半的同學放棄數學的，可是因為今天這是一個比較新的主題，跟前面的主題比較沒有關聯，所以班上只剩下大概三、五個同學比較沒有辦法進入狀況，其他大部份都可以做出正確的方法來，尤其是平行線的判別，三角板的操作也都還不錯。再來就是，本來我以為平行線的距離，他們會畫出很多奇形怪狀來，結果沒想到全班只有五個人畫錯，我就發現前面加上那一部份，「點跟點的距離，要用最短距離來測量」，這一句話對他們影響很大，所以他們在測量平行線距離的時候很快就畫出垂直距離了。再來就是，我讓他們做三個三角形，平行線那邊三個三角形的地方，我發現他們很快，高一樣、底一樣，幾乎大部份的同學都可以答對，所以我覺得這個單元好像這樣教起來還滿順的，只不過在中間要證明那些「同位角相等則平行」、「內

錯角相等則平行」、「同側內角互補則平行」的性質，可能證明對他們比較難一點，所以我在這邊的證明只是約略帶過而已。但是最後那一題，我在求兩條平行線之間 $\angle ABC$ 的度數，巡了一下，大部份的同學都可以做出輔助線來，用不同的方法去計算出 $\angle ABC$ ，所以我覺得這個教學目標有某個程度達成。

肆、教學後的省思

1. 一開始上課時因太過緊張，所以讓學生先猜測今天上課的主題，但是卻導致學生在畫兩條直線之所有的可能性時，都只想到平行線，變成一個阻礙。
2. 平行線的定義在經過多個例題的實際操作和測量後，學生較能熟悉定義的重要性。
3. 『平行線之間的距離』概念，因為學生都確實瞭解了距離的定義是『最短路徑』，所以在畫兩條平行線的距離時，學生出錯的比例較以往明顯降低。
4. 學生對同位角、同側內角、內錯角的名詞還是不容易熟記，在之後的兩節課會多做一些練習，讓學生能更熟練這些角度。
5. 最後的一個題目因為解題的多樣性，大部分的同學都能找到自己的作法，加深同位角、同側內角、內錯角的應用，明顯感覺同學對這個單元已有適當的瞭解。

尺規作圖

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級上學期

二、教 學 者：台北市福和國中 李進福 老師

三、教學目標：

1. 了解尺規作圖的意義。
2. 能以直尺和圓規進行尺規作圖。

四、活動目標：

【活動一】：能利用圓規複製一條已知的線段。

【活動二】：了解等角作圖的方法，並會用尺規作圖複製一個角。

【活動三】：了解角平分線作圖的方法，並會用尺規作圖在一已知角上作角平分線。

【活動四】：應用平角的角平分線作圖，在一已知直線上的一點作一條與該線垂直的直線。

【活動五】：應用菱形兩對角線互相垂直平分的性質，並會在一已知線段上作中垂線。

【活動六】：應用尺規作圖作三角形高的方法，並會過一已知直線外一點作垂直線。

五、教學概要說明：

尺規作圖即是以直尺和圓規，在平面上完成幾何圖形。直尺：不利用刻度，只是用來連接兩點的直線；圓規：除了畫圓之外，最主要的功能是用來截取一已知線段的長度。上面這兩點是在尺規作圖之前，必須要讓學生了解的基本認知。所以，教學活動從複製一個已知圓開始，讓學生明白所畫出的圓要相同，首先必

須要把圓規張開至相等的半徑。此時，等長的半徑是用圓規“量”出來的，並不是用直尺上的刻度度量。了解如何利用圓規取得長度之後，便可以進入等線段作圖的教學，也可以更進一步地練習數個線段長度的和或差。

至於其他尺規作圖的部份，只要明白以圓規畫弧的動作其實只是在複製等長的線段，就可以了解一些尺規作圖作法的原理。比如複製一個等角的作法，就是複製一個包含該角的三角形，只是少了將第三邊連接的動作（詳見【活動二】）；又比如作一已知角的角平分線，如果把弧與弧（線）的交點以線段連接起來，則可以發現全等三角形作圖的痕跡（詳見【活動三】）。因此，在學習尺規作圖時，應該看見這一些很重要，但是又沒有連接起來的線段，才可以了解作圖方法的原理。

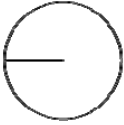
本教學活動的設計，不只要求學生能明白一些作圖方法背後的原理，也希望透過探索式的活動，由學生自行探索出這些尺規作圖的方法。比如在探索角平分線的作圖時，先用紙張剪出一個角，然後很直觀地將手上的角對摺一半即是平分一個角。接下來把角的尾端以剪刀剪齊，再把對摺的紙張打開就可以發現有兩個全等的三角形重疊在一起，而這兩個三角形共用的邊，即是這個角的平分線。此時回到尺規作圖上，作一個已知角的角平分線即是要在這個已知的角內部畫出兩個共用一邊的全等三角形，所以就可以要求學生思考：如何才能達到這個要求？（詳見【活動二】）。

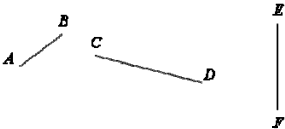
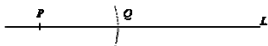
尺規作圖的方法（作等角、角平分線、中垂線…等）都有其原理，如果能讓學生自行探索出這些作法的原因，而不是直接告訴學生怎麼作，想必學生對於尺規作圖的感覺會有所不同。直接告訴學生作法然後讓學生反覆地練習，感覺起來有點像是技能的傳授，而不是一個數學活動，所以本教學活動便以探索式的教學

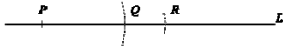
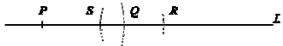
，讓學生不只學會尺規作圖，也能發現每一個作法背後的數學意義。

六、教學活動設計：

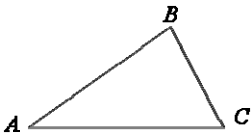
【活動一】能利用圓規複製一條已知的線段。

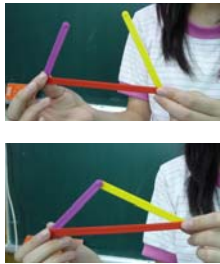
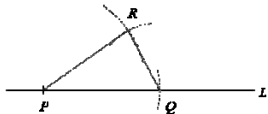
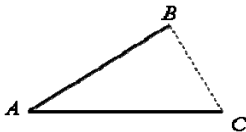
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
仿畫	1.學習單上第 1 題，有一個圓，圓中的線段是圓半徑，請在旁邊再畫一個相同面積的圓。  2.說說看，你怎麼知道這兩個圓一樣大。		會利用圓規量取半徑。
工具分析	3.圓規除了可以畫圓之外，最主要的功能是什麼？ 4.所謂的尺規作圖，就是利用直尺畫直線，但是不利用尺上的刻度。如果要量長度，就要利用圓規。	- 了解圓規可以取得一個線段的長度。 - 學生習慣上會先利用直尺上的刻度，度量出半徑的長度。因此要強調只要用圓規直接取得圓的半徑長，就可以畫出等大小的圓。	- 能回答:只要圓規張開的半徑和學習單上的相同即可。 - 能回答:圓規可用來量長度。

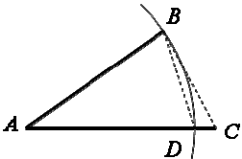
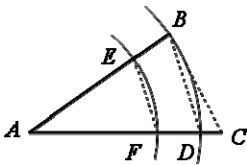
求作等線段	5.學習單上第 2 題，有三條線段 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$，請畫出三條線段，其長度分別為 $\overline{CD}$、$\overline{AB+CD}$、$\overline{AB+CD-EF}$。  6.說明一下你是怎麼畫的，你如何確定畫出來的長度是正確的？	- 先作一直線，然後再利用圓規，在直線上取所需的線段長。 - 將圓規張開至兩隻腳的寬度為 $\overline{CD}$，在 L 上以 P 為圓心、$\overline{CD}$ 為半徑畫弧交直線 L 於 Q，則 $\overline{PQ} = \overline{CD}$。 - 再將圓規張開至兩隻腳的寬度為 $\overline{AB}$，在 L 上以 Q 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑，交直線 L 於 R，則 	- 會利用圓規取得已知線段的長度。 - 會畫出數個線段長度的和或差的一條線段。 - 能說明自己畫法及確定所畫出的長度是正確的理由。
---	--	---	---

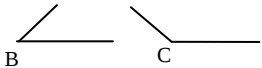
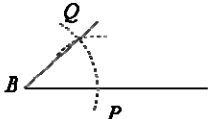
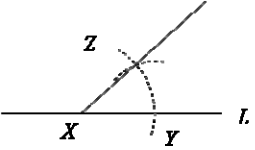
		$\overline{PQ} = \overline{CD}$ 、 $\overline{QR} = \overline{AB}$ ，所以 $\overline{PR} = \overline{AB} + \overline{CD}$ 。  $\overline{PQ} = \overline{CD}$ 、 $\overline{QR} = \overline{AB}$ 、 $\overline{RS} = \overline{EF}$ ，所以 $\overline{PS} = \overline{AB} + \overline{CD} -$ $\overline{EF}$ 。 	
--	--	--	--

【活動二】了解等角作圖的方法，並會用尺規作圖複製一個角。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
•SSS 全等三角形作圖	1.學習單上第三題，有一個三角形ABC，我們想要畫一個一模一樣的三角形。 	•此時可以用扣條演示，在扣條的長度固定的情形之下，兩條扣條以旋轉的方式互相接合在一起，其動作即是在畫一個圓弧。	•會作 SSS 全等三角形尺規作圖。

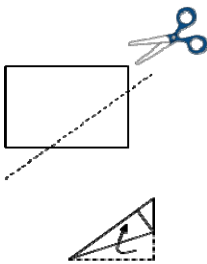
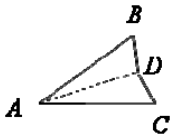
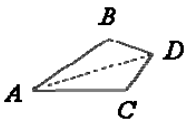
• 畫等角	2.先在紙上畫一條線段，而且長度等於$\overline{AC}$。我們可以用圓規取得$\overline{AB}$和$\overline{BC}$的長度，請問：這兩條線的方向要如何決定，才會剛剛好接在一起？ 3.請利用剛剛觀察到的結果，在學習單上複製一個一模一樣的三角形。 4.學習單第3題，給定一個角，以尺規作圖再作一個等角。請問和畫一個三角形有何關係？ 	•  • 先畫出和$\overline{AC}$等長的$\overline{PQ}$，再分別以P、Q為圓心，$\overline{AB}$和$\overline{BC}$為半徑畫弧，得到交點R。連接$\overline{PR}$、$\overline{QR}$，$\triangle PQR$即為所求。  • 作法就和前面相同。將尾端B、C兩點連接之後就形成一個三角形。  • 只是要畫角A，第三邊$\overline{BC}$就不用再畫出來。	• 能利用圓規複製一個一樣的三角形。 • 能了解等角尺規作圖的步驟。
--------------	---	--	--

	5.以 A 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 $\overline{AC}$ 於 D 點（此時 $\overline{AB} < \overline{AC}$），得到等腰三角形 ABD。若我們複製 $\triangle ABD$ 和複製 $\triangle ABC$ 所得到的角 A 有無不同？ 		• 能回答:得到的角 A 是相同的。
	6.再以 A 點為圓心，任意長為半徑畫弧交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於兩點 E、F（弧的半徑不可大於 $\overline{AB}$）。若我們複製 $\triangle AEF$ 得到的角 A 是否依然相同？ 		• 能回答:相同。

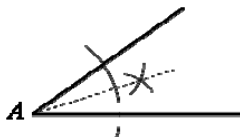
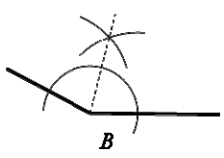
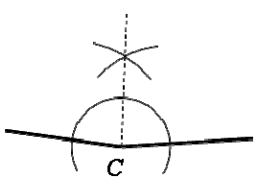
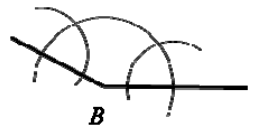
	7.如果只是想要畫出角 A，沒有限定角 A 兩邊的長短，會用那一個三角形畫比較快？為什麼？ 8.學習單上第 4 題，有兩個角，請在旁邊再畫出兩個和學習單上一樣角度的角。 	• 以B點為圓心，適當長為半徑，畫弧交角B兩邊於P、Q兩點，則$\triangle BPQ$為一個等腰三角形。然後在下方複製一個與$\triangle BPQ$一模一樣的三角形即可。   • 必要時教師可以連接 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{YZ}$，方便學生觀察到兩個全等的等腰三角形。	• 能回答：用$\triangle ABD$或$\triangle AEF$畫比較快。因為兩腰邊長一樣，所以用圓規只要量取一次。 • 會以尺規作圖複製一個和學習單上一樣角度的角。
--	--	--	--

【活動三】了解角平分線作圖的方法，並會用尺規作圖在一已知角上作角平分線。

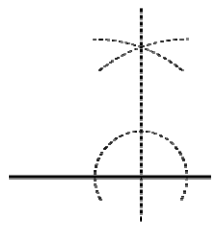
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 將一個角對摺，得到兩個全等的三角形，並將之應用到角平分線	1.用剪刀剪出一個三角形，然後將這個三角形其中的一個角對摺(角的	• 讓學生觀察兩個重疊的全等三角形。	• 能回答:代表這一個角的角平分線。

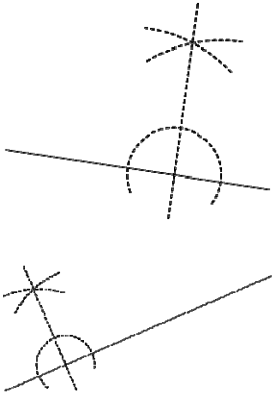
作圖	兩邊重疊)，這條摺痕代表什麼意義？  2.在對摺的狀態下，用剪刀將這個角剪一刀(橫跨角的邊和摺痕)。再打開後，請問發現了什麼圖形？哪些邊是相等的？  3.再將紙張對摺，再剪一刀，再打開。請問現在手上的圖形和之前的圖形，有何不同？又有哪些性質是不變的？	• 教學時是拿在手上的一張紙，無法標示點的名稱，所以直接以手指指示哪兩邊相等即可。	• 能回答: $\overline{AB}=\overline{AC}、\overline{DB}=\overline{DC}$  • 能回答: $\overline{AB}=\overline{AC}、\overline{DB}=\overline{DC}$ 
-----------	--	--	---

• 角平分線的尺規作圖	4.請在學習單第 5 題所提供的角上，畫出有如剛剛剪紙一樣，兩個一邊重疊但是大小、形狀一模一樣的三角形(不限定三角形邊的大小)。請問要怎麼畫？ 5.重疊的這一邊，剛好是這個角的平分線嗎？ 6.如果給定一個角，要利用尺規作圖找出角平分線，請問要怎麼作？請在學習單上第 6 題的角，畫出角平分線。	• 先以 A 點為圓心畫弧，交角 A 的兩邊於 B、C 兩點，得 $\overline{AB} = \overline{AC}$。 • 再分別以 B、C 為圓心，用相同的半徑畫弧相交於 D。得 $\overline{BD} = \overline{DC}$。 • 先以角的頂點為圓心畫弧，在角的兩邊取出等長的兩線段。再分別以這兩線段的端點為圓心，畫兩個等半徑的弧。連接角的頂點	• 可以觀察出角平分線作圖的原理。 • 能回答：是的，因為兩個三角形是一樣的，所以 $\angle BAD = \angle CAD$，原本的角 A 就被分成兩個一樣的角，所以就被平分了。 • 會以尺規作圖作角平分線。
--------------------	---	--	---

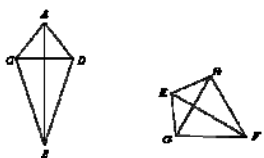
	 7.圓規需要張開多大，才可以畫成功？	與兩弧的交點，即為角平分線。    • 第一次畫弧時只要和角的兩邊有交點即可，第二次畫弧時圓規張開得太小，會使得兩弧沒有交點。 	
--	---	--	--

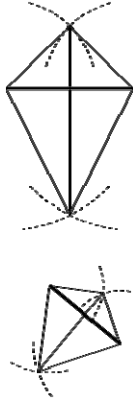
【活動四】應用平角的角平分線作圖，在一已知直線上的一點作一條與該線垂直的直線。

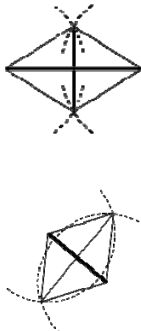
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 作平角的角平分線	1.請在紙張上畫一個平角，並用尺規作圖的方法畫出平角的角平分線。	• 	• 會應用角平分線作圖。

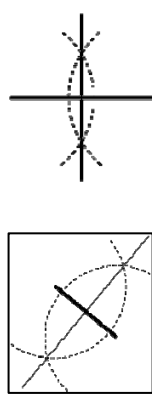
過線段上一點作垂線	2.紙上有兩條互相垂直的線嗎？為什麼？ 3.給定一直線與線上一點，請問如何過這個點畫出一條垂直線？ 4.請在學習單上第8題，以尺規作圖畫出過線上一點的垂直線。 	作平角的角平分線。 	- 能回答：有。因為平角的一半就是直角。 - 會以尺規作圖在線段上一點作垂線。
---	--	---	--

【活動五】應用菱形兩對角線互相垂直平分的性質，並會在一已知線段上作中垂線。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
鸞形的觀察與作圖	1.觀察學習單上第9題的鸞形，並觀察一下它的兩條對角線，請問一下這兩條對角形有什麼性質？ 	觀察鸞形兩條對角線的性質。	能回答：兩對角線互相垂直，其中一條被平分。

	2.以學習單上第 10 題提供的線段為 鳶形中有被垂直平分的對角線，請以尺規作圖畫出一個鳶形。 	分別以線段的兩端為圓心，畫出等半徑的兩弧，兩弧的交點即為鳶形的一個頂點。線段的另一側也以相同的方式得到鳶形的另一個頂點，將頂點連接即可得到鳶形。 	能以尺規作圖作出鳶形。
	3.把鳶形的另一條對角線連接，請問這兩條對角線有何關係？	兩條對角線互相垂直，而且原本的對角線被平分。 	

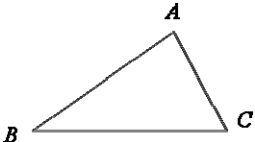
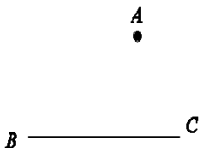
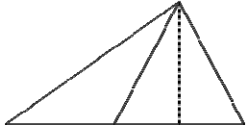
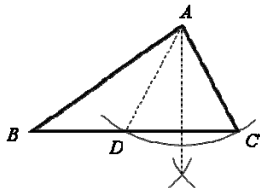
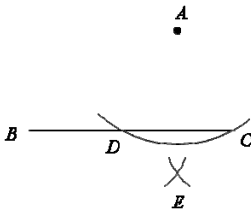
• 菱形的觀察與作圖	4.說明一下你是怎麼作的,畫圖的過程中,有沒有需要注意的(如:圓規張開的大小)? 5.請以學習上第 11 題提供的線段為菱形的對角線,以尺規作圖畫出一個菱形。  6.把菱形的另一條對角線連接,請問這兩條對角線有何關係? 7.菱形的畫法和鳶形的畫法有何不同,為什麼?	•  • 兩條對角線互相垂直,而且兩條對角線互相平分。 	• 能回答:圓規張開的半徑要超過線段的一半,要不然兩弧會沒有交點。 • 能以尺規作圖作出菱形。 • 能回答:因為菱形的四邊等長,所以圓規只要固定一種半徑即可。
-------------------	---	--	--

• 中垂線作圖	8.請在學習單第 12 題提供的線段上，畫出這個線段的垂直平分線。  9.說明一下你是怎麼畫的？ 10.為什麼是畫一個菱形而不是鳶形？ 11.圓規要張開的大小有沒有限制？	•  • 超過線段長度的一半，兩弧才有交點。	• 會以尺規作圖作一線段的中垂線。 • 能回答：和之前作菱形的畫法相同，只是我們只要中間的中垂線，所以不需要將菱形四邊連接起來。 • 能回答：因為菱形的四邊等長，所以圓規只要固定一種半徑即可。
----------------	--	--	---

【活動六】應用尺規作圖作三角形高的方法，並會過一已知直線外一點作垂直線。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 畫等腰三角形過頂點的高	1.請在紙上畫出一個等腰三角形，畫好之後將它剪下。請摺出這個等腰三角形過頂點的		• 能回答：剛好對摺。因為這一條高剛好過底邊的中點。

• 畫三邊不等長之三角形的高	高。會剛好對摺嗎？為什麼？ 2.等腰三角形的過頂點的高，會是底邊的中垂線嗎？ 3.請在學習單上第 13 題的等腰三角形上，利用尺規畫出過頂點的高。 4.再畫出一個三邊不等長的銳角三角形，將這個三角形剪下，並摺出過一個頂點的高。	• 分別以 B、C 為圓心，畫相等半徑的兩弧交於 D 點。則四邊形 ABDC 為一個鳶形，故 $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線。 •	• 能回答：會，因為這一條高不但垂直底邊，也將底邊平分。 • 能用尺規作圖作出等腰三角形過頂點的高。 • 能以摺紙的方式，摺出一個非等腰三角形的高。
-----------------------	--	---	---

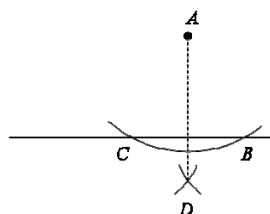
• 過線外一點作垂線	5.請將摺過去的這一邊以筆畫上，是否發現一個等腰三角形？ 這一條高是否就是這個等腰三角形底邊上的中垂線？ 6.請在學習單上第 13 題的三角形上，畫出過 A 點的高。說明一下，為什麼要這樣畫。  7.學習單第 14 題，請過 $\overline{BC}$ 外一點 A，利用尺規作一條直線垂直 $\overline{BC}$。 	•  •以 A 為圓心 $\overline{AC}$ 為半徑畫弧交 $\overline{BC}$ 於 D 點，則 $\triangle ACD$ 即為等腰三角形。再作 $\overline{CD}$ 的中垂線即為過 A 點且垂直 $\overline{BC}$ 的高。  •以 A 為圓心 $\overline{AC}$ 為半徑畫弧交 $\overline{BC}$ 於 D 點。再分別以 C、D 為圓心，畫相等半徑的兩弧交於 E 點。連接 $\overline{AE}$ 即為所求。 	• 能用尺規作圖作出一般三角形過頂點的高。 • 能用尺規作圖作出過線外一點的垂直線。
-------------------	--	---	--

8.學習單第 15 題，
請過直線外一點
A，利用尺規作一
條直線垂直這條
直線。

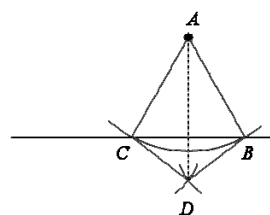
A

9.請說明你的作圖
過程，為什麼你認
為可以這樣作圖
？

• 以 A 為圓心，適
當長為半徑畫弧
交直線於 B、C
兩點。再分別以
B、C 為圓心，畫
相等半徑的兩弧
交於 D 點。連接
 $\overline{AD}$ 即為所求。



• 連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、
 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$ ，可發
現 ABCD 為一個
鳶形，故
 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 。

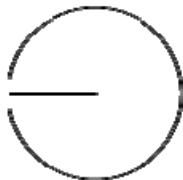


附錄：學習單

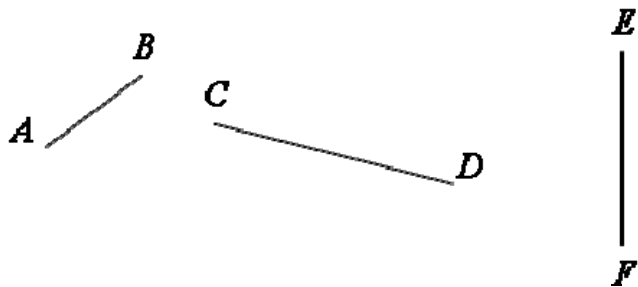
班級： 座號： 姓名：

尺規作圖學習單

1. 請在右側畫一個一模一樣的圓。(圓中的線段為半徑)



2.

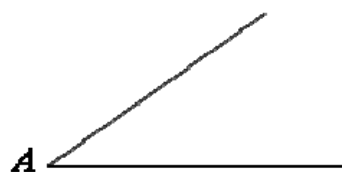
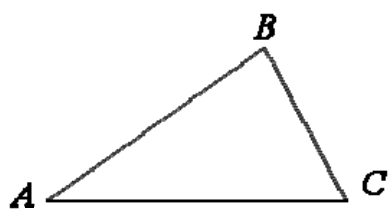


請在下方畫一條線段，且長度等於 $\overline{CD}$

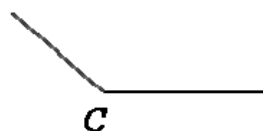
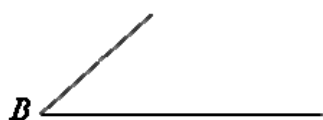
請在下方畫一條線段，且長度等於 $\overline{AB} + \overline{CD}$

請在下方畫一條線段，且長度等於 $\overline{AB} + \overline{CD} - \overline{EF}$

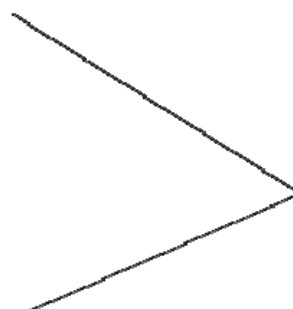
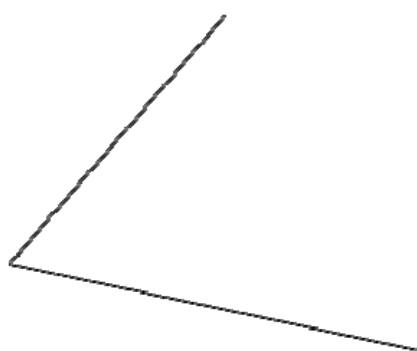
3. 請在下方複製相同的圖形。



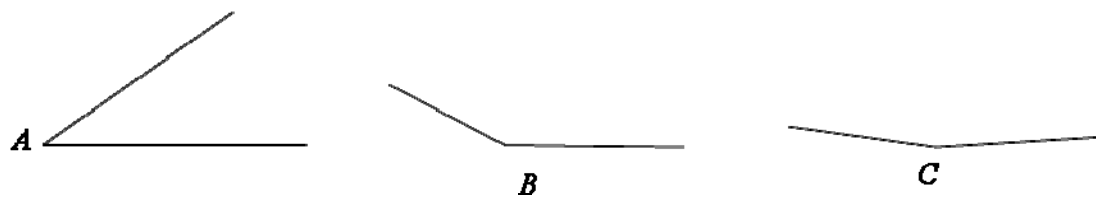
4. 請在下方畫一個相同角度相同的角。



5. 如右圖所示，請在給定的角中，畫出一個鳶形。

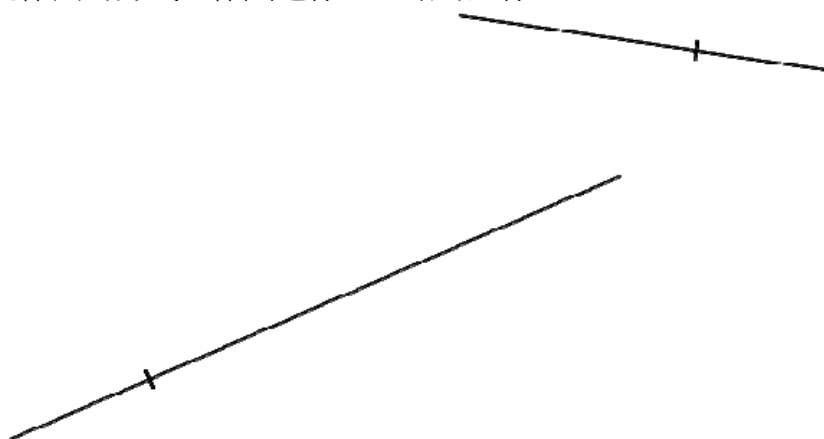


6. 請作出下面三個角的角平分線。

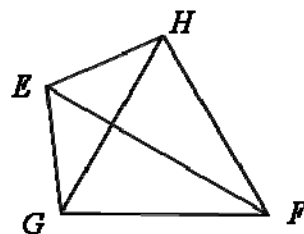
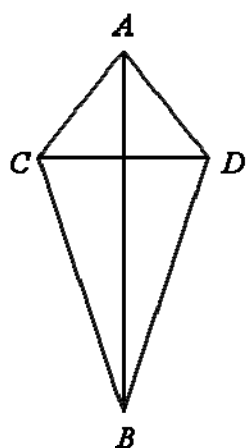


7. 請畫出一個平角，並作出這個平角的角平分線。

8. 請以尺規作圖的方式，作出過線上一點的垂線。



9. 鳶形性質分析



10. 請以下的線段為鳶形中，有被垂直平分的對角線，畫出一個鳶形。



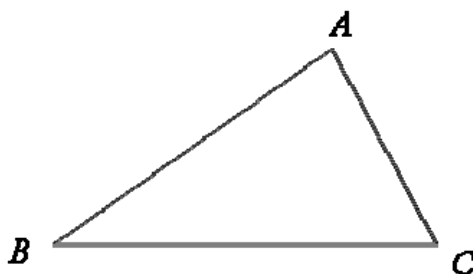
11. 請以下的線段為菱形的對角線，畫出一個菱形。



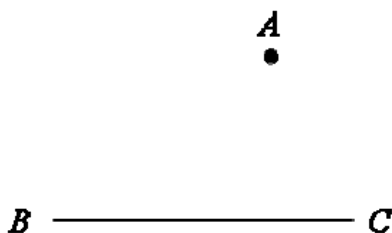
12. 請畫出下面線段的中垂線。



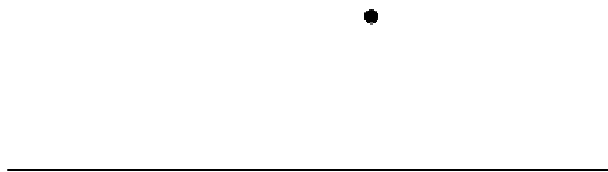
13. 請作出下面三角形過頂點的高（左側的三角形爲等腰三角形）。



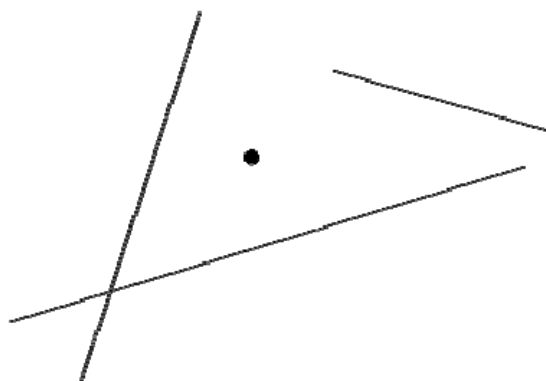
14. 請作一條過 A 點，且垂直 $\overline{BC}$ 的直線。



15. 作過線外一點的垂線。

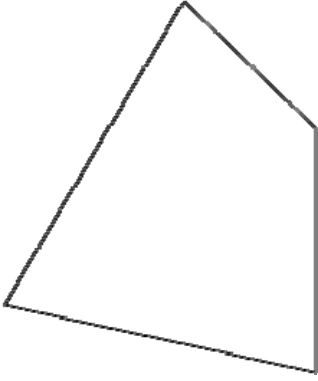


16. 作過中央的點，並分別垂直三條直線的垂線。



17. 以尺規作圖畫一個正方形

18. 請複製一個相同的四邊形。



貳、教學實錄

【第一節】

1. 學生：立正，敬禮，老師好。
2. 老師：好，大家好。今天我們要上的是尺規作圖，尺規作圖就是一些幾何圖形，利用直尺跟圓規把它畫出來。好，你們都有拿到學習單嘛！第一個，你是不是有看到一個圓，有嗎？（P.64，學習單第 1 題）請你在旁邊畫出一個跟它一模一樣的，畫出來要一樣大，看你要怎麼畫，圓中間有一條黑黑的那是什麼？半徑，你畫出來一定要確保跟它一樣大，請問你要怎麼畫？好了嗎？
3. 學生：還沒。
4. 老師：還沒。好，已經畫好的同學，你能不能告訴我，你怎麼確定它一樣大？用尺量。還有呢？現在半徑多大啊？
5. 學生：1 公分。
6. 老師：1 公分，有剛剛好 1 公分嗎？
7. 學生：沒有。
8. 老師：沒有嘛！不一定，是不是？可是我們用圓規張開畫圓，這個是什麼？半徑，所以你需要用尺量嗎？還是有更好的方式？要畫圓，你就直接張開這麼大，像我這一個圓這樣，對吧！你要畫得跟它一模一樣大，你的圓規張開多大，你是不是直接拿來比就好了？這樣子就對了吧，是不是？好，這樣子比完，然後，你在旁邊畫完之後，我可以確定這個圓，一定跟它一模一樣大，為什麼？
9. 學生：半徑。

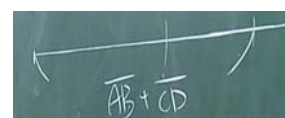
10. 老師：沒錯！因為我剛剛張開圓規，已經怎樣？張開了跟它的半徑一樣大，你看，一旦這個圓規張開這麼大之後，接下來我再畫一個，在別的地方再畫一個圓，是不是一定保證，它一模一樣大，對吧！因此，這個時候，這支圓規它是拿來做什麼用的？
11. 學生：畫圓。
12. 老師：畫圓，還有呢？剛開始你們量半徑是不是用尺量？那個量的不太準，所以老師就拿圓規做什麼，這一段是什麼（老師用手比出圓規兩隻腳的距離）？半徑，那我們就知道，圓規除了畫圓之外，它還有一個最重要的動作，就是它也可以拿來量長度。也就是，這個圓半徑是多少，幾公分我們不管它。我要畫一個跟它一模一樣，長度這樣子量，然後畫過來是不是就可以了？對吧！好，一樣的意思，如果現在要在黑板上畫一條跟你們的桌子寬度一樣的長度，怎麼辦？派兩個值日生，然後把桌子搬上來量嗎？不用吧！現在是不是有圓規，所以我就可以做什麼事？圓規張開多長，就是你的桌子多長，因此，我就把圓規拿來桌子這裡量。好，這就是你桌子的寬度。我今天在黑板上要畫一個桌子的寬度，怎麼畫？我剛剛是不是量好了這麼寬，對吧！好，所以呢？我就從這邊開始到這裡，這一段的長度是不是就是我剛剛量的桌子的寬度？可以，好，於是你們來看一下，你們的第 2 題（P.64，學習單第 2 題），上面老師是不是有畫了三條線段？
13. 學生：對。
14. 老師：有 $\overline{AB}$ ，有 $\overline{CD}$ ，有 $\overline{EF}$ 。下面有幾個任務：第一個，請你畫一條線段，你的長度跟上面 $\overline{CD}$ 那個長度是一樣的；第二個，畫一個長度，它是等於 $\overline{AB} + \overline{CD}$ ；第三個，請你畫一個長度，它是 $\overline{AB} + \overline{CD} - \overline{EF}$ 。你在畫的時候不要忘記，你量長度的工具是什麼？來，看看你們怎麼畫。現在老師黑板上有

三條，然後我也找三個人，一樣來畫那三條，可以吧！你畫出來的線段，不用說畫出來剛剛好，你有沒有發覺到，老師剛剛畫的步驟是怎樣，我是不是先畫一條直線，然後在那一條直線上，只要切出那一段就可以了，是不是？來，第一題我找人囉，有沒有誰志願要上來畫第一題的？畫一條線段，等於 $\overline{CD}$ 的長度，好，我現在分別找三個人喔，一個一個上來，曾子謙，你來畫第一個好了。我的 $\overline{CD}$ 在這邊，你在這裡畫一條橫的，然後這個長度等於它。對，直尺在這裡，圓規在這邊，圓規在這裡啊！（圖一）



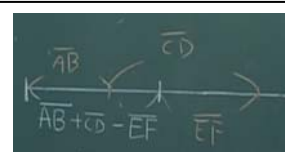
（圖一 $\overline{CD}$ ）

15. 子謙：有要畫圓嗎？不是只要畫線嗎？
16. 老師：對，畫線啊！可是要用圓規，怎麼用？來，下面的同學，有一點不太會畫的，看一下喔，怎麼畫？好，兩個端點把它強調一下，看得比較清楚。
17. 老師：好，兩個端點把它強調一下，看得比較清楚，看到怎麼畫吧！有沒有，所以他長度是用什麼量？用圓規量，你不要用尺量喔！好，第二個 $\overline{AB} + \overline{CD}$ 誰會畫的？來，劉應傑，你來畫畫看，畫第二題，畫一條線， $\overline{AB} + \overline{CD}$ 把那兩條長度加起來會有多長？



（圖二 $\overline{AB} + \overline{CD}$ ）

18. 老師：不錯，很好，有沒有看到劉應傑怎麼畫的，先畫一條直線，（圖二），前面那一小段，左邊一小段是不是 $\overline{CD}$ 的長度，後面那一小段是 $\overline{AB}$ 的長度，所以接起來就可以了嘛！好，那第三小題呢？兩個接起來再減掉 $\overline{EF}$ ，那會有多長？誰要來試試看？我看一下，林昕怡，你上去試試看好了。這時候該怎麼辦？對啊！那你就有了，你要先把起點找到（圖三）。

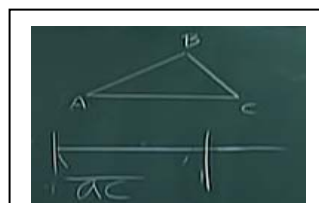


（圖三
 $\overline{AB} + \overline{CD} - \overline{EF}$ ）

19. 老師：很好了，看清楚了嗎？剛剛林昕怡怎麼畫？她是不是把這一段應該是 $\overline{AB}$ ，然後呢？ $\overline{CD}$ 是這麼長吧，補上之後再去扣掉 $\overline{EF}$ 。有沒有比較快一點的畫法？你沒有覺得第二題跟第三題，有一點點一樣的地方是哪裡啊？沒錯， $\overline{AB} + \overline{CD}$ 是不是已經有了，所以說，然後它是不是這樣直接量取第二題的 $\overline{AB} + \overline{CD}$ 就可以了？有點不夠長，是不是這樣就可以了，這一段 $\overline{AB} + \overline{CD}$ 你已經剛剛量過，它就是這麼長，你就直接拿來用了，所以剛剛劉應傑一直在跟你打 pass 說，量他的就好了，因為人家把前一題，一半已經畫完給你，你只要把這個長度再扣掉 $\overline{EF}$ 就 OK 了，可以了吧！因此，這個東西就是我們的尺規作圖。老師剛剛看下去，有些同學還是習慣上去量幾公分，有的時候它的長度不會剛剛好是幾公分，可是我們又非常準確的希望知道，我要把那一段長度一模一樣的畫下來，那怎麼辦？你就是用圓規，因此圓規就是你量長度的工具。我要在這裡畫一段 $\overline{CD}$ 的長度，我就把它張開這樣子，這個寬度就是 $\overline{CD}$ 的寬度。因此，只要畫一條直線，這樣子截取之後，這一段一定是 $\overline{CD}$ 的長度，你就是把它搬過來。一樣，如果我要畫一條線段是兩個線段接起來，那怎麼辦？一樣啊！ $\overline{CD}$ 量一遍，然後呢？ $\overline{AB}$ 再量過一遍，再把它接上去不就好了嗎？這裡減掉就怎樣？再畫回來嘛！好，這就是尺規作圖，圓規就是用來量長度，我們管幾公分嗎？我們不管幾公分，然後呢？你說：「老師，那直尺怎麼辦？」，直尺只是幫助你把線段給畫直的工具，就像一剛開始，我這個線段，我用手畫是不是畫不直？這個時候，直尺就是拿來這麼用的，它只是讓你把線畫直，我們並不利用上面的刻度。好，你看，這樣子畫好之後，接下來我們看到下一頁（P.65，學習單第 3 題），線段量一個一模一樣長的都會畫嘛，你有沒有看到那裡有一個 $\triangle ABC$ ？

20. 學生：有。

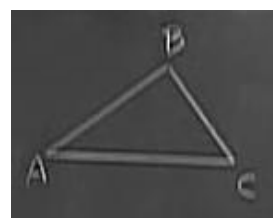
21. 老師：好，你們一樣在下面空白的地方，畫一段線段，它的長度會等於 $\overline{AC}$ ，橫的那一條，畫下面一點。林峯全，你來黑板上畫那一條 $\overline{AC}$ ，把它畫出來，就把 $\overline{AC}$ 那一段給它畫出來，畫在旁邊，這裡就可以了。圓規在這裡，我們要求你要畫的跟它一模一樣，畫一條 $\overline{AC}$ 。畫完之後，你順便在下面標示 A、C 兩個字。你好不容易量準了，你那邊怎麼會畫歪掉了？各位同學，剛剛有看到林峯全畫的嗎（圖四）？你覺得他有沒有畫準啊？



（圖四）

22. 學生：沒有。

23. 老師：沒有，為什麼？對啊！好不容易連完，這個畫的痕跡，你又把它擦掉，那怎麼會準呢？好，我在旁邊再畫一個，直尺拿來畫直線，是吧！用手畫會歪。然後，我是一長條的 $\overline{AC}$ 耶，怎麼辦？量一下吧！圓規張開量起來，這樣就是長度。好，這一條是直線，因此，從這邊開始，然後到那邊的某一個地方長度會是 $\overline{AC}$ ，所以這個圓規不要動到喔，這樣的長度，是不是這樣。這個因為你是剛剛量好了，所以它一定是準的。好，這一點是 A，這一點是 C。那你看好喔，我現在如果要求你再畫一個三角形，跟上面的一模一樣（圖五），



（圖五）

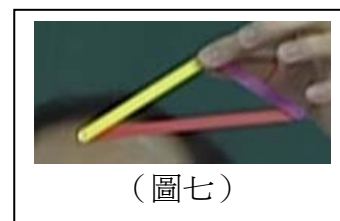
好，問題來了，我接下來 $\overline{AC}$ 畫完，是不是已經有這一邊 $\overline{AC}$ 。又 $\overline{AB}$ 多長，長度我可以量嘛。現在問題來了， $\overline{AB}$ 的長度知道，那請問一下我 $\overline{AB}$ 的方向要畫到哪一邊？

24. 學生：先量它的高。

25. 老師：量它的高，它的高怎麼量？
26. 學生：B 定點。
27. 老師：B 定點，你上來量，看怎麼量？都可以，怎麼量？
28. 學生：你確定這樣準嗎？
29. 老師：對啊，有同學就問了，這樣準嗎？你確定它的高是到這裡嗎？搞不好你是歪過來一點點（垂足的位置）。
30. 學生：先畫一條垂直的線。
31. 老師：是不是畫一條垂直的，垂直的線怎麼畫？用尺畫，不行啦！尺只能畫直線。來，你看，這邊是不是一樣的問題，我不知道斜到哪裡，這邊也是不是一樣？對啦！好，來，老師拿這個東西給你看，這是扣條，假設我現在要這樣子，用一條紅色的當底，這一條是 $\overline{AC}$ ，然後另外由這一個扣條，這麼樣的長度，跟這麼樣又另外一條扣條的長度，又拼成一個三角形（圖六），那你會怎麼拼？是不是這個扳過來，這個扳過來，扳到了這樣就是了（圖七），對吧！好，那我們先不看這邊喔，這樣子這個扳過來的過程當中，你有沒有覺得我們在幹嘛？這是什麼？是不是跟時鐘的那一根分針很像，所以我這樣子扳過來的過程當中，它會跑出一個什麼，圓嘛！這個是不是也是扳過來，會跑出一個什麼？
32. 學生：圓。
33. 老師：所以它扳過來，什麼時候會碰到？是不是黃色扣條這個畫圓，紫色扣條這個也畫圓，然後畫完之後就碰到了，是不是？對嘛！所以你看 $\overline{AB}$ 這個長

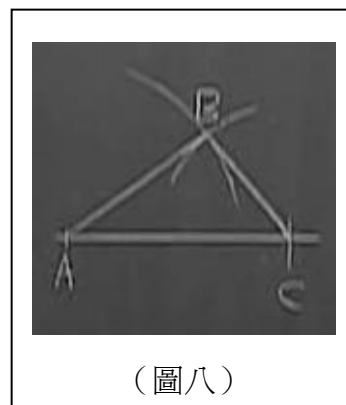


（圖六）



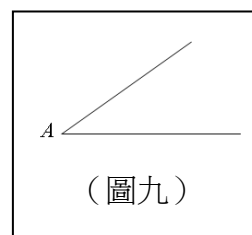
（圖七）

度這麼長，我扳到這裡，我怎麼知道放到哪裡會跟 $\overline{BC}$ 碰到？我就這樣子沒錯，就慢慢的跑過來。另外一邊呢？也是一樣用 $\overline{BC}$ 的長度，這樣慢慢的跑過來，然後看什麼時候會碰到，碰到的地方就是答案了。好，我故意不畫出來，看看你們知不知道我在說什麼。畫畫看，下面畫一個三角形，跟它一模一樣的。你就這一條 $\overline{AC}$ ， $\overline{AB}$ 接過去 $\overline{BC}$ 接過來。沒錯，畫對了。來，你上去畫。對，沒錯。直尺在那裡，對了。其他同學有沒有看到？有了，而且有的同學把整個圓畫起來，事實上你看一下董律里的畫法，需不需要把個圓都畫出來？（圖八）



34. 學生：不用。

35. 老師：不用嘛！因為我們只是找什麼而已？交點而已，是不是？所以只要在這裡碰到，我們確定它在這裡碰到，而且這一段一定跟它一樣長，為什麼呢？因為這個弧是什麼？是不是剛剛董律里有量到了這麼樣的長度，拿來畫圓了，所以這個長度，在這個每一條都是 $\overline{AB}$ 一樣長，另外一邊是不是也是一樣？所以給你一個三角形，要你畫出一個一模一樣的，知道怎麼畫了？知道了。好，可是這個東西，不是我們今天學這個目的，我今天學的目的是要你畫一個一模一樣的角，來，你有沒有看到，你的學習單的右邊，還有一個 $\angle A$ （圖九），如果今天問你，請你在旁邊畫一個角，跟這個 $\angle A$ 一模一樣一大，角張開一模一樣大，當然你不可以拿量角器來量，只能用直尺、圓規畫，請問你可以怎麼畫？有沒有誰知道怎麼畫的，旁邊就畫一個 $\angle A$ 跟上面的 $\angle A$ 一模一樣大，有沒有誰會畫的？你想一下，老



師把這兩個圖（ $\triangle ABC$ 和 $\angle A$ ，P.65，學習單第 3 題）擺在一起，一定有目的的嘛，你覺得這兩個差別在哪裡？左邊那個圖你會畫，右邊那個不會畫，沒有道理喔！畫一個角跟它一樣大，怎麼畫？你稍微思考一下，剛剛左邊那個三角形是怎麼畫出來的。來，林佑倫，你上去畫一個。沒錯，對了，就是這樣，你怎麼沒有畫的痕跡啊！你們在尺規作圖的時候，你圓規畫過的弧，你不要把它擦掉喔。不會畫的，你看一下林佑倫怎麼畫的，她做了哪兩個步驟？（圖十）。有沒有看到林佑倫剛剛怎麼畫的，有嘛！她怎麼畫的，這個（ $\angle A$ ）跟這個（ $\triangle ABC$ ）有什麼差別？



36. 學生：沒有 $\overline{BC}$ 。
37. 老師：沒有 $\overline{BC}$ ，可是你能不能畫？可以嘛！反而你會覺得這個比這個簡單，因為這個你還要再連出 $\overline{BC}$ （畫 $\triangle ABC$ ），它根本連都不用連，她是不是只有把剛剛的三角形，畫一半就好？所以，林佑倫是剛剛當成這裡有一條隱形的線，她是不是跟剛剛的一樣作法（畫 $\triangle ABC$ ），就做出一個跟它一模一樣的三角形，對吧！有沒有更快的方式？我那一條線（角的一邊），我剛剛是特別要求你 $\overline{BC}$ 要跟它一樣長，這裡因為沒有 $\overline{BC}$ ，所以沒有一樣長，那是沒關係的，但是有沒有人有比較快的畫的方式？你怎麼畫的？
38. 學生：跟林佑倫的一樣。
39. 老師：有沒有人跟林佑倫的方式比較不一樣一點點的？來，稍微想一下，請問一下角度的兩邊是不是可以無限延伸的？對吧，因此，如果今天畫這樣這個角，跟我今天把它擦短一點，有沒有差？沒差。你知道癥結在哪裡？這個長度隨便你畫，對吧！既然長度隨便你畫，所以，我看一下有沒有比較特別的畫的方式。來，你上去畫畫看，你不知道啊？好，大家都不知道，那

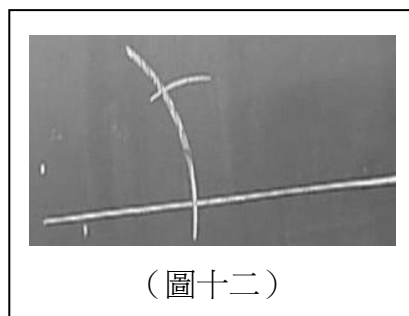
我示範了，有沒有人規定這一段一定要這麼長？沒有嘛！所以，多長多短是不是隨便你？我剛剛看到，你們一直要量它的長度（角的兩邊的線段長），角的兩邊是不是無限延伸的？所以多長多短，是不是隨便我畫的？因此我就先畫一條線在下面，當成這個角的底邊，既然多長多短是隨便你，因此，題目畫到這裡（角的底邊），我可不可以畫短一點，連到這裡就可以了，可以嗎？所以上面這個三角形，頂點大約在那邊，長度是這樣，然後呢？下面這一段的長度它是這樣子，沒有人規定這麼長，那我隨便畫，我取這樣可以吧？可以啦！好，下面這一段長度我取這樣。好，再來呢？是不是剩下這個斜斜的，這裡有一個隱形的邊，對不對？我再量一下隱形的邊這裡，我量一下，應該會有這個痕跡，有這個痕跡，好，量一下，這樣子畫起來可以嗎？有沒有？是不是跟剛剛畫三角形的步驟一樣，只是說長度不一定要它規定的長度（角的兩邊），接下來，我只要把這兩個，還有這個交叉點，把它連接起來，這樣的角就跟它完全一模一樣了嘛，是不是？是。這個方式還是慢一點點的，有沒有更快的方式？我再說一遍，第一條（角的一邊）我隨便量，第二條（角的另一邊）我也隨便量，量完之後再去量這一段（隱形的邊）的距離，所以呢？有點類似了，林昕怡，你畫的有點對了，想一下問題點，角的兩邊是你隨便畫的，所以呢？長度既然不限定的話，我要不要畫兩次啊！你看，老師故意把它畫兩條不一樣長的，如果畫兩條一樣長的怎麼畫？有沒有誰知道？有沒有？上面那一段跟下面那一段，老師故意把它選不一樣長，不一樣長，你是不是就要量兩遍？可不可以只量一遍就好，你知道我在說什麼了嗎？怎麼畫？李乙辰，你要不要上去畫畫看，老師



(圖十一)

重新畫個 $\angle A$ 給你畫好了。來，這一個，直尺在那裡。來，看到沒有，第一步很重要喔，你看李乙辰第一步做什麼事（圖十一）？看到沒？沒關係，歪一點點沒關係，黑板上本來就難畫。各位有沒有看到李乙辰怎麼畫，他跟我們之前是不是又少了幾步，有吧！也就是我的角畫這麼大，有沒有人規定你們三角形一定要接這邊，沒有嘛！三角形的兩邊是不是隨便我畫的，因此你看，他的第一步怎樣？就這樣子張開，一次把它切下來，就是這個三角形了，那這樣子是不是兩邊一樣長，那我這裡就只要畫一遍就好了，（圖十二）看到沒，然後畫完之後再

來量，這一個的寬度就 OK，那也就是它的隱形的三角形，是不是在這裡面，對吧，可以啦，好，他的過程我再示範一遍給大家看。再示範一遍，我不需要三邊都重新量，因



（圖十二）

爲角它的兩邊是無限延伸的，所以你不要看到題目上面，它的邊到這裡，一定要找它的端點，沒有，因爲三角形，我只要隨便畫，沒有人規定它這一邊是這樣，所以首先打開，我的隱形三角形要多大，隨便你畫，好，那就這麼大，可以嗎？然後下面，老師剛剛忘記了，應該先畫一條線，所以你在三角形的兩邊是這裡嘛，它的長度是不是這樣？對吧，接住之後畫下來這麼大，然後接下來再量哪一邊，是不是這一段，有沒有？這裡有一個隱形的一邊，然後量的時候呢？也是這裡會有一個小小的弧，於是把它接起來，這樣是不是就有了，這樣畫起來不就是一模一樣了嗎？可以了，所以問題就是在這裡，沒有人規定你的三角形要多大，所以你畫一個你最方便畫的就可以了，下面是不是有兩個角（P.65，學習單第 4 題），用同樣的方式，你們把它畫畫看。好，你上去畫 $\angle B$ 好了。

40. 學生： $\angle B$ 。
41. 老師：那裡啊！那一個，黑板上那個。你另外一個 $\angle C$ 一樣的方式啊！（巡視學生，對某生說： $\angle B$ 跟 $\angle C$ ， $\angle C$ 也是角，它張得那麼大，可是你用同樣的方式，一樣畫得出來。你這樣對啊，方法一模一樣啊，你上面量過應該會有弧吧，對啊，兩個方法不是一樣嗎？只是它比較大而已，你會量得比較寬而已嘛。）怎麼，你跟劉應傑求救喔！來，劉應傑你上去畫好了，你上去救她好了。妳先下去。你不要拉兩邊，這樣就圓了，看好喔，劉應傑是拉哪裡畫弧的，那個長度，好，看清楚沒，還不太會畫的同學，我再說明一遍喔，以頂點為圓心，多長為半徑呢？隨便，因為角的兩邊的長度沒有規定嘛，所以是不是隨便你畫，你就張開你高興的，然後接下來是不是要畫一模一樣的，然後再來呢？是量哪一段的長度，是不是這個寬度，對吧！所以說以下面的圓心，上面這個，OK 量出來的寬度，然後上面是不是畫一個一模一樣的，然後再連接起來，也就是這裡會有一個隱形的三角形存在，只是我今天要畫角，我不要畫那邊，我只有這兩邊連起來，這樣就對了，OK，好，然後下面那個比較大的鈍角，我們下一節課再繼續。

【第二節】

42. 老師：剛剛那個 $\angle B$ 會畫吧？
43. 學生：會。
44. 老師： $\angle C$ 呢？
45. 學生：會。
46. 老師：會喔！我抽個人上來，好不好？
47. 學生：不行。
48. 老師：不行啊！好，隨便抽一個，33號是誰，來，上來畫畫看，快一點，不知道

，照它一模一樣的方式啊！要不然誰來解救？好，吳郁涵，你們兩個一起上來好了，兩個上來壯壯膽好了。陳柳蓁，妳也要上來啊！人家是幫你的，妳指導她，妳不可以動粉筆。好，吳郁涵，妳順便跟她解釋，它是怎麼畫的。好，剛剛大家畫是不是那個角度有點大，不太好畫？可是畫的方式會不會改變？沒有嘛！可是反過來講，角度有點大不太好畫，你可以用一個方式，讓角度變小一點比較好畫，怎麼變小？沒錯，把它拉長。你這個也發現了，來，董律里，你上去畫你那一種，比較不一樣的畫法。等一下，等她畫完。吳郁涵，妳那樣畫，對嘛！吳郁涵，妳不可以幫人家代工，妳只能教陳柳蓁，不能幫人家畫。

49. 學生：放棄。

50. 老師：你圓規要好好拿，你在這裡壓著，這樣就好了，壓著這樣就好了，陳柳蓁，你第二次畫的那個圓心，你把它點出來一下，你剛剛的圓心戳在哪裡，你用粉筆把它畫明顯一點好了。你的圓心就是你那個圓規的橡皮貼住的地方，你不是貼在那裡嗎？對啊！畫明顯一點，好了，好，可以了。來，吳郁涵，你跟大家講一下，你怎麼畫的？

51. 郁涵：就是這裡先在那個上面畫一條虛線（圖十三），因為是要算這邊這個（鈍角的 $\angle C$ ），就是要畫這一條線，這邊這條線，前面都是先按照林佑倫的那個方法，然後後面，因為已經畫出了一條線，就是這一條（圖十四，最底



（圖十三）

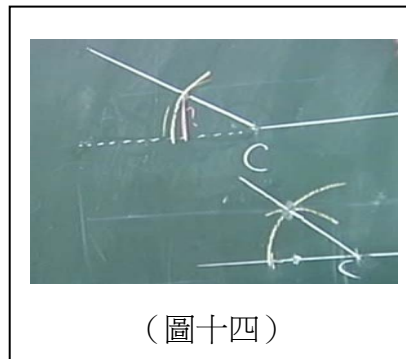
下的水平線），然後因為已經有一點了，不知道哪裡有點，然後上面其實你也可以畫一次，因為題目有限，所以你可以量它這個地方到底多長（第一次弧與直線的交點和第二次兩弧交點的距離）？這個畫下來也是畫一個線

，圓的那個線。然後交接的點 C 這邊畫出去，就會是這一條線。

52. 老師：OK，其他人有問題嗎？

53. 學生：沒有。

54. 老師：沒有啊，你剛剛是這一段嘛，剛剛吳郁涵她說要量哪一段？這一段（弧與邊的交點到水平線的垂直距離）嘛，是不是？有沒有問題，沒有問題嗎？來，你看，有問題喔，來，劉應傑，哪裡有問題？



（圖十四）

55. 應傑：是量這邊（弧與兩邊交點的距離）。

56. 老師：應該是量那邊，你知道為什麼這樣子不行？

57. 學生：不知道。

58. 老師：不知道為什麼不行，來，剛剛陳柳蓁也擋住了你們沒看到，你要量這一段，是不是？（學生吳郁涵的畫法）這樣子是不是量到這一段了，接下來，你怎麼知道圓心要擺這裡啊，擺這裡來量不行嗎？擺這邊量可不可以，你是不是不知道要擺哪裡？所以你這一點，你是不是不知道要找哪裏（垂足的位置）。今天我要畫一條直線，或圓規這個端點要放在哪裡，你是不是要一個很準確的地方，接下來量才是準確的嘛！所以為什麼我們畫角度是畫這樣，而不是隨便畫這一段，看起來好像是垂直，可是有沒有真正的垂直？

59. 學生：不知道。

60. 老師：不知道，你不能這樣子畫喔，你應該是怎樣？這樣子，第一步弧這樣畫起來，下面這個圖是錯的，老師再畫一遍，來，很多同學想法都沒錯，這個角度太大不好畫，我們就延長畫另外這邊，因此，現在就是這條線要往哪

個方向畫，是不是？因此，你看喔，第一個是這樣子畫，畫完之後，對吧！然後接下來你圓規放的地方，是不是很確定的就一定是這裡，而不是你隨便亂擺的地方，好，因此就是量這個寬度量完之後，然後再把它連接

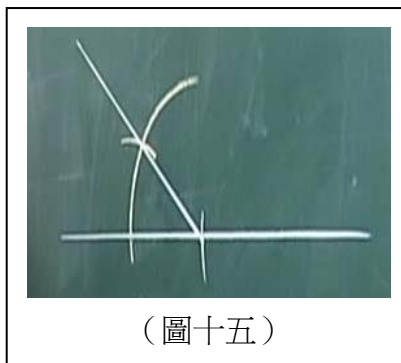
起來，這樣子是不是就是了（圖十五），對不對？對吧，那可不可以直接畫這裡面？

也可以嘛！好，怎麼畫？是不是也是一樣，隨便張開畫，然後在另外一個地方，也是一樣，張開這麼大，你隱形的三角形是不是這麼大，對嘛！隱形的三角形有這麼大，只是你現在要量的長度，會比較長一點點，這樣可以嗎？可以。量的長度比較

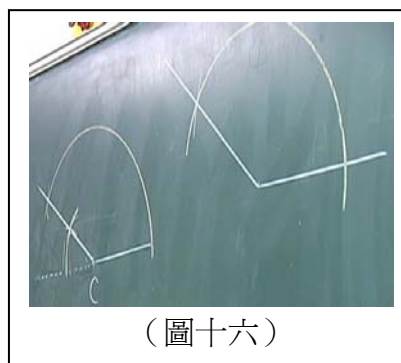
長一點點，這樣再把它接起來，不就是好了嗎（圖十六）？這樣是不是沒問題。好，因此要你畫一個一模一樣的角度，就沒問題了。接下來我們要進行一個任務，那就是，一個角畫出來，接下來我要畫一個角的角平分線，什麼叫角平分線？

我畫一條線，然後把這個角的角度切一半，該怎麼切呢？你們是不是都有拿到空白的紙，有嗎？好，把你們空白的紙拿出來，然後隨便摺一摺，

摺出一個三角形，然後再用剪刀把它剪下來，剪下一個尖尖的角。隨便摺，你不一定要摺那個直角的一半，你有沒有看到老師隨便弄出一個角出來，然後就隨便就剪出一張出來，你不要剪那個剛剛好很正的，也就是，你要有一個尖尖的角，有一個尖尖的角就可以了。好，你手上是不是有一個三角形？對吧！我今天要求出角平分線，什麼叫角平分線？就是一條線把



（圖十五）



（圖十六）

角切一半，來，現在一個任務，想辦法用摺紙的方法，摺出一條線剛好是這個角的一半，怎麼摺？對摺。來，摺摺看。

61. 老師：好，郭定恩，你上來說說看，摺的時候需要注意什麼？（行間巡視對學生說：「其他人有摺了嗎？摺起來，你要弄大一點，你不要弄太小，等一下我們還要針對這個角來摺。」）好，郭定恩跟大家說說看，摺的時候需要注意什麼？

62. 定恩：角這面這個，摺下來，然後最後下面這兩條相對。

63. 老師：你大聲一點，後面這裡聽不到。

64. 定恩：就是這樣一個三角形，然後對齊上面這一點摺下來，摺到最後，這兩條線要對齊，摺起來，然後要對齊這一點（圖十七）。



（圖十七）

65. 老師：好，我們要摺角平分線，來，你看一下你的角有沒有分一半？

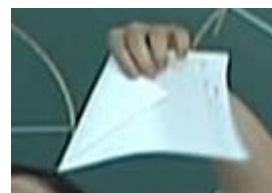
66. 定恩：沒有。

67. 老師：好像沒有，所以對齊的邊好像不對，好，你先坐下。有沒有誰已經摺好？來，鄭力源，你的好像摺對了，你拿出你的跟大家說一下，你不會講啊！哪一邊跟哪一邊對齊？郭定恩好像剛剛對齊的邊是錯了，所以你很明顯，角度沒有一樣大，沒有一樣大怎麼看？一個角嘛，這兩個有沒有一樣大，就疊起來有沒有一樣大，是不是？所以剛剛郭定恩那個，來，你的借我一下。

68. 定恩：我這個現在摺對了。

69. 老師：現在摺對了，剛剛一開始摺錯的時候，這兩個沒有發現一樣大，為什麼？為什麼你用肉眼就看得出來，它們兩個角沒有一樣大？假設這樣子，我這裡一個直角，那我說我要把它摺了兩個一樣大，然後我就這樣一摺，好，

摺起來我疊到這裡，我能不能說我有把 90° 摺一半
(圖十八)？沒有，為什麼？黃柏瑋，你起來說說
看，為什麼你一看就知道沒有？



(圖十八)

70. 柏瑋：不知道。

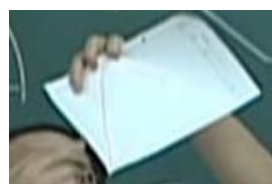
71. 老師：不知道，你還說沒有。

72. 學生：絕對不是。

73. 老師：絕對不是，為什麼絕對不是？

74. 學生：第六感，看起來的直覺。

75. 老師：看起來不像，來，李宛芝你來說說看，為什麼你一看就知道，這個角跟這個角沒有一樣大？我這樣摺起來，是不是中間一條線(圖十九)，為什麼一看就知道這個角跟這個角沒有一樣大？你起來回答一下。



(圖十九)

76. 學生：面積不同。

77. 老師：什麼叫面積不同，能不能講的具體一點？

78. 學生：就是那條線的左邊和右邊大小不太一樣。

79. 老師：這一條線，你說這裡相差比較大，這裡相差比較小，可是我沒有量，我現在馬上就看出來了。江昱瑩講對了，疊上去。什麼叫做兩個一模一樣，假設這樣子，這兩張紙有沒有一樣大？有，因為你疊上去就一樣大啊，我問一下，這一張紙跟這一張紙有沒有一樣大？就明明比較小，所以為什麼有一樣、沒有一樣？很簡單，用眼睛看就知道了，你把它想太難了？一樣的問題，怎樣才能確保你摺過去這兩個角一樣大？沒錯，疊起來就可以，對吧！好，疊起來，那摺過去，誰要疊到誰，哪一條線要疊到哪一條線？沒

錯，上面這邊是不是要疊到下面這邊，這樣疊起來這樣才叫一半嘛，對吧（角的兩邊重合）！這樣兩個有一樣大，因為疊在一起了，把它摺好，一個角就好了。鄭力源很不錯，摺了三個角都摺出來了。你看喔，這個角我摺了這一條線，把它切一半，好，你們現在做一件事，摺好之後，然後現在拿著剪刀，把它的尾巴剪下來，剛剛我這一張紙是不是這個樣子的，把它剪下來（圖二十），隨便你剪，只是我等一下還要剪第二刀，所以你第一次剪不要剪太小，免得第二次沒得剪。你看，一張紙本來是展開的，你把它摺起來，摺起來之後，把它下面剪下來，讓它只剩下這一片。這一片把它剪下來，可以了，好，剪下來之後再展開。你剪下來的那一段，不是那一段，所以你是剩下這一片。

80. 學生：這一片。

81. 老師：沒錯，你現在那麼小一片。

82. 學生：沒關係，可以接受。

83. 老師：來，我看一下有誰剪到的比較...，（行間巡視，對某生說：你剪太平了。隨便剪，剪斜斜的。你不要

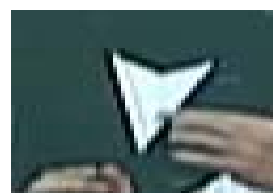


（圖二十）

剪平的，剪平的你就不出一支飛鏢出來了，對，剪好，剪掉的那一部分不要，剩下的這個我要而已，這個可以了。），你們剪好了拿來我看一下，有沒有剪好了？（行間巡視，對某生說：對，沒錯，你弄那個起來，就弄尖尖的角。對，剪好了，你剪斜一點，把它斜一點，剪一刀就好了，你剪了兩刀。剪一刀就好。），不管剪的什麼形狀，你有沒有發覺到，是不是兩個三角形拼起來，有沒有？有，來，這兩個三角形，有沒有一樣大（圖二十一）？

84. 學生：有。

85. 老師：有，你怎麼知道，對啊，因為剛剛同學剪開了，我們來看這裡，來看這個，來，你們看一下你們自己的，我的是凹進去（圖二十二），有的人是凸出來的形狀，來，你看一下你們手中的圖形，有哪一邊是一樣長的，上上下下？王邵宗，你剪的那個最大，你來跟大家說明哪兩邊一樣長，來，站起來說明一下。



（圖二十一）

86. 邵宗：我不會說明。



（圖二十二）

87. 老師：你只要說哪兩邊一樣長就好而已，拿給大家看喔，還有呢？

88. 邵宗：這邊。

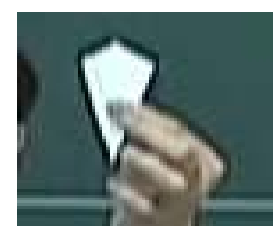
89. 老師：那兩邊一樣長，老師這個呢？

90. 學生：上面那兩個，還有下面那兩邊。

91. 老師：上面那兩邊跟下面那兩邊，所以剪起來，一定是兩個一模一樣的三角形。你看喔，不管你的凸出來的。老師今天這個是飛鏢，你們那個，像王邵宗剛剛那個叫什麼形？箏形，如果有剪這樣的（圖二十三），請你再剪一次，要往外剪往內剪隨便你，你只要把它剪下來。好，再剪一次之後再打開，來，它相等的邊長（圖二十四），是不是也是？可是剛才這兩邊跟剛剛這兩邊有沒有一樣？



（圖二十三）



（圖二十四）

92. 學生：沒有。

93. 老師：沒有嘛，是不是沒有一樣的，對不對？可是有哪一些東西沒有被你改變掉

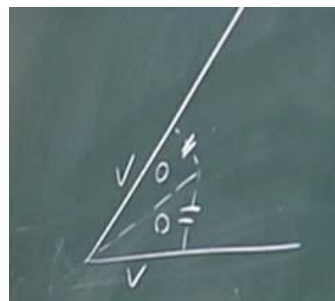
的，下面是不是還沒剪，對，沒錯，角度沒變，好，那我請問你一下，那中間折痕這條線，你剪了兩次之後，它有沒有依然是這個角的角平分線。

94. 學生：有。

95. 老師：有啊！所以這裡你是不是有發覺到一件事，當我一個角，還記得我們剛開始，我們是不是隨便剪了一個角，然後折出這條角平分線，可是這條角平分線一個很重要的性質那就是，你隨便一剪之後，這兩個三角形是不是一模一樣的，而且這兩個三角形一模一樣，有沒有限定這個三角形要多大，要多小？沒有。所以你就是它兩邊會連兩個一模一樣的三角形，那也就是，我繼續再剪一刀剪下去，打開之後兩個三角形還是一模一樣的，好，那這裡給我們一個啓示，就是這個角，你要畫角平分線，那就是像我們剛剛那樣，中間塞兩個一模一樣的三角形那就可以了，老師這裡畫一個草圖，你這裡要一條角平分線，那一定是中間會塞兩個一模一樣的，這兩個三角形一模一樣就好了（圖二十五），有沒有限定這兩個三角形要多大多小？沒有。所以，等一下，要畫兩個一模一樣的三角形，是不是隨便你畫？你要畫兩個一模一樣的三角形的時候，是不是你要知道哪一邊長等於哪一邊長？剛剛你們手上拿到，是不是這邊



（圖二十五）



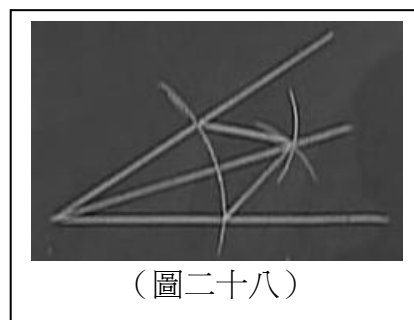
（圖二十六）

會等於這邊，還有呢？上面等於下面（圖二十六），好，來，你們學習單上面第 5 題（P.65，學習單第 5 題），有兩個角，請你塞入兩個一模一樣的三角形，然後那個三角形，多大多小隨便你。一定要用直尺或圓規，你不能

隨便亂畫，老師這個只是畫一個草圖而已。（行間巡視，對某生說：「你那個圓規的痕跡不可以擦掉。」「你畫對了。」「這個畫出這個圖就可以了。」「你畫出這個圖啊！」「你把你剛剛剪的這裡，你要兩個三角形塞在裡面，是不是要這兩邊一樣？這兩邊一樣，對吧！所以你就畫出這兩邊一樣，然後再畫那兩邊一樣。」「畫出這邊跟這邊一樣的，這邊跟這邊一樣的。」）好，這個任務好像有點挑戰，不清楚的，請你把剛剛手上折的這一張，拿出來看一下，如果這是一個角，那裡面會有這一片，那你會怎麼畫，我們剛剛是不是說到了，不管你怎麼畫，一定是上下兩邊一樣，長度要一樣，我們要用什麼？圓規嘛！（行間巡視，對某生說：「第一個兩邊一樣，還有哪兩邊也一樣？是不是？」「沒錯。你第一邊畫對了，你已經把這兩邊一樣畫出來，剩下這兩邊呢？」「你不要忘記了，沒有人規定你這一段要多長。」「沒錯，你畫的，你上來上面那個，畫一下第一個。」）來，大家看一下李乙辰怎麼畫。好，李乙辰跟大家說一下你怎麼畫的？



96. 乙辰：就是先找出這兩邊一樣，所以要先這樣子（圖二十七）。
97. 老師：你拿圓規說明。
98. 乙辰：因為圓周上面任何一點都會跟圓心距離一樣，所以把這個當成圓心，就是這樣畫，這兩點跟這一點的距離就會一樣，然後一樣再用這兩點找出來，這樣找出來像這樣子，相交出來這一點和這兩點的距離也會一樣，那這樣畫出來就是一個那個，就是讓它們兩個相等（圖二十八）。



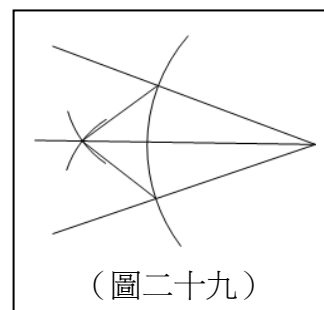
99. 老師：很好喔！大家看好，你要畫一樣長，是不是用圓規，對吧！我再說一次喔，剛開始是不是要先找出這兩邊一樣長，那有多長有沒有講？沒有。沒有講就怎麼辦？

100. 學生：隨便。

101. 老師：沒錯，隨便畫，所以剛剛李乙辰就直接畫出來，就是第一個，好，第二要畫這兩邊一樣長嘛，有沒有說要規定這兩邊要多長？

102. 學生：沒有。

103. 老師：也沒有，所以就怎麼辦？就隨便畫嘛，是不是？隨便畫，所以說你隨便畫是這裡跟這邊一樣長，所以你這樣子畫完之後，接下來圓規能不能動到？不行喔！就是這樣子，這樣子畫這兩邊有沒有一樣長？有。這兩邊有沒有一樣長？有。連接起來就OK了，是不是？好，一樣的，換個方向，這個試試看，畫好了，你怎麼畫，一樣，來，換你上來畫，三角形連起來，要畫三角形（圖二十九）。



104. 學生：要連起來。

105. 老師：連起來，要畫三角形。大家看一下，請問一下，我們從剛剛到現在，都是你把圓規隨便張開隨便畫，那會不會隨便到有一天，你這樣畫，結果你失敗了，沒有辦法畫出兩個三角形，有沒有可能？你圓規畫壞，是另外啦，有沒有其他可能？來，郭定恩，你來說說看有沒有可能，除了圓規壞掉之外。

106. 學生：他還在想。

107. 老師：還在想，你想一下，我剛剛是不是說隨便張開，要多大多小都沒關係？那有沒有那個你張開了，結果張開讓你畫不出來的？沒錯啊！王熙竣講到一

個關鍵了，不是三角形，那怎麼樣會跑出不是三角形？

108. 學生： 180° ，超過 180° 。

109. 老師：超過 180° ，還有呢？我來示範，第一次我是不是這

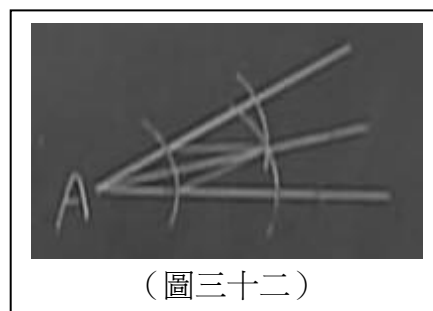
樣子畫，如果張開太大，這樣子不就失敗了嗎？
這樣算不算（圖三十），為什麼？沒錯，線可以再
延伸，所以你這裡張開多大多小都沒關係。這裡



呢？張開到非常大，是不是也可以，那如果我張
開到這麼小呢（圖三十一）？沒錯，兩個一定要
能夠交會，是不是？所以說，你中間這裡，那個
長度注意一下，你不要畫太短喔，畫太短你就失
敗了，所以說，一定要能夠交會。這裡畫出來，



這中間這一條線，是不是都是角平分線（圖二十八和圖二十九）？今天這
裡題目是要你畫出兩個一樣的三角形，如果我說，請你畫角平分線就好，
你是不是畫中間這一條就可以了？因此下面第 6 題（P.66，學習單第 6 題
）有三個角，請你分別畫出它們的角平分線，畫法就跟剛剛一模一樣，差
別不一樣的就是不用把整個三角形都給畫出來。（行間巡視，對某生說：「
你畫得太短了。」「陳柏勳，你這個畫得不錯，你上去畫第一個。」「你這
樣畫對啊，沒錯。」「你這個太短了，再長一點就是了，這兩個弧太短了，
長一點就碰得到了。」「沒錯。」「你沒有
兩個弧的交叉點，那弧的交叉點不能擦掉
喔！」「對，沒錯啊！畫角平分線就不用
畫這兩邊。」）來，陳柏勳，你跟大家說
一下怎麼畫吧，用圓規說明一下。

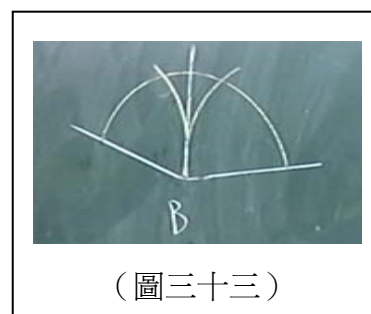


110. 柏勳：就隨便畫弧相交這兩條線，然後再以這兩點為圓心再畫弧，得到交點之後再連線（圖三十二）。

111. 老師：很好，這樣畫對了，還有沒有同學有發現，哪個地方畫錯的？那兩條線是不是應該怎樣？那兩條線需不需要畫？不需要。因為什麼不需要？沒錯，人家只是要你畫角平分線而已！所以你只要把它連起來就好了。來，你去畫第二個圖。

112. 學生：第二個。

113. 老師：你還記得怎麼畫嗎？他好像有一點畫錯（圖三十三）。你跟大家說一下，你是畫哪個弧，量哪個長度，你剛剛是畫哪個弧，以哪個為圓心，然後哪個為半徑畫出來的？你剛剛怎麼畫的？



（圖三十三）

114. 學生：就先畫一個圓。

115. 老師：然後第二個呢？

116. 學生：從這裡量到這邊，然後畫一個可以對到的。

117. 老師：好，有沒有問題？

118. 學生：沒有。

119. 老師：沒有嗎？可是跟你們畫的圖差很多，為什麼你們都沒問題呢？你們有誰跟他畫一樣的，第二個步驟跟他畫一樣的？

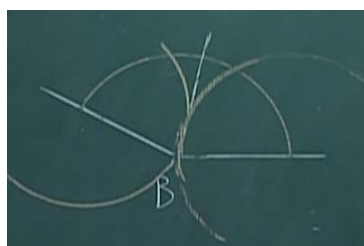
120. 學生：他是往內的，我是往外的。

121. 老師：往內的、往外，他第二個步驟，你有沒有發覺他這裡很難畫？事實上他是沒畫準，他畫準應該是怎樣？這兩個點，以這個為圓心，以這個為半徑，我圖畫出來給你看，沒錯，交叉點就是這一點而已（圖三十四），第一次陳柏勳畫的，他的第一步驟有沒有一樣？有嘛，是不是以角的頂點為圓心，

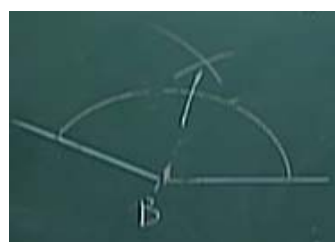
隨便畫個半徑，第二步呢？

122. 學生：大一點。

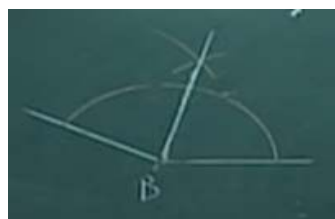
123. 老師：大一點嘛，你這樣是不是很難畫，有沒有人規定一定要用這一段為半徑，沒有嘛！我們只是規定第二步要相交就可以了，所以你要畫長一點，這樣就 OK 了嘛，這樣行嗎（圖三十五）？行，所以我們只要求你一定要有相交，然後要能夠好畫，可以吧！然後這樣子這兩點你就可以把它連接起來了（圖三十六），好不好？那第三個圖是不是也是差不多？王熙峻，你會畫嗎？你的好像也是錯的。老師示範最後一次。以角的頂點為圓心，半徑當然是隨便，第二次我是不是再張開，張開的長度，有沒有要求要跟剛剛一樣，沒有嘛！我只要好畫就好了，所以說，你就隨便張開，我只要求第一次畫的跟第二次畫的圓規不能動到，為什麼不能動到？你是不是要一樣長（圖三十七），那這樣就可以連接起來了，這樣連接起來是不是就是角平分線？你們畫的也是這樣的圖形嗎？是啦，我看下去，很多人。還是畫跟曾子謙同學剛剛第一步的一樣，注意一下，那我們就先上到這裡，班長，



（圖三十四）



（圖三十五）



（圖三十六）



（圖三十七）

下課。

124. 學生：起立，立正，敬禮。謝謝老師。

參、教學說明

我們這次拍攝的單元是尺規作圖，一般而言，尺規作圖是學習幾何最好的入門方式，因此這次設計的教案，我也是希望秉持著這個理念，利用尺規作圖來發現一些幾何的性質，也由發現幾何的性質，來回推尺規作圖的方式。一般我們尺規作圖，作圖的方法一定有它原本的幾何意義，所以我剛開始在給學生設計的時候，是先給學生觀察現象，再讓學生去了解為什麼我要這樣的作圖。尺規作圖，最早剛開始的問題就是，我們手上拿到圓規，它到底作用是什麼？所以我設計了一些活動，先讓學生畫一個圓，然後，再讓學生去畫一個全等的三角形，這一些都是讓學生了解我們使用圓規的目的所在。而一般學生在用的時候，最常發現的一個問題是，學生很習慣長度是用尺去量的，在剛剛的教學過程中，也一直的發現到。學生剛開始不太習慣，因此我要讓他去畫出一個三角形，它到底是否一模一樣大，學生很習慣去量它的長度，也就是我會在學生的學習單上面，看到學生註記的很多記號，他會在上面寫 3.2 公分、幾公分之類的，不過後來要他們畫出一個全等的三角形的時候，他會發覺到，只是用公分去量它的長度是有困難的，之後學生才會慢慢的去習慣，一個長度用圓規去量出來，這樣才是比較精準的。第二個，我所設計的是做等角，做一個等角它的尺規作圖，我們詳細的去分析出它的步驟，事實上它是一個 SSS 的全等三角形。爲了要讓學生去發現這樣的現象，我設計的學習單，是先畫一個三角形，要求學生畫出這個全等的三角形。當然，畫一個三邊都跟原本學習單一樣長的三角形，它是有困難的，所以這個地方我再利用扣條，告訴學生當我第三邊畫好了，其他兩邊如何把它接起來，這個時候扣條是一個很好利用的工具，我可以旋轉扣條，然後讓學生發現，扣條兩邊的長度一樣長，

當你要靠近，讓它能夠接得起來的時候。那兩個扣條事實上像是在做時鐘旋轉的動作，因此他們就會發覺，原來畫弧這個動作，兩個弧的交點，就是一個三角形第三個點的存在。

接下來，下一個活動是畫角平分線，畫一個角平分線，在畫圖的時候也是詳細的去分析一下我們所畫過的軌跡。我們會發現到，畫一個角平分線就是在角裡面畫一個鳶形，而這個鳶形的其中一個對角線，剛好是那個角的角平分線。所以畫一個角平分線最大的任務，就是你要在角裡面塞入兩個全等的三角形。這個時候，我們的最大問題是，如何讓學生去發現這兩個三角形的存在。所以我就設計了剪紙的活動，先讓學生裁出一個角，然後再用剪刀剪出，把後面那一段，比較不規則的剪掉之後再展開，學生這個時候就自然而然的發現到，原來他手上的兩個全等一模一樣的三角形，而為什麼要再剪第二刀，然後再剪出另外一個更小的呢，那是為了讓學生知道，我一個角平分線，只要兩個三角形一樣大就好了，至於那兩個三角形要多大要多小，那是隨便的。透過這樣的活動，接下來學生應該比較能夠畫出中間那條角平分線。可是這中間我再鋪陳了一個，就是畫一個角，然後讓學生畫出這兩個全等一模一樣的三角形，等到這個活動進行之後，接下來就是要讓學生直接畫出一個角平分線，而角平分線跟之前畫兩個全等一模一樣的三角形的差別是，你不需要把第三邊給畫出來。

一般學生在學習這一段尺規作圖，最常發現的現象就是，以往的教法是告訴學生，你就跟著這樣子畫。可是在這樣的過程當中，變成我們忽略掉，這樣的學習過程最重要的是，你從其中發現數學的現象，還有，你之所以會這樣畫，是因為有數學上的一些背後的意涵。因此我這次的設計，就是不直接告訴學生該怎麼畫，而是讓學生操作之後，去發現背後的現象，也是期望在這樣子的學習過程當中，讓學生比較能夠理解操作的意義所在。而且這也對於以後，在腦中所學習到的數學概念，會有比較深刻的

了解。

學生在做畫一個等角的活動，也就是如何畫出一個三角形，先畫出一個三角形，然後再畫一個等角，這方面是沒問題的，可是在畫一個等角的背後，有一個就是它的步驟可以省略，這一方面學生，可能對他們來講是比較困難一點，他們比較思考不過來，因此這一方面的學習，個人比較建議，可以用一個小組討論的方式，希望藉由小組共同腦力激盪的結果，能夠思考出他可以把這樣的步驟，省略成一個比較簡單的方式，而變成我們現在比較習慣的畫等角的方式。

學習的這一段活動，我們還有設計了一個要學生去用摺紙，然後剪一個角，然後讓他發現說，摺紙裡面有一些什麼樣的現象，在這樣的活動過程中，反而會發現到，學生對於兩個圖形全等，概念並不是那樣的強，這一方面可能詳細的原因還要去追討。只是個人覺得，我們應該多給學生設計這樣子類似的活動，事實上兩個長度為什麼一樣長？兩個面積為什麼一樣？兩個圖形甚至於為什麼全等？從最直觀的意義的概念，它就是兩個圖形放在一起，完全疊合在一起。而在這樣的學習過程，雖然剛開始發現學生並沒有這樣的概念，可是事實上只要操作過一兩次，學生就可以把這個概念完全學習到，而且這樣子學習到之後，我是確信以後對於相關的幾何操作方面，他應該會有比較深刻的了解。

以上就是我對這一堂課所設計的教學觀念，和學生現場上發生的一些狀況。個人覺得經過這樣的實際操作之後，學生會比較有深刻的印象，而且他們比較能學習到幾何的意涵。

肆、教學後的省思

尺規作圖的教學重點，莫過於工具的使用限制與作圖的方法。以往這一個單元的教學方式是先告訴學生作圖的方法，然後再分析其背後的原理；這一次反其道而行，先觀察現象然後再發現作圖方法。前一個教學方法中，學生所學習到的作圖方法是被告知的、權威式的，因此理解背後的原理也只是在幫助方法的記憶；後來的教學方法中，學生所學習到的作圖方法是自己建構出來的，作圖的方法只是基本幾何性質的應用而已。在後續的課堂中，我也給學生一些尺規作圖的應用練習，比如：作一個已知邊長的正方形、複製一個四邊形…等。發現學生比較願意嘗試以不同的方式完成目標，課堂上也產生了多種的作圖方式，學生不再一味地等待老師公佈“標準”作圖方法。

這樣的教學方式所必須付出的代價，乃是教師必須花費更多的時間才能完成此單元，因為教師要停下來等待學生的發現。所以本單元的教學拍攝因為時間的緣故，兩堂課的時間只進行到了【活動三】，後面的教學活動雖然沒有進行拍攝，但是也是照著原本教案的設計進行。花費的時間雖多，但是學生對於尺規作圖有更多的感受，甚至於到了後來，學生還自創了與原本不同的作圖方式。尺規作圖的方法本來就沒有固定，所以就不能以宣告的方式直接宣佈作圖的方式。所以這一些作圖方法，應該視為幾何性質的應用；要先了解幾何的性質，才能有作圖方法的產生。

勾股定理

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級上學期

二、教 學 者：台北市瑠公國中 黃士哲 老師

三、教學目標：能理解勾股定理的幾何意義，並利用勾股定理算出直角坐標平面上兩點間的距離。

四、活動目標：

【活動一】能由正方形面積察覺直角三角形三邊的關係。

【活動二】能透過圖形的直觀瞭解及說明勾股定理。

【活動三】能利用勾股定理的概念，求出坐標平面上兩點間的距離。

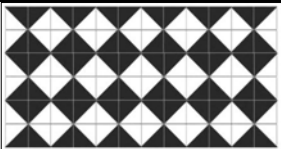
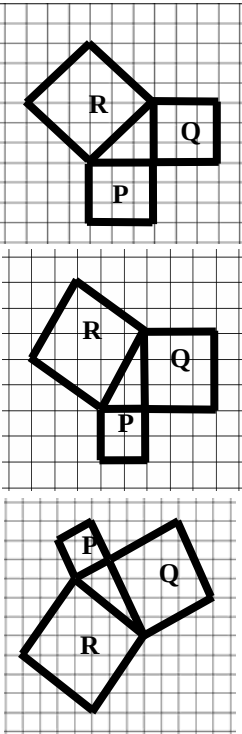
五、教學概要說明：

先從地磚中的等腰直角三角形察覺數學定理，進而推廣到任意直角三角形也存在著該定理，然後進行勾股定理的幾何證明，最後再應用勾股定理的概念，求平面上兩點間的距離。

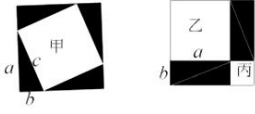
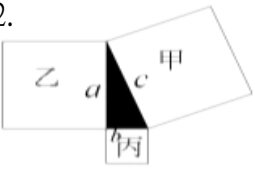
六、教學活動設計：

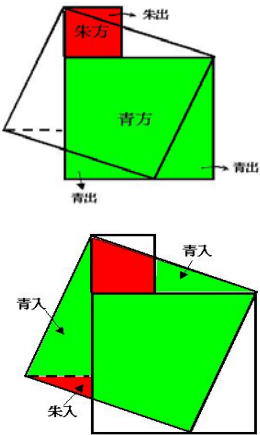
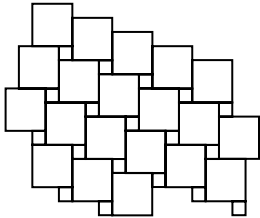
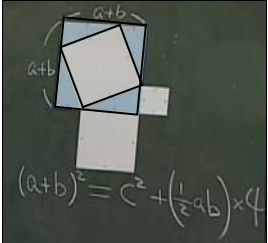
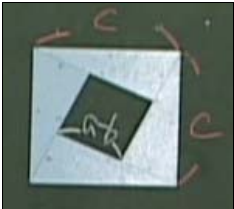
【活動一】能由正方形面積察覺直角三角形三邊的關係。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 由幾何的觀點察覺直角三角形三邊的關係	1.畢達哥拉斯由相同的等腰直角三角形黑白磚發現「大正方形面積等於兩個小正方形面積相加」你看得出來畢達哥拉斯的發現嗎？	• 由畢達哥拉斯的故事及數個全等的等腰直角三角形地磚，察覺等腰直角三角形，以兩股為邊長的正方形面積和等於以斜邊為邊長的正方形面積。	• 能從圖形中指出「大正方形面積等於兩個小正方形面積相加」

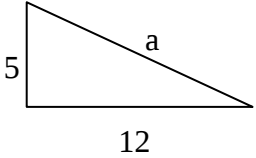
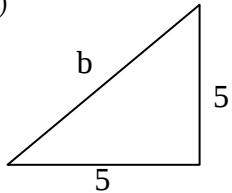
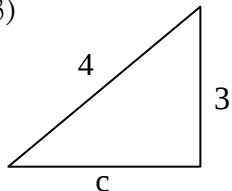
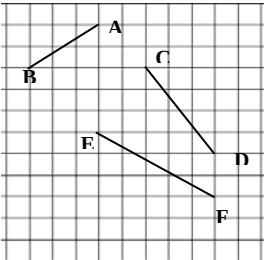
	 2. 如果不是等腰直角三角形，這種關係仍然成立嗎？ 	探討不是等腰直角三角形時，上述的關係依舊成立。	能分別算出P、Q、R的面積，並發現$P+Q=R$。
--	---	---	--

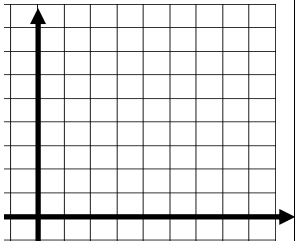
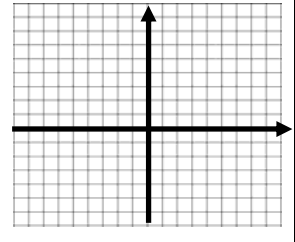
【活動二】能透過圖形的直觀瞭解及說明勾股定理。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
藉由拼圖說明，對於任意直角三角形，勾股定理依舊成立。	1.  2. 	- 能藉由拼圖發現：甲面積＝乙面積＋丙面積。 - 能繼續推廣出直角三角形三邊長的關係。	能說明「甲面積＝乙面積＋丙面積」

	3.  4.  5.  6. 	• 能欣賞並理解三國時代數學家劉徽對勾股定理的證明。 • 藉由生活經驗，學習畢達哥拉斯的精神，驗證勾股定理。 • 能藉由面積的組合，瞭解直角三角形三邊長的關係 • 能藉由面積的組合，瞭解直角三角形三邊長的關係	• 能由 $(a+b)^2 = c^2 + (\frac{1}{2}ab) \times 4$ 推導出 $a^2 + b^2 = c^2$。 • 能由 $(a-b)^2 + (\frac{1}{2}ab) \times 4 = c^2$ 推導出 $a^2 + b^2 = c^2$。
--	--	---	--

【活動三】能利用勾股定理的概念，求出坐標平面上兩點間的距離。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
勾股定理的計算	1.利用勾股定理求下列直角三角形的未知邊長： (1)  (2)  (3)  2.圖中每一小格皆為邊長1的正方形，求$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$的長度。 	- 已知直角三角形的兩個邊長，求第三邊。 - 在方格中求格子點間的線段長度。	- 已知直角三角形的兩個邊長，能求出第三邊。 - 能在方格中求出$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$的長度。

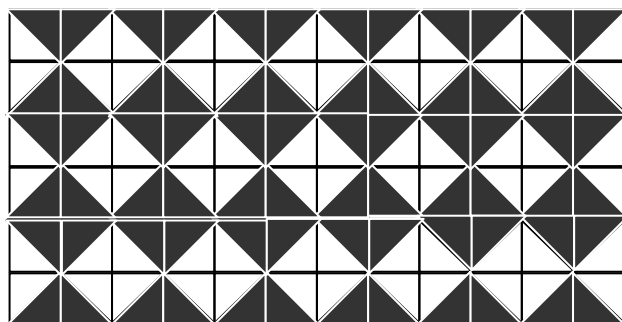
• 勾股定理的應用	3.求平面上的兩點距離 (1)已知坐標平面上A(1 , 2)、B(4 , 5)兩點，求$\overline{AB}$的長。  (2)已知坐標平面上C(3 , 1)、D(-5 , 7)求$\overline{CD}$的長。 	• 藉由方格中求格子點間線段長度求法的前置經驗，求坐標平面上兩點的距離。	• 能求出坐標平面上兩點的距離。
------------------	--	---	-------------------------

附錄：學習單

勾股定理學習單

八年十班____號 姓名：

一、你也可以當偉人！

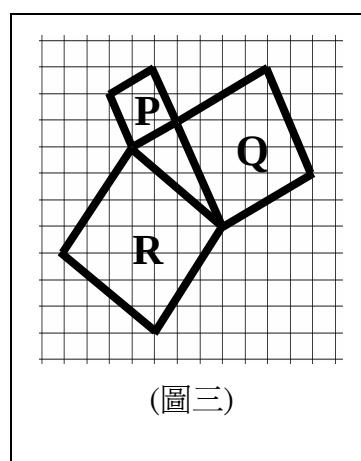
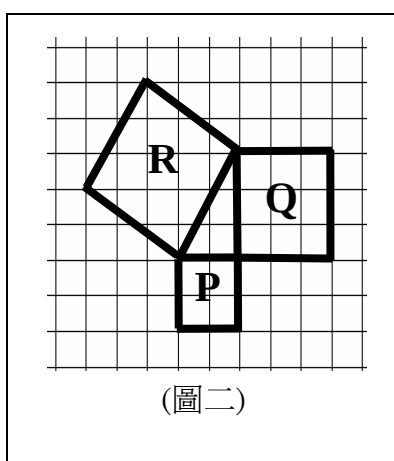
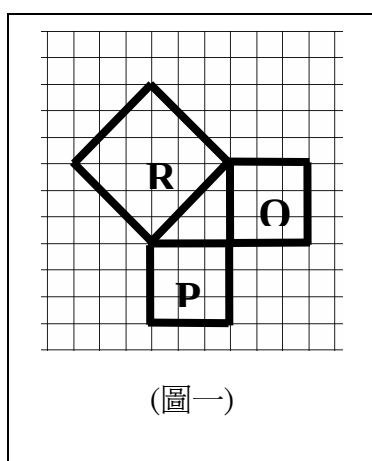


畢達哥拉斯的發現：地磚中隱藏著數學定理

有一次宴會中，畢達哥拉斯一直注視著地上的地磚，看著相同的等腰直角三角形黑白磚；他想：「一定有某種奇妙的關係存在於這黑白地磚中」。「哇！真巧！大正方形面積等於兩個小正方形面積相加！」想到這裡，他情不自禁地跳了起來……

你看得出來畢達哥拉斯的發現嗎？說說看你的發現是什麼？

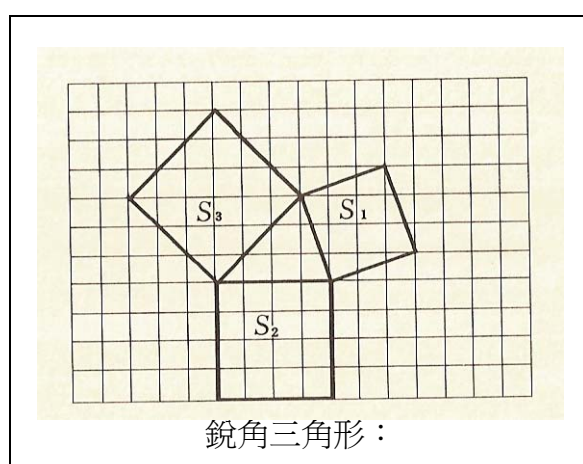
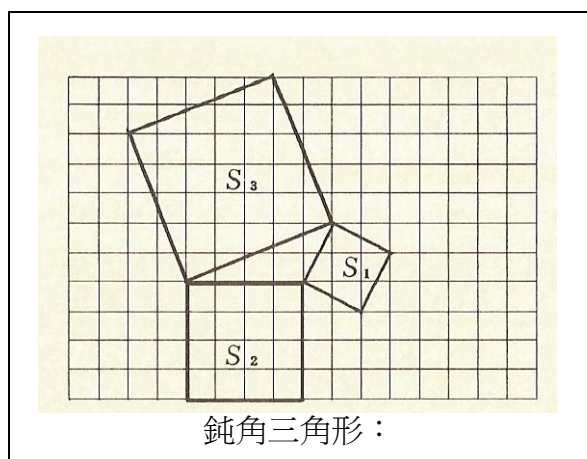
二、如果不是等腰直角三角形，這種關係仍然成立嗎？



求正方形的面積

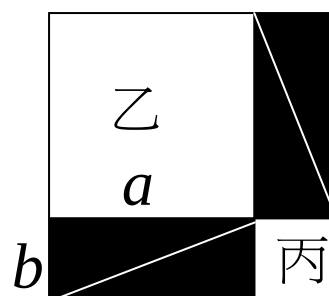
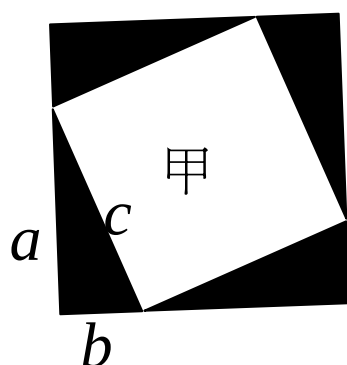
	P	Q	R
圖（一）			
圖（二）			
圖（三）			

我發現：

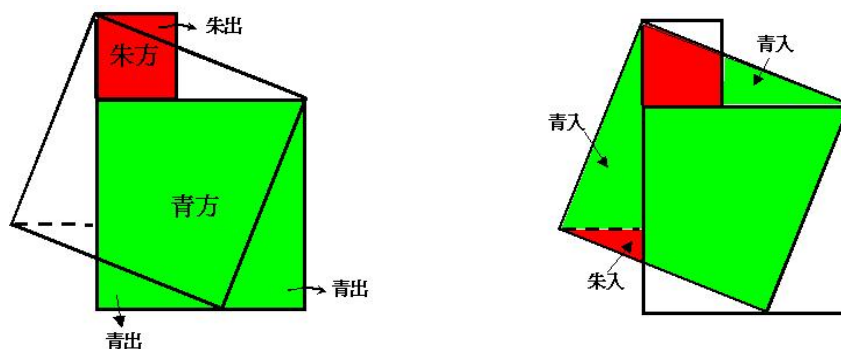


三、勾股定理的證明

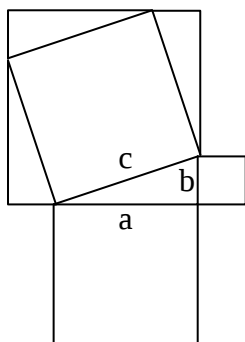
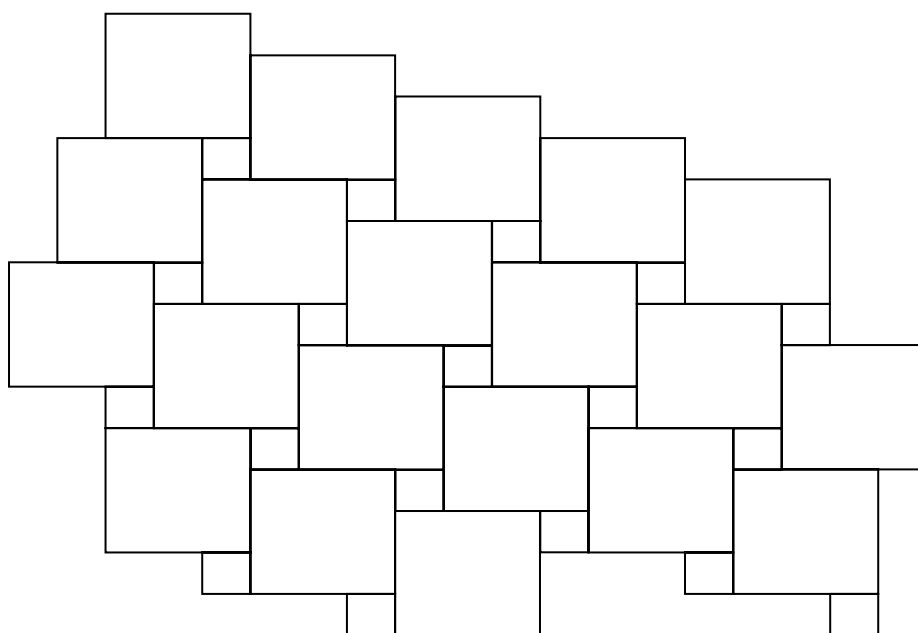
【Proof without words】



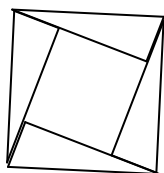
公元三世紀時的三國時代數學家劉徽在《九章算術》第九章「勾股」的勾股術



學學畢達哥拉斯



證明：

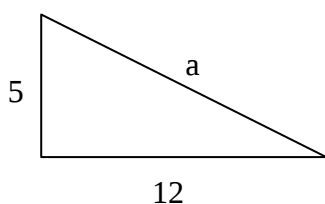


證明：

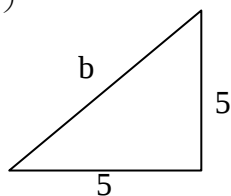
四、練習

1. 利用勾股定理求下列直角三角形的未知邊長：

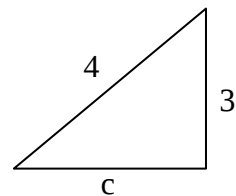
(1)



(2)

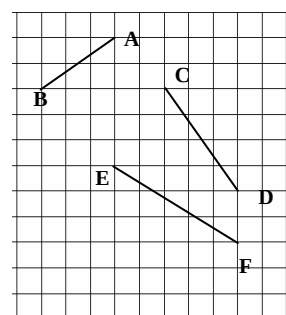


(3)



2. 右圖中每一小格皆為邊長 1 的正方形，

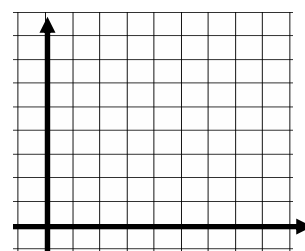
求 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ 的長度。



五、平面上的兩點距離

1. 已知坐標平面上 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 5)$ 兩點，

求 $\overline{AB}$ 的長。

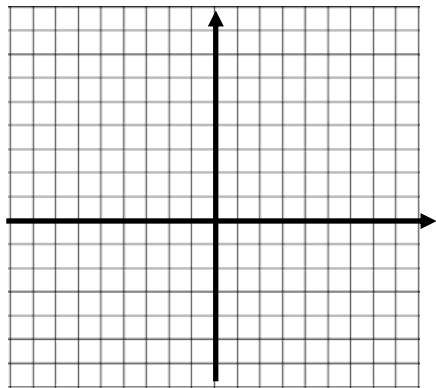


2. 已知坐標平面上 $C(3, 1)$ 、 $D(-5, 7)$

求 $\overline{CD}$ 的長。

【練習】已知坐標平面上 $P(2, 1)$ 、 $Q(4, -3)$ 兩點

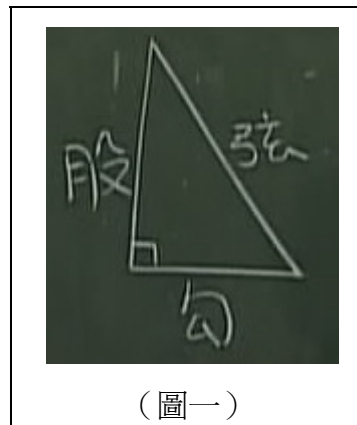
求 $\overline{PQ}$ 的長。



貳、教學實錄

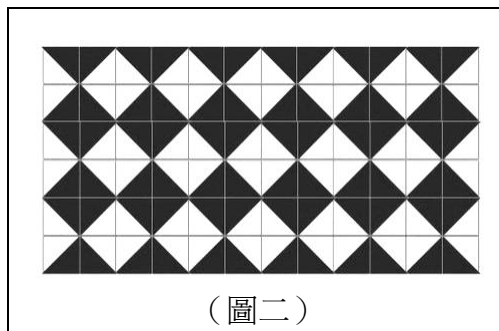
【第一節】

1. 老師：各位同學，今天我們要上的是勾股定理，我們之前已經上過一堂課了，那一堂我們有簡單的介紹一些勾股定理，要如何給兩邊，求第三邊。我們也有介紹到，在古代，如果一個直角三角形，有一個邊叫做勾，另外一個邊就會叫股，然後直角的對面就叫弦（圖一）。後來，後人對此就有了爭議，到底短的是勾，還是長的是



（圖一）

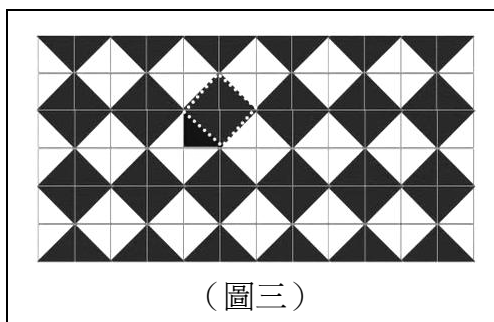
勾，大家爭論不休，後來乾脆兩個通通叫股，然後直角的對面，我們就把它叫做斜邊。勾股定理主要要探討的是什麼？直角三角形三個邊長的關係。今天這一節課比較著重在證明，但不是要你形式上的去寫證明，而是你看到圖怎麼去發現與說明。那為什麼一開始的標題，「你也可以當偉人」，因為你這一堂課上完了以後，你會發現，你也有機會當偉人。我昨天晚上也有嘗試如何當偉人，等一下秀給你們看。來！你來看喔！你的學習單第一個，你也可以當偉人。話說畢達哥拉斯，就是古代西方一個數學家、一個學者，他有一天去參加人家宴會，在地板瓷磚上看到這一個圖形（圖二），他就站在那裡好久好久，然後就一直觀察，他發現什麼？什麼？聽不清楚，來！你站起來回答一下。



（圖二）

2. 學生：三角形拼起來的。

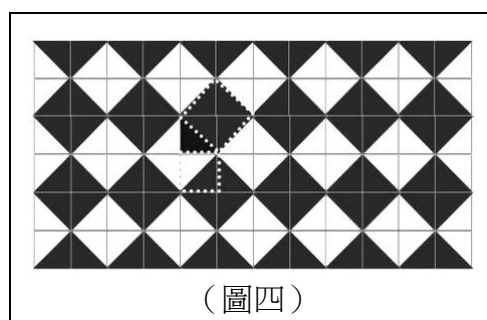
3. 老師：三角形拼起來的。很好！是什麼三角形拼起來的？
4. 學生：直角三角形。
5. 老師：直角三角形。沒錯！他在這裡面看到很多個、很多個直角三角形，而且都是什麼直角三角形？有誰知道？有誰觀察到？
6. 學生：等腰。
7. 老師：等腰。是不是都是等腰直角三角形？然後他還發現什麼？這個等腰直角三角形，它三個邊長隱藏著一個豐富的性質，什麼性質呢？就是後來偉大的勾股定理。其實勾股定理在各個國家裡面，它都有怎樣？它都有在做研究喔！而且幾乎都是同時，不是這一個國家把研究成果傳到另外一個國家。在古代的時候，資訊是很不發達的。你看勾股定理，畢達哥拉斯他當初怎麼想？學習單上有寫了一句話很重要！你可以從這一句話去觀察一下。他講了什麼？「哇！真巧！」什麼真巧？「大正方形面積等於什麼？兩個小正方形面積相加。」他講的這句話「大正方形面積等於兩個小正方形面積相加」。有誰可以從這裡面(地磚上)看的到？觀察一下，哇！真巧！快點！有誰？有誰發現了？逸群有沒有看到？平常你充滿了智慧！那我們請東翰，你知道嗎？想一想！自己想一想！有沒有？慧真，知道嗎？
8. 慧真：不知道。
9. 老師：不知道。有誰？之勤知道嗎？有沒有發現？想一想，然後你現在研究一下，拿出筆來自己思考一下，看著圖，盯著圖一直看，看你能不能成為畢達哥拉斯。你想到了什麼？他這句話讓你想到了什麼，這一句話是畢達哥拉斯想到的，由他這一句話，你能不能



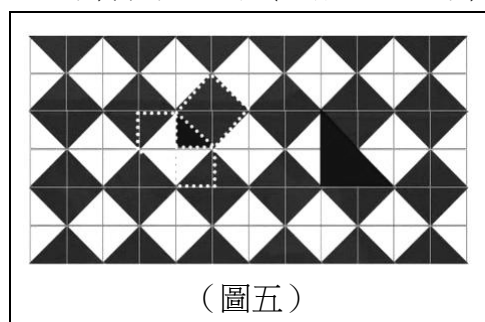
(圖三)

也跟著想到？有沒有辦法？偷偷暗示一下喔！偷偷暗示一下，有沒有看到（圖三）？那你想到什麼？他說：「哇！真巧！兩個小正方形面積加起來剛好等於一個大正方形面積」。有誰想到？想到的請舉手，發表一下，這是你最好的機會，快點！謹兒有沒有想到？沒有！幼筑呢？

10. 老師：彥竹站起來說一下！彥竹，我們班最厲害的彥竹。
11. 彥竹：還在思考。
12. 老師：在思考。未來的畢達哥拉斯，來，啓軒，想到什麼？在哪裡？要不要出來指一下？出來指一下！不然等一下讓你指另外一個的喔！再給一個暗示喔！（圖二）不要太客氣，看到了嗎？兩個小正方形面積會等於什麼？兩個小正方形面積加起來會等於一個大正方形面積。有誰想到？來，漢棋，你不是要舉手？我以為你要舉手。冬梅。
13. 冬梅：想不到。
14. 老師：想不到。我剛剛已經抽籤了！抽中「謙」了啊！來！廷謙，抽中你了！剛剛不是抽籤嗎？那就中「謙」啊！有沒有？淵傑，怎樣？再來試一下喔！如果從這裡咧？其實你在電視上常看到一則廣告，跟畢達哥拉斯就很相近。常常有一個廣告不是有一個什麼？使命怎樣？
15. 學生：必達！
16. 老師：使命必達！那必達哪裡？必達哪裡？畢達哥拉斯啊！有沒有！那畢達哥拉斯這個人，我給一個正方形，我再給一個正方形喔！（圖四）那還有哪一個？有沒有人再想一下？最後等一下抽籤叫人出來發表囉！奕淳，孫奕淳。



17. 學生：老師，悅新很厲害。
18. 老師：好，悅新很厲害，快一點，還有一個正方形，你覺得在哪裡？出來比比看，來啦！給個機會，你是第一個上台的，還有一個正方形會在哪裡？
19. 悅新：這邊啊！
20. 老師：對啊！所以他其實知道，我們來看，對了沒？對了，好，同學繼續，畢達哥拉斯說的那句話是兩個小正方形的和，會等於一個大正方形；兩個小正方形面積的和，會等於一個大正方形面積。指的是什麼？
21. 悅新：這兩個(手指小正方形)會等於這個(手指大正方形)！（圖五）



22. 老師：這兩個會等於這個！是哪兩個等於哪一個？
23. 悅新：兩個股的正方形會等於一個斜邊的正方形。
24. 老師：對啊！那這一個面積(一股的小正方形)，這一個面積(另一股的小正方形)加起來，跟這一個面積(斜邊的大正方形)會相等，由圖形上可以看的出來嗎？可以，這個(手指圖五中，小正方形中的某一個三角形)可以到哪一個？
25. 悅新：這個(手指圖五中，大正方形中的某一個三角形)。
26. 老師：這個。好，那這一個咧(手指圖五中，小正方形中的另一個三角形)？那這一個咧？(手指圖四中，另一個小正方形中的一個三角形)那這一個咧？(手指圖四中，另一個小正方形中的另一個三角形)好！謝謝悅新，那悅新說的

，想倒回來看嗎(投影片)？

27. 學生：想。

28. 老師：想喔！我們來看吧！悅新說的是這一個(圖五中，小正方形中的某一個三角形)，有沒有？這一個我們來看哦！你們要什麼顏色的(投影筆)？

29. 學生：白色！

30. 老師：還白色咧！好，悅新說的是這一個(圖五中，小正方形中的某一個三角形)，是不是可以到這裡(圖五中，大正方形中的某一個三角形)？然後這一個(圖五中，小正方形中的另一個三角形)是可以到哪裡？是不是到這裡(圖五中，大正方形中的某一個三角形)？然後這一個(圖五中，另一個小正方形中的一個三角形)到哪裡？這一個是不是(圖五中，大正方形中的某一個三角形)？然後這一個呢(圖五中，另一個小正方形中的另一個三角形)？最後這個面積是補到這裡(圖五中，大正方形中的某一個三角形)。(圖五)所以有沒有符合畢達哥拉斯他的想法？悅新，有沒有符合畢達哥拉斯他的想法？有嘛！兩個小正方形的面積和會等於這個大正方形的面積。有沒有？然後我們再來看，你還可以看到嗎？可不可以看到更大一點點的三角形？悅新比畢達哥拉斯更厲害在哪裡呢？他看好久，悅新才看一點點的時間就知道了。對不對？來，柏鈞。

31. 柏鈞：我？幹嘛？

32. 老師：再大一點點的！大一點點的！你有看到哪一個更大的等腰直角三角形嗎？

33. 柏鈞：沒有。

34. 老師：來，出來比一下，我知道你有。

35. 柏鈞：看不到啊！

36. 老師：真的啊，看不到，到前面來看嘛！

37. 柏鈞：我是瞎子。

38. 老師：我帶你來看，快點…，快點嘛！你看我們拉拉扯扯的，你覺得是哪一個？
你覺得是哪一個？

39. 柏鈞：不知道啊！

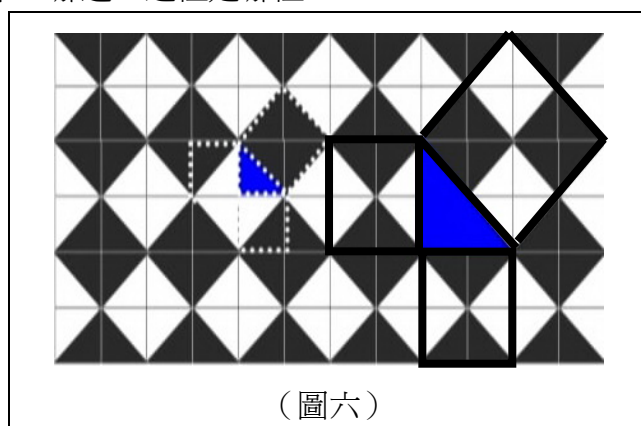
40. 老師：有啦！大一點的等腰直角三角形。

41. 柏鈞：這一個(手指圖五的某一個直角三角形)。

42. 老師：那跟剛才的一樣大，我要再大一點的，由四塊等腰直角三角形拼出來的。
想一想！

43. 柏鈞：這一個喔？好，這一個啦(手指圖六中的等腰直角三角形)！

44. 老師：對，你看到啦！對啊！沒錯啊！好啦！我們來看是不是那一個？真的是那一塊耶(圖六)！好厲害喔！這一塊你可以看到什麼？來，我們來看哦！模仿剛才的，兩個小正方形的面積，會等於一個大正方形面積。誰？33 號，來，快點！來，看一下！模仿這邊，兩個小正方形的面積會等於一個大正方形的面積。來！出來比一下，這邊是哪裡？出來吧！站這邊會比較容易看得到。來，哪邊？這裡是哪裡？



45. 學生：這裡是這裡啊！

46. 老師：這裡是這裡，好，來，哪兩個小正方形面積會等於一個大正方形面積，看

的出來嗎？

47. 學生：看不出來！

48. 老師：看不出來！比比看，你遮住了，對！難怪你看不出來，哪裡？比一比，我沒辦法像柏鈞跟你這樣手拉手。

49. 學生：老師，你不是色鬼嗎？

50. 老師：你慘了，你！從這裡，有沒有看到？在哪裡？來，比一下吧！這邊是哪一塊？這邊，這邊是哪一塊？

51. 學生：這一個。

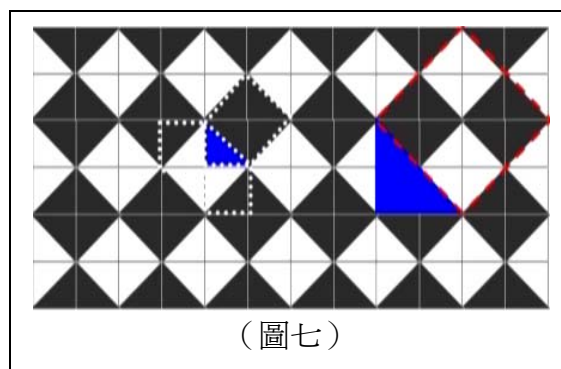
52. 老師：這一個，我說小正方形的面積，你看左邊那一個喔！左邊那一個，這邊，你看我的螢幕喔！不是看我，看螢幕。好，你看這邊，這邊是直角三角形，有沒有？這裡是不是有一個直角三角形？有沒有看到直角三角形？然後這一個（圖六），一個股的平方，有沒有？那另外一個股的面積，有沒有看到？如果模仿這邊，這邊應該是哪裡？你覺得呢？指出來！然後我就幫你畫出來，哪裡？應該不是吧！來，我們找一個同學來拯救他一下，5 號，來，來吧！

53. 學生：我不會！

54. 老師：找一下那邊啊！兩個小正方形會等於一個大正方形的面積。找得到嗎？

55. 學生：找不到！

56. 老師：找得到嗎？找不到。給個提示，我給大正方形面積的提示，好不好？這一個（圖七），看到沒？那你覺得會是哪兩個小正方形面積的和？



57. 學生：螢幕會晃耶！
58. 老師：我畫出來，是不是？
59. 學生：老師，螢幕會晃！
60. 老師：螢幕會晃喔！
61. 學生：對啊！
62. 老師：不是啊！那是因為你人在晃啊！有沒有？這一塊(圖七，紅色正方形)，有沒有看到？這一塊！有沒有？我幫你畫起來，有沒有？這一塊，就是這一塊，看到了嗎？
63. 學生：看到了！
64. 老師：看到了！那會是哪兩個小正方形？暈船了！來，43 號！哪一個？其他可以看一下喔！有沒有人想到了？思惠想到了，想到了嗎？來，我們找一個，彥竹，出來，來啦！等一下，注意看喔！我們彥竹要拯救你了，誰？這一個(手指一股為邊的小正方形)，然後還有哪一個？這一個(手指另一股為邊的小正方形)，好，比的順序都一樣耶！厲害！好，彥竹來講解一下為什麼？
65. 學生：我可不可以下去了？
66. 老師：你在旁邊幫忙看一下，你要不要幫忙看一下，哪一個？大聲一點！不然後面聽不到。
67. 彥竹：這個大正方形的面積(以斜邊為邊的正方形)，和這邊這兩個(以兩股為邊的兩個正方形)。
68. 老師：為什麼？奕鈞要不要幫忙補充一下？你救我，我救他這樣。有沒有？彥竹的意思應該是說，那個三角形面積跑到哪裡去？在這裡，彥竹的意思就是說，這個正方形(圖六中，直角三角形左邊的正方形)有幾個等腰直角三

角形？有幾個？

69. 學生：8 個。

70. 老師：8 個。那這邊咧（圖六中，直角三角形下方的正方形）？是不是也是 8 個？是不是也是 8 個？那這裡（圖六中，直角三角形斜邊的大正方形）會有幾個？

71. 學生：16 個。

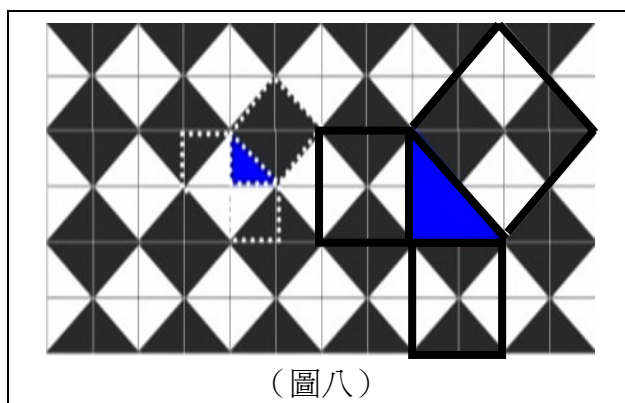
72. 老師：有沒有剛好 16 個？

73. 學生：有！

74. 老師：要數嗎？

75. 學生：要！

76. 老師：1、2、3、4、5、6、7、8、9
、10、11、12、13、14、15
、16，是不是？剛好 16 個
？有沒有一樣？（圖八）

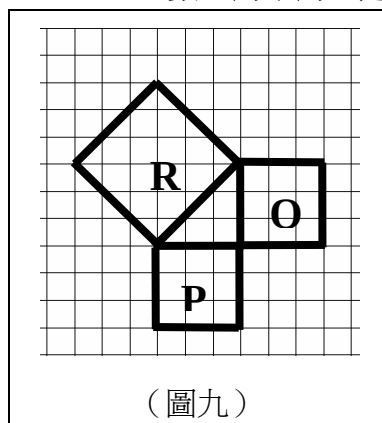


（圖八）

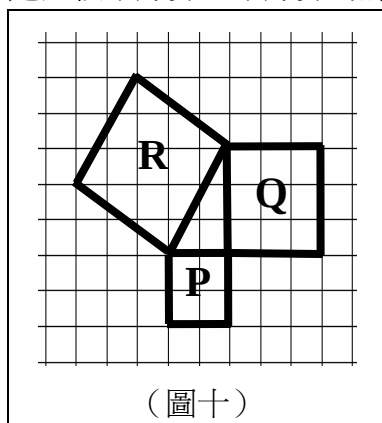
77. 學生：有！

78. 老師：有喔！好，謝謝！請回座。好，那我們來看一下學習單上的第二大題。如果說，這是一個等腰直角三角形（圖九），有沒有？這裡 1、2、3，3 個，這裡 1、2、3，3 個對不對？然後，這一個面積(P)，跟這一個面積(Q)加起來，會不會等於這一塊的面積(R)？你數數看，在你的學習單上，這一塊面積(P)多少？這一塊面積(Q)多少？那這一塊面積(R)多少？各自算出來，然後驗證一下有沒有剛好？有沒有？等一下我們要比畢達哥拉斯更厲害的地方是，畢達哥拉斯看到的是等腰直角三角形，他回去也有想說，如果不是等腰直角三角形的時候，會不會成立？等一下我們要幫他想想看，會不會

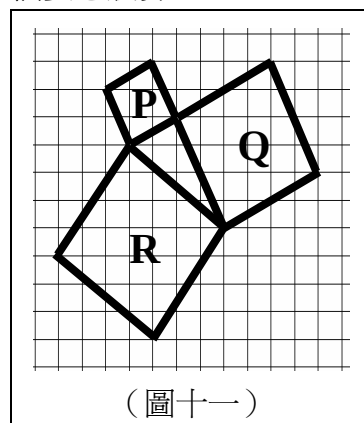
成立？看到 p.104 學習單上（圖一）、（圖二）、（圖三）那一個地方，是不是有三個圖？這三個圖，你把面積各自算出來，填在表格上。好！等一下我要你算出來的答案。把它們算出來，斜邊那一個正方形的面積比較不好數，對不對？是不是比較不好算？不好算的那一個要怎麼算？



（圖九）



（圖十）

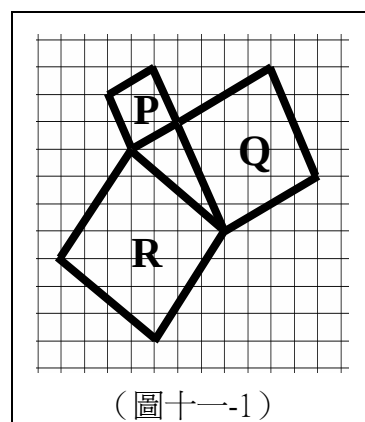
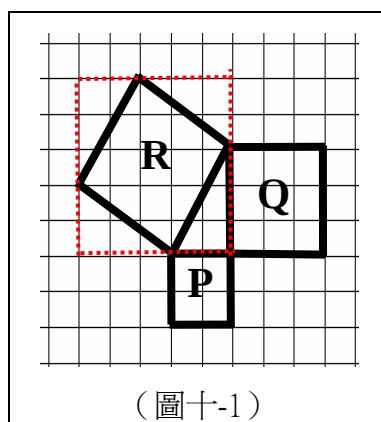
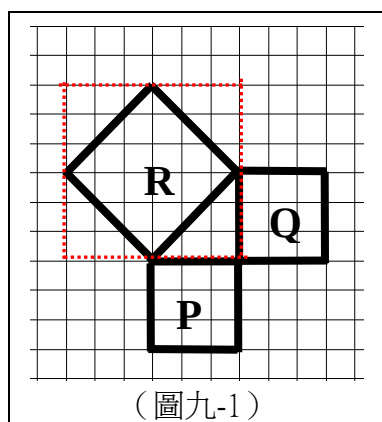


（圖十一）

（學習單練習，教師行間巡視）

79. 老師：（圖九）P 的面積會是這一塊嗎？怎麼會是 3？斜邊那一個正方形（圖九的 R）不大會數的同學，我給你一個提示喔！在這，給你一個提示喔！（圖九）你可以看到這裡有一個什麼？這裡有沒有一個大正方形？（圖九-1）有沒有？這裡是不是有一個大正方形？扣掉誰？扣掉這四個直角三角形，那個 R 的面積是不是就可以算出來？有沒有發現？可以嗎？徐銘宏會不會算？會不會？大正方形扣掉那個四個直角三角形，那四個直角三角形，好像也是等腰直角三角形，可以嗎？然後第二個（圖十）也是，你要算那個，逸群，注意你的第二個（圖十）喔！你第二個（圖十），這圖好像畫的有點歪歪喔！第二個（圖十），你要怎麼算那個大正方形？是不是這一個？第二個，是不是這一個正方形（圖十-1）？有沒有？是不是這一個？要扣掉哪四個？扣掉這四個，是不是剛好就是那一個 R？看的到嗎？那你驗算一下，其它的算出來，看算出來對不對。借看一下！那 R 呢？P 呢？P 會不會算

？這裡 3（圖十 Q 的邊長）、這裡 3（圖十 Q 的邊長），這一塊（圖十的 Q）面積多少？



80. 學生：這裡 3（圖十 Q 的邊長）、這裡 3（圖十 Q 的另一邊長）。
81. 老師：這裡（圖十 Q 的邊長）是 1、2、3，三個嗎？
82. 學生：嗯！
83. 老師：那這裡（圖十 Q 的另一邊長）1、2、3 三個，那這一塊面積（圖十的 Q）咧？
84. 學生：6。
85. 老師：1、2、3、4、5、6、7、8、9，明明 9，你說 6。
86. 學生：喔！對！9。
87. 老師：圖十一是一個大挑戰，對不對？圖十一是一個大挑戰！想一想你大概要怎麼算（圖十一），然後你再寫一下你的發現，你發現什麼？你的這一個算錯了，好啦！我們稍微公佈圖九的答案，圖九的話這裡（P 的面積）是不是 9？P 那一塊是不是 9？然後 Q 那一塊咧？
88. 學生：9。
89. 老師：9。那 R 那一塊你算出來多少？18，怎麼算的？這兩個加起來剛好拼成一個

什麼？麒宇，來 讓你發表一下，出來一下，這兩個（圖九-1 虛線中的兩個直角三角形）拼起來會拼成一個什麼？

90. 麒宇：大的。

91. 老師：大的什麼？

92. 麒宇：正方形。

93. 老師：正方形。是不是拼成一個大的正方形？這兩個（圖九-1 虛線中的兩個直角三角形）拼起來會拼成一個大的正方形，那面積是不是剛好 9，那這兩個（圖九-1 虛線中的另兩個直角三角形）咧？是不是 9？那全部(虛線所形成的正方形面積)多少？全部多少？1、2、3、4、5、6，1、2、3、4、5、6， 6×6 ，36，36 減掉 18，所以這一塊 R 的面積應該多少？18，R 的面積是 18。可以嗎？R 的面積 18，好，圖九寫出來沒？好，圖十找同學回答了！圖十比較簡單。圖十一真的是難喔！來，圖十，10 號，你看，大家都會中(籤)，對不對？

94. 學生：毀了！

95. 老師：毀了！毀了，為什麼毀了？人家(銘宏)真的對，來，回答給他們看，P 是多少？

96. 銘宏：4。

97. 老師：4。那 Q 咧？

98. 銘宏：9。

99. 老師：9。沒錯！然後剩下 R 呢？

100. 銘宏：13。

101. 老師：13。對啊！你看，你們還說毀了，真的沒毀啊！拍拍手，鼓掌一下喔！好，徐銘宏說這一塊(P)是 4，對不對？

102. 學生：對。

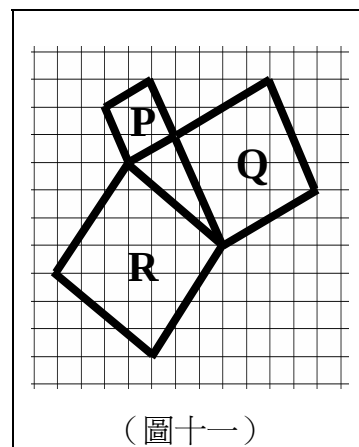
103. 老師：那這一塊(Q)多少？這一塊是不是 9。徐銘宏算出來這一塊(R)13。爲什麼這一塊 13？因爲全部（圖十-1 虛線正方形）有多少？1、2、3、4、5，是不是 5（圖十-1 虛線正方形的邊長）？

104. 學生：對。

105. 老師：然後 1、2、3、4、5， 5×5 是不是 25？25 扣掉什麼？這一塊(直角三角形)是多少？ 2×3 除以 2，是不是 3？3 乘幾塊？1 塊、2 塊，有沒有？然後 3 塊，是不是 3 塊？4 塊，是不是？那 25 減幾？3 乘以剛剛多少？ 2×3 除以 2 是 3， 3×4 ， 3×4 是 12，那 $25 - 12$ 是不是 13？

106. 學生：對。

107. 老師：沒錯！徐銘宏答對了喔！然後我們來看這個是難度最高的（圖十一），這裡(三角形的最大角)也是直角喔！這裡你有沒有辦法說明這個是直角？這裡也是直角喔！因爲這是一條直線，那這邊(三角形最大角的鄰角) 90° ，這裡(三角形的最大角)理所當然是直角，對不對？



（圖十一）

108. 學生：對。

109. 老師：好，那直角的話，我們先來看 P，你 P 算出來多少？

110. 學生：5。

111. 老師：P 算出來是 5，是不是？來，逸馨，你 Q 算多少？站起來回答一下。

112. 逸馨：20。

113. 老師：20。那你的 R 算多少？20 幾？

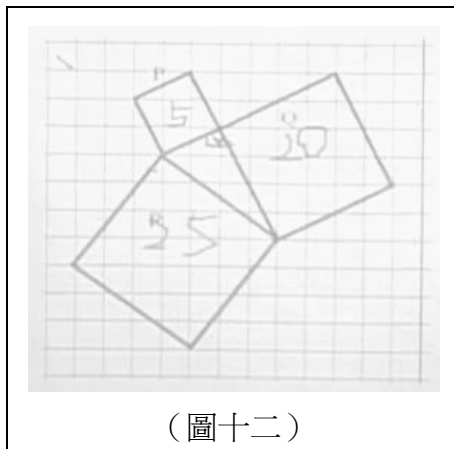
114. 逸馨：25。

115. 老師：25。R 是 25，你做對了。

116. 老師：好，那你發現了什麼？你發現了什麼？29 號。佳蓉，你發現了什麼？大聲一點沒關係。

117. 佳蓉： $P+Q=R$ 。

118. 老師：佳蓉發現了 $P+Q=R$ ，P 是指誰？P 是指誰？P 是指直角三角形這一個股的正方形面積（圖十二）。對不對？然後 Q 指的是誰？是不是這一個股的正方形面積？那 R 是指誰？R 是不是指斜邊所產生的這個正方形面積？沒問題吧？所以 $P+Q=R$ 跟畢達哥拉斯所看到的有沒有一樣？



119. 學生：有。

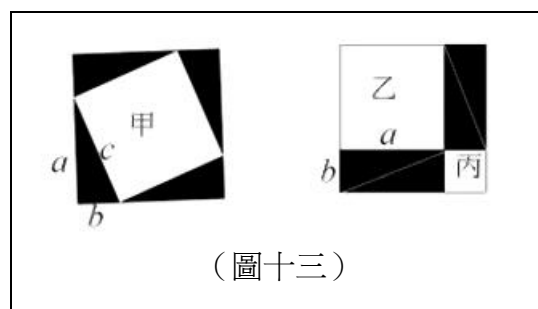
120. 老師：那畢達哥拉斯在地板上看到的直角三角形是怎樣？等腰，是不是兩個腰相等？可是有沒有看到我們的這一個不是，我們這兩股有沒有相等？（圖十二）

121. 學生：沒有。

122. 老師：沒有喔！這兩個股是不是不相等？這裡有沒有意見？

123. 學生：沒有。

124. 老師：沒有。好！那我們後面來看，如果它不是等腰直角三角形，這種關係依舊成立嗎？還是只有那兩個(圖十、圖十一)是屬於特例？我們從這兩個來看(圖十三)，有哪個同學



- 學可以幫我拼出甲的圖形？有沒有自願的？甲的圖形，來，抽一個(同學)拼甲的圖形，一個(同學)拼右邊乙的圖形。來，14 號，今天的籤運大家都很好喔！37 號，37 號幫我拼右邊的，14 號幫我拼左邊的，來！我這裡有拼圖(教具)給你，來吧！4 個，用這 4 個全等的直角三角形，拼出左邊這個圖喔！然後，4 個全等的直角三角形，要拼出右邊那個圖。給你們一點點時間準備，怎麼拼？圖都在那裡，可以出來模仿喔！奕淳要不要先出來拼一下？拼(右邊)這一個圖形，靠這 4 個(直角三角形)，OK！會不會拼？

125. 奕淳：把黑色的放進去就好？

126. 老師：對，把黑色的拼出來就好了。然後冠賢，來左邊的，來吧！

127. 冠賢：是這個嗎？

128. 老師：對！你有沒有發現，如果有一個正方形(甲)，你是不是就比較好拼進去？然後如果沒有正方形(甲)，你是不是就比較不好拼？好，那你想想看奕淳的這個比較單純喔！這個邊長是 a (圖十三)，那這邊是正方形(乙)，比較沒有問題吧！對不對？那這邊也是一個正方形(丙)，也沒有問題，這個(右邊)是不是沒有什麼問題？對不對？這一塊是乙，這一塊是丙。那我們來看一下，冠賢拼的這邊(左邊)，他拼的速度超快，裡面這一小塊(甲)會不會是正方形(圖十三左邊)？為什麼會？有沒有人可以解釋一下？之勤，來，出來解釋一下吧！想一想，出來吧！來，出來解釋！啓軒，解釋一下它這

裡爲什麼 90 度，好，來，站起來！站起來直接跟他們說一下，之勤，等一下你要繼續喔！

129. 啓軒：就是三角形 C 的斜邊長都一樣，所以它出來是正方形。

130. 老師：好，啓軒說，因爲(4 個直角三角形斜邊)C 的四個邊的邊長都一樣，所以它(甲)就會是正方形。可是小學的時候學過正方形的定義是什麼？四個邊要一樣，還有呢？來，廷謙，要怎樣？四個角要怎樣？站起來說一下。

131. 廷謙：四個角要直角。

132. 老師：四個角要直角。所以啓軒剛剛說的四個邊都一樣，那是不是正方形？它只是能構成菱形而已，還有四個角都要 90 度。

133. 老師：這一個(甲的一個內角)爲什麼會 90 度？有沒有辦法說出來？這裡比較難，因爲我們在國中幾何這一個部分，還沒有完全去學到，下學期才會學。所以這裡純粹是靠你小時候的思考，小時候有買拼圖給你拼喔！有喔！這裡爲什麼直角？之勤能不能補充，幫忙說明？想一想。

134. 老師：先讓麒宇講。

135. 老師：麒宇來說，我們今天麒宇最厲害了。來，你有沒有想到？沒有喔？這裡不好想喔！真的是不好想。

136. 麒宇：因爲三角形內角和 180。

137. 老師：因爲三角形內角和 180，然後？

138. 麒宇：這個(直角三角形的最大角)是直角。

139. 老師：這個(直角三角形的最大角)是直角。

140. 麒宇：這兩個(直角三角形的兩銳角)加起來是 90 度。

141. 老師：很好，然後呢？

142. 麒宇：然後這兩個(直角三角形較大的銳角和另一直角三角形較小的銳角)加起來

也是 90 度。

143. 老師：繼續。

144. 麒宇：然後算出來(甲的一內角)是 90 度，所以(甲的一內角)是 90 度。

145. 老師：對。

146. 麒宇：就是 90 度。

147. 老師：懂他講的嗎？

148. 學生：聽不懂。

149. 老師：那麒宇講的話只有我聽的懂喔！只有我懂！之勤，你知道他說什麼嗎？知道喔！來，你站起來複述一次，我幫你，來，開始，怎樣？他說怎樣？三角形內角和 180，然後這個(直角三角形的最大角)90 度，所以怎樣？

150. 之勤：所以兩個角都是 90 度。

151. 老師：所以這兩個角(直角三角形的兩銳角)加起來 90 度，可以喔？然後這一個角(直角三角形較小的銳角)就是這一個角(另一直角三角形較小的銳角)嘛！所以這兩個角(直角三角形較大的銳角和另一直角三角形較小的銳角)加起來幾度？

152. 之勤：90。

153. 老師：這三個加起來多少？180。那 180 扣掉這個 90(直角三角形較大的銳角和另一直角三角形較小的銳角相加)，所以這裡(甲的一內角)多少？

154. 之勤：90。

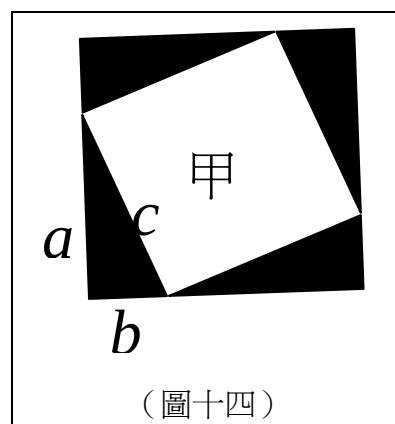
155. 老師：OK！謝謝。慧真，可以嗎？可以嗎？

156. 慧真：我？

157. 老師：嗯！

158. 慧真：會呀！

159. 老師：會！確定？確定喔！好，那我們知道裡面是正方形了喔！我們知道裡面是正方形，然後你想想看，這(甲)是一個正方形對不對？(圖十四)好，我們把它(四個直角三角形)補上去了，好，從這裡，你能不能看到勾股定理？能看到什麼？也不一定要看到勾股定理，至少看到你直觀的，能看到什麼？有沒有？慧真有沒有看到什麼？



160. 慧真：不要一直問我啦！
161. 老師：好，那我問冬梅，冬梅，你看到什麼？
162. 冬梅：我看不見。
163. 老師：你看不見？好！你看到什麼？漢棋，有沒有辦法看到什麼，這個甲的面積跟乙和丙的面積，有什麼關係？(圖十三)有沒有？看到沒？奕霖，看到什麼？甲的面積和乙和丙的面積，它們這三個有什麼關係？有沒有什麼關係？柏鈞。
164. 柏鈞：有啊！
165. 老師：什麼關係？
166. 柏鈞：就是剛剛那個關係！
167. 老師：剛剛哪個關係？
168. 柏鈞：就是乙加丙等於甲。
169. 老師：站起來！乙加丙等於什麼？甲。柏鈞說乙加丙等於甲，為什麼？
170. 柏鈞：你不會去對喔！
171. 老師：來！我們再一次手牽手，我不會去對，我也想對啊！我也好想對啊！

172. 柏鈞：麻煩耶！

173. 老師：來！怎樣？

174. 柏鈞：這個移到這邊，這個移到這邊（圖十五）。

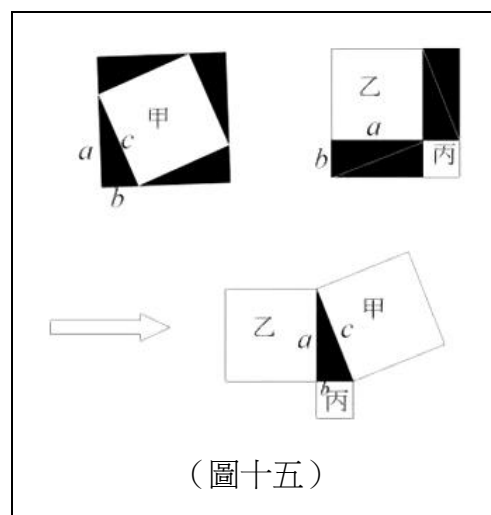
175. 老師：怎樣？他是說怎樣？這兩個正方形（圖十三左右兩邊的最大正方形）面積會不會一樣大？

176. 學生：會！

177. 老師：那這裡(圖十三左圖)1、2、3、4(四個直角三角形)，這邊(圖十三右圖)1、2、3、4(四個直角三角形)，是不是一模一樣？所以也就告訴你什麼？這兩塊(乙和丙)加起來會等於什麼？

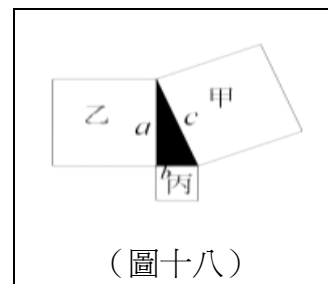
178. 學生：甲的那一塊。

179. 老師：那請問一下，這跟勾股定理有什麼關係？所以有沒有剛才的結論：直角三角形，有一股的做出來的正方形面積，跟另外一股做出來正方形面積，兩個加起來會等於什麼？斜邊所做出來的正方形面積，有沒有？（圖十五）可以嗎？其實你可以從這裡（圖十五右圖）取哪一塊，你知道嗎？你看這



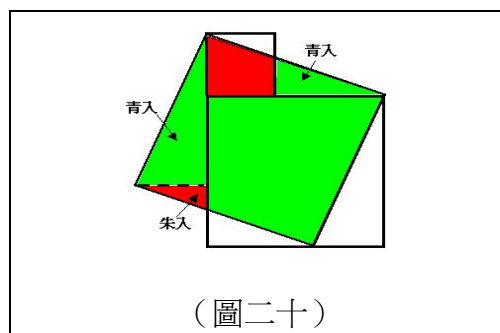
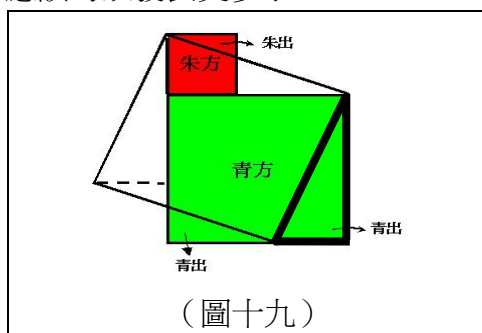
裡，我把它抓掉，抓掉，OK！（圖十六）然後那邊（圖十五左圖）我抓掉哪裡？抓掉，抓掉，（圖十七）然後呢？這兩個要怎樣？要進行什麼？合體喔！怎麼合體(把兩個直角三角形疊合)？過來有沒有？（圖十八）OK！可以看的出來嗎？所以我們這一節課其實只學一個概念：「直角三角形，一股的做出來的正方形面積，跟另外一股做出來正方形面積，兩個加起來會等

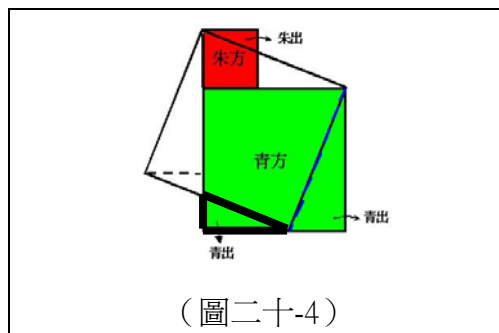
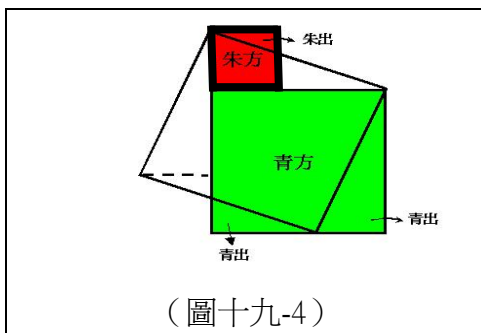
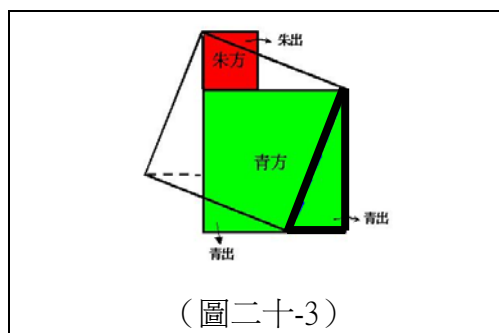
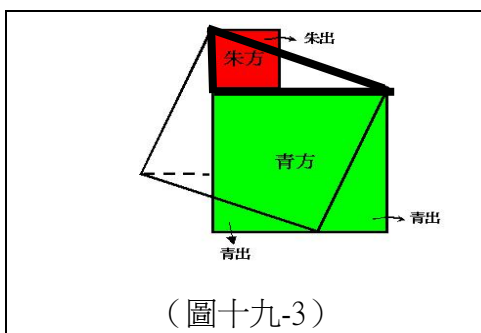
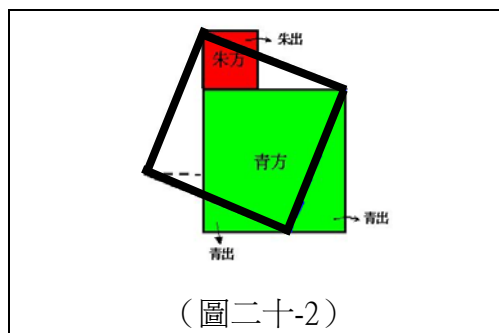
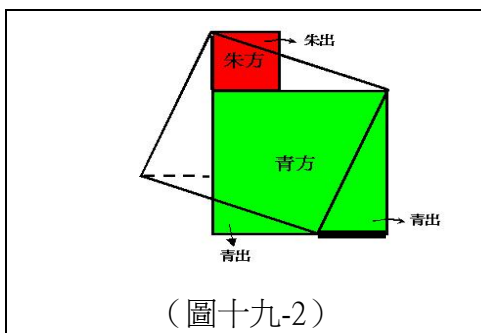
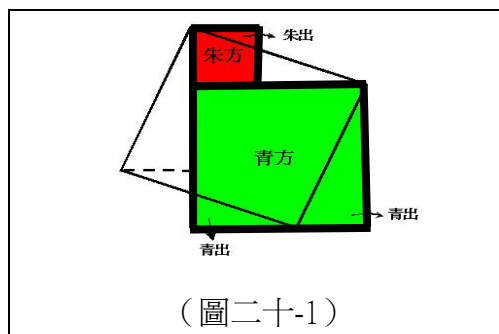
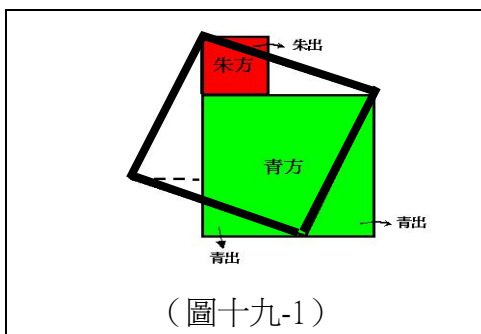
於斜邊所做出來的正方形面積。」這種勾股定理的證明，其實在目前大概有五百多種的證明，我們現在舉的只是其中幾種而已。

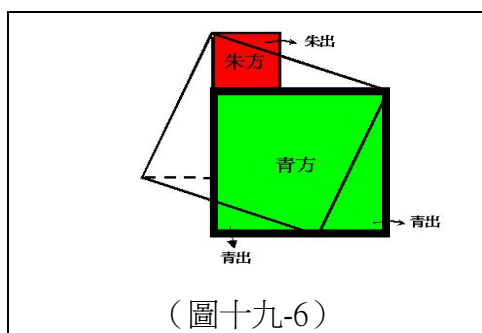
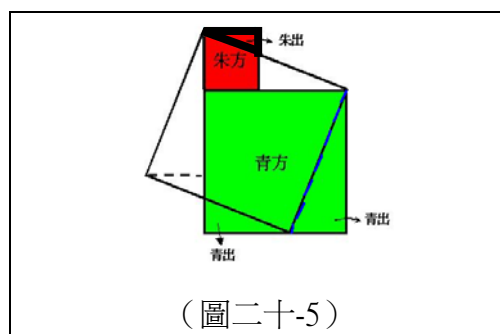
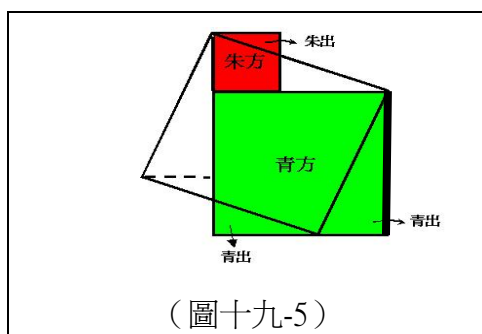


180. 老師：這是古代一個叫劉徽的人，他做的勾股術，(圖十九)他怎麼去證明直角三角形兩股的平方和會等於斜邊平方。先看這裡(圖十八)，有沒有？這是一股的平方，是不是叫 b^2 ？這是一股的平方，是不是叫 a^2 ？這是斜邊的平方，是不是叫 c^2 ？兩股的平方和等於斜邊平方？也就是 a^2+b^2 ，剛好就等於 c^2 ？可不可以？那從這裡(圖十九)你可以看到什麼？這不容易觀察，他(劉徽)就畫這個圖，然後加一些文字敘述，就把勾股定理證明出來了。從圖形中(圖十九)，有沒有人能看到直角三角形在哪裡？我們先看左邊那個圖(圖十九)。這裡(圖十九右下角)有沒有一個直角三角形？有喔！斜邊的平方是哪一個正方形，有沒有人知道？斜邊所做的正方形，思廷，斜邊所作的正方形你知道哪一個嗎？你在講義第二頁，學習單第二頁，斜邊所作的正方形是哪一個？有沒有辦法看出來？思廷要不要出來比比看？要不要？來，出來比比看，斜邊所產生的正方形是在哪裡？看一下喔！那其他人準備一下，兩股所各別作出來的正方形，會在哪裡？我們就再來想辦法說，兩股的平方和會不會等於斜邊平方？這個定理會不會出來？這裡可不可以？東翰，看的出來嗎？看不出來！這個跟我昨天去看的東西很像，昨天在SOGO 那裡我就有看到，類似這種瓷磚。這一個正方形是誰？(圖十九-1 粗線)這個是斜邊的，是不是斜邊的？斜邊產生的正方形(圖十九-1 粗線

)，然後這一股咧？這一股（圖十九-2 粗線）產生的正方形在哪裡？是哪一個（圖十九-3 粗線）？你有沒有發現這一個直角三角形（圖十九粗線），跟這一個直角三角形有沒有一樣（圖十九-3 粗線）？是不是一樣？所以這一個邊（圖十九的短線）是不是其實就是這一個邊（圖十九-3 的短線）？有沒有意見？那這一個邊（圖十九-3 的短線）產生的正方形在哪裡？是不是就是這一個紅色（圖十九-4 粗線）？可不可以？然後這一個股（圖十九-5 粗線）咧？這一個股產生的正方形在哪裡？是不是就這一個？這上面寫青色的這一個（圖十九-6 粗線），有沒有？可以嗎？看的出來喔！那等一下利用下課時間，你去想想看，為什麼這個紅色加這個綠色，寫青色沒關係，紅色加綠(青)色，兩個加起來剛好會等於（圖二十）這一塊。想想看，有沒有？補起來剛剛好。等一下想想看，這個「出」就是什麼？移走。「入」就是把它放進去。等一下上課的時候，我們再作發表。OK！那發表完的，我們下一節課就會比較輕鬆了，下一節課就開始比較屬於數學，平常學的那個代數的模式，這一節課比較難，為什麼？因為你第一次在國中接觸這種幾何的東西，你要去看，眼睛要去看，很累、很累，OK！那下一節課你應該可以發表更多了。







【第二節】

181. 老師：那我們來看一下這一個，(圖十九) 剛才我們說這個是不是直角三角形斜邊所作出來的正方形，對不對？

182. 學生：對。

183. 老師：這一個綠色部分(圖十九-6) 剛好就是(圖十九-5) 一股作出來的正方形，平常是在這邊(股的右邊)，然後只是把它翻過去(左邊)而已，然後這一個(圖十九右下方的直角三角形)是不是其實就是這一個(圖十九-3 上方的直角三角形)？為什麼？你看這一個三角形(圖十九右下方的直角三角形)跟這一個三角形(圖十九-3 上方的直角三角形)，是不是一模一樣？沒有錯吧？這是一股作出來的(紅色)正方形(圖十九-4 粗線)，是不是就是在這裡(圖十九-2 右下方的直角三角形較短的一股)？沒有錯吧？所以我只要證明紅色加綠色(圖二十-1 粗線)，加起來會等於斜邊作出來的這一個(圖二十-2 粗線)，那我們就可以解釋古代，三國時代劉徽所作的這個圖，是不是就把它破解出

來了？有誰可以？廷謙，你可不可以告訴我？可不可以告訴我這個圖（圖十九），它是怎麼變到這個圖（圖二十）的？

184. 廷謙：移來移去就好。

185. 老師：對啊！移來移去沒錯！來，出來告訴人家，哪裡變哪裡？

186. 廷謙：天機不可洩漏。

187. 老師：天津不可洩漏。可是我們現在在瑠公而已，不用天津。

188. 學生：老師，施智翔說，他知道。

189. 老師：施智翔，你知道喔？

190. 智翔：陳慧真知道，不想說而已。

191. 老師：有沒有？逸馨知道嗎？好！抽籤。孫奕淳你知道嗎？以璇知道嗎？好，來抽籤。今天最紅的，當紅炸子雞。

192. 學生：9 號。

193. 老師：你們都知道，你怎麼知道是 9 號？

194. 學生：你剛剛不是一直拼命做籤？

195. 老師：不會，真的，這一次品秀應該是不會騙人的，40 號，允薇來，出來！（圖二十-1）這一個綠色的和這個紅色的，如何把它通通拼到這裡面（圖二十）。

196. 學生：老師，漢棋知道。

197. 老師：漢棋知道，漢棋出來。好，這一次抽中一定要出來，21 號，來！東翰快一點，來，出來，快一點，我們兩個可以同時站上去，怎樣？面向這邊。

198. 東翰：這個（圖二十-3，青出）放這邊（圖二十左邊，青入），這個（圖二十-4，青出）放這邊（圖二十右上方，青入），然後這個（圖二十-5，青出）放這邊（圖二十左方，朱入）。

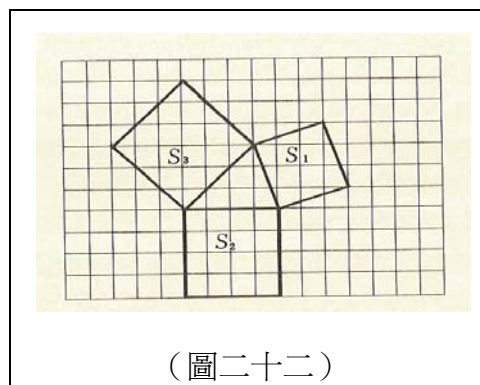
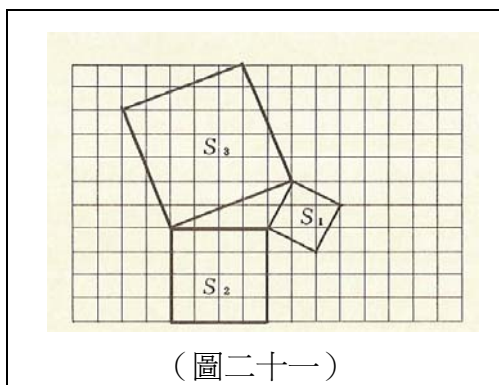
199. 老師：好，東翰說什麼？東翰說這個（圖二十-3，青出）到哪裡？到這裡（圖二十左

方，青入)，然後這個咧(圖二十-4 左下方，青出)？

200. 學生：這個(圖二十-4 左下方，青出)到這裡(圖二十右上方，青入)。

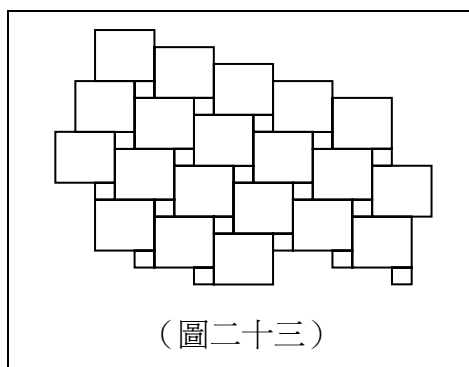
201. 老師：這個(圖二十-4 左下方，青出)到這裡(圖二十右上方，青入)。然後這個咧(圖二十-5，朱出)？到這裡(圖二十左方，朱入)。好，謝謝！

202. 老師：所以拼圖的結果，紅色加綠色有沒有剛好是斜邊的正方形面積？是不是再度印證(勾股定理)？可不可以？那記得第一堂課(上上一堂課)我們稍微在講勾股的時候，只是著重在普通的計算，對不對？那時候幼筑有問我說，只有直角三角形會符合這個性質嗎？還記得嗎？你有說嘛！你看你的話，我記得多清楚，對不對？在學習單第二頁的最上面，你可以看到鈍角三角形(圖二十一)和銳角三角形(圖二十二)，有沒有看到？鈍角三角形和銳角三角形，然後你可以看到它也是在鈍角三角形的三個邊，各自作正方形，在銳角三角形的三個邊，各自作正方形，有沒有看到？你回家可以自己驗算一下，它們三個面積有沒有剛好變成，我們剛才講的 $P+Q=R$ 的那一個關係，你可以回家自己驗算一下，這讓你當功課，回家驗算。



203. 老師：好，我昨天跑去 SOGO 那邊，然後就看到這個地磚上的圖形(圖二十三)，然後我也想到勾股定理，你知道我怎麼想的嗎？後面這個線條看的清楚嗎？可以看的清楚嗎？這是正方形，這個小正方形，這個正方形，小正方

形，你如果看不清楚的，可以看到講義，你看到講義第三頁(p.106 學習單)，有沒有？這邊有，然後我就盯著那個地磚，我也是盯著地磚，然後學畢達哥拉斯這樣一直看、一直看、一直看。



204. 學生：老師，(講義)沒有顏色（圖二十三）。

205. 老師：沒有顏色，你自己塗上去。好！我看到一半的時候，忽然間，麒宇就叫我，老師、你在做什麼？對不對？

206. 麒宇：我哪時候去 SOGO 了？

207. 老師：不要不承認了，後來我和麒宇兩個就站在那裡，又開始看…，然後看到一半，誰又來了，你知道嗎？

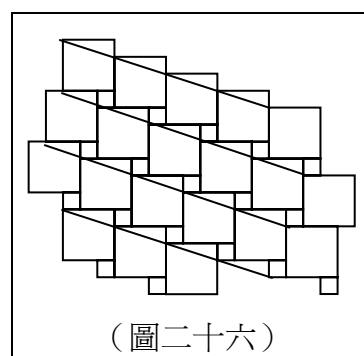
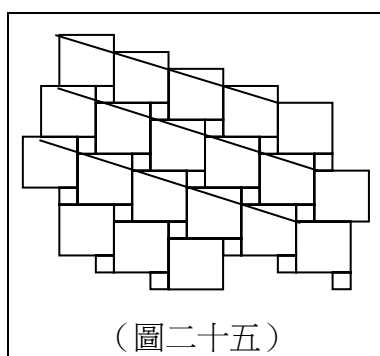
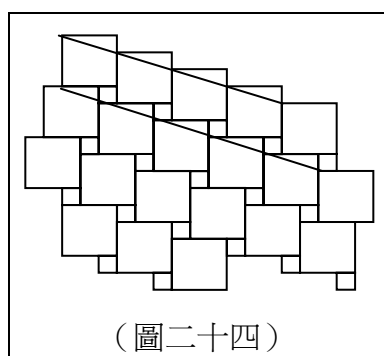
208. 學生：施智翔。

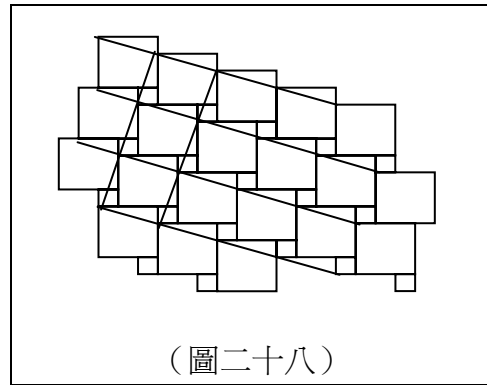
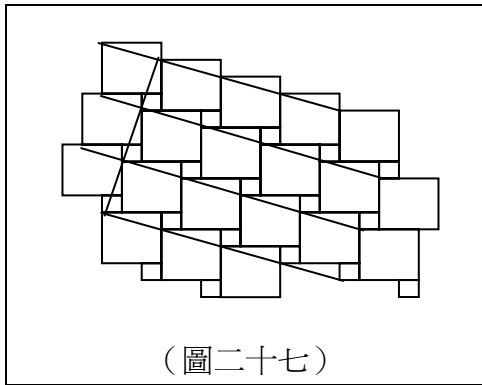
209. 老師：施智翔，好，施智翔又來了，他說你們在幹什麼，是在抓青蛙嗎？我們說 SOGO 哪有青蛙可以抓？對不對？

210. 學生：有瓷磚可以帶回家。

211. 老師：有瓷磚可以帶回家。好，後來智翔就將人家的瓷磚偷回家，那不行的喔！好，那我們來給個暗示，後來我們研究出來了，我這裡如果劃一條線條，有沒有看到這裡畫一條線條（圖二十四）？你先把它畫上去，先在你的學

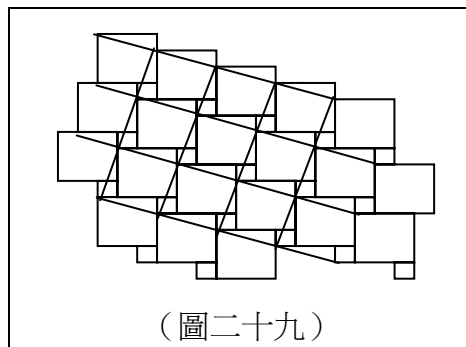
習單上自己畫一條，這裡(螢幕)，看不是很清楚喔！有沒有？在這裡畫線條，看到嗎？這樣(螢幕)有沒有比較清楚？有喔！然後一直畫，畫到哪裡？畫到這裡，可以嗎？畫過來，會不會？(螢幕)看的清楚嗎？畫完了沒？然後我又繼續看，我又再畫一條，畫哪一條？畫第二條，第二條在哪裡？第二條在這邊(圖二十四)，有沒有看到從這裡一直畫？畫到哪？直線喔！直線，一直畫下來，畫到哪裡？畫到這個位置，是不是在這裡？就是這一個點啦！你抓這一個點，抓這一個點跟這一個點，這兩個點把它抓住，然後把它連起來。第三條是哪裡？這一點，這裡抓一個點，然後這裡抓一個點，一樣把它畫上去(圖二十五)，看到了嗎？那第四個，這裡又畫一個，這裡也是抓一個點，抓哪個點？這裡也是抓這個點，有沒有？這裡畫過來，一直畫到這裡，這裡要不要延伸出去隨便你(圖二十六)，OK！最主要是畫這裡的線條，畫出來了嗎？看的出來嗎？好，然後再來畫另外一個，這一條，有沒有看到這一條？看到了嗎？這一條，就是這裡一個點，有沒有？這裡一個點，然後再抓這一個點，這兩個把它畫上去，畫上去以後，你有沒有發現跟剛才東翰出來講的那個圖形，就漸漸有點像了。再來一樣，這裡也是抓這個點，抓這個點畫下來(圖二十七)，可不可以？然後等一下也是抓這個點，抓這兩個點(圖二十八)，OK？是不是抓這個點畫過來，來得及嗎？那你畫到目前，你可以看到什麼？這裡有沒有看到正方形？





212. 學生：有。

213. 老師：這裡有正方形。跟那個很像喔！你自己畫畫看，那其他的，如果你可以再多畫幾條，你可以畫到這裡，這裡再畫一條，有沒有？然後這裡也再畫一條(圖二十九)，那你就可以看到好多好多正方形了，有沒有？有沒有看到好多正方形？然後你從這裡來觀察一下，觀察一下那個勾股定理有沒有成立？



(學習單練習，自 214~223 為教師行間巡視與學生的對話)

214. 學生：奇怪。

215. 老師：奇怪，為什麼你的畫起來很像平行四邊形？我知道你是這一個，然後要取哪一個？取這一個點。

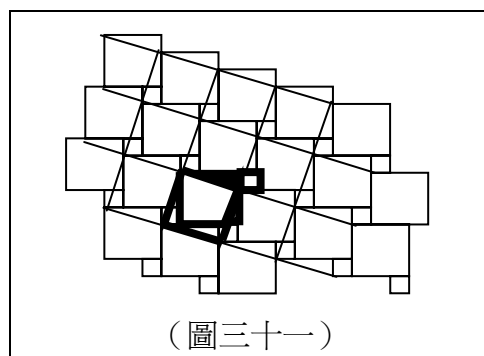
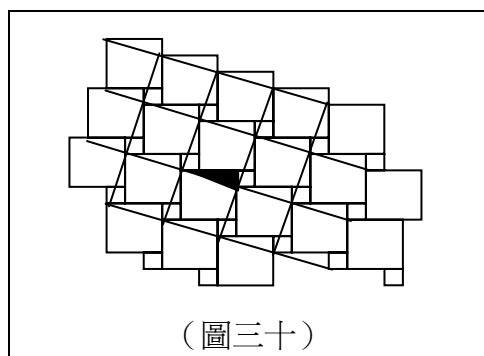
216. 學生：早講嘛！真是的。

217. 老師：這一張借你。

218. 學生：還要再畫喔？

219. 老師：看你啊！不然你還要再塗，不是很累？
220. 學生：那你這一份要給我喔？
221. 老師：那一份給你。畫的起來嗎？可不可以？漢棋畫的起來嗎？是嗎？快點，徐銘宏，我們不用全都塗成紅色。
222. 學生：老師，我這裡會穿過去喔？
223. 老師：對，這裡會穿過去。怎樣？要畫不畫都可以。
224. 老師：你找其中一個正方形來看，有沒有跟我們剛才的這個圖很像（圖十九、二十）？朝其中一個正方形來看，跟這個圖有沒有超像？像不像？有看到嗎？有沒有？這個正方形有沒有跟剛剛的很像？你看你自己的講義，可以嗎？那回來的時候，你可以看到其中這一個直角三角形（圖三十）。有沒有看到這個直角三角形？長這樣子的直角三角形，抓起來看，然後你可不可以看到那個勾股定理的性質？看的到嗎？那個線條不夠粗，對不對？看的到嗎？這裡直角三角形，那這一個，你看這一塊，有沒有看到這一塊？這個是斜邊，斜邊對過來的這個正方形，看的清楚嗎？有沒有？這樣會不會比較清楚一些？幼筑，這樣看的清楚嗎？看不清楚？雅臻，看的清楚嗎？威豪，這裡啊，這裡是不是有一個正方形（圖三十一）？看的清楚嗎？看你的會更清楚，然後你再來看這個正方形(圖三十一，放正的正方形)，剛剛這個正方形有沒有？那你有沒有注意到這個正方形面積，會不會等於這裡一個小的藍色正方形？我們換個顏色，這個股看到的是什麼？這個股的正方形在哪裡？有沒有看到這個紅色的？是不是這一塊？我框起來這一塊，綠色框起來這一塊，可以嗎？（圖三十一）所以可以看到斜邊作出來正方形，是不是這一塊(圖三十一，放斜的正方形)？然後這一個股作出來的正方形，是不是這一塊？然後這一個小的股，作出來是不是這一塊？你可以

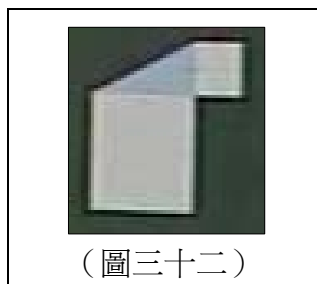
跟剛才移動的方式一樣，你研究一下，這個面積加上這一塊面積，剛好會補到這個斜邊所出來的面積，跟我們之前的哪一個（圖十九、二十）是一樣的？是不是看到這一個圖是一樣的？補過來是一樣，這樣可以嗎？可不可以？這是我昨天跟麒宇在 SOGO 那裡研究好久，我們還在拿粉筆，後來去買了一盒粉筆，就在地上畫，有沒有？



225. 麒宇：然後被罵。

226. 老師：忘記了？然後被罵，對！這樣沒問題吧？好，那如果沒問題的話，我們要開始(下一部分)，來看我們的講義，學習單第三頁，我們要比較形式化來證明它了，我們剛才不是有說，第一個圖是哪一個？我們學習單，我弄學習單出來喔！這是一個直角三角形（圖三十二），這個邊長(較短的直角邊)是不是 b ？這個邊長(較長的直角邊)是不是 a ？有沒有問題？然後作出來，這邊斜邊(c)出來是不是這一塊（圖三十三）？那我們要比較形式化的去證明，請問，你有沒有發現，之前不是在作斜邊的那一個，是不是叫你補起來？(圖三十四)補起來以後你發現什麼？這是不是一個正方形？然後這三塊先不要看的話，(圖三十三)我們可以看到什麼？這一個 a 平方加 b 平方是不是會等於 c 平方？那我們現在就要來說明，為什麼 a 平方加 b 平方會等於 c 平方？如果從這裡來看的話，那要怎麼看出來？你可以看到什麼

？來，這總該會吧？漢棋，這個長度多長？不用不好意思。



227. 漢棋： $a+b$ (圖三十五)。

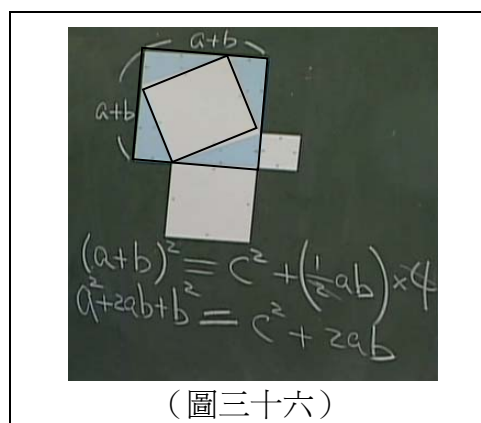
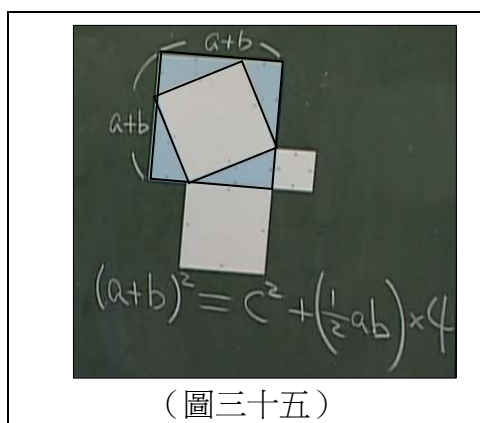
228. 老師： $a+b$ 。這個長度是 $a+b$ ，可以嗎？品秀，站起來回答，這個長度多長？

229. 品秀： $a+b$ 。

230. 老師：也是 $a+b$ ，可以嗎？好，那整個正方形的面積會多大？是不是 $(a+b) \times (a+b)$ ，是不是 $(a+b)^2$ ？可不可以？沒問題吧？那這個正方形可以變成什麼？這個小正方形再加上四個直角三角形，可不可以？那小正方形的面積是多少？小正方形的面積多少？一起來，多少？

231. 學生： c^2 。

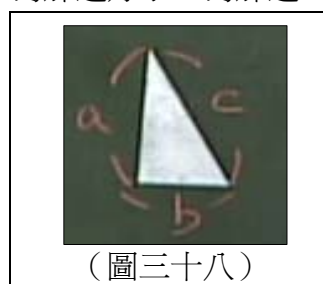
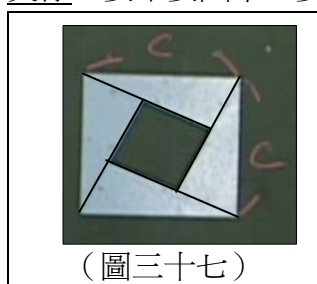
232. 老師： c^2 。加上這四個直角三角形的面積多少？一個直角三角形的面積多少？ $\frac{1}{2}$ 底 $\times$ 高，是不是 ab ？然後有幾個？有 4 個，它們會不會相等？是不是會相等？（圖三十五）這可以嗎？可以喔！那可以的話，你看左邊，我們由那個完全平方的公式， $a^2+2ab+b^2$ ，那右邊呢？右邊是 c 平方加什麼？這個約掉，是不是 $2ab$ ？然後它是不是會相等（圖三十六）？可不可以？那也就是告訴你怎樣？等量減法公理， $2ab$ 、 $2ab$ 是不是消掉？然後你有沒有得到你要的？ a^2+b^2 會不會等於這個 c^2 ？有沒有？是不是就得到這個東西？沒問題吧？沒有，好，那沒有的話，底下那一個讓你想了喔！底下那一個，你也要想辦法證出 $a^2+b^2=c^2$ 。來 做做看！底下這一個你怎麼做？



(學習單練習，教師行間巡視)

233. 學生：老師，a、b、c 一樣喔？

234. 老師：對，a、b、c 一樣。就是像右邊這一個黑板，c 是指這一個，a 是指這一條長度，然後 b 是指這一個小的（圖三十七），OK！a 是指這一個，b 是指這一個小的，那裡面是正方形，做做看！來，再講一次，這裡是 c，對不對？這一個長度是 a，這一個長度是 b，這一個長度是 c（圖三十八），可以嗎？然後想想看你要抓住的訣竅就是，裡面這一個長度會多長？有沒有人知道？幼筑，多少？a-b 喔，a-b 沒錯，裡面這個長度，那這一個長度當然也是 a-b（圖三十九）。好，已經有人做出來了，我們找一個人來看，孫奕淳，要不要出來？要，寫那邊好了，寫那邊。



235. 奕淳：我可以拿上去寫嗎？

(學習單練習，236~246 為教師行間巡視與學生的對話)

236. 老師：可以。那其他的做出來了沒？這一塊面積會等於什麼？這 4 塊加裡面這一

塊，可不可以？

237. 老師：看你的。

238. 學生：我不會。

239. 老師：什麼？這一塊是 c 。

240. 學生：我知道啊！

241. 老師：對啊！你沒有做，不是不會。

242. 老師：你直接寫結論喔！

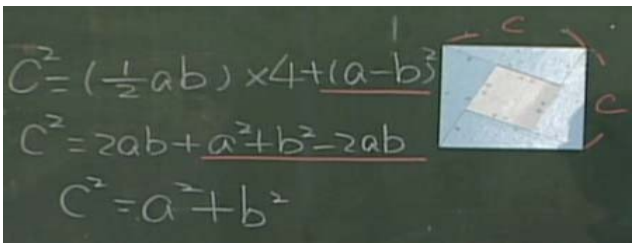
243. 學生：對啊！我比較厲害一點點。

244. 老師：你厲害的太誇張了，這一塊有沒有？這個正方形，是不是剛好這四個三角形再加裡面這一塊？看的出來嗎？

245. 老師：對啊 沒錯！完全正確。

246. 老師：可是你這個是 a 平方加 $2ab$ 加 b^2 ，然後這一塊咧？

247. 老師：我們來看奕淳的（圖四十）喔！你看他 c^2 指的是哪一塊，是不是這一塊？這一塊是不是 c^2 （圖三十九）？然後 $\frac{1}{2}ab$



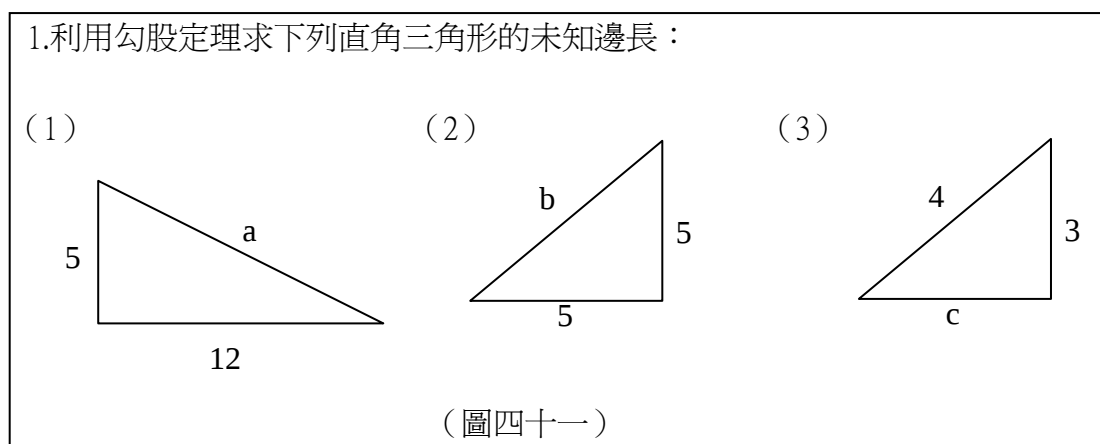
（圖四十）

四塊（圖三十九），是不是指這四塊？對不對？ $(a-b)^2$ 是不是指這一塊（圖三十九）？再來呢？ $(a-b)^2$ 展開是不是 $a^2 - 2ab + b^2$ ？沒有問題吧？然後這裡 $2ab - 2ab$ ，是不是消掉？所以得到 c^2 等於什麼？ $a^2 + b^2$ ，可不可以（圖四十）？

248. 老師：沒有問題喔！好，沒有問題的話，我們來看第四頁(第四大題)（圖四十一），最後喔！來，第(1)題熱身，第(1)題上一節課的時候有講到這一個題目

，讓你勾股定理熱身，主要是要從第(2)題開始，對啊，好。因為上一節課，我們有講過這一個怎麼運算喔，那我們來看第一個，35 號，來，思廷，第(1)題答案多少？

249. 思廷：13。



(學習單練習，教師行間巡視)

250. 老師：13。a=13，那第(2)題，32 號，幼筑，多少？

251. 幼筑： $\sqrt{50}$ 。

252. 老師：可以化簡。

253. 幼筑：5 根號。

254. 老師：5 根號多少？

255. 幼筑：2。

256. 老師：5 根號 2。第(2)題 $5\sqrt{2}$ 。第(3)題，親愛的，雨璇，多少？

257. 雨璇：7。不是…，我講錯了。

258. 老師：好，那你說。

259. 雨璇：c 喔？ $\sqrt{7}$ 。

260. 老師： $\sqrt{7}$ 。誰打 pass？

261. 老師：現在再來最主要是第(2)題，第(2)題它說，奕淳那個可以一本還我了嗎？

262. 學生：我寫在這本裡面。

263. 老師：好，謝謝。這裡有一個點(A)，然後這裡一個點(B)，它要求這兩點(AB 線段)的距離 (圖四十二)，你可以發現什麼？我

們要叫同學出來做。首先你有沒有發現一個直角三角形？看的到嗎？

(學習單練習，教師行間巡視)

264. 老師：好，我們切換回去，然後找三個同學出來比較有伴，好不好？那第 2 題 C 和 D，D 點在這，C 點在這，要求這一段。第三個 $\overline{EF}$ ，我們可以從這裡來看一下那個長度，看的到嗎？好，我們找 35 號，又中了喔！第一個 AB 線段給你做，然後第二個 9 號，今天最紅的，來，第三個 15 號，來吧！做這三個。你在黑板上做，左邊那裡也可以。

265. 學生：要畫圖嗎？

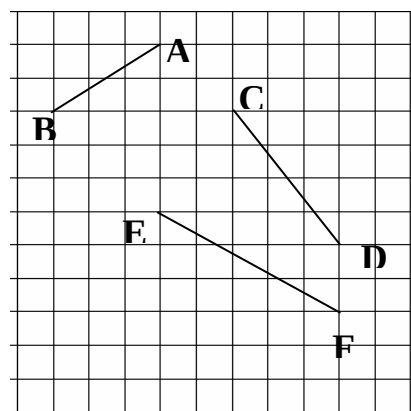
266. 老師：不用。

267. 學生：這邊可以擦掉？

268. 老師：可以擦掉。板擦在這，麻煩寫一下你要寫的是哪一個線段的長度，你要求的是哪一個線段的長度。

(學習單練習，教師巡視)

2.右圖中每一小格皆為邊長 1 的正方形，求 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ 的長度。



(圖四十二)

269. 老師：這裡可以放一個直角三角形，這一個正方形面積加這個正方形面積，是不是等於這個正方形面積？

270. 學生：對啊！

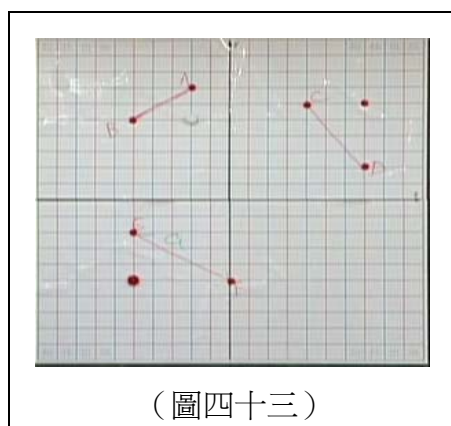
271. 老師：那你就可以算邊長。

272. 學生：老師，你那一本我寫錯了。

273. 老師：沒關係，你這一本寫對就好。好，來，思婷，麻煩跟我們講一下，你的 AB 線段怎麼看出來的？長度，到前面好不好？

274. 思婷：不好。

275. 老師：好啦！快一點！你的 AB 線段怎麼看出來的？大聲一點，思婷是說，這裡是不是有一個直角三角形（圖四十三）？對不對？ 3^2 是不是這個正方形？ 2^2 是不是這個正方形？可以嗎？那 $9+4$ 是不是 13？13 是不是這邊的正方形？可以嗎？然後 AB 線段是不是就做出來了？是不是



（圖四十三）

等於 $\sqrt{13}$ ？OK！再來第二個是誰？麒宇，你的做法，出來分享一下。

276. 麒宇：把這裡連起來，然後這個平方加這個平方，就是這一條。

277. 老師：好。麒宇他講的是把這裡連起來，（圖四十三，右上）是不是形成一個直角三角形？麒宇用到的是什麼？ a^2+b^2 ，會等於 c 的平方，可以嗎？所以 3^2+4^2 是不是剛好 25？25 是誰？25 是不是 c 的平方？是不是斜邊的平方？所以 c 就會等於多少？ $\overline{CD}$ 的長度是不是等於 5？可不可以？來，彥竹，兩個人兩個不同的講法。

278. 彥竹：這個斜邊長為 a （圖四十三，左下）。

279. 老師：斜邊長為 a ，要幫你寫嗎？

280. 學生：會形成一個直角三角形。

281. 老師：會形成一個直角三角形。

282. 學生： a 的平方等於這兩個 $(9+25)$ 。

283. 老師：他也是一樣，設這個斜邊為 a ，然後這個平方加這個平方，會等於 a 的平方，可以嗎？那也就是 3 平方是 9，然後這裡 1、2、3、4、5， 5^2 是不是等於 25？ $9+25$ 是不是 34，34 是不是剛好 a 的平方？那 a 是不是就等於 $\sqrt{34}$ ？OK！那它這裡特別寫了一個 a 大於 0，為什麼？因為怎樣？我們上一節課有講，因為邊長怎樣，沒有什麼？來，奕淳說，大聲一點，站起來，邊長怎樣？

284. 奕淳：邊長沒有負數。

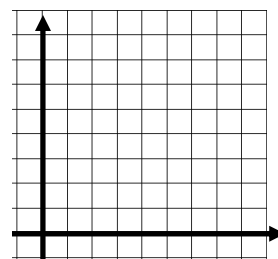
285. 老師：邊長沒有負數。OK！

286. 老師：那再來我們要進入第五個(第五大題) (圖四十四)，坐標平面上兩點的距離，A 點的坐標是 $(1,2)$ ，B 點的坐標是 $(4,5)$ ， $(1,2)$ 在哪裡？是不是在這裡？B 點的坐標 $(4,5)$ ，1、2、3、4，1、2、3、4、5， $(4,5)$ 是不是在這裡？沒問題吧？然後要求這一段的長度 (圖四十五)。A 點的坐

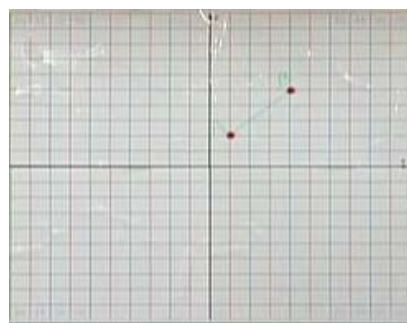
標，B 點的坐標，有沒有回到剛才那一題？可以嗎？所以以後如果你忘記的話，你就把直角坐標畫出來，點把它點上去，你大概就有機會了。沒問

五、平面上的兩點距離

1. 已知坐標平面上 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 5)$ 兩點，求 $\overline{AB}$ 的長。



(圖四十四)



(圖四十五)

題吧？我們熟練以後，再來記所謂的公式。

（學習單練習，教師行間巡視）

287. 老師：第 2 題（圖四十六），它 C 點的坐標(3,1)，D 點的坐標(-5,7)，等一下出來的同學會多一個手續就是，你要把它寫出來。好，這三題，兩題而已！C 點的坐標，C 點的坐標是(3,1)，D 點的坐標是(-5,7)，爲了公平起見，我幫你標出來，(3,1)在哪裡？1、2、3，(3,1)，然後 5，5 多少？

288. 學生：(-5,7)。

289. 老師：(-5,7)。1、2、3、4、5，1、2、3、4、5、6、7

，兩個要打架了，等一下你們自己協調吧！這一個是 C 點，這一個是 D 點，等一下要算這一個，自己算算看。來，兩個喔！最後的兩個，然後有一個隨堂練習，你練習做做看。好，第一個，16 號，第二個，我們用號碼加起來的，第一個 16 號，AB 線段，第二個多少？39 號，沒錯吧？27+12 不是 39 嗎？第二個 39 號，來吧！

（學習單練習，教師行間巡視）

290. 老師：好，這一排大部分都 OK！會不會做？

291. 學生：會。

292. 老師：會喔！來，你會不會？

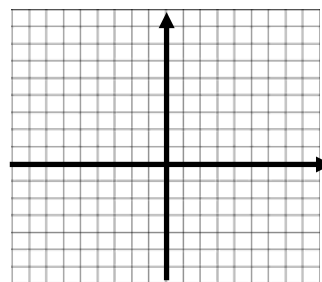
293. 學生：會。

294. 老師：畫上去，你坐標前面的點會不會畫上去？(3,1)。

295. 老師：好，先站旁邊吧，等一下要出來解說。來，我們先把 C、D 兩點拿起來。

開始吧，潘大康，這裡是(1,2)，然後 B 點是多少？1、2、3、4，4 幾？(4,5)

2. 已知坐標平面上 C(3, 1)、D(-5, 7) 求 $\overline{CD}$ 的長。



（圖四十六）

，來，潘大康做的很詳細喔，分解動作。

296. 太康：它的平方加它的平方等於它的平方（圖四十七）。

297. 老師：對，它的平方，你 4-1 怎麼來的？來，我站這邊，你站這邊。這樣你才看的到你的算式，你 4-1 怎麼來的？

298. 學生：4-1。

299. 老師：4-1，5-2 呢？

300. 學生：5-2。

301. 老師：這一個是不是 5？我們以前有講過嘛！直的是看哪一個坐標？

302. 學生：y 坐標。

303. 老師：y 坐標。那橫的是看哪一個坐標？是不是 x 坐標？x 坐標從 1 到 4，距離是不是 4-1？然後這一個咧？y 坐標從 2 到 5，是不是 5-2？可不可以？出來就是我們剛才的概念。來

，以璇，不要擋到我們以璇的路，C、D 在這，在哪裡 (3,1)？OK！這是什麼（圖四十八）？

304. 以璇：勾股定理。

305. 老師：大聲一點，面向同學。

306. 以璇：就是用勾股定理的概念，算出 $\overline{CD}$ 的長度。

307. 老師：用勾股定理的概念去算出 $\overline{CD}$ ，意思就是說這裡會點一點，是不是？然後？以璇有一個地方，你看喔，以璇這裡是不是直接用 CD 線段， $\sqrt{6^2+8^2}$ ，有沒有？為什麼？我們下一節課，請以璇再來幫我們做探討。

$$\begin{aligned}
 1. \quad \overline{AB} &= \\
 4-1 &= 3 \\
 5-2 &= 3 \\
 3^2 + 3^2 &= 18 \\
 \overline{AB} &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

（圖四十七）

$$\begin{aligned}
 2. \quad \overline{CD}^2 &= 6^2 + 8^2 \\
 \overline{CD} &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\
 &= \sqrt{36+64} \\
 &= \sqrt{100} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

（圖四十八）

308. 學生：為什麼？

309. 老師：為什麼？好，我們先很快速，因為下課了。CD 平方是不是 6 平方加 8 平方？這是以璇講的。因為 CD 線段 >0 ，所以 CD 線段是不是直接開根號就好？沒問題吧！後面就繼續做下去。好，我們這兩節課到這裡，等一下回去乖乖的吃飯吧，好，下課。

參、教學說明

莊老師：今天辛苦了！

黃老師：謝謝！

莊老師：今天看到你的教學，感覺上你的師生關係互動蠻好的，所以在這個部分，你在教學過程中是蠻成功的，孩子跟你的互動還不錯。

黃老師：基本上今天他們還是比較緊張。

莊老師：孩子有時候會有一些狀況，也不容易啦！

黃老師：對。

莊老師：我今天在觀察，因為我有全程看兩節課，發現你上課的架構有一個流程。我自己有做整理，我發現你一開始的時候，從數學史的觀點來觀察圖像，從畢達哥拉斯發現勾股定理的表徵，從圖像的觀察，然後到面積的呈現，從面積再推廣到一般非等腰的特例，從那邊讓孩子去算面積，最後會形成一個算式的調整。然後從算式的表徵出來之後，你又從你去 SOGO 看地磚的一個過程，發現生活的圖像跟之前古人的證明，可以做一個演練，一個相關關係，最後從那一個地方，延伸到代數的證明。讓孩子去做訓練，做勾股定理邊長的一個訓練，再連接到兩點的距離。我這麼說，你今天，當然公式沒有推出來，應該有隱藏一些公式的證明。

黃老師：對。

莊老師：那我想問，你今天在這個流程的教學裡面，感覺最滿意的地方是哪裡？

黃老師：第二節課的時候，孩子們比較進入狀況。第一節課我發現他們，說滿意是他們今天的表現還算蠻中規中矩的。所以會覺得說，他們很多平常在上課專心度沒有那麼高的，今天會比較高，這個是上課的狀況。在課堂方面，後面的話，我比較滿意的是他們在推形式化證明， $a^2+b^2=c^2$ 那個部分，我在底下巡了一下，大部分都還是有這個概念。

莊老師：是，你巡視的時候，發現孩子大部分都可以有解決的能力。

黃老師：對。到後面做兩點距離的公式，我發現比較中下程度的孩子，至少有一些概念，他們可以利用直角坐標系，方格的概念，引出直角三角形，再推出它斜邊兩點間的距離，我覺得這個是比較異於平常的教學。因為平常的教學好像就會變得比較公式化，像最後那個同學(以璇)寫根號多少，已經流於公式的型態。但是可以看到上台講的那些孩子們，他們在寫的過程中其實是比较算是，講難聽一點，雜亂無章，他們會寫 5 平方加 12 平方等於 169，然後再寫 AB 線段等於 13，這樣子。他們會這樣寫，基本上是屬於，他們想到什麼就寫什麼。

莊老師：就跳躍式思考。

黃老師：對，比較跳躍式的思考。我覺得初步應該是要這樣子，等他們熟練以後，再開始漸漸讓他形式化的寫法，再做這方面的訓練。而不要一開始就讓他們制式化的寫法，這個我覺得比較不喜歡，我後來發現他們這個部分，好像還有達到我的預期。

莊老師：我今天在觀察的過程裡發現兩個特色，就是剛剛的流程。第一個是你有一個圖像，要孩子解釋為什麼中間那一個是正方形，我本來在後面看覺得有點困

難，但是你們班上孩子有上去解釋，說那個直角三角形，另外兩個銳角相加是 90 度，去推中間是直角，有孩子上去解釋出來了。這點其實在我們看，是還滿驚奇的，不容易。

黃老師：這點我也是蠻驚訝的，就是說我第一個叫到的女生(之勤)，她應該是我們班都維持在前三名的，因為這個部分比較難，所以我其實有刻意叫她，結果她在這一方面掛點了。再來第二個叫到的那個男生(啓軒)，我們班也是前五名的，後來都幾乎第一名，他是數理比之勤好很多，我想說至少他應該可以解決，沒想到第二個出來，他也掛點了。結果是今天最紅的那個，當紅炸子雞麒宇，他平常是很愛發表沒錯，不過他的數學成績一直都不是非常好，可是我發現他的觀察能力非常好，在平常表現出來是觀察能力很好。剛好這一節課我們比較著重在觀察，所以在這一節課可以發揮他的潛能。而且我覺得他發揮出來，甚至比班上前幾名，我們所謂績優的學生，還更突出。那這是我今天最大的收穫，也是我最訝異的。

莊老師：所以今天這樣的教學，讓那一些平常比較沒沒無聞的學生，有發光的機會。

黃老師：對。

莊老師：我覺得不錯。

黃老師：對。

莊老師：我還觀察到第二個特點，就是你講兩點的距離那一部份，在呈現的時候，你發現孩子有很多種寫法，我覺得你那邊處理的很好。你這個寫法是什麼樣的原因，那個寫法是什麼樣的情況，讓孩子去了解它，那邊我覺得處理的還不錯。

黃老師：因為我看到他們寫的時候，其實寫法上大同小異，講法上發現他們切入的点，好像每個人都不大一樣，大部分還是都從直角三角形去看到兩個面積，兩股

的平方和面積。會等於我們今天一路強調的斜邊正方形的面積，有些孩子就開始著眼從邊長的角度去思考，他們從不同的角度思考，我是覺得還不錯。因為就他們的寫法上，我發現應該是有不同的解法，所以在加上那三個孩子，其中兩個平常成績是不錯，除了麒宇，後來麒宇剛好也有上去，他今天特別好。我發現他在這一方面能力特別強，所以他未來在三年級學幾何的時候，我會特別再去觀察他，他在這一方面會不會比其他更卓越？他在代數方面可能就相對的弱。另外兩個是代數方面比較強項些，所以我覺得剛好就給他們這個機會，可以表達去解釋。

莊老師：對，這裡有同樣的效果。不可否認的說，像今天這樣的教學流程，你認為在這樣的歷程中間，你覺得比較不滿意的地方，或你覺得沒辦法達到你預期效果的地方是什麼？

黃老師：我本來預期他們在圖形上，由方格上去算正方形的面積，對他們來講是沒有困難的。但我發現好多孩子竟然在這一方面是有困難的，而且困難度蠻大的，就我看到，後來不是有圖 1、圖 2、圖 3，要推出 $P+Q=R$ 那一個部分，我發現我們班第一名的孩子(之勤)，他竟然是 P 的面積寫成邊長 3，也就是可能他沒有看到要求正方形的面積，他會很直覺的去想說，我就是要找那三個邊長，那種制式化的想法。也就是說，他可能平常在學的時候，學的型態比較像傳統的模式，比較另類的講法對他來講可能就比較新鮮。以後如果要針對他個人做加強，就會有一個切入的點。我比較不滿意的是說，他們真的很出乎我的意料之外，他們在做面積拼圖的想法，切割的想法，好像沒有我想像的那麼熟練。我本來預期，他們在國小應該有做過這類的拼圖模式，或者平常應該有玩到屬於這一類的，在簡單的幾何圖形，在觀察、在看的時候，應該都還蠻駕輕就熟、蠻熟練的。可是在這一點就完全沒有符合我的預期，我發現

他們可能有的人不敢去表達，但有的人這方面的觀察力，以後八年級下學期在學幾何的時候，這一個方面可能要再加強。

莊老師：因為我有發現，第一個在觀察畢達哥拉斯那個圖像的時候，孩子本身可能剛開始上課的時候，他們有一點害羞，會害怕。

黃老師：對。

莊老師：所以他們在表現上會有點怯生，你也一直鼓勵他們去發表說：「你從這個圖形發現什麼面積關係？」你中間的圖像有一些引申，像上色、去框那個正方形提示是非常好的，所以說其實有一些教學上的輔助，讓孩子觀察到那個現象也不錯啦！我發現畢達哥拉斯要看瓷磚的面積關係，的確有點困難，可是必須要有引導，所以你中間有用一些話語引導，其實是不錯的一個表達方式，我覺得還蠻好的，旁邊做補充也很好。另外我個人有觀察到，你後來在講到生活的連結，瓷磚那個地方的圖像，就是顏色的區分有一點困難。

黃老師：對。

莊老師：然後你劃那條線，在螢幕上是顯示不是非常的好。

黃老師：對…。

莊老師：那邊也造成一些困擾。

黃老師：對。

莊老師：那一段的教學你覺得怎樣？

黃老師：在那時候我就覺得說糟糕，當下心理就想就趕快在課堂上把那個線條加粗，重新規劃，讓孩子看得到。後來我想一想不需要吧！我只是畫個大概讓他們知道架構，所以我就用彩色簽字筆，就在電腦螢幕上，直接畫上去，讓他們可以看到大概的形狀。他們只要會畫，畫完了以後去做切入。這裡後來為什麼我沒有再加強去引申，因為第一，我發現時間好像也來不及，第二，我發

現他們之前做劉徽的那個部分，好像也看得不是很清楚。所以在這個部分只是讓他們了解到，大概跟劉徽比較起來，那個圖像比較起來是怎樣的模式。因為我今天主要教學的重點，是要讓他建立一個典範例，就是他們有一個開山例，心中有一個圖像。如果勾股定理忘記的時候，可以在兩股還有斜邊，各自做一個正方形，然後去找出它們的關係。今天我主要架構是在這一個訴求上，後來我發現好多孩子在這個方面應該還 OK。

莊老師：其實你面積關係，兩個面積的和跟斜邊面積相等，這圖像我們在旁邊看，覺得非常的清楚，如果說以後在重新佈題的時候，這個地方的連結可以取捨，你覺得這邊你會把它刪除嗎？

黃老師：這邊我應該是不會刪除，可是就不會給那麼多的案例，可能就只取甲等於乙加丙那個案例，再來就多花一些時間，讓他們去計算第二大題，方格裡面 $P+Q=R$ 。然後在做這個部分之前我可能必須先做一個教學，正方形擺斜斜的時候，面積怎麼算？他們是用補的方式？還是用切割的方式？還是怎樣切割？可能在這裡再做加強，這個部分加強，把它建構起來了以後，他們要再來發現 $P+Q=R$ 這個關係，可能會比較……。

莊老師：更好。

黃老師：更熟悉一點，這個是再來要去補強的。然後像劉徽那個，可能就要考慮一下他們是不是真的比較困難。

莊老師：我今天有發現你用那個方格板的教學，用兩點的距離方式非常好。那個對他們來說，對於形成兩點間的一個距離，會有一個前置經驗，你個人覺得呢？

黃老師：我覺得這一個部分我蠻喜歡的，平常在黑板上我們不大容易呈現，即使直接畫平面直角坐標，他們要發現兩點間的距離，然後即使你畫出直角三角形，他們還是不大容易去數，尤其是後段的孩子，他們不會去用加減法算距離的

公式。他們可能會去數格子，有那方格去做輔助的話，對他們來講幫助是蠻大的。尤其就上學期(七下)的經驗，在教直角坐標平面的時候，用這個直接教學，在孩子的接受度上，他們在數，在寫坐標平面上的點，在這個方面他們都還蠻熟悉的。所以我就想，倒不如在課堂上直接引入(方格板)，直接可以看，而且他們又可以馬上看出直角三角形的關係。最後等他們熟練以後，再脫離那方格，把它變形式化的模式，這就是後面要做的訓練。

莊老師：我覺得你今天的教學，很多地方是會讓孩子有一個心理影像，那一個圖像在那邊做連結又帶出的關係，這裡我是覺得你用心良苦，效果我是覺得不錯。但中間有一些在圖像面積的觀察上，孩子也努力的不錯。

黃老師：對。

莊老師：或是我們只是講一個名詞、一個措辭，孩子也許還聽的不夠明確，會產生一些迷思。我是覺得整個教學上，圖像的連結做的非常好。

黃老師：就是我在名詞上的介紹，可能沒有那麼強烈。

莊老師：對指令的。

黃老師：指令的下達，還有指令的變化上，好像我在講的時候，就會常常做一些指令上的變化，讓孩子有一些措手不及。在這一方面以後要統一，就是指令要讓它統一。因為今天在台上講的時候，有時候一緊張，連孩子的名字都會忘記，所以那些指令常就會發生錯誤，或者會吃螺絲。

莊老師：不過今天不錯啦！表現的非常穩。最後我想問你一個問題就是說，你認為今天整個教學的歷程，你最想培育學生什麼能力？

黃老師：我今天最主要是要培育他們察覺的能力，這個察覺的能力是孩子們比較欠缺的。察覺能力培養好以後，即使在代數方面，能夠察覺式子之間的關係，對他們未來是有幫助的。所以今天我在課堂上，會利用這一堂課去做圖像的察

覺，其實主要目的是要給他們有這個經驗，藉這個機會讓他們有這個經驗，培養他們如何去察覺一樣東西。

莊老師：有做到讓孩子們慢慢的，點點滴滴慢慢的進步，我覺得已經是可以預期的。

黃老師：這個要累積，經驗的累積，讓他們的經驗慢慢去累積起來。

莊老師：那今天就辛苦你了。

黃老師：謝謝。

肆、教學後的省思

勾股定理在國中幾何中，是經常使用到的性質，以往孩子們總是學得快也忘得快。此次的教學，目的是希望藉由圖像的思考，建構孩子的心靈影像，讓孩子在心靈深處存在一個基模，隨時可以憶取出來。

本次的教學，藉由活動的探索與操作，讓孩子更明確的知道，勾股定理要探討的是直角三角形三邊長的關係，而不是只流於形式的記憶 $a^2 + b^2 = c^2$ 。經歷這次的嘗試後，下次教到此單元，依舊會採用此教學方式，寧願多花一些時間探討直角三角形的邊長關係，當孩子們熟悉這樣的關係後，自然就會利用勾股定理求直角三角形的未知邊長。

在推導兩點間距離公式之前，先讓孩子使用方格的概念，並結合勾股定理，求出已知兩點間的距離，個人覺得這個經驗是必要的，有了這個經驗後，對多數的孩子而言，將使他們對兩點間距離公式將更有感覺。

三角形的全等性質

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級下學期

二、教學者：台北縣立錦和高中 陳萩紋 老師

三、教學目標：

1. 能辨別兩個三角形全等，並理解兩個三角形全等的意義。
2. 能找出兩個三角形全等的最少條件，並理解三角形 ASA、AAS、SAS、SSS 全等性質。
3. 能理解三角形 RHS 全等性質。

四、活動目標：

第一堂課

【活動一】能理解三角形全等的意義。

【活動二】能找出三角形全等所需的最少條件。

第二堂課

【活動三】能理解三角形 ASA、AAS、SAS、SSS 全等性質。

【活動四】討論三角形 SSA ($A < 90^\circ$) 的兩種情況（若其中一邊為最大邊，則解會唯一）並理解 RHS 為其一邊為最大邊的特例全等性質。

五、教學概要說明：

學生在學習此單元之前，已學過「三角形的內角和」及「畢氏定理」。在第一個活動，先讓學生從六個三角形中去辨認出全等的兩個三角形，除了直觀的猜測外，再讓他們透過疊合兩個三角形，確定了全等的關係；接著歸納出全等的兩個

三角形三組對應邊及三組對應角相等的結果，並介紹全等（ $\cong$ ）的符號及記錄方式。

第二個活動則引導學生思考從六個對應相等的條件中，挑出最少而能使兩個三角形全等的條件，以圖卡的疊合方式來找出，並將結果記錄下來。

第三個活動則是將找出來的條件組合依照邊角的位置不同作分類，而分出「兩角與其一夾邊對應相等 ASA」、「兩角與一鄰邊對應相等 AAS」、「兩邊與其一夾角對應相等 SAS」、「三邊對應相等 SSS」及「兩邊與一鄰角對應相等 SSA」五種類型，其中「兩邊與一鄰角對應相等 SSA」並不會全等的狀況則留待活動四討論。

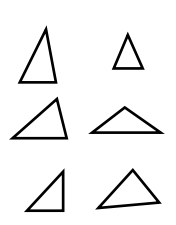
活動三對於 ASA、AAS、SAS、SSS 四種全等條件的性質作整理，並且說明全等性質的英文簡記方法。

活動四則對於三角形 SSA 情況作探討，發現所有的 SSA 組合中，當其中的角選到的是最小角時，就會有不全等的情况發生，所以 SSA 並不能成為三角形全等的條件，最後再引導學生從畢氏定理思考及圖卡的操作是否有特殊的三角形能使得 SSA 能成立，而引入三角形 RHS 全等性質。

六、教學活動設計：

第一堂課

【活動一】能理解三角形全等的意義。

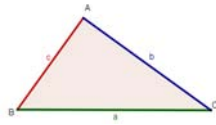
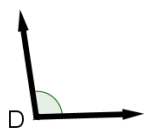
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
對三角形全等意義的了解	1.黑板上有六個三角形，請你觀察一下，其中有幾個三角形是一模一樣的？	將六個三角形的圖片貼在黑板上，讓學生辨別。 	- 能理解題意。 - 能將自己的答案說出。

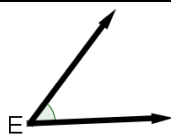
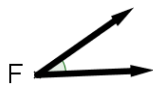
	2. 你如何知道它們是一模一樣的呢？ 3. 兩個三角形如果全等的話，它們的邊和角之間會有甚麼關係？ 4. 如果 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等，請你將相等的對應邊及對應角寫下來。 5. 如果 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等，我們記錄成 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。	• 學生可能的回答：直覺、邊長長度一樣、角度一樣、疊在一起密合。 • 從學生的說法中歸納，說明一個三角形透過移動、翻轉後能疊合的即稱為兩個一模一樣的三角形，而這兩個一模一樣的三角形稱為兩個全等的三角形。 • 說明兩個全等的三角形對應邊會相等，對應角會相等。	• 能理解三角形全等的意義。 • 能寫出對應邊及對應角。
--	---	--	---

【活動二】能找出三角形全等所需的最少條件。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 能找出三角形全等所需的最少條件	1. 從活動一我們可以知道當兩個三角形全等時，會	• 歸納兩個三角形全等的六個條件。	• 能理解三角形全等的六個條件。

	有三組對應邊等長，三組對應角相等。 我們也可以這樣說：當兩個三角形符合三組對應邊等長及三組對應角相等的這六個條件時，則這兩個三角形全等。 2.想一想，我們可不可以從這六個條件中只挑選出某些條件，而使得兩個三角形全等呢？例如兩個三角形中知道 $\angle A = \angle D$ 這個條件，可以確定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 嗎？如果不行，需再加入哪些條件就可以確定三角形全等呢？或許不需要六個條件都知道，我們就可以確定兩個三角形全等。	- 請學生分組探討是否只要具有這六項條件中的某些條件就能使兩個三角形全等。 - 學生或許會不了解老師的意思，所以先以「只有一組對應角相等，則兩個三角形會全等嗎？」的問題為例，引導學生再增加幾組對應角或對應邊相等的條件來找出兩個三角形全等的最少條件。	能理解老師的問題。
--	---	---	---

	發給每一組一套圖卡，裡面有一張是 $\triangle ABC$，另外六張分別是與 $\triangle ABC$ 相同的三個對應角及對應邊的投影片。你可以用重疊的方式來找出會讓兩個三角形全等的最少條件，和同學討論後並將你選擇出的條件寫下來。	圖卡共有七張：第一張為 $\triangle ABC$，A4空白紙  第二張到第七張為 A4 投影片： 第二張為 $\overline{DE}$（與 $\overline{AB}$ 等長）  第三張為 $\overline{EF}$（與 $\overline{BC}$ 等長）  第三張為 $\overline{DF}$（與 $\overline{AC}$ 等長）  第四張為 $\angle D$（與 $\angle A$ 等角）  第五張為 $\angle E$（與 $\angle B$ 等角）	能利用圖卡找出三角形全等的最少條件。
--	---	---	--

		 第六張為 $\angle F$ (與 $\angle C$ 等角)  將選出的條件 (一張投影片即為一個條件) 重疊放在第一張 $\triangle ABC$ 的圖卡上, 而使得生成的 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 全等。	
--	--	--	--

【活動三】能理解三角形 ASA、AAS、SAS、SSS 全等性質。

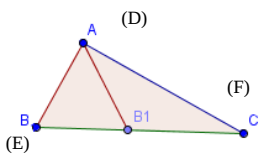
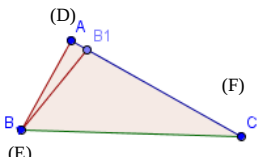
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
歸納找出的三角形全等條件	- 每一組派出一位同學將你們找出來的結果寫在黑板上。 - 請每一組的同學將你的圖卡帶上來解釋並操作給同學看。	- 先提醒學生寫條件的方式為將選取出的相同的邊和相同的角寫出來。 - 學生寫出來的條件若只有兩個, 就以圖卡來解釋只有兩個條件是無法確定兩個三角形全等的。	- 能將找出的結果寫下來。 - 能說明自己寫下的答案。

	2.同學們找出來的最少條件是幾個呢？有沒有更少的呢？ 3.看看同學寫出的答案，將這些答案整理歸納後，你有甚麼發現？	- 學生寫出來的條件若有四個，就將其中的一個條件刪除，說明只要三個條件就可以確定兩個三角形全等。 - 大部分的學生經過小組的討論後，應該都會得到三個條件是確定兩個三角形全等的最少條件。所以將學生寫出的條件加以分類如下： (1) $\angle A = \angle D, \overline{AB} = \overline{DE}, \angle B = \angle E$ $\angle B = \angle E, \overline{BC} = \overline{EF}, \angle C = \angle F$ $\angle A = \angle D, \overline{AC} = \overline{DF}, \angle C = \angle F$ (2) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \overline{BC} = \overline{EF}$ $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F, \overline{AC} = \overline{DF}$ $\angle C = \angle F, \angle A = \angle D, \overline{AB} = \overline{DE}$ (3) $\overline{AB} = \overline{DE}, \angle A = \angle D, \overline{AC} = \overline{DF}$ $\overline{AB} = \overline{DE}, \angle B = \angle E, \overline{BC} = \overline{EF}$ $\overline{BC} = \overline{EF}, \angle C = \angle F, \overline{AC} = \overline{DF}$ (4) $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \overline{AC} = \overline{DF}$ - 學生可能無法將所有的條件找盡	- 能找出使得兩個三角形全等的最少條件。 - 能將寫出來的條件作歸納。 - 能將對應邊及對應角的位置組合關係以英文字母簡記，並理解性質的意義。
--	---	---	---

• 三角形ASA、AAS、SAS、SSS全等性質	• 為了便於記錄及溝通，我們將這幾種全等條件的對應邊對應角組合以英文字母來表示；邊（Side）以S表示，而角（Angle）以A表示，所以「兩角與其一夾邊對應相等」就以ASA表示，而「兩三角形中，若有兩角與其一夾邊對應相等」，則稱為ASA全等性質。 • 請你將剩下三個全等性質以A及S表示出來。	• 但是從學生所找出的條件中引導學生依照對應角和對應邊位置組合的不同來分類。而發現「兩角與其一夾邊對應相等」、「兩角與一鄰邊對應相等」、「兩邊與其一夾角對應相等」及「三邊對應相等」四種不同的組合。 • 將四種不同的條件組合以英文字母表示並以三角形全等性質作結論。 • 若有學生找出SSA的情況則留待下一活動提出討論。	
--	---	--	--

【活動四】討論三角形 SSA 不全等的情形，並理解 RHS 全等性質。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 三角形 SSA 情況的討論	1. 從剛剛的討論中，我們找出了四種會讓兩個三角形全等的條件組合，分別是ASA、AAS、SAS和SSS，其中還有一種邊角的組合是SSA	• 在上個活動中，學生可能會寫出 $\overline{AB}=\overline{DE}, \overline{AC}=\overline{DF}, \angle B=\angle E$ $\overline{AB}=\overline{DE}, \overline{AC}=\overline{DF}, \angle C=\angle F$ $\overline{AB}=\overline{DE}, \overline{BC}=\overline{EF}, \angle A=\angle D$ $\overline{AB}=\overline{DE}, \overline{BC}=\overline{EF}, \angle C=\angle F$ $\overline{BC}=\overline{EF}, \overline{AC}=\overline{DF}, \angle A=\angle D$ $\overline{BC}=\overline{EF}, \overline{AC}=\overline{DF}, \angle B=\angle E$ • 其中某些條件（	• 能討論 SSA 全等及不全等的情況。

• 三角形 RHS 全等性質的探討	，也就是「兩邊與一鄰角對應相等」是否也會使得兩個三角形全等呢？ 2. 每一組的同學將你的圖卡中任意兩邊及一個鄰角拿出來和原來的 $\triangle ABC$ 比對看看，是否能讓兩個三角形全等呢？ 3. 你可以將你選擇邊及角作更動，再去和原 $\triangle ABC$ 作比對，會不會和原三角形全等呢？ 4. 選擇不同的邊或角當條件後，你有沒有發現甚麼結果？ 5. 如果要使得 SSA 能保證兩個三角	當選擇的角不是最小角時）會使兩個三角形全等，但是其中這種組合 $\overline{AB}=\overline{DE}, \overline{AC}=\overline{DF}, \angle C=\angle F$ $\overline{AB}=\overline{DE}, \overline{BC}=\overline{EF}, \angle C=\angle F$ 卻會產生不全等的情况。  $\overline{AB}=\overline{DE}, \overline{AC}=\overline{DF}, \angle C=\angle F$  $\overline{AB}=\overline{DE}, \overline{BC}=\overline{EF}, \angle C=\angle F$ 而因為有不全等的情况存在的可能，所以 SSA 無法成為三角形全等的條件。 • 因為學生無法很快的想出 SSA	• 能發現 SSA 全等及不全等情况的差別。 • 能理解 RHS 全等性質的意義。
--------------------------	---	---	---

	形全等的話, 怎樣的三角形才能讓 SSA 全等呢? (提示: 哪種三角形只要兩個對應邊相等, 第三邊也會相等?) 6. 討論四邊形的全等作為教學評量。	性質一定會讓兩個直角三角形全等, 所以提醒他們用畢氏定理及 SSS 全等性質來確定兩個直角三角形 SSA 全等。 • 最後再說明 RHS 全等性質的意義, 以與 SSA 作區別。	
--	---	---	--

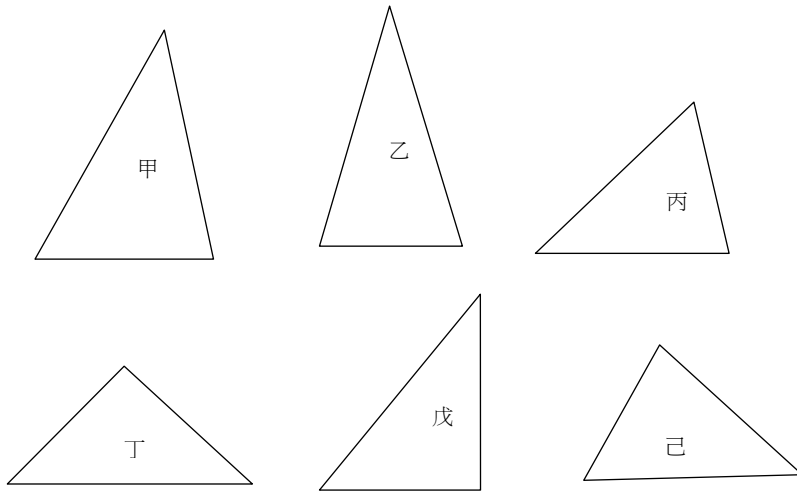
附錄：學習單

三角形的全等性質學習單 二年__班__號 姓名_____

◎能理解三角形全等的意義

【活動一】

(一) 下面有六個三角形，請你觀察一下，其中有幾個三角形是一模一樣的？



答：

(二) 你如何知道他們是一模一樣的呢？

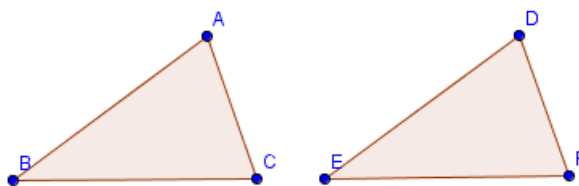
答：

(三) 兩個三角形如果全等的話，他們的邊和角之間會有甚麼關係？

答：

(四) 如果 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等，請你將相等的對應邊及對應角寫下來。

答：



◎全等的符號「 $\cong$ 」

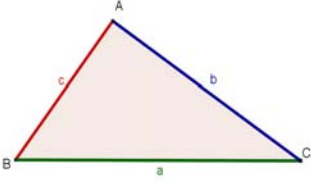
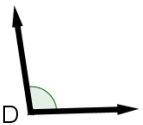
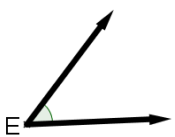
當 $\triangle ABC$ 透過移動、翻轉後能與 $\triangle DEF$ 疊合，則稱 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等，我們按照其對應的關係記錄成 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，其中兩個三角形的三組對應邊會相等，三組對應角相等。

◎能找出三角形全等所需的最少條件

【活動二】

- (一) 從活動一我們可以知道當兩個三角形全等時，會有三組對應邊等長，三組對應角相等。我們也可以這樣說：當兩個三角形符合三組對應邊等長及三組對應角相等的這六個條件時，則這兩個三角形全等。
- (二) 現在請你想想，我們可不可以從這六個條件中只挑選出某些條件而使得兩個三角形全等呢？
例如兩個三角形中知道 $\angle A = \angle D$ 這個條件，可以確定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 嗎？如果不行，可以再加入哪些條件就可以確定三角形全等呢？或許不需要六個條件都知道，我們就可以確定兩個三角形全等。
- (三) 現在發給每一組一套圖卡，裡面有一張是 $\triangle ABC$ ，另外六張分別是與 $\triangle ABC$ 相同的三個對應角及對應邊的投影片，你可以以重疊的方式來找出會讓兩個三角形全等的最少條件，和同學討論後並將你選擇出的條件寫下來（請將挑選出的對應邊和對應角的名稱寫下來，例如： $\angle C = \angle F$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ）。

圖卡：

		
 $\overline{AB} = \overline{DE}$	 $\overline{BC} = \overline{EF}$	 $\overline{AC} = \overline{DF}$
 $\angle A = \angle D$	 $\angle B = \angle E$	 $\angle C = \angle F$

答：

(四) 同學們找出來的最少條件是幾個呢？有沒有更少的呢？

答：

(五) 我們來看看同學寫出的答案，將這些答案整理歸納後，你有甚麼發現？（可以按照邊和角的位置分類看看，將你分類後的結果寫下來）

答：類型一：

類型二：

類型三：

類型四：

類型五：

(六) 為了便於記錄及溝通，我們將這幾種全等條件的對應邊對應角組合以英文字母來表示；邊 (Side) 以 S 表示，而角 (Angle) 以 A 表示，所以請你將上一個活動你找出的條件類型按照角和邊的位置排列以 A 及 S 表示出來。

	類型一	類型二	類型三	類型四	類型五
邊角位置					
英文簡記					

◎三角形 SSA 情況的討論

【活動三】

(一) 從剛剛的討論中我們找出了幾種會讓兩個三角形全等的條件組合，分別是 ASA、AAS、SAS、SSS，其中的一種 SSA 的邊角組合，也就是「兩邊與一鄰角對應相等」是否真的會使得兩個三角形全等呢？

答：

- (二) 現在每一組的同學將你的圖卡中任意兩邊及一個鄰角拿出來和原來的 $\triangle ABC$ 比對看看，再將你選擇的邊及角作更動，是否能讓兩個三角形全等呢？

將所有的 SSA 組合都拿出來比照看看：

$$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{AC} = \overline{DF}, \angle B = \angle E$$

$$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{AC} = \overline{DF}, \angle C = \angle F$$

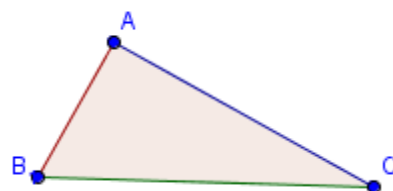
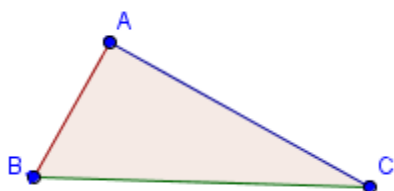
$$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \angle A = \angle D$$

$$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \angle C = \angle F$$

$$\overline{BC} = \overline{EF}, \overline{AC} = \overline{DF}, \angle A = \angle D$$

$$\overline{BC} = \overline{EF}, \overline{AC} = \overline{DF}, \angle B = \angle E$$

- (三) 哪些條件的組合無法保證兩個三角形全等呢？



答：

- (四) 請想一想如果要使得 SSA 能保證兩個三角形全等的話，怎樣的三角形才能讓 SSA 全等呢？（提示：哪種三角形只要兩個對應邊相等，第三邊也會相等？）

答：

◎三角形的全等性質

- 一、 兩三角形中，若有兩角與其夾邊對應相等，則這兩個三角形全等，稱為三角形 _____ 全等性質。

二、兩三角形中，若有兩角與一鄰邊對應相等，則這兩個三角形全等，稱為三角形
_____全等性質。

三、兩三角形中，若有兩邊與其一夾角對應相等，則這兩個三角形全等，稱為三角形
_____全等性質。

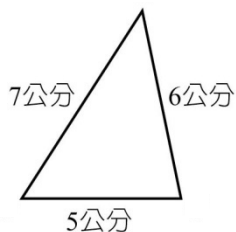
四、兩三角形中，若有三邊對應相等，則這兩個三角形全等，稱為三角形
_____全等性質。

五、兩直角三角形中，若一股及斜邊對應相等，則這兩個三角形全等，稱為三角形
_____全等性質。

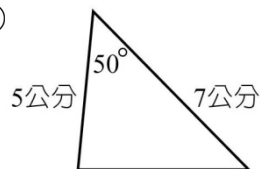
【練習題】

下圖中，①～③的三角形分別與④～⑥的某一個三角形全等，請指出來，並說明所根據的全等性質。

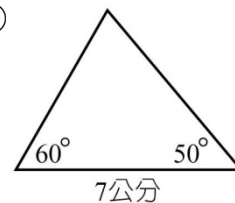
①



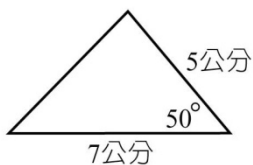
②



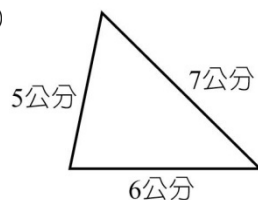
③



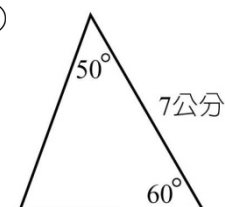
④



⑤



⑥



①和_____全等，根據_____全等性質。

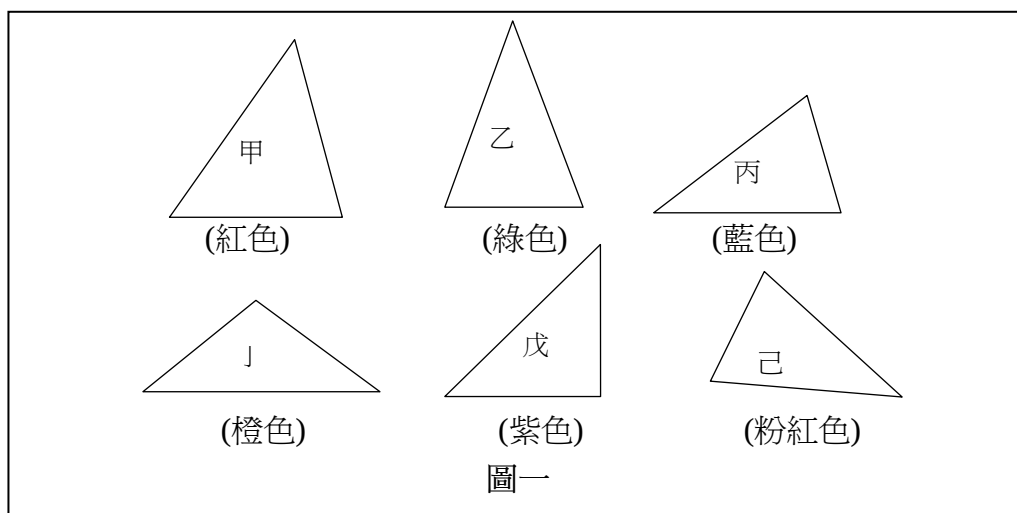
②和_____全等，根據_____全等性質。

③和_____全等，根據_____全等性質。

貳、教學實錄

【第一節】

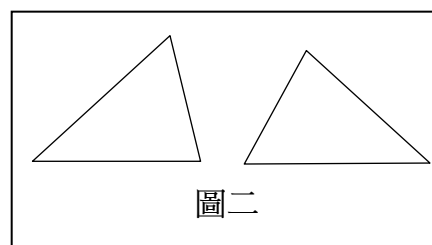
1. 老師：各位同學，老師今天要上的是 3-2 三角形的全等性質，老師先將今天的講義（如附錄：學習單）發下去，麻煩傳一下。先把你的名字寫上去。你拿到的講義有兩張，你看一下第一題，今天我們要講的「三角形的全等性質」，「全等」這個名字，你在國小有沒有學過？
2. 學生：沒有。
3. 老師：有沒有聽過？
4. 學生：沒有。
5. 老師：沒有，好，那你就憑直覺，你看一下，黑板上面有六個三角形，看得清楚嗎？(圖一)



6. 學生：看得清楚。
7. 老師：可以喔！現在，你看一下這六個，你覺得哪幾個是全等？你憑直覺，「全等」，你想一下，「全等」的意思是什麼？綠色(乙)跟戊嗎？

8. 學生：黃色，那個是什麼，黃色嗎？
9. 老師：好，來，苗中韋，你幫老師把它拿下來。誰跟誰全等？挑好了拿給老師。
好，你說這兩個(乙和丁)嗎？好，等一下，先不要走，來，你說這兩個全等，然後這兩個(甲和己)也全等是不是？
10. 中韋：差不多！
11. 老師：它們四個有全等嗎？
12. 中韋：好像都有。
13. 老師：好像都有，你的理由是什麼？
14. 中韋：因為形狀都差不多。
15. 老師：形狀都差不多，你的形狀的定義是看什麼？
16. 中韋：這個有垂直的。
17. 老師：有垂直的。
18. 中韋：對，跟那個地面有垂直。
19. 老師：跟地面的垂直，你的意思是說：它的位置跟地面上的位置一樣，是不是？
20. 中韋：差不多。
21. 老師：好，所以這四個是全等，謝謝你。有沒有同學有其他意見，跟他有不同答案？注意喔！「全等」是什麼意思？「等」應該是相等，所以「全等」是不是全部相等，一模一樣的意思？有沒有人可以告訴老師答案，誰跟誰是一樣的？有沒有？吳承皓來，你覺得誰跟誰是全等？你把它挑出來給老師，誰跟誰？大聲一點，誰跟誰？

22. 承皓：丙、己。
23. 老師：丙跟己，好，為什麼？
24. 承皓：因為兩個看起來很像。

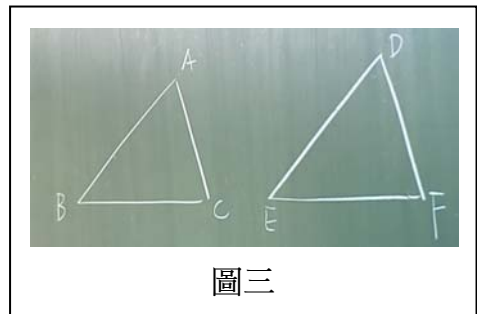


25. 老師：兩個看起來很像，你怎麼樣證明它們兩個是一模一樣的？
26. 老師：很好，來，同學看一下。來，你拿給同學看。他剛剛做了什麼事？
27. 學生：重疊。
28. 老師：對，重疊在一起，有沒有完全一樣？
29. 學生：沒有。
30. 老師：沒有，所以他說這兩個是全等，丙跟誰？丙跟己，很好，請回，謝謝你。其他幾個為什麼不全等呢？你有沒有看到有幾個長得很像的？好，老師拿甲跟乙出來看，這兩個看起來都高高瘦瘦的，對不對？它們兩個為什麼沒有全等？因為疊起來之後，你有沒有發現？它的角度跟它的邊都不一樣長，差了一點點，所以，這兩個雖然看起來很像，它們兩個是不是全等？不是。所以，這六個裡面，全等的是這兩個：己跟丙。老師本來按照上面所寫的國字字體的正向是貼這樣子(圖二)，對不對？可是你看，轉一下，它就貼在一起，一模一樣，所以這兩個是全等。好，所以你看一下第(一)題，老師把六個小的三角形縮小在你的講義上，你看一下，哪兩個全等？你把全等的答案寫在第(一)題的下面。第(二)題，老師要問你，剛剛你經過旋轉之後，這兩個三角形(丙和己)會合在一起，對不對？所以說，這兩個三角形，它們應該會有相對的角跟邊。什麼叫相對的角跟邊？相對的角就是這個角跟這個角 我把它的位置都擺成一樣之後，一樣位置的這個是相對的角，所以我們把這兩個叫做對應角，然後這兩條邊叫做對應邊，你貼在一起的時候才會一樣。老師問你，兩個三角形全等，它們如果一模一樣的話，它們的對應角有幾個？有幾組？對應角會有幾組？兩個三角形的對應角會有幾組？三組，對不對？對應邊會有幾組？三組。所以它總共會有什麼結果？它的對應角跟對應邊都會怎麼樣？相等。好，所以請你看第(三)個，第三個，

老師問你的就是說，對應邊跟它的角跟邊之間會有什麼關係？你要怎麼回答？好，我找人來幫我回答一下，來，何煒晟，它的角跟邊會有什麼關係？請你站起來，用你自己的話說。好，你把你的話再講一次，你的邊會怎麼樣？

31. 煒晟：會等長。

32. 老師：邊會等長，然後角會？好，角會相等。謝謝，請坐。所以第(二)題，對不起，第(二)題的問題是說，你怎麼知道它是一模一樣的？你要怎麼回答？第二題，它們為什麼會一模一樣？是不是因為你疊在一起之後完全重合，對不對？所以，第(二)題你要這樣回答。第(三)題，就是剛剛何煒晟講的，他說，如果它們兩個三角形全等的話，它們的邊會相等，角也會相等。好，現在我們從這六個三角形回到那兩個全等的三角形，老師把己跟丙這兩個特別挑出來放在黑板的左邊。也就是我們要看第(四)題(P.166，學習單第(四)題)，老師要問的是，剛剛你說對應角跟對應邊會相等，對不對？現在老師把兩個三角形的名字都寫上去了，這一個叫 $\triangle ABC$ ，另一個是 $\triangle DEF$ (圖三)，現在請你把它的對應邊跟對應角的名稱寫下來，譬如說，你要講這兩個角一樣的話，你要怎麼說？你要怎麼

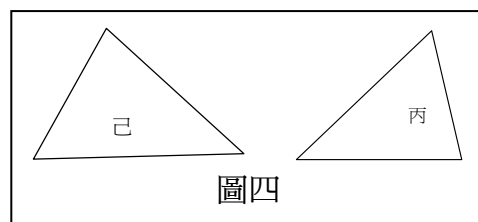


圖三

告訴我這兩個角一樣？這兩個是對應角，對不對？你要寫什麼？ $\angle A$ 等於 $\angle D$ 。好，現在第(四)題，你把它所有的條件寫下來。然後，我要找一個同學上來寫。游竣翔，麻煩你寫在這下面，它們這兩個三角形的對應邊跟對應角的名字，幫老師寫下來。

同學，你們都寫好了嗎？寫好了，來，你看一下，他寫的對嗎？寫對，對

照一下，好， $\angle A$ 等於 $\angle D$ ； $\angle B$ 等於 $\angle E$ ，B 在這裡，所以跟它同一個位置；然後 $\angle C$ 等於 $\angle F$ 。然後 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，然後， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ，所以你看一下，總共要幾個條件，三角形才會全等？這樣總共是幾個條件？如果全等的話，會有幾個條件，幾個要成立？六個。所以你是不是要檢查六個，對不對？你看一下，如果今天老師是這樣擺的，把這兩個三角形換一下位置，你找得到它的對應角跟對應邊嗎(圖四)？你怎麼找？如果這兩個位置沒有像我這樣畫得這麼規矩，你怎麼找它的對應邊跟對應角？

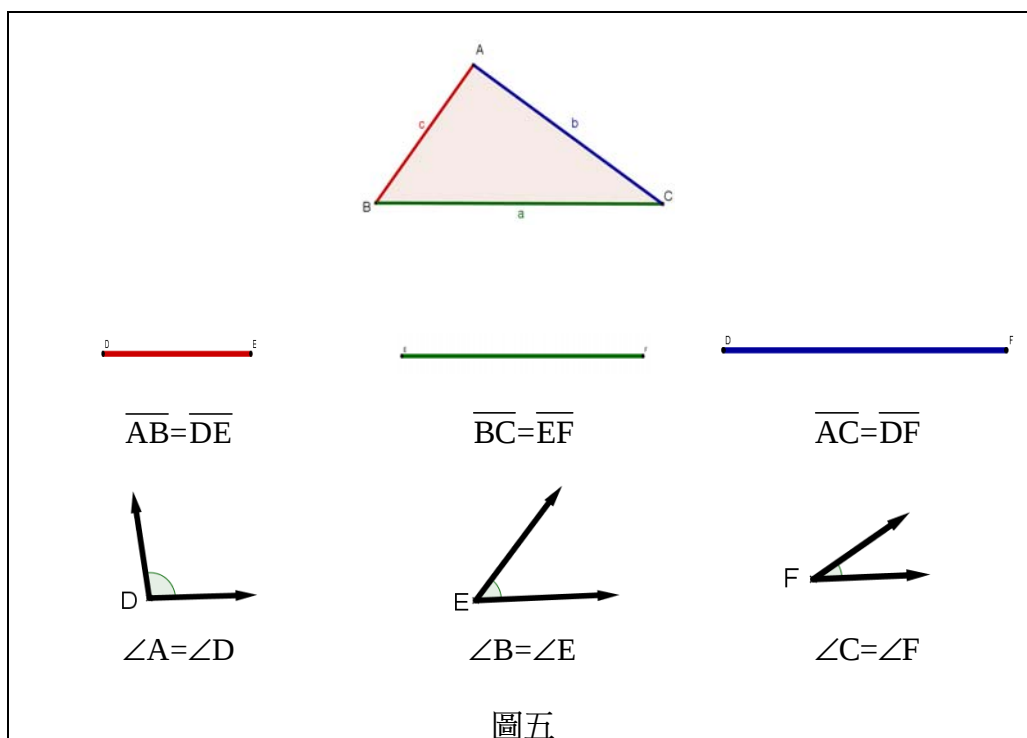


33. 學生：把它轉過來。
34. 老師：對了，把誰轉一下？把其中的一個轉一下位置，轉位置之後，你是不是看到一模一樣的地方？你就可以找到它的對應邊跟對應角，所以對應角跟對應邊這樣找，有沒有問題？
35. 學生：沒有。
36. 老師：沒有，好，現在老師稍微整理一下：你要知道，兩個三角形如果是全等的話，就是經過翻轉，然後還有疊合之後，它們會一模一樣；如果它疊合之後一模一樣，就會產生六個條件，也就是說，它的三個角，還有它的三個邊都會一模一樣，這樣有沒有問題？沒有。好，沒有的話，我們先來看一下，接下來我們來講一下全等的符號，因為「全等」我們都會用國字來形容，但是，數學上我們有一個符號專門來記錄「全等」這件事情。你可以看到，老師的講義上面最後面有寫一個上面像魚勾的形狀「 $\cong$ 」，然後下面有一個等於（=），這個是全等的符號。這個全等的符號是有意義的，上面這一個像魚勾的這個是「相似」的意思。老師問你，相似是什麼意思

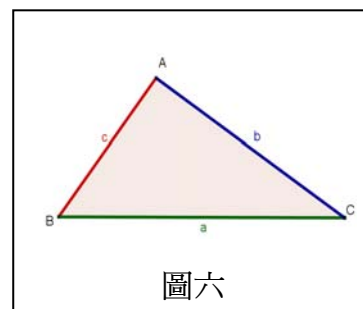
？你說這兩個人長得很像，一定是他們的臉的某些角度一樣，對不對？所以，如果兩個三角形相似的話，一定是它們什麼東西一樣？你覺得它們的大小會不會一樣？

37. 學生：一樣。

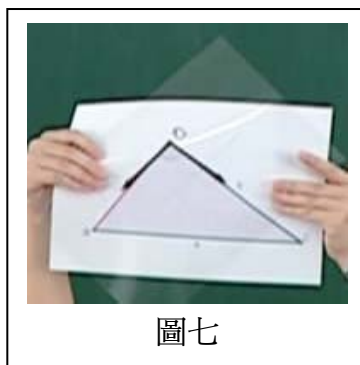
38. 老師：如果相似的話，你想一下，相似的話，它的大小會不會一樣？會嗎？還是不會？不會一樣啊？相似的意思就是說，它的樣子很像，可是可能會一個高、一個矮，對不對？所以，相似的意思就是說，兩個三角形的角度是一樣的，然後下面這一個是相等。所以，全等的符號就是說，它相似而且它又相等，所以它的符號才會有兩個合在一起。好，這個就是全等的記錄方式。你要記得，像剛剛左邊的那兩個大的三角形， $\triangle ABC$ 我們是不是都這樣寫？如果它跟 $\triangle DEF$ 全等的話，我們會這樣寫：這個 A 的對應角因為是 D，所以我 A 的位置會跟 D 的位置擺在一樣的地方；你看，B 是不是對著 E？所以，中間我會寫 B 跟 E，然後最後是 C 跟 F。所以，你在寫全等的時候，你的記錄方式一定要按照它對應的順序，這樣有沒有問題？好，不可以亂寫。你不可以寫 $\triangle BCA \cong \triangle DEF$ ？這樣不行，這樣就跟我們記錄的規則不太一樣了。這個是全等的符號，還有全等記錄的方式，所以，從介紹這個之後，老師都會用全等的符號來說明。這樣有沒有問題？沒有。好，沒有的話，老師接下來要進行一個活動，現在呢，每一組老師都會給一套圖卡，好，麻煩這個傳到後面。一組是一個，麻煩這個傳到後面，你把圖卡拿出來檢查一下，會有什麼東西呢？你看一下，會有一張空白的 A4 紙，總共會有七張，第一個是空白 A4 的紙，然後總共會有六張投影片，這六張投影片是什麼？（圖五）投影片如下：



老師把剛剛你空白 A4 的那個三角形的角，三個角跟三個邊，把它拆下來了。現在，老師要請問你一個問題，等一下你利用這個圖卡來找。我要問你的是，剛剛我們得到了一個結論，這兩個三角形如果要全等的話，要注意聽喔！這兩個三角形如果全等的話，你需要有六個條件要檢查，對不對？現在，你可不可以幫我找到比較少的條件，是不是我不需要六個，或許五個，或四個，或三個，或兩個條件，我就可以保證這兩個三角形全等？聽得懂老師的意思嗎？你這個圖卡你要怎麼用？譬如說，老師舉一個例子好了，老師這邊也有一套投影片。好，老師現在來說一下到底要怎麼用，譬如說，這一張（圖六）是你可以放在最下面的，現在我自己想，假如我只知道 $\angle A = \angle D$ ，我想一個條件或許就可以了吧！所以，我就把 $\angle D$ 的那個投影

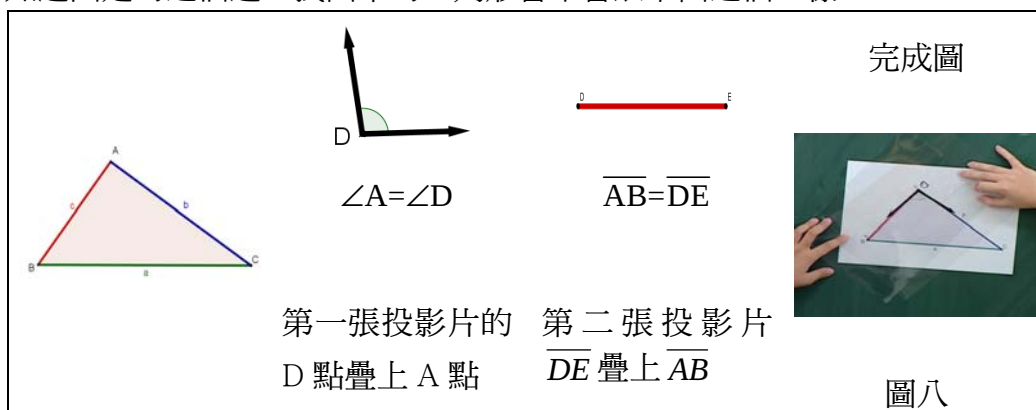


片拿出來， $\angle A$ 是不是在上面？然後，我把它疊在一起(圖七)，好，老師的那個角度($\angle D$)兩邊是不是有箭號，有箭號的意思是什麼？箭號的意思就是說，我的長度可以怎麼樣？伸縮。所以，不只是我畫的這個長度。老師問你，如果你只有知道這個角，這兩個角($\angle A = \angle D$)一樣的話，你疊在一起，我問你，這一個上面的投影片，你自己畫了一個新的三角形，會不會一定跟下面那個一樣？聽得懂老師的問題嗎？好，我再講一次，剛剛老師是不是說，不需要這六個條件，對不對？我要請你找找看到底幾個條件，要最少，這兩個三角形會全等？所以，老師就想，那一個條件可不可以？假如我知道 $\angle A$ 跟 $\angle D$ 一樣，我找一個跟 $\angle A$ 一樣大的角度，老師問你，我這樣畫下來，這樣疊在一起，如果我知道這個角度，也就是說，今天老師只知道這兩個角度一樣的話，我從這個角度出發，畫出來的三角形會不會一定就長得跟它一樣？你覺得會還是不會？我這兩邊的長度不是固定的。你覺得會不會？來，陳彥廷，為什麼不會？麻煩你，用你自己的話講。沒關係！為什麼你知道這兩個角一樣的話，不能確定你畫出來的三角形，這兩個會全等？對了，很好，老師剛剛畫的這兩個邊，它兩個邊可不可以伸長？可以啊！我可不可以畫長一點？如果我畫這樣，它的角度還是保持不變啊！我畫出來新的三角形，會不會跟它一樣？不會。所以我問你，只有一個條件的話，全等會不會成立？不會。好，現在麻煩你找，一個條件不行，兩個條件可不可以？我還是再找一個同學來幫老師示範一下好了，看你們是不是真的知道老師的意思是什麼？現在，老師要問一下，如果我知道 $\angle A = \angle D$ ，然後 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 的話，我現在知道這兩個



圖七

條件，可不可以確定這兩個三角形全等呢？我要請同學上來幫老師挑出可以的長度，好，有沒有人自願？沒有。來，蔡庭瑀，你上來幫老師，老師這邊還有一套，你自己在組裡面，也是跟老師一樣，把這兩個條件先挑出來，把這兩個條件的投影片挑出來，然後，把它疊在一起。好，蔡庭瑀，你放在黑板上給同學看。你看一下，她挑出來的這兩個是不是這樣？有沒有看到，她挑出兩張投影片，對不對？老師紅色的線，老師投影片上的線段，顏色跟原來的是一樣的，紅色的這一條它固定，如果你靠上去的話，就代表它們兩個等長，等長的意思可不可以伸縮？就不可以伸縮了，對不對？你看，我還有另外這個角一樣，老師問你，如果我知道這個角，還有知道固定的這個邊，找出來的三角形會不會跟下面這個一樣？

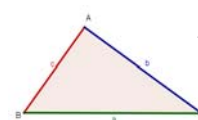
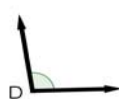


(圖八) 你要盡量想，可能還是不可能？會不會？不會，對不對？蔡庭瑀，你覺得呢，會不會？不會，為什麼？你告訴老師原因。對。她說什麼？你再講大聲一點。因為下面綠色那一條線 $\overline{BC}$ 可以怎麼樣？再延長啊！因為它這一條沒有被固定住，所以它是不是可以一直延長？然後這一個邊，這個邊可不可以延長？可不可以？可以。所以這樣是不是就不確定你畫出來的三角形跟它一樣，這樣子會不會找了？會。好，謝謝你，蔡庭瑀，現在你們各組之內可以用這個投影片討論一下，你可以看到，老師希望你寫出

來的是什麼？可以確定全等的條件。所以，你們要先討論的有兩件事情：第一件事情就是說，我最少要幾個？先討論出來，討論出來之後，你把那些條件的名稱寫下來，譬如說， $\angle A = \angle D$ ， $\overline{AB} = \overline{DE}$ ，把它寫下來，寫在哪裡？寫在第二張學習單跟第三張學習單空白的地方，有沒有？第二張下面只剩一點點空位，然後第三張上面有比較大的空位，把你們這一組整理的寫下來。好，老師讓你們討論十分鐘，有問題可以舉手。麻煩各組的組長帶一下討論，在你將條件拿出來後疊在 $\triangle ABC$ 上時，要盡量想到怎樣的條件搭配（幾個邊？幾個角？哪些邊？哪些角？），無法形成與 $\triangle ABC$ 全等的三角形。另外如果要使用角的條件時，必須注意投影片上角的兩邊是有箭號的，箭號的意思就是代表它可以任意的延長，所以，你可以自己在圖上畫一下，如果它可以延長的話，邊長就不是固定的。看不到討論的同學，你可以稍微站起來看一下。

（以下第 39 到第 84 為老師在組間巡視時解釋做法的對話。）

39. 老師：知道老師的意思嗎？來，剛剛老師不是只有一個角嗎？你看，剛剛老師說 $\angle D = \angle A$ ，對不對？這樣你看得到嗎？如果這樣的話，老師這兩條是不是箭號，對不對？所以如果我只知道它們這兩個角一樣的話（ $\angle D = \angle A$ ），可不可以確定 $\angle D$ 的兩邊畫出來的E跟F一定在B跟C這兩點？（因為 $\angle D = \angle A$ 的條件就是將 $\angle D$ 的圖卡疊在 $\angle A$ 上，但因為 $\angle D$ 的兩邊是射線，所以長度是可以延長的），不確定嘛！因為我可以延長，還是維持這個角一樣啊！所以我只有一個角度，對，它有兩個，很好，你說兩個的話，對，這樣子是不是還不行？為什麼不行？老師弄給你看，我如果找延長，可不可以？



40. 學生：可以這樣嗎？
41. 老師：當然可以啊！線段末端有箭號的意思就是這條線的長度可以任意延長且為不固定長度的。
42. 學生：那就三個吧！
43. 老師：好，那就三個。好，三個，我們來看一下，顛倒了。你看一下，這樣可以嗎？你這樣感覺好像可以，對不對？
44. 學生：好，那就是六個。
45. 老師：好，延長，可以嗎？
46. 學生：那就六個了。
47. 老師：六個！六個就太多了，老師希望你可以刪掉幾個。
48. 學生：那就五個。
49. 老師：所以，你角要配邊，角要配邊會找到最少。你剛剛這邊是因為你的這邊不固定，對不對？所以，你可不可以把這兩個邊固定？我們從頭來，剛剛這個是不是它不固定？好，所以你看，老師現在這個 $\overline{DE}$ 下去了，它固定了，還有誰要固定？
50. 學生：這個。
51. 老師：對，那我問你，這樣子三角形，有沒有確定一定要這樣子了？
52. 學生：有。
53. 老師：它的 E 一定要碰到這邊，C 是不是一定要到了 D 這裡。
54. 學生：那這樣還要這個嗎？
55. 老師：就不用啦！因為這條 B 已經跑出來啦！所以，這一個是兩個邊配一個角，所以幾個條件？
56. 學生：三個。

57. 老師：對，那你再找，還有。
58. 學生：還有什麼。
59. 老師：還有啊！三個條件，還有其他的啊！其他的組合，對不對？你可以…。
60. 學生：是角不一樣嗎？你的意思是說，是不是不一定是一個角、兩個邊？
61. 老師：對，沒錯。有的同學在用角的時候，角要移動喔！因為你的角是箭號，所以角是可以伸長跟縮短的。你要想，怎麼樣讓你的邊固定？你如果要讓你的邊固定的話，是不是要找一個固定的邊，相等的邊？
62. 學生：老師，是這樣嗎？
63. 老師：對，你這樣是一組嗎？這樣是一組，好。
64. 學生：可是它不能確定角都可以這樣嗎？
65. 老師：你要確定你們懂意思。
66. 學生：我有講了。
67. 老師：你有講，你看只有這兩個可以嗎？只有這兩個角一樣，可以嗎？為什麼不行？
68. 學生：因為這個延伸。
69. 老師：你看，老師把它打開就好了，我這邊張開來，它是不是角又是一樣？我這邊畫出來是不是一個更大的三角形？又跟它不一樣了。如果三個角可以呢，你覺得呢？如果三個角一樣，你們另外那個角借我，我問你，這樣三個角都一樣可以嗎？為什麼不可以？對啦！因為它這邊，這樣對啊！這樣是不是就不一樣了，對不對？因為這兩個不固定，所以你要找邊。好，再繼續把它找完。最好找越多越好喔！這邊知道老師的意思嗎？你不是只找一組就休息了，還有蠻多組的。這邊有沒有問題？沒有問題。好，你們怎麼找的？先頂，然後，可以伸縮就要伸縮，是不是這樣找？對。那我問你，

如果三個角一樣的話，可以嗎？為什麼？你第三個角借我，為什麼不知道。你看，這三個角一樣啊！為什麼不行呢？這個有啊！可是老師畫得有一點偏而已，來，這樣可以嗎？不可以吧！為什麼？我這是箭號耶！我可不可以拉開(圖九)？可不可以拉開？我拉開的話，跟原來這三角形有一樣嗎？角度一樣，可是它的邊是不是不一樣，對不對？好，所以



圖九

這樣就不行，你要找一個邊去配合它。可是邊跟角的組合不一定只有一種，所以你們要把所有的都找出來。這樣會不會？找越多越好，你可以想一下。剛剛同學都有發現一個地方，就是好像都只有角不行，一定要邊去卡住它，對不對？所以，你可以想一想，我如果有一個邊或兩個邊或三個邊，可不可以？然後，也有人找到比較少的條件，有的人找到比較多的條件，你要想一下，那個多的你可不可以考慮一下，把一個拿掉或把兩個拿掉，是不是你的條件還是可以成立？好，怎麼了，你覺得三個邊固定了，會不會伸縮？

70. 學生：不會。

71. 老師：不會啊？

72. 學生：對嘛，我就說這個可以嘛！

73. 老師：老師告訴你，如果你伸縮的話，邊長會不會改變？

74. 學生：會啊！

75. 老師：會啊！你這邊是不是要延長？所以，你原來那個條件就破壞掉了。可是，剛剛角為什麼可以伸縮？因為角的兩邊可以延長。你伸縮它會破壞它的角

度嗎？不會啊！對不對？好，所以這個答案就可以了。但是你要把它的名稱寫下來。你們寫出來的要編號，總共幾個？對，總共幾個？你們要把寫出來的結果總共幾個，把它編個號碼。你們都比較完了嗎？對完了嗎？要寫上它的名稱喔！你們找的條件，譬如說，要寫 $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ，還是什麼，要寫出來，因為我等一下要請你們上去寫是寫這個，不是寫 A 跟 S，對！等一下我是要請你們上去寫的是寫名稱，不是寫 A 跟 S 喔！是寫名稱，譬如說，角誰等於角誰，然後什麼邊等於什麼邊。把你們寫出來的結果編號。對，就像你們這樣寫出它的名稱。把你們那一組寫的寫在黑板上，對，想越多越好。你想啊！兩個可不可以？兩個你要找誰跟誰，這一個對不對？還有誰？兩個邊，來，再一個邊借我，這樣兩個邊可以嗎？可以吧！好，你注意看，這樣可以嗎？它還是兩個邊啊！所以，你們不要被那個原來的媽媽騙了。

76. 學生：如果這個 S A S 的話，這是要三個角都寫？
77. 老師：當然。不一定，隨便你們，如果可以，當然盡量寫啊！因為我各組都會請人上去，而且上去要用這個，不是只有講完而已。老師問你們，兩個邊可以嗎？為什麼？你比給我看，不是，我會叫你們說。好，你找兩個邊。
78. 學生：如果這兩個這樣的話。
79. 老師：好，對了，很好。對，沒錯。好，這樣就 OK 了。
80. 學生：老師，這是寫上面這個名稱嗎？
81. 老師：對，寫上面的名稱你不要被原來那個空白的投影片影響，你的投影片要可以轉、可以伸縮、可以變位置，如果是長度一樣的話，當然不能伸縮。我說可以動的是投影片，所以你們想一下，怎麼樣才可以被卡住、確定？到底有幾組？天曉得耶！不曉得，我先問你們，兩個邊可以嗎？兩個邊可以，

你兩個邊借我，好，兩個邊可以，對不對？所以我說，你不要被影響，兩個邊而已啊？你不可以再加這個，這個可以嗎？這樣可以嗎？你幫我一下，為什麼不行？對啦！就是你的投影片要動，你不要被你這個影響。所以，你想想看，怎麼樣它的邊才不可以動呢？所以要什麼東西卡住它？對了，這樣是不是就可以了？好，你們都寫的差不多了嗎？寫好了嗎？

82. 學生：我找到很多耶！

83. 老師：找到很多喔！很好，它的條件有很多，你可以寫很多出來。等一下我會請每一組都上來寫。好，我們看哪一組寫的最多，然後要對的。你們還需要多久時間？

84. 學生：老師，再 5 分鐘。

85. 老師：再5分鐘？不會吧！好，再3分鐘，找越多越好。等一下上來寫的時候，你把你找的那個組別編號一下。譬如說，第一組是什麼，第二組是什麼。你要找到怎麼樣搭配，譬如說，幾個邊跟幾個角搭配，可是你那個角跟邊可以換位置，這樣是不是又多了好幾組？這樣聽得懂老師的意思嗎？好，現在請各組推派一個代表，你們要一組一個人寫一個也可以。

86. 老師：現在上來，在你們的組別，不要寫到其他組，把你找的條件寫下來。好，現在可以上來寫。第四組首先上來，可以先加分。不要寫到其他組的位置。吳新傑，你字小一點，不要侵占其他組的位置。你也可以從下面開始寫啊！請你們把寫出來的編號一下，這樣老師才知道哪一組寫最多。好，游竣翔，你還有嗎？第三組如果還有的話，寫到這兒來。如果你們組要補充的，可以上去補充。然後，等一下寫同學，老師要請你把你的圖卡拿出來，稍微解釋一下。好，第二組寫到九個啊？等一下下面的同學你要準備，不一定是寫的人上來講喔！我會挑你們那一組討論特別認真的上來講，

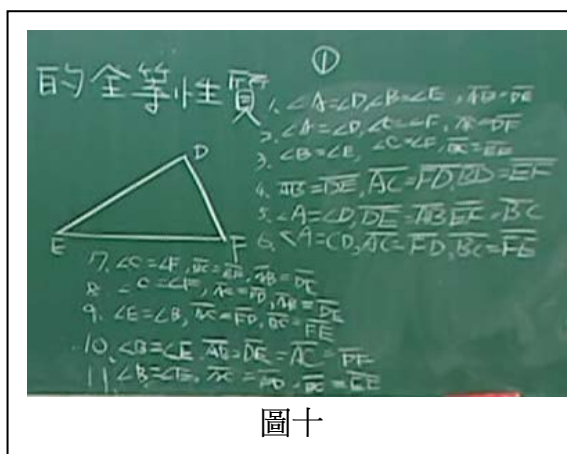
所以你要看一下你們這一組寫的是什麼，不要等一下上來講，你講的跟你們組寫的不一樣。第一組找到11個，還有嗎？吳新傑，在請第一組上來講之前，老師要先問你，老師剛剛是不是請你想兩個問題？第一個問題是：它的最少的條件是幾個？本來是幾個？

87. 新傑：六個。

88. 老師：六個，那你找到的是幾個？

89. 新傑：三個。

90. 老師：大家都是找三個條件嗎？都三個，兩個不行，對不對？太少了。有沒有人本來找四個的？有沒有人找四個的，有嗎？本來你找四個的？都沒有，一下都找到三個，因為你們從條件比較少的個數開始找，對不對？好，現在從第一組開始，來，你幫老師講一下，如果同一類的，什麼叫同一類，老師等一下會解釋。等一下，你這些答案要分類，什麼叫分類？就是你按照它邊跟角的位置稍微分類一下，其實你會發現有好幾個都是同一種。先請第一組來講一下，他找出了這 11 個(圖十)，怎麼找的？好，蔡庭瑤，麻煩你，然後誰來幫她？你先告訴老師，你們的第一組 $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$



圖十

， $\overline{AB} = \overline{DE}$ ，這一個為什麼它可以說「三角形全等」？為什麼它那個造出來的三角形會一模一樣？

91. 庭瑤：因為…。

92. 老師：後面的同學看得到嗎？請你幫她扶這個，幫她扶著、夾好。好，來，那你

告訴大家，為什麼你挑了三個條件是 $\angle A = \angle D$ ，對不對？還有呢， $\angle B = \angle E$ ，就是這兩個角一樣，還有哪一個邊？

93. 庭瑀：DF 等於 A。

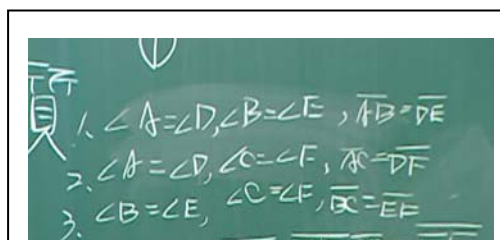
94. 老師：DF 等於 A，好像不對唷！你找的是 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 耶！好，拿錯了，換一個 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ，你看 $\overline{AB}$ 是什麼顏色的？紅色的，紅色的在這裡，這一個。好，你手先離開，來，你拿著吧！你說明一下。同學，你們有沒有找到這一組 $\angle A = \angle D$ ？對不對？再來呢？

95. 庭瑀： $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ，然後 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\angle A$ 和 $\angle B$ 的另外一邊會交在 C。

96. 老師：一定會交在 C 嗎？為什麼一定會交到那邊？因為它角度固定了，對不對？那我問你，這兩個角可以伸縮嗎？可以張開嗎？

97. 庭瑀：不可以。

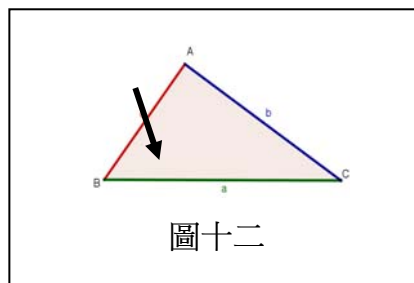
98. 老師：不可以，為什麼？對了，因為 $\overline{DE}$ 這一條邊固定了。好，同學要注意看前面，因為這個 $\overline{DE}$ 固定了，對不對？讓這兩個角可不可以伸縮？不可以，它這兩個角的位置一定要在這裡。



圖十一

，它們這兩個邊如果延長的話，是不是一一定會交在 C 點，對不對？好，這是她的第一個。然後，第二跟第三是不是一樣？你第二個是什麼？來，同學看一下，你跟大家講一下（圖十一）。

99. 庭瑀：跟剛剛的一樣，就是 $\overline{DF}$ 在那個 $\overline{AC}$ 的位置，然後 $\angle F$ 跟 $\angle D$ 的另一邊延長，然後就交在 $\angle B$ 這個地方（圖十二）。



圖十二

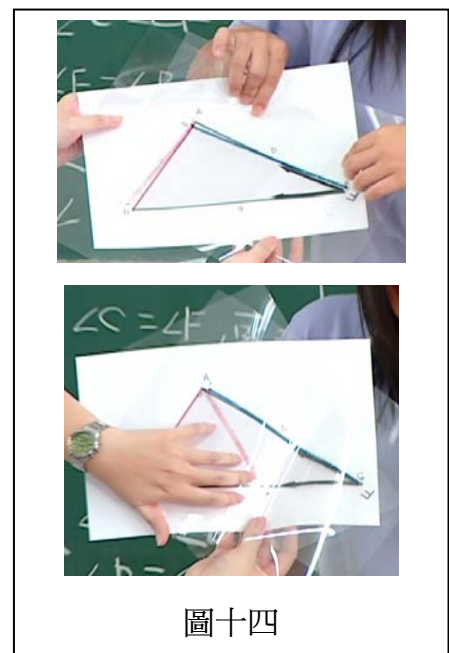
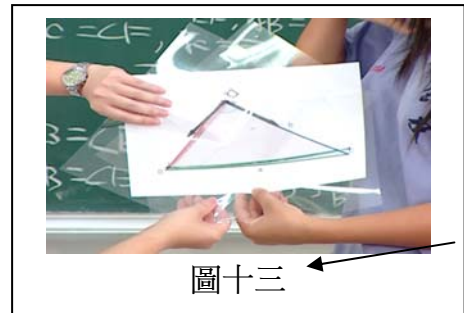
100. 老師：好。所以她現在改變了角跟邊，對不對？老師問你，這兩個你會覺得它是同一類，對不對？為什麼它是同一類？因為它的位置都是怎麼樣？都是兩個角，然後那個邊的位置要特別嗎？還是隨便的邊，兩個角、一邊？所以，你的意思是說，那個邊應該在這兩個角的哪裡？是不是要卡在那兩個角的裡面，中間的地方，對不對？再來，老師比較好奇的是，你的第四個，不是第四個，我看一下，第五個($\angle A = \angle D$ ， $\overline{DE} = \overline{AB}$ ， $\overline{EF} = \overline{BC}$)你們有沒有找到他們的第五個？有沒有找到跟她第五個一樣的，有沒有？

101. 庭瑀：兩個邊跟一個角。

102. 老師：好，你的兩個邊是：一個是綠色的 ($\overline{BC} = \overline{EF}$)，一個是紅色的 ($\overline{AB} = \overline{DE}$)，

所以它兩個邊是相鄰的，對不對？然後，你那個角偏過去一點。好，所以他找的是兩個邊跟一個角，對不對？為什麼這個 (圖十三) 可以確定？這個 $\angle D$ 的另一邊延長的話會剛好交在 C 點，對不對？你看一下，他的第五跟第六是不是很像？都是兩個邊是相鄰的，然後再接著一個角，對不對？好，你再幫老師找第七個($\angle C$ 跟 $\angle F$ ， $\overline{AC}$ 跟 $\overline{FD}$ ， $\overline{AB}$ 跟 $\overline{DE}$) (圖十四)，好，你找的是這樣，對不對？你跟同學講一下，跟剛剛那個是不是一樣？

103. 庭瑀：對。



104. 老師：是不是同一類的？你們看一下，哪幾個？你再解釋一次給同學聽。

105. 庭瑤：兩個邊跟一個角。

106. 老師：好，兩個邊跟一個角，這兩個邊是相鄰的，然後再加一個角，對不對？後面看得到嗎？你們有沒有找到這一組？有找到這一組的舉手。有沒有找到這一組，有。有的人有找到，對不對？好，這一組的話，老師問你，你這個邊（ $\overline{AC}=\overline{DF}$ 、 $\overline{AB}=\overline{DE}$ ）跟角（ $\angle C$ 跟 $\angle F$ ）有沒有辦法固定？你這個角跟這個邊固定了，對不對？現在你看一下，老師要動這個紅色的（ $\overline{AB}=\overline{DE}$ ），如果我把它搬到，來，你手放開，老師如果這樣做的話，它的三角形有沒有不一樣？有沒有不一樣？它有沒有保持說它兩個邊一樣，然後這個角也一樣？老師再做一次，剛剛她是不是說這樣？老師拿就好了，剛剛她是不是說這樣子？它是藍色跟紅色，你看你自己的圖卡，還有最小的這個角，對不對，有沒有發現？然後她說，這一個的話也可以全等。你有沒有發現它有可能不會全等？怎麼做它不會全等？哪一個邊會被移動，誰沒有被固定？你有沒有發現上面這兩個邊夾在一起的那個角怎麼樣，角度有沒有被我固定住？沒有，所以這個紅色我可以動，我可以怎麼動？我可以動到這邊來，我動到這邊來可以嗎？可不可以？這樣它兩個造型有沒有全等？沒有了。所以這一個條件可不可以？不可以。可是剛剛她找到有同一類的，都是兩個邊跟一個角，對不對？你有沒有發現她剛剛找的，剛剛老師請她找 5 跟 6，還有 7 跟 8，為什麼老師叫她找 7 跟 5 這兩個？你有沒有發現，這一個 5 可以，對不對？這一個同樣是兩個隔壁的邊跟一個隔壁的角，然後這一個 7 就不行。如果它有一個狀況不行的話，我可不可以說它全等？不行，對不對？你有沒有發現，為什麼這個不行？你現在看一下，老師把我的那個圖再重新畫好了，謝謝你，這一個，這個不行。來

，蔡庭瑤，你把你的問題跟同學再講一下。她說應該是有才對。好，你再講一次給同學聽。(圖十五)

107. 學生：如果我把這個移過來這邊的話，就沒有一樣了，然後這個 $\angle B$ 角度就改變了。

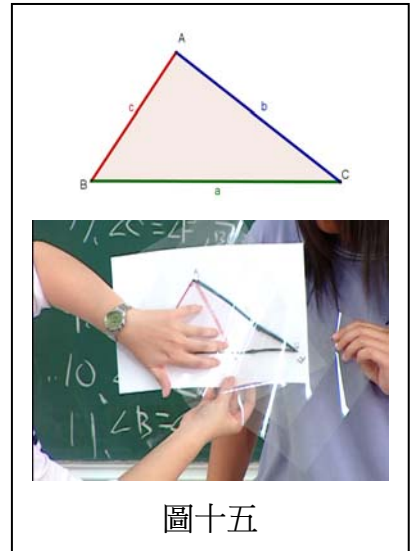
108. 老師：好，她的意思是這樣子，本來是不是這樣(圖十六)，對不對？同學，你可以看到是這樣，對不對？你把自己的圖卡拿出來比一下

，本來應該是這樣子要全等，她的意思是說，這一個紅色的邊($\overline{AB}=\overline{DE}$)，如果老師移動的話，移動一下位置，它就不會一樣了，這要過來一點點。你的意思是不是這樣子？

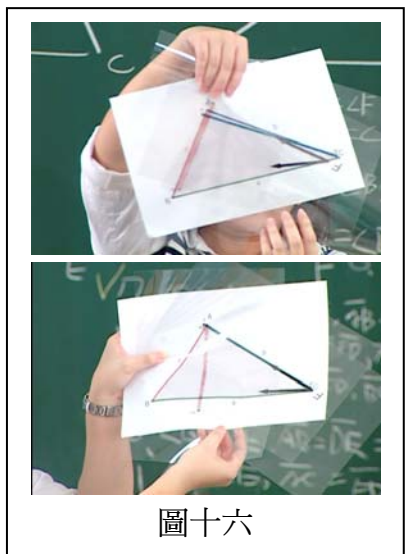
她的意思是說，如果老師變動這個(圖十七)的話，這樣就不會一樣了。來，有沒有同學可以跟老師講，這個紅色的邊($\overline{AB}=\overline{DE}$)

，我可以再怎麼樣動它就一樣，而且卡到綠色的邊($\overline{BC}=\overline{EF}$)？游子瑩，你幫老師搬一下，怎麼動？你上來幫老師移一下，我需要你的幫忙。蔡庭瑤順便看一下，剛剛蔡庭瑤是說，如果老師這邊動的話，是不是就不一樣了？好，你這個怎麼動？這樣子會不會

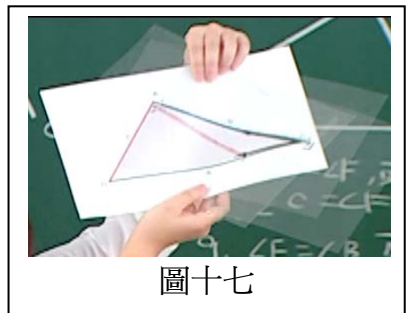
卡到綠色的($\overline{BC}=\overline{EF}$)？會不會，你把它往右邊轉的話，會不會卡到綠色的($\overline{BC}=\overline{EF}$)？就會了。所以它這個紅色的邊($\overline{AB}=\overline{DE}$)會怎麼樣？可



圖十五

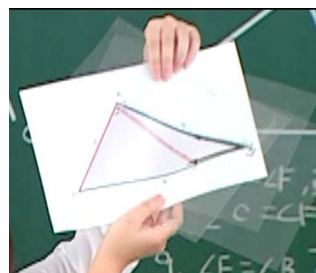
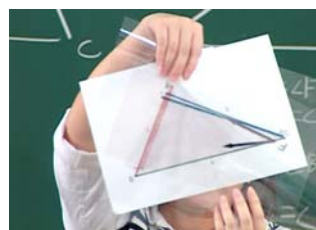


圖十六



圖十七

不可以固定？你看一下原來那個圖形，有沒有確定要擺在這個位置？沒有，因為你這一個角沒有固定（因為沒有 $\angle A = \angle D$ 的條件，所以 $\angle A$ 的角度是可以任意放大或縮小的），所以你可以搬到這邊，蔡庭瑀，你看到了嗎？所以，這個邊可以被搬到這裡，它就變成一個，你看一下下面的那個三角形（圖十八），它的條件跟原來三角形一樣，這邊一樣長，紅色跟紅色一樣長，然後這個角也一樣，可是它們兩個角長得有一樣嗎？沒有一樣，對不對？可是，為什麼這個第 7 個就不行啦？你再幫老師看，第 8 個可不可以？第 7 跟第 8 是一樣的，對不對？你看一下第 8 個可不可以？把你們的圖卡拿出來。好，蔡庭瑀，謝謝你們，你們先回去。同學，把你們的圖卡拿出來，我找同學上來做第 8 個，你覺得可不可以？第 8 個，你把你的圖卡拿出來對一下。第 7 跟第 8 一樣，對不對？好，它都是兩個相隔的邊，跟另外一個相隔的角，剛剛他們找



圖十八

的是第 8，現在老師要問你第 7 可不可以？有沒有人要自願上來說？吳佳珉，你上來說說看好了，你需不需要有人幫忙？

109. 佳珉：需要。

110. 老師：好，王渝評，你上來幫她，第 7 個($\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ 、 $\angle C = \angle F$)。

111. 佳珉： $\angle C$ 跟 $\angle F$ 。

112. 老師：你覺得可以，是不是？

113. 佳珉：延伸過來碰到 A。

114. 老師：延伸過來碰到 A，然後，大聲一點。

115. 佳珉：因為這個剛好頂在這個角，它不管怎麼移動，它就是對不到啊！所以它可能就在這裡。

116. 老師：那這一個角 $\angle B$ （圖十九）有沒有固定？

117. 佳珉：沒有。

118. 老師：沒有固定，可不可以動？

119. 佳珉：可以，所以它這個線 $\overline{AB}=\overline{DE}$ 往左邊移，然後 $\angle F$ 的另一邊就會延長而超過 $\overline{AC}$ 的長度了。

120. 老師：可以怎麼樣動？

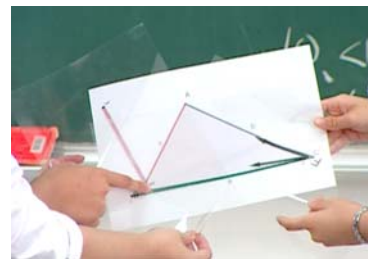
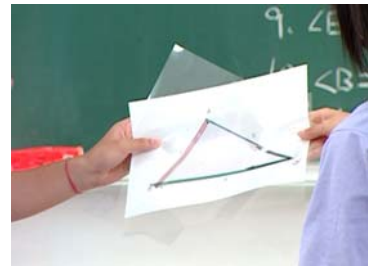
121. 佳珉：就是突然間往這邊移，因為那個是伸長的，這個角固定，所以它也可以往這邊延伸過來，就不一樣了。

122. 老師：好，所以我問你，它有沒有辦法保證全等？

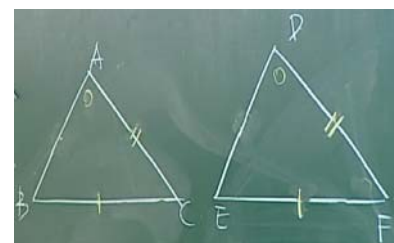
123. 佳珉：沒有。

124. 老師：有沒有辦法？這一個也不行，對不對？好，謝謝你。對了，再回來，這一個($\angle A=\angle D$ ， $\overline{DE}=\overline{AB}$ ， $\overline{EF}=\overline{BC}$)是可以的，對不對？這一個是可以的，我問你，你現在幫老師檢查第六個，還是一樣，我要請

一個上來講第六個可不可以($\angle A=\angle D$ 、 $\overline{AC}=\overline{DF}$ 、 $\overline{BC}=\overline{EF}$)，好了嗎？有沒有哪一組要上來講？沒有，老師請黃佳媛，你會不會？好，王渝評，你要上來講是不是？來，那王渝評跟吳新傑再上來，同學，你要看一下她怎麼講的，上來改一下他們這組的答案。第六個為什麼不行？這個可不可



圖十九



圖二十

以，第六個？好，你覺得這個可以嗎？（圖二十）

125. 學生：不行。

126. 老師：不行的原因是什麼？同學來看一下，為什麼不行？這個可不可以？老師要問你，老師畫在黑板(圖二十)，如果你這個看不清楚的話，兩個邊跟剛剛一樣的位置，兩個鄰邊跟一個角，你覺得它可不可以保證全等？

127. 學生：不可以。

128. 老師：你看一下，它的這個角($\angle C$)沒有被我固定，對不對？那它可不可以動？

129. 學生：可以。

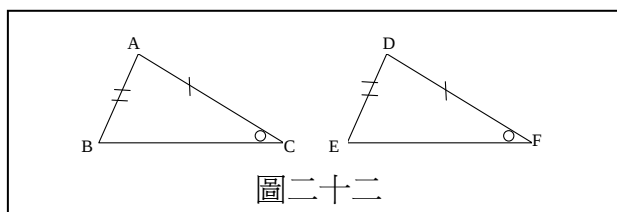
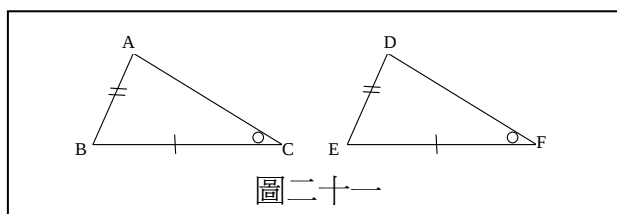
130. 老師：可以動，好，綠色的($\overline{BC}=\overline{EF}$)你動了之後，老師要問你，你這邊畫過來，一定會畫在 E 點嗎？（圖二十）

131. 學生：不會。

132. 老師：不會，你的這個線段就有沒有保證一樣長？沒有。沒有的話，你這個條件是不是就把它破壞掉？你就沒有用到這個條件了。所以，我這個條件一定要成立，你可不可以讓它不要加在這個點？不行，所以老師問你，這樣子可以嗎？

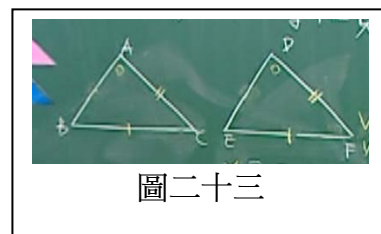
133. 學生：可以。

134. 老師：可以，對，它可以，那你會覺得很奇怪。好，謝謝你，先拿回去。老師問你，為什麼這一個可以，5跟6可以（圖二十），7跟8就不行？老師把7跟8的，我挑其中

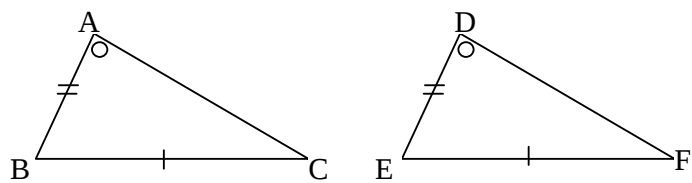


一個畫給你看，我用紅色的，剛剛的7跟8是這樣，你看一下，剛剛的7(

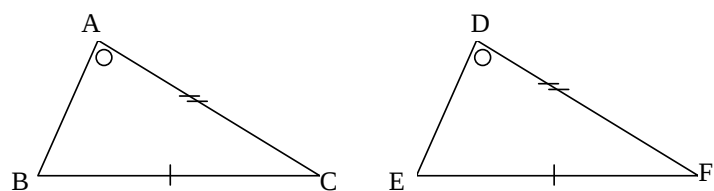
$\angle C = \angle F$, $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$)是這個角跟這兩個邊搭配 (圖二十一) , $\angle$ 8是這個角跟這兩個邊搭配($\angle C = \angle F$, $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$) (圖二十二) , 對不對? 然後, 5($\angle A = \angle D$, $\overline{DE} = \overline{AB}$, $\overline{EF} = \overline{BC}$)跟6($\angle A = \angle D$, $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$)是這個角跟這兩個邊搭配 (圖二十) , 為什麼黃色可以, 粉紅色不行? 你覺得它們的差別在哪裡? 這樣你可能看不太清楚, 老師再重新畫一個, 好像有一些同學看不太清楚, 我畫在它的下面。剛剛是這樣 (圖二十一) , 這樣不行, 對不對? 你還記不記得, 剛剛老師是不是把這個邊怎麼樣? 往這邊畫, 這兩個邊是不是就一樣, 就跑出一個跟它長得不一樣的, 對不對? 為什麼這一個兩個鄰邊跟一個角, 這個 (圖二十一) 就不行了, 為什麼這個黃色就可以 (圖二十)? 為什麼它可以? 它們兩個差別在哪裡? 剛剛我們也有選這兩個, 因為7跟8也有一個是在哪邊? 老師挑跟它一樣位置好了, 是不是有挑在這邊, 這兩個或這兩個? 你發現都不行, 對不對? 這一個5跟6的話, 這兩個 (圖二十三) 跟這兩個跟這個角搭配都不行, 我問你, 你看, 我的邊改了之後 $\overline{AB}$ 向右移, 這邊 (圖二十四) 還是不行, 這邊 (圖二十三) 還是可以, 所以那個關鍵是在角還是邊? 剛剛5跟6, 老師挑這兩個或者是挑這兩個, 都是相隔的兩個邊跟一個角, 對不對? 你發現都可以成立是全等, 可是7跟8, 我挑了這兩個邊或這兩個邊, 跟這個角搭配都不全等。我邊已經做了轉換, 可是我的角沒有變, 所以你覺得錯的是角還是邊? 關鍵是角還是邊? 我邊都動了, 所以你的關鍵是誰?



圖二十三

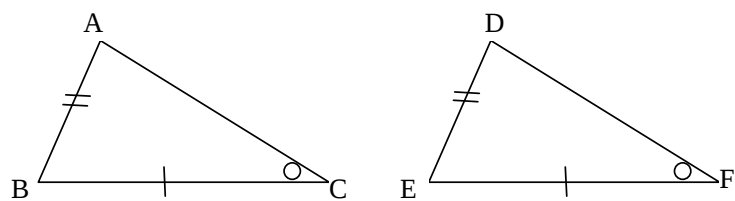


第五條列出條件

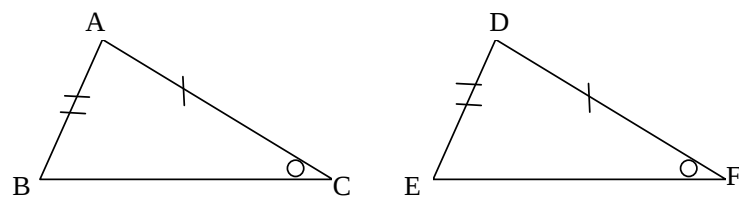


第六條列出條件

以上所列出的兩個條件能使兩個三角形全等(因為對應角選的是較大的角)



第七條列出條件



第八條列出條件

以上所列出的兩個條件**不能**使兩個三角形全等(因為對應角選的是較小的角)

圖二十四

135. 學生：角。

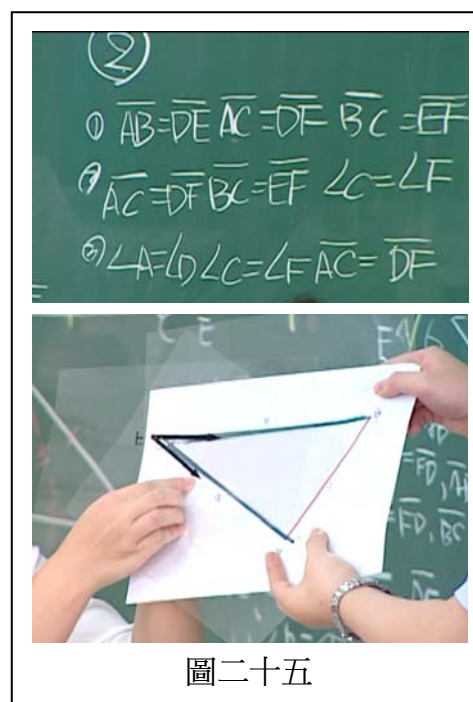
136. 老師：角。你有沒有發現，不行的那個角是三角形裡面最怎樣的角？你看一下，我選粉紅色那個角，你大約看一下，它是那個三角形裡面最怎樣的角？對，最小的角。所以，當你找的兩個相隔的邊，跟一個角的位置，當你找的那個角是最小的角的時候，它就沒有辦法成立。原因是它對面這個，因為你看，這個角對過來這個邊一定是最小的，對不對？它那個最小的邊可以被移動，所以它這個角不固定，而且它移動之後一定會交在這個邊，所以找最小的角，它就不會成立，這樣知道了嗎？所以整體來說，這個 5 跟 6、7 跟 8，它們是屬於同一個類型的組合，可是只要有一個不行，我們就可不可以說它可以全等？就不能全等了。剛剛是第一組，再來老師要請第二組。第二組，已經決定好代表了吧！來，麻煩你上來講一下。你寫了九個，對不對？有沒有辦法同一類的講一個？你先講第一個好了，請上來，第一個，你的第一個是 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ，所以這是三個邊，對不對？現在你解釋給同學聽，為什麼它可以？

137. 學生：因為它對上後，每個角都固定，都不能再移動了。

138. 老師：同學，你們是不是有找到這一組？有沒有找到這一組，有聽清楚嗎？好，再講一次，鄒蕙禪。

139. 蕙禪：因為它邊上每一個邊都對到了，所以每一個角都固定了，不能再移動。

140. 老師：她的意思就是說，這三個邊如果邊長



圖二十五

固定的話，它卡住的角會不會動？不會動。有找到這一個三個邊一樣長的這個條件的舉手？幾乎都找到，只有一組沒找到，好，很好。所以這個當然就是可以了，三個邊。那我問你，這個三個邊的組合會有幾種？是不是就只有這三個邊，所以就只有一種，所以只能寫一個，對不對？再來，第二個是什麼($\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ， $\angle C = \angle F$) (圖二十五)？你找的是幾個邊？

141. 蕙禪：兩個邊。

142. 老師：好，兩個邊還有幾個角？

143. 蕙禪：一個角。

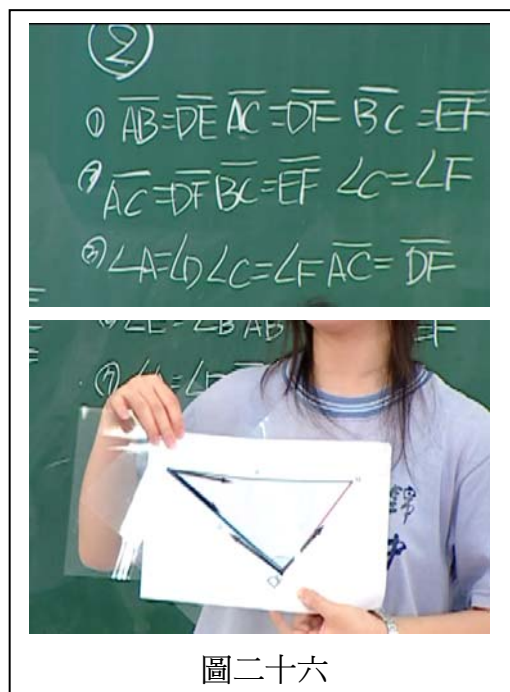
144. 老師：一個角。好，她找了兩個邊跟一個角，你看一下，這樣為什麼它一定可以確定？

145. 蕙禪：因為它的兩邊的角固定了。

146. 老師：這個角固定，所以這個角不能伸縮，對不對？然後邊長也固定，所以它的這兩個，你看一下，它的這兩個邊已經固定了，所以這個角可不可以伸縮？不可以伸縮。所以那兩個邊的交點是不是一定會在 B 跟 A，對不對？會

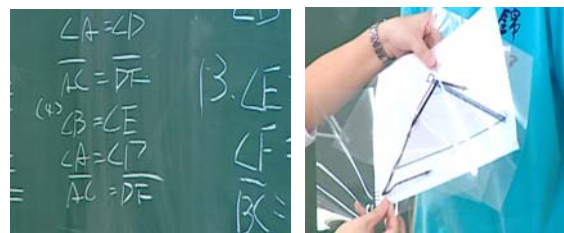
不會可能再伸長？不會再伸長了。那你有沒有發現，它邊跟角的位置很特殊，它的那個角在哪裡？它的角在兩個邊的哪裡？中間還是隔壁？對，在中間。再來，第三個呢？第三個 (圖二十六) 你找的是什麼？

147. 蕙禪：兩個角和一個邊。



圖二十六

148. 老師：這個跟第一組找的有沒有一樣？有沒有？有，所以道理是一樣的，對不對？兩個角如果它中間那個被卡住的話，它是不是另外這個邊一定會交到這個點，對不對？所以，它這一類是跟第一組是一樣的，好，謝謝你。所以，第二組找到了兩個新的。我們現在來稍微整理一下，第一個是兩個夾角，兩個夾角跟一個夾邊；然後，第二組找到了新的一個是三個邊，那它的第二個是什麼？兩個邊跟它的夾角，現在已經找到三類，而且條件都是三個，讓它可以怎麼樣？全等。我們再請第三組，第三組有沒有跟這三類不一樣的？第三組在哪裡？第三組誰要上來說？如果沒有找出新的一類的話，你可以找重複的講也可以。好，你們要講哪一個？都可以啊！你們



圖二十七

挑，你們自己選一個，好，你們講第(4)個好了，你們的第(4)個，你找的是怎樣？來，跟同學講，你找幾個角？大聲一點，幾個角？（圖二十七）

149. 奕志：兩個角。

150. 老師：兩個角跟？

151. 奕志：一個邊。

152. 老師：一個邊。你的位置好像跟人家不太一樣，對不對？剛剛我們找到第一組跟第二組有的是，也是兩個角，然後它其中的一個邊在那兩個角的哪裡？中間，對不對？他們這一組找到的邊在哪裡？有在它們中間嗎？沒有，對不對？在哪裡？在哪邊？在隔壁，為什麼這一個會全等？

153. 奕志：因為 $\angle A$ 固定了。

154. 老師： $\angle A$ 固定住了嗎？它有一邊可以延長耶！怎麼辦？來，陳奕志，你看一下

，剛剛他找的是這樣，這兩個角，對不對？所以老師跟他講，這個角可以延長，你的角可以延長啊！你再講大聲一點。

155. 奕志：因為角延長的話就連到 C 了。

156. 老師：為什麼我一定要連到 C？對，因為他是不是說，這個 C 點一定要在這裡，對不對？所以這個角可不可以延長（圖二十七）？雖然你可以動，你可不可以延長？不行，因為你延長之後，這一條線會不會交到這個點？因為 $\angle D$ 和 $\angle E$ 的兩邊一定會在 C 點相交。，很好，謝謝你。所以他又找了一個新的類型，這個類型是什麼？它是兩個角跟什麼？一個隔壁，隔壁我們叫相鄰，叫鄰邊。好，兩個角跟一個鄰邊。

再來，第四組，你們派誰來代表？來說一下，你們也講第(4)類好了，你們的第(4)類，你們沒有帶第(4)類來？

157. 家襄：第 14 個（圖二十八）。

158. 老師：好，第 14 個，你找的是幾個角？

159. 家襄：兩個角。

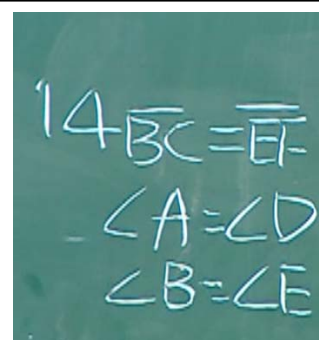
160. 老師：好，大聲一點，幾個角？

161. 家襄：兩個角。

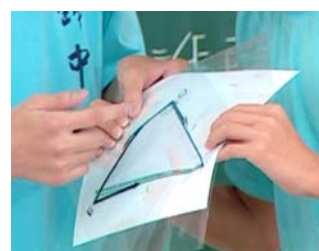
162. 老師：幾個邊？

163. 家襄：一個邊。

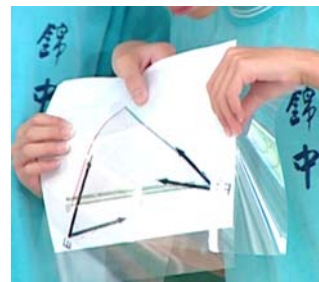
164. 老師：一個邊，那為什麼它全等？



原本:



更換後:



圖二十八

165. 家襄：因為三角形內角和減掉 $\angle D$ 跟 $\angle E$ ，然後 $\angle E = \angle B$ ，然後 $\angle D$ 跟 $\angle A$ 一樣，所以 $\angle C = \angle F$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ 就形成了 ASA。
166. 老師：就會形成兩個角跟一個夾邊，對不對？徐家襄，你講得很好，你再講一次。他剛剛做了一個動作，你們有沒有發現他做了什麼動作？他把一個角換掉了，他憑什麼可以換掉？同學注意聽，我要問你們，本來我的條件是這個角跟這個角，對不對？他剛剛偷偷換了一個動作，他把哪一個角拿出來？他把這個 D 抽掉，換了 F，換位置，他憑什麼可以換位置？憑什麼這個角也會一樣？有沒有人注意聽他剛剛講什麼？請他們那一組的來講看看好了，黃偉軒，他剛剛本來是這兩個角，本來是這個角跟這個角（圖二十八），為什麼他可以變成下面這兩個角，為什麼？你是不曉得還是害羞？不曉得，好，來，我們找誰？還沒有講過的來講講，林宏叡，為什麼？來，麻煩你站起來一下，它剛剛是 $\angle D$ 跟 $\angle A$ 嘛！對不對？它剛剛是這兩個角，為什麼，它本來是這兩個角一樣，為什麼它可以說這兩個角一樣，變成這兩個？
167. 宏叡：有邊固定。
168. 老師：因為有邊固定，什麼意思？邊固定，這個角一定一樣嗎？好像不是。好，來，請坐。有沒有人會講？都沒有人在聽他講，來，鄭嗣馨，你講講看，你剛剛應該有聽到，對不對？為什麼它這兩個角一樣，它可以換成 $\angle C$ 跟 $\angle E$ ？
169. 嗣馨：因為三角形內角和為 180，減掉 $\angle D$ 跟 $\angle E$ 等於 $\angle F$ 。
170. 老師：你再講大聲一點，後面有沒有聽到？
171. 學生：沒有。
172. 老師：好，大聲一點。

173. 嗣馨：因為三角形內角和減掉 $\angle D$ 跟 $\angle E$ 等於 $\angle F$ ，
174. 老師：三角形內角和是幾度？
175. 學生：180。
176. 老師：180，對不對？很好，請坐。為什麼？因為三角形只有幾個角而已？
177. 學生：三個。
178. 老師：三個角，它有兩個角一樣的話，第三個角會不會一樣？會，因為它合起來一定都要是多少？
179. 學生：180。
180. 老師：180，所以他才可以偷偷做這個小動作，換了這一個，對不對？換了這一個之後，為什麼它全等？因為他換了這個之後跟什麼一樣？是不是跟老師剛剛講的，兩個角跟中間夾一個邊就一樣了，所以，一定會確定怎麼樣？全等，對了。好，謝謝你們。再來第五組，第五組誰上來講？第五組你們找了四種，對不對？你先告訴老師，現在已經有四類了，對不對？你有沒有跟這四類不一樣的？
181. 學生：沒有。
182. 老師：沒有，那你可不可挑其中一個講一下，你要挑哪一個？好，請面對觀眾，你挑幾個邊？
183. 學生：三個。
184. 老師：好，三個邊，三個邊是不是就一定會怎麼樣？卡住了，對不對？所以，它角也不會動了，你們是這個意思嗎？
185. 學生：是。
186. 老師：是的，好，我都幫你說完了，謝謝。再來第六組，第六組有沒有跟這四種不一樣的？沒有，那也麻煩你們挑其中的一個講。好了嗎？你們挑幾個角

？一個角兩個邊，你那個邊的位置跟角的位置說明一下，大聲一點。你挑的是…，為什麼它會全等？

187. 學生：因為這個角就是，這個角($\angle B$)跟這個角($\angle E$)一樣（圖二十九）。

188. 老師：對，然後呢？

189. 學生：然後，這兩個邊又跟它就是一樣啊($\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{CF}$)！

190. 老師：一樣長，所以？

191. 學生：所以這個就一定會一樣長。

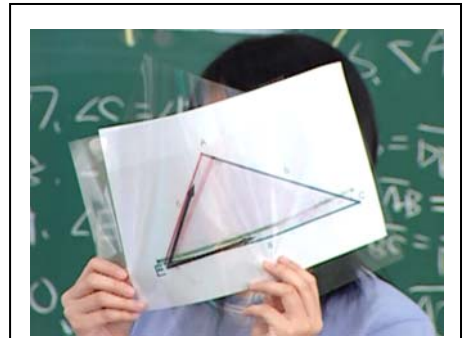
192. 老師：對了，第三個邊的位置就一定在那邊而且一樣長，對不對？對了。好，謝謝你們。現在你們統統都找完了，對不對？總共你找到幾種類型？總共找到幾種類型會全等的，四種還是五種？

193. 學生：四種。

194. 老師：四種，為什麼老師的講義上面寫五種，有一個是什麼？直角三角形，你們怎麼知道是直角三角形呢？

195. 學生：用猜的。

196. 老師：用猜的。好，現在你們先把你們的分類寫上去。類型一，麻煩你就寫「兩個夾角還有一個夾邊」，這是第一個類型，對不對？再來第二個類型，「三個邊」；第三個類型，「兩個邊還有一個夾角」；第四個類型，「兩個角跟一個鄰邊」，先把四個寫上去。你剛剛找的這些條件，你是不是寫出很多名稱，對不對？可是其實這些名稱，很多它角跟邊的搭配都是屬於同一類的，像這一個就是兩個角還有它中間的那條邊（如： $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\overline{AB}$



圖二十九

$= \overline{DE}$)，然後這個就是三邊（如： $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ， $\overline{CA} = \overline{FD}$ ），再來這個就是兩個邊跟它中間的那個夾角（如： $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ， $\angle C = \angle F$ ），最後一個就是兩個角跟它隔壁的一個鄰邊（如： $\angle B = \angle E$ ， $\angle A = \angle D$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ），所以，你找到的類型有四種，對不對？有四種。你類型寫好了嗎？寫好了，我們再看下面的，如果我們要寫國字的話，太麻煩了，所以我們就用英文的簡記方法來說明這個全等的性質。剛剛你記得嗎，我們從六個條件篩選剩下幾個條件就可以了？三個條件。可是我要告訴人家，是邊還是角，然後它的位置是怎麼樣？在英文裡面，角的英文字是 Angle，所以它的英文縮寫，我們就用 A 來表示；邊叫做 Side，我們就用 S 來表示邊。你記得寫的時候，A 跟 S 的組合要按照你的位置的順序。老師問你，兩個夾角跟一個夾邊，你如果用 A 跟 S 來寫的話，會怎麼寫？A 表示兩個夾角，對不對？兩個角中間夾一個邊，所以就是 ASA，這樣知道了嗎？老師要問你，如果是三個邊的話，英文怎麼簡記？來，葉靜方，三個邊，邊是什麼？請你站起來，三個邊，邊是什麼？S，所以三個邊怎麼簡記？

197. 靜方：三個 S。

198. 老師：SSS，好，請坐。再來，兩個邊跟一個夾角。何煒晟，兩個邊跟一個夾角，你要怎麼表示？請你站起來。

199. 煒晟：SAS。

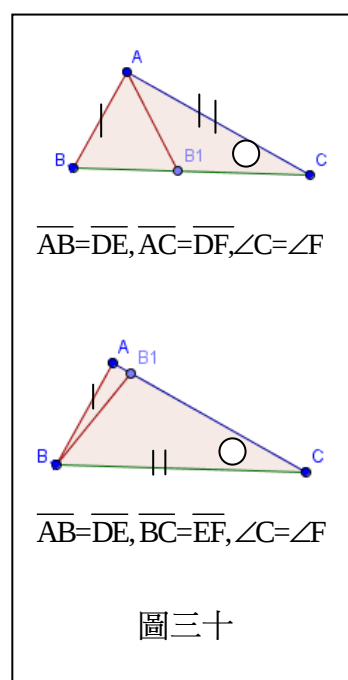
200. 老師：SAS，兩個邊跟一個夾角，對不對？最後一個，兩個角跟一個鄰邊，蔡至靈，請你站起來，兩個角跟一個隔壁的邊，角是什麼？

201. 至靈：A。

202. 老師：A，所以，兩個角就是？

203. 學生：AA。

204. 老師：AAS，對了，很好。所以，是不是總共有這四種：AAS、SAS、SSS、ASA，它會全等？老師問你，剛剛不全等的這幾個，它們的位置你要怎麼寫？如果你用英文簡寫的話是什麼，你還記得嗎？回憶一下，剛剛不全等的情況是怎樣？SSA，對不對？這個是 SSA，這個不全等，為什麼不全等？老師剛剛畫給你看過了，當你找到的那個角是最小的角的時候，你有沒有發現我這個邊它可以變動，變到這裡來（圖二十七），我把這個邊移過來這裡，是不是就相等了？所以你就會找出兩個不一定全等的三角形。現在請你在你的表格上面（P.169，學習單第(六)題），邊角的位置不用寫，你把英文的簡記搭配你的類型寫在下面，知道怎麼做了嗎？譬如說，第一個類型，老師是不是請你寫「兩個夾角跟一個夾邊」，所以你就寫 ASA。現在接著老師要再回來看，剛剛那個 SSA 不全等的狀況，你先看一下，剛剛老師已經找了，我說過當你找的那個角是最小的角的時候，是不是 SSA 會不成立，對不對？可是它的搭配會有兩種：第一個 SSA 往這邊走（圖二十一），另外一個 SSA 往上面走，兩個邊我把它放在上面（圖二十二），這兩個邊放在上面，那為什麼？剛剛老師已經告訴過你，為什麼它不全等？因為這個可以往這邊移動，讓它的邊一樣（圖三十，上面的三角形）。這一個為什麼也會不全等呢？現在老師這個點（B 點）固定不動，我把這個邊畫過來，這樣，這兩個邊是不是也會一樣長（圖三十，下面的三角形）？你們有沒有發現，又跑出



一個新的三角形跟它不全等了？也就是說，看一下，這種情況是像這個樣子，當你知道這個邊一樣的時候，其實這個邊是不是會移動？你這樣移動，剛剛你在用紅色的那個的時候，是不是也有看到它可以移動？這一個就更明顯了，它是怎麼樣？這一個點固定不動，它可以移動，往這邊移動（圖二十二），所以，SSA 當你選到的角是最小的角的時候，它就不全等。老師問你，什麼時候這個邊 $\overline{AB}$ 不會動？有一個很特別的角度，什麼時候這個邊它不會這樣動？它



圖三十一

這個邊一定是多少的時候？一定是在哪裡的時候？它是因為這個邊會動，所以它的兩個邊才會在不一樣的地方。怎麼樣它的邊不會動？是不是剛好在中間的時候，對不對？剛好在中間的時候，老師問你，它一定是什麼三角形？直角三角形（圖三十一）。所以你剛剛回答我，直角三角形，它就一定保證全等的原因就在這裡，因為它最短的這個邊可不可以讓我左右移動？不可以，因為它這個角度固定了，所以直角三角形的 SSA，它就會怎麼樣？就一定會全等，因為它就不會有這種問題，這樣聽得懂嗎？所以，第五個全等的性質就是直角三角形的全等性質，它叫做 RHS，這個 R 是直角，H 是斜邊，S 是一股。因為我們時間已經到了，所以這個老師下一堂課再仔細地跟你講。今天上到這邊。

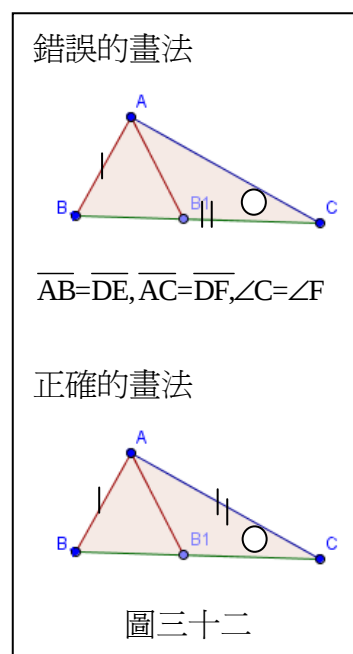
參、教學說明

我今天的上的主題的是「三角形的全等性質」，我引入的方式是先利用「兩個三

角形的疊合」知道它們是全等，全等會產生了六個結果，就是它的對應邊跟對應角會相等，因為這六個條件裡面，我想要讓學生從操作圖卡裡面去發現，可以篩選出某些條件讓三角形全等，還是可以讓兩個三角形保證全等。所以，我就用圖卡來讓他們操作，圖卡總共有七張，第一張是原本的三角形，另外的六張是投影片，也就是把它的邊跟角拆成六張投影片，讓他們可以利用重疊的方式，例如，知道兩個邊一樣長的話，我就讓他們利用疊合的方式，透過移動跟操作可以發現，這樣子的條件的組合有沒有辦法讓兩個三角形全等。讓他們發現兩個三角形全等的最少條件之後，再讓他們也找出一種情況，它的組合並不是能夠保證全等的。接著再引入 SSA 不全等的情况，最後再介紹一個 RHS 全等的性質。今天我上課的順序有一些更動，原因是由於剛開始學生在使用圖卡的時候，他們並不是非常地熟悉，需要每一組由我到下面去各別的指導，指導之後，先告訴他們幾個條件，舉例給他們聽之後，他們就開始可以操作。再來就是 SSA 不全等的情况，我本來是要放在活動四，但是在活動三的時候，他們就已經找出了這一個全等跟不全等的狀況，所以我就更改了我原本的教學活動設計，把 SSA 不全等的狀況放在活動三討論。今天也由於時間的關係，所以最後一個 RHS 全等的性質並沒有討論到。

今天在整個教學的過程裡面，有一個地方，就是在最後的地方，在講解 SSA 不全等的討論的時候，我在黑板上畫的邊有一點錯誤，以至於這兩種情况的不全等的邊，我畫錯了，也就是說這一個三角形不全等的狀況應該是這一個邊跟這一個邊要等長，而我把相等的邊畫成這兩個，這是我今天有疏忽的地方（圖三十二）。

另外，關於學生的反應的部分，因為今天的學生是第



一次接觸這個教材，透過圖卡，也是第一次操作，所以在操作上會有一點陌生，發表的時候，也會有一點生疏。三角形的全等性質以往的引入的方式都是利用三角形全等的尺規作圖，我今天使用的是圖卡的方式，我發現用這個方式來做的話，會比較省時間，而且他們在操作的時候也會慢慢地更了解全等的意義。

三角形的全等性質在整個國中幾何的教學來講，是非常重要的，尤其是後面，特殊四邊形的幾何證明都需要用到三角形的全等性質。學生在學習這個單元之前，已經學習過三角形的一些基本性質，包含三角形的內角和還有畢氏定理，在學完這個單元之後，對於三角形的性質可以說已經學得完整，足夠應付以後幾何性質的證明，所以它對於國中的幾何的教學來講是非常重要的。我今天教學的班級是我本身的班級，是二年級下學期，可能剛開始第一堂課的時候，精神比較好，到第二堂課的時候精神略差一點，不過也都可以十分專注在老師的教學。這就是我今天有關於三角形全等性質教學的說明。

肆、教學後的省思

本次的教學單元為三角形的全等性質，課程時間為兩節課（共九十分鐘），中間並有十分鐘的休息時間。教學單元預計分四活動進行，在進行活動一讓學生理解全等的意義時較無問題，在活動二使用圖卡找出兩個三角形全等的最少條件時，剛開始學生並不理解圖卡的使用方法，透過老師到各組示範操作後才理解，而各組上台發表時皆能把所有全等的組合條件都寫出。因為在活動二學生寫出的全等條件中有出現 SSA 的條件組合，所以將活動四中關於 SSA 不全等及全等提前於活動三進行。

平行四邊形

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級下學期

二、教學者：台北縣重慶國中 蔡佩旻 老師

三、教學目標：

- 1.能理解平行四邊形的意義與性質。
- 2.能透過幾何推理判斷四邊形是否為平行四邊形。
- 3.能證明平行四邊形、三角形、梯形的面積。

四、活動目標：

- 【活動一】能瞭解平行四邊形的意義。
- 【活動二】能證明平行四邊形鄰角互補、對角相等、對邊相等。
- 【活動三】能證明平行四邊形對角線的性質並觀察中心點性質。
- 【活動四】能證明具有兩雙對角相等、兩雙對邊等長、一雙對邊平行且等長、對角線互相平分等性質的四邊形必為平行四邊形。
- 【活動五】能證明平行四邊形、三角形、梯形的面積。

五、教學概要說明：

學生之前已經學過平行四邊形的意義及透過操作認識其簡單性質。國中階段除了複習國小平行四邊形的觀念，並希望透過實際操作活動讓學生更熟悉平行四邊形意義與其他相關性質，例如平行四邊形鄰角互補、對角相等、對邊相等、對角線的性質與觀察對角線交點性質等。更進一步能判斷具兩雙對角相等、兩雙對邊相等、一雙對邊平行且相等、對角線互相平分等性質的四邊形必為平行四邊形。

面積部分也能透過操作活動更清楚瞭解其公式並能證明平行四邊形、三角形、梯形的面積。

六、教學活動設計：

【活動一】能瞭解平行四邊形的意義。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
舊經驗複習	1.前一堂課已經利用扣條拼出各種不同四邊形，也討論各四邊形定義與各邊、角、對角線之特性，接下來繼續討論關於平行四邊形的定義與性質。 2.黑板展示的各四邊形，就是我們現在要探討的平行四邊形，請問我們怎麼判斷這些四邊形是平行四邊形呢？	- 請學生說明他是如何判斷的。 - 若學生無法判斷可提示，利用同側內角互補。	能運用截角性質判斷對邊平行。
相關名詞說明	3.爲了要進一步研究平行四邊形的各種性質，以及四邊形滿足怎樣的條件才會是平行四邊形，所以接下來先對任意四邊形的對角、鄰角、	- 因爲前面已經說明過，教師可直接問學生。 - 以四邊形ABCD爲例，說明如下：	能清楚瞭解對角、鄰角、對邊、鄰邊、對角線等名詞的意義。

	對邊、對角線等名詞做說明。	• 對角： $\angle A$ 和 $\angle C$ 為相對的角，稱 $\angle A$ 為 $\angle C$ 的對角或 $\angle C$ 為 $\angle A$ 的對角； $\angle B$ 和 $\angle D$ 為相對的角，稱 $\angle B$ 為 $\angle D$ 的對角或 $\angle D$ 為 $\angle B$ 的對角。 • 鄰角： $\angle A$ 和 $\angle B$ 為相鄰的角，稱 $\angle A$ 為 $\angle B$ 的鄰角、$\angle B$ 為 $\angle A$ 的鄰角；同樣的，$\angle B$ 和 $\angle C$ 為相鄰的角、$\angle C$ 和 $\angle D$ 為相鄰的角、$\angle D$ 和 $\angle A$ 為相鄰的角。 • 對邊： $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 為相對的邊，稱 $\overline{AB}$ 為	
--	----------------------	--	--

		$\overline{CD}$ 的對邊或 $\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 的對邊；同樣的，$\overline{BC}$ 和 $\overline{DA}$ 為相對的邊。 - 鄰邊： $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$、$\overline{DA}$ 為相鄰的邊，稱 $\overline{AB}$ 為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{DA}$ 的鄰邊或 $\overline{BC}$ 為 $\overline{AB}$ 的鄰邊、$\overline{DA}$ 為 $\overline{AB}$ 的鄰邊。 - 對角線： 連接兩對角之頂點所成線段，稱為對角線。	
	想想看，任意四邊形對角線有幾條？ 4.說明平行四邊形定義、符號簡記。	- 要提醒學生任意四邊形的對角線有兩條。 - 提醒學生可依符號順時針或逆時針讀或書寫。 - 以平行四邊形 ABCD 為例，說明如下：	能清楚瞭解平行四邊形的意義。

		定義： 若一四邊形兩組對邊分別平行，則這樣的四邊形稱為平行四邊形。 也可以記錄為：若一四邊形ABCD中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，則ABCD為一平行四邊形，簡記為 $\square$ ABCD。	
--	--	---	--

【活動二】能證明平行四邊形鄰角互補、對角相等、對邊相等。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
- 平行四邊形性質 - 鄰角互補	- 接下來探討平行四邊形的一些性質，首先討論鄰角、對角、對邊的關係。 1.鄰角關係 - 請觀察平行四邊形各鄰角有什麼關係呢？	- 利用扣條實作讓學生觀察平行四邊形鄰角關係。 - 可提示學生利用量角器量，並記錄所量得結果。 - 先讓學生思考並試著讓學生上台說明。 - 若學生沒有辦法	能瞭解平行四邊形的鄰角、對角、對邊關係。

• 對角相等	2.對角關係 • 請觀察平行四邊形各對角有什麼關係呢？	說明時，可提醒學生利用平行線截角性質中的同側內角互補說明。 • 可直接利用平行線截角性質說明（同側內角關係） 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 則 $\angle A + \angle B = 180^\circ$。 說明： $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\therefore$ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ $\angle C + \angle D = 180^\circ$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$ $\angle D + \angle A = 180^\circ$ 由此可知，平行四邊形各組鄰角互補。 • 利用扣條實作，讓學生觀察平行四邊形對角關係。 • 可提示學生利用	
---------------	---	--	--

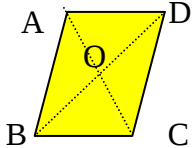
		量角器量，並記錄所量得結果。 • 先讓學生思考並讓學生上台說明。 • 若學生沒有辦法說明時，可提醒學生利用平行線截角性質中的同側內角互補說明。 • 利用鄰角互補說明對角相等。 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 則 $\angle A = \angle C$ 且 $\angle B = \angle D$ 說明： $\because$ 同側內角互補 $\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C$ $\angle A = \angle C$，同理可說明 $\angle B = \angle D$ 由此可知，平行	
--	--	--	--

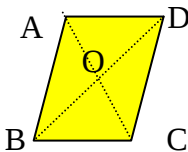
• 對邊相等	3.對邊關係 請觀察平行四邊形各對邊有什麼關係呢？	四邊形各組對角相等。 - 利用扣條實作讓學生觀察平行四邊形對邊關係。 - 可提示學生觀察各扣條對邊顏色。 - 先讓學生思考並讓學生上台說明。 - 若學生沒有辦法說明時，可提示學生作輔助線後再利用平行線截角性質及三角形全等性質說明。 - 利用平行線截角性質與全等性質說明平行四邊形對邊相等。 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 則 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} = \overline{AD}$	
---------------	--	--	--

		(提示：說明 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$) 說明： 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中 $\because \angle 1 = \angle 4$、 $\angle 2 = \angle 3$ ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，內錯角相等) $\overline{AC} = \overline{AC}$ (共用邊) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA 全等性質) $\overline{AB} = \overline{CD}$、 $\overline{BC} = \overline{AD}$ (對應邊相等) 由此可知，平行四邊形各組對邊相等。 • 可提示學生：要說明邊相等，需有三角形，如何會有三角形出現？需做輔助線。	
--	--	--	--

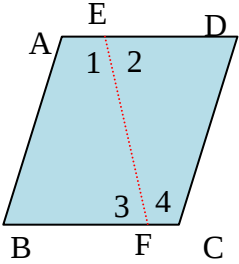
【活動三】能證明平行四邊形對角線的性質並觀察中心點性質。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 平行四邊形對角線互相平分	• 想想看，平行四邊形兩對角線之間有何關係？	• 利用實作讓學生觀察平行四邊形對角線關係。	• 能瞭解平行四邊形的對角線關係。

		• 學生可能的回答如下： (1)平分 (2)相等 (3)垂直 • 利用平行四邊形性質與全等性質說明對角線關係  若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ 則 $\overline{AO} = \overline{OC}$ 且 $\overline{BO} = \overline{OD}$ (提示：利用對邊相等說明) 說明： 在$\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ 中 $\because \angle DAO = \angle BCO$ $\angle ADO = \angle CBO$ ($\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$，內錯角相等) $\overline{AD} = \overline{BC}$ (對邊相等) $\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC$ (ASA全等性質)	
--	--	--	--

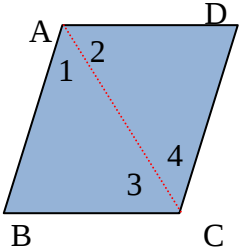
• 中心點性質	2. 什麼是平行四邊形中心點？	$\overline{AO} = \overline{OC}$ 且 $\overline{BO} = \overline{OD}$（對應邊相等） 由此可知，平行四邊形兩對角線互相平分。 • 可針對學生回答情況並讓學生舉例驗證錯誤情況。 • 說明： (1) 兩對角線交點，稱為中心點。  (2) 任何通過中心點的線段可被平行四邊形的中心點等分。	• 能瞭解平行四邊形的中心點性質。
• 中心點平分線段	3. 如果任意畫一直線通過中心點並與平行四邊形兩對邊相交於E、F兩點，則 $\overline{OE}$ 與 $\overline{OF}$ 有何關係？	• 學生可能回答 (1) 相等： 請學生說明理由。 (2) 平分：	

• 中心點切割全等圖形	4.過中心點畫一直線，可畫出什麼樣的圖形？	請學生想想平分意義。 • 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ 則 $\overline{OE} = \overline{OF}$ 說明： 在$\triangle AOE$和$\triangle COF$中 $\because \angle EAO = \angle FCO$ $(\overline{AD} \parallel \overline{BC})$ $\angle AOE = \angle COF$ (對頂角相等) $\overline{AO} = \overline{OC}$ (對角線互相平分) $\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA全等性質) $\overline{OE} = \overline{OF}$ (對應邊相等) 由此可知，任何通過中心的線段可被平行四邊形的中心等分 • 請學生畫畫看。他們可能猜測圖形為：	
--------------------	--	---	--

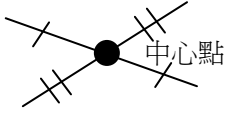
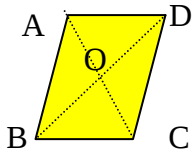
	 5.過中心點畫一直線，畫出的兩梯形或兩三角形是否全等？	(1)梯形 (2)等腰梯形 (3)三角形 • 三角形：說明對邊相等時已說明全等關係。 • 梯形：可用疊合方式檢驗，說明兩梯形各對應角相等、各對應邊相等。 說明： $\because \angle A = \angle C$ $\angle B = \angle D$ $\angle 1 = \angle 4$ $\angle 2 = \angle 3$ $\overline{AB} = \overline{CD}$、$\overline{EF} = \overline{EF}$ $\overline{DE} = \overline{BF}$、$\overline{AE} = \overline{CF}$ (由過中心點線段被中心點等分證明中得知。) 所以兩梯形全	
--	--	--	--

		等。 (兩四邊形四個角對應相等，四邊對應等長)	
--	--	----------------------------	--

【活動四】能證明具有兩雙對角相等、兩雙對邊等長、一雙對邊平行且等長、對角線互相平分等性質的四邊形必為平行四邊形。

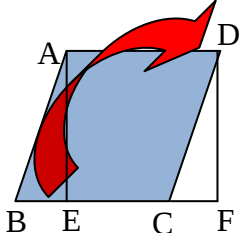
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 平行四邊形的判別	1. 若一四邊形兩組對角相等，則此四邊形必為何種四邊形？  若 $\angle A = \angle C$ $\angle B = \angle D$， 則四邊形 ABCD 為平行四邊形。 (即 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) 2. 若一四邊形兩雙對邊相等，則此四邊形必為何種四邊形？	• 學生猜測，並試著說明理由。 • 說明： $\because \angle A = \angle C$、$\angle B = \angle D$ 且 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ $2(\angle A + \angle B) = 360^\circ$ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ 即 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (同側內角互補) 同理可說明 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\therefore$ 四邊形 ABCD 為平行四邊形 • 提示：引導學生透過兩三角形全等說明內錯角相等後推得平行。 • 說明：	• 當給定條件時，能判斷此四邊形是否為平行四邊形。

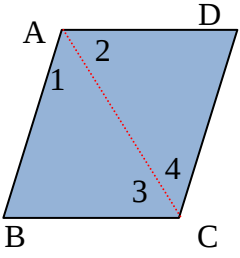
	若 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} = \overline{DA}$ 則四邊形 ABCD 為平行四邊形 (即 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) 3.若一四邊形一組對邊平行且相等，則此四邊形必為何種四邊形？ 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$。 則四邊形 ABCD 為平行四邊形	在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle ABC$ 中 $\because \overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} = \overline{DA}$, $\overline{AC} = \overline{AC}$ (共用邊) $\therefore \triangle CDA \cong \triangle ABC$ (SSS 全等性質) $\therefore \angle 2 = \angle 3$ $\angle 1 = \angle 4$ (對應角相等) 即 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ $\therefore$ 四邊形 ABCD 為平行四邊形 • 說明： 在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle ABC$ 中 $\because \overline{AB} = \overline{CD}$ (已知條件) $\angle 1 = \angle 4$ ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) $\overline{AC} = \overline{AC}$ (共用邊) $\therefore \triangle CDA \cong \triangle ABC$ (SAS 全等性質) $\therefore \angle 2 = \angle 3$ (對應角相等)	• 能判斷，並說明理由。
--	--	---	---------------------

	(欲說明 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) 4.若一四邊形兩對角線互相平分,則此四邊形必為何種四邊形? - 從作圖觀察,給中心點畫兩條線,讓學生連接四點後的四邊形為平行四邊形?如何判斷?  - 利用全等性質說明  若 $\overline{AO} = \overline{OC}$ 且 $\overline{BO} = \overline{OD}$ 則 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ (即四邊形ABCD為平行四邊形)	即 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (內錯角相等) $\therefore$ 四邊形ABCD為平行四邊形 讓學生畫畫看並檢驗。	能判斷,並說明理由。
--	--	---	--

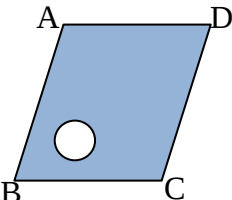
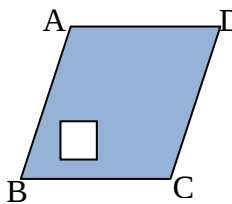
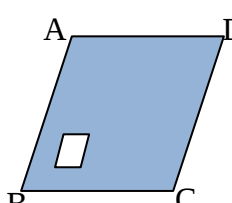
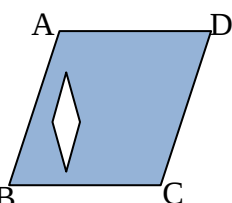
		$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	
		$\therefore$ 四邊形 ABCD 為 平行四邊形	

【活動五】能證明平行四邊形、三角形、梯形的面積。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
平行四邊形、三角形、梯形面積推導	1. 平行四邊形面積 • 重點 (1) 證明 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 全等 (2) 平行四邊形面積 = 長方形面積 = 底 $\times$ 高  (3) 作 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{DF} \perp \overline{BC}$ 2. 三角形面積 • 重點 (1) 說明 $\triangle ABC \cong \triangle DCA$	- 說明：在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中 $\because \angle ABE = \angle DCF$ $\overline{AB} = \overline{CD}$ (對邊相等) $\angle AEB = \angle DFC = 90^\circ$ $\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF$ (AAS 全等性質) • 由此可知道平行四邊形的底為長方形的長，平行四邊形的高為長方形的寬，所以平行四邊形面積 = 矩形 AEFD 面積 = 長 $\times$ 寬 = 底 $\times$ 高 - 說明：平行四邊形可以切割成兩全等三角形，即 $\triangle ABC \cong \triangle DCA$，	- 能算出平行四邊形面積。 - 會應用此等分面積概念算出相關題型中圖形面積。

	(2)三角形面積＝ $\frac{1}{2}$ 平行四邊形 面積＝$\frac{1}{2}$×底× 高  3.梯形面積 • 重點 (1)說明兩梯形是 全等的。 (2)梯形面積＝$\frac{1}{2}$ 平行四邊形面 積＝$\frac{1}{2}$ (上底+ 下底) ×高	此證明已在前面 對邊相等關係的 時候說明。 • 因為平行四邊形的底為三角形的底，平行四邊形的高為三角形的高，所以 $\triangle ABC$ 面積＝$\frac{1}{2}$ 平行四邊形面積＝$\frac{1}{2}$ × 底×高 • 可讓學生上台操作並說明理由。 • 說明： (1)一平行四邊過對角線交點將平行四邊形切割成兩個全等梯形。 此證明已在前面中心點性質的時候說明過了。 (2)平行四邊形的底為梯形的(上底+下底)，平行四邊形的高為梯形的	
--	---	---	--

• 應用：將面積一分為二	4.等分面積 (1)任何一條通過平行四邊形中心的直線可將平行四邊形平分為兩全等梯形或三角形。 (2)若平行四邊形外有一點，如何畫一條直線將平行四邊形面積平分為兩等分？若 P 點位置改變(平行四邊形內、外)？如何畫？	高，所以梯形面積 = $\frac{1}{2}$ 平行四邊形面積 = $\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}$ • 可讓學生上台操作並說明理由。 • 利用2.或3.得知全等圖形的面積會相同。 • 可讓學生上台畫畫看並說明理由。	
---------------------	--	--	--

	(3)若平行四邊形內挖掉一個區域，怎麼畫才可以將挖掉後的平行四邊形面積平分爲二？ • 若挖掉區域爲下列情況，請問要如何畫？ a.圓形  b.正方形  c.平行四邊形  d.菱形 		
--	--	--	--

附錄：學習單

平行四邊形

一般四邊形

名詞介紹：

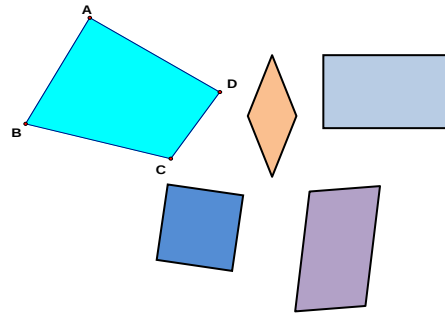
對角：_____的角，例如：_____

鄰角：_____的角，例如：_____

對邊：_____的邊，例如：_____

鄰邊：_____的邊，例如：_____

對角線：_____

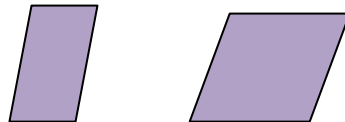


平行四邊形

定義：_____ 或寫成_____ 簡記為_____

拼出的四邊形哪些為平行四邊形？如何判斷呢？

方法：_____



小小練習

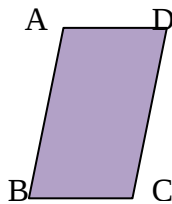
邊角性質

(1)鄰角_____

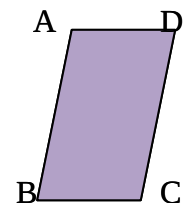
(提示：利用平行線截角性質)

若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

則_____



說明：



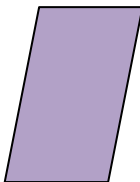
若 $\angle A = 120^\circ$ ，
則 $\angle B = ?$

(2)對角_____

(提示：利用鄰角關係)

若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

則_____



說明：

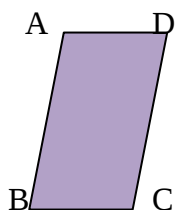
若 $\angle A = 120^\circ$ ，
則 $\angle C = ?$

20 班 座號： 姓名：

(3) 對邊_____

若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

則_____



說明：

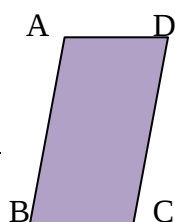
若 $\overline{AB} = 5$ ，
則 $\overline{CD} = ?$

對角線性質

1. 對角線_____

若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

則_____

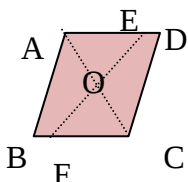
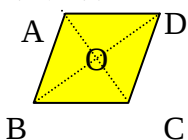


說明：先畫對角線，標示兩對角線交點為_

2. 中心點：_____

(1) 固定 O，試著轉動 $\overline{BD}$ 觀察 $\overline{OE}$ 與 $\overline{OF}$

有何關係？

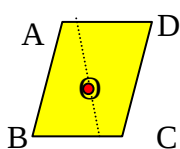
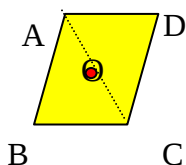


說明：

(2) 固定 O，試著轉動 $\overline{AC}$

觀察左右兩邊所形成圖形為？

左右兩圖形有何關係？



說明：



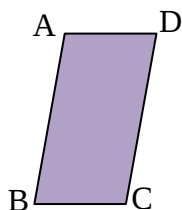
平行四邊形邊、角、對角線性質

鄰角	
對角	
對邊	
對角線	

平行四邊形判別

1.若一四邊形兩組對角相等

則四邊形ABCD爲_____



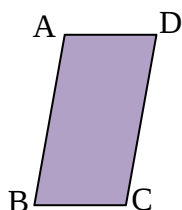
若 $\angle A = \angle C$ 、 $\angle B = \angle D$

則 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

說明：

2.若一四邊形兩雙對邊相等

則四邊形ABCD爲_____



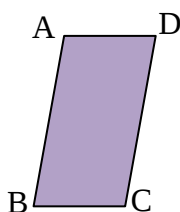
若 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} = \overline{DA}$

則 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

說明：

3.若一四邊形一組對邊平行且相等

則四邊形ABCD爲_____



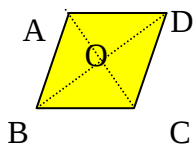
若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$

則 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

說明：

4.若一四邊形兩對角線互相平分

則四邊形ABCD爲_____



若 $\overline{AO} = \overline{OC}$ 且 $\overline{BO} = \overline{OD}$

則 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

說明：



20 班 座號： 姓名：

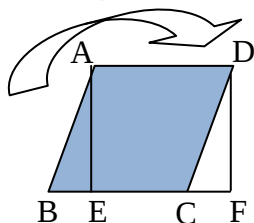
面積公式推導

1.面積推導

(1) 平行四邊形面積

利用切割說明兩三角形全等(AAS或RHS)

說明一：



說明 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$

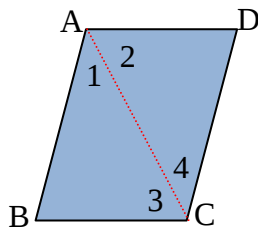
所以平行四邊形面積
= _____ 面積

說明：作 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{DF} \perp \overline{BC}$

(2) 三角形面積

(一個平行四邊形可切割成兩全等三角形)

說明二：



所以平行四邊形面積
= 2x _____

即三角形面積 = _____

說明：

(3) 梯形面積

一平行四邊形如何切割成兩個全等梯形？

說明三：



平行四邊形面積

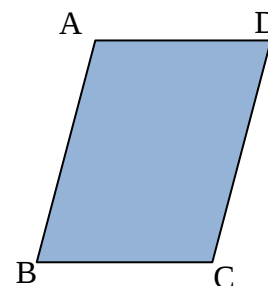
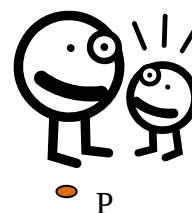
= 2x _____

即梯形面積 = _____

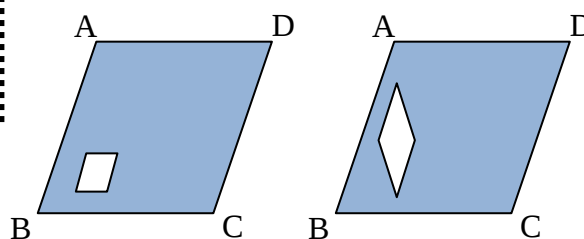
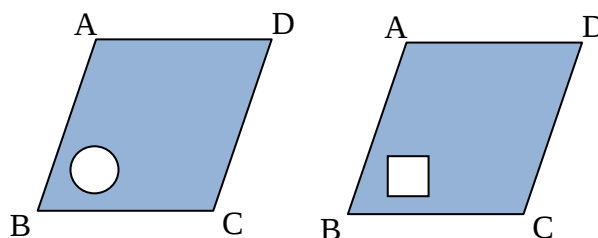
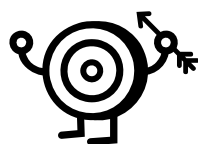
說明

2.等分面積

- (1) 任何一條通過平行四邊形中心的直線可將平行四邊形平分為兩個全等梯形或三角形。
- (2) 若平行四邊形外有一點，如何畫一條直線將平行四邊形面積平分為兩等分？

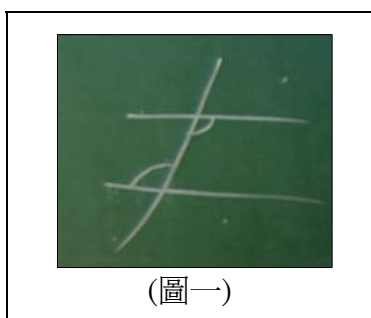


- (3) 若平行四邊形內挖掉一個區域，要怎麼畫可以將挖掉後的平行四邊形面積平分為兩等分？

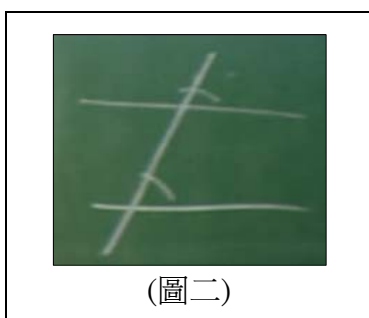


貳、教學實錄

1. 老師：我要讓你們去檢查，怎麼確定它(黑板上有學生拼出來的圖形)是一個平行四邊形，有沒有哪一組可以告訴老師？這些都是你們拼出來的嘛！利用老師給你們的扣條去拼平行四邊形，怎麼樣確定這個圖形是一個平行四邊形？你們怎麼確定的呢？隨便拼，就出來了嗎？還是你有真的去檢查過，它是一個平行四邊形？你們怎麼確定它是平行四邊形？書萱，妳怎麼確定這個四邊形是一個平行四邊形？來，回答問題的時候要站起來。
2. 書萱：兩組對邊分別平行。
3. 老師：兩組對邊分別平行，這樣的四邊形我們叫做什麼？
4. 學生：平行四邊形。
5. 老師：這應該是小學學過的，對不對？也就是平行四邊形的定義。你們有真的去檢查這兩組對邊分別平行嗎？有的舉手，兩個。其他沒有檢查的，那你怎麼確定它是平行四邊形？你怎麼確定它這兩雙對邊是分別平行的，怎麼確定？我們有哪些條件可以檢查這兩雙對邊分別是平行，用前面學過的什麼性質？
6. 學生：全等性質。
7. 老師：全等嗎？講到平行會想到什麼？
8. 學生：處處相等。
9. 老師：怎麼確定兩條線是平行的？前面一節有學過。
10. 學生：畫一直線，內錯角相等（圖一）。
11. 老師：OK，利用平行線截角的性質，內錯角有何關係？



(圖一)



(圖二)

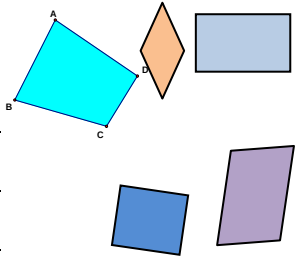


(圖三)

12. 學生：相等。
13. 老師：相等的话，就可以确定这两条线平行，除了这个之外？
14. 學生：同位角（圖二）。
15. 老師：如果两条线被一条线所截，它的同位角相等的话，我们也可以确定这两条线是平行的，还有吗？
16. 學生：同侧内角（圖三）。
17. 老師：同侧内角（圖三），这两个角叫同侧内角，同侧内角关系为何？相等？还是其它？
18. 學生：互補。
19. 老師：互補，你觉得这两个角加起来如果是 180 度的话，我们就可以确定这两条直线是什么关系？
20. 學生：互相平行。你们有没有去量它的角度？
21. 學生：有。
22. 老師：有没有分别去量这两个角？来，你们先量一下，确定一下。是不是它确定了，我们可以知道它的两双对边是分别平行的？如果可以确定的话，我们就可以知道，你们拿出来的这一些都会是我们这一节要讲的平行四边形。知道怎么量吗？把你的量角器这点放在角的顶点上面且对齐直线，然后就可以去量它的这一个角度。你要量上面这个角度的话，就把它拆下来之后，固定在上面，一样去分别量出它的角度。请问你在量的时候，是用这三

個圖形的哪一個去確定它是兩條平行線？（圖一、圖二、圖三）

23. 學生：同側內角（圖三）。
24. 老師：同側內角互補，你們有量了嗎？
25. 學生：量了。
26. 老師：你有發現什麼事情，它們的同側內角會怎麼樣？
27. 學生：互補。
28. 老師：互補，所以拼出來的那些四邊形，你認為它是平行四邊形的都可以用這樣的方式檢查它的兩雙對邊是不是平行。有沒有問題？可以嗎？
29. 學生：沒有。
30. 老師：沒有的話，接下來就要正式進入我們這一節主要要講的，平行四邊形的一些性質還有它的判別方式。在講之前，我們先介紹一些名詞，這些名詞其實前面已經有提過，你可以看一下講義的部分。一般四邊形要講它的性質的話，我們會講到它的對邊、對角，還有鄰角、鄰邊以及它對角線的性質，所以你看講義，隨便給你一個四邊形的 ABCD（圖四），所謂的鄰邊是什麼意思？鄰角是什麼意思？如果現在給你如圖四的這個 $\angle A$ ，它相鄰的角就是哪個角？

一般四邊形 名詞介紹： 對角：_____的角，例如：_____ 鄰角：_____的角，例如：_____ 對邊：_____的邊，例如：_____ 鄰邊：_____的邊，例如：_____ 對角線：_____	
(圖四)	

31. 學生： $\angle B$ 。

32. 老師： $\angle B$ ，或者是哪個角？
33. 學生： $\angle D$ 。
34. 老師： $\angle D$ 。再來，如果給你的是 $\angle C$ 的話，它相鄰的角就是 $\angle B$ 或者是什麼？
35. 學生： $\angle D$ 。
36. 老師：再來，對角的意思是什麼？
37. 學生：對面的角。
38. 老師：大聲一點，要回答可以大聲一點。來，什麼叫對角？
39. 學生：對面的角。
40. 老師：通常我們會講相對的角，會講對面的角嗎？就是如果現在給你 $\angle A$ 的話，
請問它相對的角就是誰？它的對角就是誰？
41. 學生： $\angle C$ 。
42. 老師： $\angle C$ 。那如果給你 $\angle B$ ，它的對角就是誰？
43. 學生： $\angle D$ 。
44. 老師： $\angle D$ 。這有沒有問題？鄰角、對角的意義，可以嗎？再來什麼是鄰邊？
45. 學生：相鄰的邊。
46. 老師：大聲一點，相鄰的邊。所謂相鄰的邊，也就是現在我給你 $\overline{AB}$ ，它相鄰的
邊就是誰？
47. 學生： $\overline{AD}$ 。
48. 老師：還有呢？
49. 學生： $\overline{BC}$ 。
50. 老師：再來，如果問 $\overline{BC}$ 相鄰的邊就有可能的是？
51. 學生： $\overline{DC}$ 。
52. 老師： $\overline{DC}$ 或者是什麼？

53. 學生： $\overline{AB}$ 。

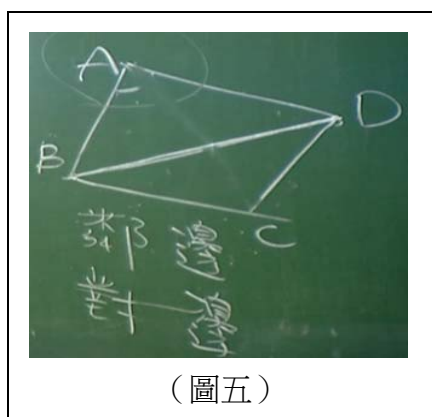
54. 老師：這樣有沒有問題？再來，我們再看什麼是對邊？相對的邊，所謂相對的邊，也就是 $\overline{AD}$ 相對的邊是誰？

55. 學生： $\overline{BC}$ 。

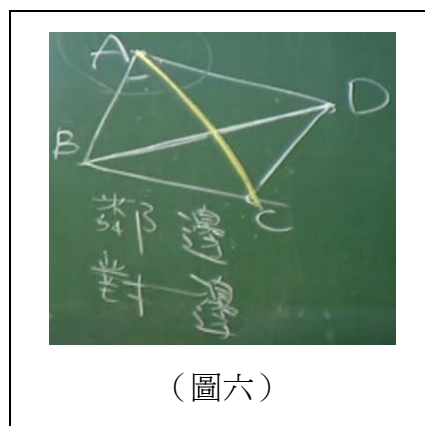
56. 老師： $\overline{BC}$ 。 $\overline{CD}$ 的對邊就是誰？

57. 學生： $\overline{AB}$ 。

58. 老師：可以嗎？一般的四邊形都有這一些相關的名詞。再來如果把兩個對角 $\angle B$ 、 $\angle D$ 的頂點連起來之後，這一條線我們通常會叫做這個四邊形的什麼呢（圖五）？



（圖五）



（圖六）

59. 學生：對角線。

60. 老師：叫什麼？

61. 學生：對角線。

62. 老師：同樣的，這兩個角 $\angle A$ 、 $\angle C$ 也是對角的關係，所以連起來這一條線也會是這個四邊形的什麼呢（圖六）？

63. 學生：對角。

64. 老師：對角什麼？

65. 學生：對角線。

66. 老師：它也是一條對角線，可以嗎？所以一個四邊形通常它有幾條對角線？
67. 學生：兩條。
68. 老師：兩條對角線。之後我們會去探討對角、對邊、鄰角，還有它對角線的一些性質，可以嗎？再來，你可以把講義最上面的部分，就是對角、鄰角、對邊、鄰邊，還有對角線的一些名詞寫上去，你可以從圖形上（圖四）去舉一些例子，把一些角度、一些邊的的關係，如對角、鄰角都把它找出來。再來，如果寫完的話，你就看下面的平行四邊形的定義（圖七）。剛剛我們一開始有講平行四邊形的定義是什麼？怎麼樣確定你們拼出來的四邊形是一個平行四邊形？我們是用它的定義去看，它的定義是什麼？兩雙對邊分別怎樣？
69. 學生：平行。
70. 老師：兩雙對邊分別平行。所以如果我給你一個四邊形 ABCD，我說它是一個平行四邊形 ABCD 的話，意思就是什麼？我們如果用符號來寫的話，會怎麼寫？
71. 學生：兩雙對邊分別平行。
72. 老師：所以我們會怎麼寫？ $\overline{AD}$ 平行什麼？

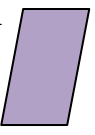
平行四邊形

定義：_____ 或寫成_____ 簡記為_____

拼出的四邊形哪些為平行四邊形？如何判斷呢？

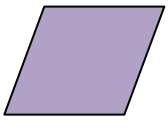
方法：_____

A



B

D



C

（圖七）



73. 學生： $\overline{BC}$ 。

74. 老師：還有 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。所以如果要確定一個四邊形是不是平行四邊形，只要它符合這兩個條件，我們就可以確定它是平行四邊形。通常平行四邊形我們會用一個符號來記錄它，這個符號就是直接在前面畫一個平行四邊形，然後後面寫一個 ABCD ($\square ABCD$)，讀作平行四邊形 ABCD。有沒有問題，可以嗎？

75. 學生：可以。

76. 老師：再來，請把上半部的部分完成，完成之後接下來我們要開始探討平行四邊形的一些性質，也就是剛開始我們有介紹的一些名詞，它的鄰角、對角、對邊的一些性質。來，我們看一下鄰角，你們剛剛有量對不對？不是有用扣條去拼一個四邊形，然後檢查它是不是平行四邊形。在檢查的時候，你量的是什麼？

77. 學生：同側內角。

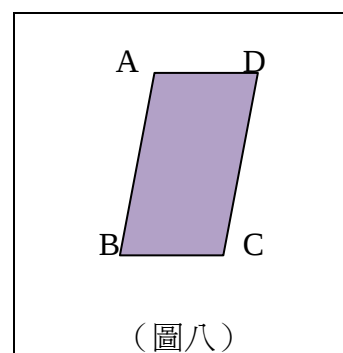
78. 老師：這個同側內角其實就是剛剛我們提到的哪一個名詞？

79. 學生：鄰角。

80. 老師：鄰角，所以它的鄰角有什麼性質，鄰角會怎麼樣？

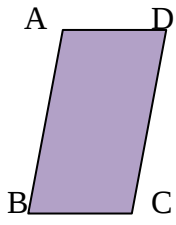
81. 學生：互補。

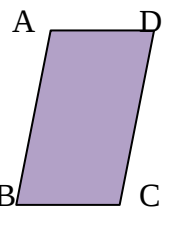
82. 老師：可以嗎？這是我們剛剛用操作的方式去檢查它鄰角的關係（圖八），也就是 $\angle A + \angle B$ 會等於 180 度，這兩個角是鄰角，也可以說它們（ $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ ）是兩平行線，被一條線所截的同側內角是互補的，可以嗎？再來，除了 $\angle A + \angle B$ 是 180 度之外，還有哪些角是鄰角？



83. 學生： $\angle D$ 和 $\angle A$ 。
84. 老師： $\angle D$ 和 $\angle A$ ，因為這兩條線平行（ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ）（圖八），它是一個平行四邊形，所以這兩個角是同側內角，這兩個角（ $\angle D$ 和 $\angle A$ ）加起來是幾度？
85. 學生：180 度。
86. 老師：180 度。再來，除了這個之外呢？除了這個之外，因為這兩條平行線（ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ）被這條線（ $\overline{CD}$ ）所截，所以這兩個角（ $\angle C$ 、 $\angle D$ ）也是同側內角，所以就告訴你 $\angle C + \angle D$ 是幾度？
87. 學生：180 度。
88. 老師：180 度，還有哪兩個角加起來也會是 180 度？
89. 學生： $\angle B$ 、 $\angle C$ 。
90. 老師： $\angle B$ 跟 $\angle C$ ，因為它是這兩平行線（ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ）被這條線（ $\overline{BC}$ ）所截，所以這兩個同側內角會怎樣？
91. 學生：互補。
92. 老師：所以我們得到 $\angle B + \angle C$ 會等於 180 度，由這四個結果我們可以確定，不管它是哪一組鄰角，它都有一個性質，鄰角會怎樣？
93. 學生：互補。
94. 老師：這是第一個部分，鄰角的性質（圖九），來，把它補上去，左邊的部分是請你寫性質的部分，右邊的部分就根據一些條件，把過程說明寫清楚。鄰角的部分看完後，如果你已經寫完的話，想想看它的對角性質，可以拿起你拼出來的平行四邊形，觀察一下它的對角關係。你就隨便拿一個，觀察一下對角，它有兩組對角，觀察這兩組對角有什麼性質，可以拿出你的量角器量量看。寫好了嗎？如果你已經觀察到它有什麼性質，你就可以直接把

它寫在講義上面空格的地方。來，鄰角的部分，有沒有人還沒完成鄰角的部分？都完成了嗎？組長等一下幫我檢查，看是不是你這一組都有完成，再來看對角的部分（圖十），來猜猜看對角間有什麼關係（圖十）？

(1) 鄰角_____ （提示：利用平行線截角性質） 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ 則_____ （圖九）	 說明： 若 $\angle A = 120^\circ$， 則 $\angle B = ?$
--	---

(2) 對角_____ （提示：利用鄰角關係） 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ 則_____ （圖十）	 說明： 若 $\angle A = 120^\circ$， 則 $\angle C = ?$
---	--

95. 學生：相等。

96. 老師：相等，為什麼它會相等？你怎麼知道它相等？你們有用量角器去量嗎？

97. 學生：有。

98. 老師：真的有量嗎？每一組應該都有好幾個量角器，會用量角器吧！會不會量那個角度？好像有人不會量耶！來，好了嗎？閔偉，你可不可以告訴我，你量出來的對角有什麼關係？站起來回答，對角有什麼關係？

99. 閔偉：相等。

100. 老師：相等，你有把它的兩組對角的角度都量出來嗎？有嗎？

101. 閔偉：有。

102. 老師：量出來都是幾度？兩組對角的角度分別是幾度？假設一個 120 度，你量出來另外一個是多少？

103. 閔偉：120 度。

104. 老師：120 度，所以這一個有可能是幾度？

105. 閔偉：60 度。

106. 老師：60 度，所以這邊這個對角又是幾度？60 度。這是我們用測量的方式，知道它的對角會相等，那我們怎麼用學過的一些性質去說明，它的對角不管是怎麼樣的平行四邊形，你剛剛拿的是某一種特殊的平行四邊形，我們怎麼樣針對一般的平行四邊形去確定它的對角，也就是 $\angle A$ 跟 $\angle C$ 是相同的（圖十），再來 $\angle B$ 跟 $\angle D$ 是相同的？有沒有人知道怎麼說明？也就是我們現在知道它是一個平行四邊形， $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 是平行線（ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ），還有 $\overline{AB}$ 是平行於 $\overline{CD}$ （ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ），我們怎麼樣去說明 $\angle A = \angle C$ 、 $\angle B = \angle D$ ，想想看，怎麼樣去說明這兩個角一樣？清儀，你想到了嗎？

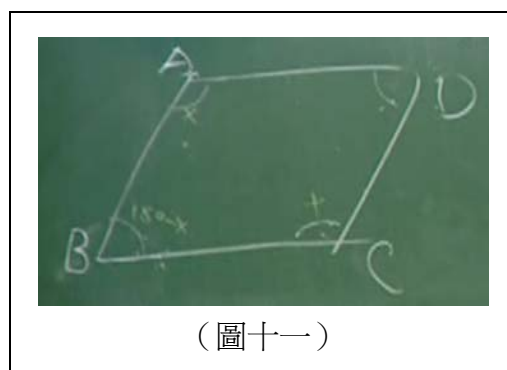
107. 清儀：還沒有。

108. 老師：宜倫，妳想到了嗎？OK，來，上來說一下，妳怎麼檢查這兩個角是一樣，說一個就可以了，妳不用兩個都說。

109. 宜倫：好。

110. 老師：其他同學要看黑板。

111. 宜倫：這個 $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 平行（圖十一），假如它（ $\angle A$ ）是 x ，那這個和它（ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ）平行，因為互補， $\angle B$ 就是 $180 - x$ ，然後這兩條又平行（ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ），



（圖十一）

這個跟這個同側內角 ($\angle B$ 和 $\angle C$)， $\angle C$ 也是 x 。

112. 老師：你們聽得懂她在講什麼嗎？

113. 學生：聽不懂，太高深了。

114. 老師：她直接利用到這個平行 ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$)，然後同側內角互補，去假設這個角 ($\angle A$) 是 x 度，因為這兩個是同側內角 ($\angle A$ 和 $\angle B$)，所以這個角 ($\angle B$) 就是幾度？ $180 - x$ 度，也可以用剛剛鄰角互補去推算出這個角。同樣的這兩個角 ($\angle B$ 和 $\angle C$) 也是鄰角，所以這邊 ($\angle B$) $180 - x$ 的話，這一個角 ($\angle C$) 就是 $180 - (180 - x)$ ，然後去拆括號，可以嗎？有沒有問題？所以她推算出這個角 ($\angle C$) 也是幾度？ x 度。就驗證了這兩個角 ($\angle A$ 和 $\angle C$) 是一樣的。同樣道理，你也可以去算出這個角 ($\angle D$) 為 $180 - x$ ，所以這兩個角 ($\angle B$ 和 $\angle D$) 可以知道它也是一樣的，有沒有問題？當然你不見得一定要去假設這個 x ，你也可以直接寫 $\angle A + \angle B$ 是多少？

115. 學生：180 度。

116. 老師：再來，這兩個角 ($\angle B$ 和 $\angle C$) 也是同側內角，也就是鄰角，所以我們可以知道 $\angle B + \angle C$ 是 180 度，有沒有？可以嗎？

117. 學生：可以。

118. 老師：所以呢？這兩個 ($\angle B + \angle C$ 和 $\angle A + \angle B$) 都是 180 度，所以兩個合起來就變成 $\angle A + \angle B$ 會等於多少？ $\angle B$ 加上什麼？ $\angle C$ ，然後兩邊都有 $\angle B$ ，我們可以利用到以前學過的等量公理的等量減法，去把 $\angle B$ 一起拿掉，所以就得到什麼， $\angle A$ 就等於什麼？ $\angle C$ 。所以我們就推出它的對角，不管它是幾度，不管假設 x 、假設 y ，我們都可以確定一件事情，它的這兩個對角 ($\angle A$ 和 $\angle C$) 是相同的。同樣道理也可以去說這兩個角 ($\angle B$ 和 $\angle D$) 一樣，可以嗎？有沒有問題？所以我們就得到它的對角是怎樣？

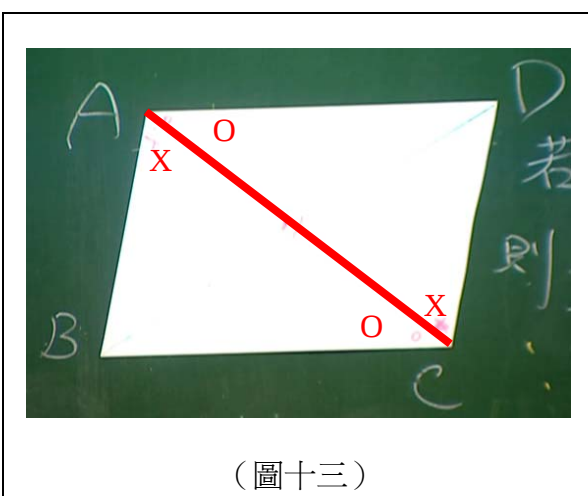
119. 學生：相等的。
120. 老師：對角部分有沒有問題？
121. 學生：沒有。
122. 老師：對角的部分可以嗎？
123. 學生：可以。
124. 老師：來，把講義的部分完成（圖十）。再來，你如果對角的部分已經完成的話，你就可以去想想它的邊，角度我們看完了，我們就看邊的部分（圖十二），想想看它的邊的部分有什麼關係。你可以觀察一下這些平行四邊形，你看它邊的部分，有一個共同的特性，什麼共同的特性？有沒有人有看出來，它有什麼共同的特性？
125. 學生：對邊會一樣長。
126. 老師：對邊會一樣長。你怎麼確定它是一樣長，你有去量嗎？
127. 同學：因為一樣顏色（扣條拼出的平行四邊形）。

(3)對邊_____ 若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ 則_____	(圖十二)	說明： 若 $\overline{AB} = 5$， 則 $\overline{CD} = ?$
--	--------------	---

128. 老師：一樣的顏色，因為同一個顏色它的長度是相同的，所以我們就可以看出，我們拼出來的這些平行四邊形，它的對邊的部分怎樣？是相同的，可以嗎？有沒有問題？這裡用操作的方式，我們去觀察出這一個結論，請問要怎麼樣去說明？因為這是對某些特殊的平行四邊形來說，我們從這些東西裡面來看出它的對邊是一樣的，我們怎麼樣去針對一般的平行四邊形，知道它的對邊分別是平行（ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ），然後去說明它的對邊是相等

的，也就是線段 $\overline{AD}$ ($\overline{AD}$)，如果它是一個平行四邊形，我們怎樣去說明，它的對邊 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，而且另外一個對邊， $\overline{AB}$ 也會等於 $\overline{CD}$ 。想想看，給你任意一個平行四邊形，怎麼樣去說明這兩邊 ($\overline{AD} = \overline{BC}$ $\overline{AB} = \overline{CD}$) 一定是一樣的？我們不能每一次都拿尺量，不能每一次都拿扣條出來看，對不對？那要怎麼樣去說明？利用到我們學過的概念，來說明它的對邊是相同的？這個我們好像在其他四邊形的時候有提過這個東西，可以想想看，我們在講其他四邊形的時候，是用什麼樣的方式去講它的對邊是相等的？

129. 老師：三角形，你怎麼會想到有三角形？來，郭清儀，妳上來畫吧！妳要看什麼三角形？上來啊！你們沒給她掌聲，她就不上台了。來，試著把妳想要讓他們知道的那個三角形，把它畫出來，然後妳可以試著說明看看，怎麼樣去說？妳可以拿尺，後面那邊有尺。她做了一件事情，她嘗試把 A 跟 C 連起來。來，為什麼妳想要把它連起來（圖十三）？



（圖十三）

130. 清儀：因為這樣，就可以證明 $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 一樣。
131. 老師：妳要不要試著說說看，為什麼 $\overline{AD}$ 可以等於 $\overline{BC}$ ？
132. 清儀：因為這是 $\overline{AD}$ ， $\overline{BC}$ 平行，所以內錯角會相等。
133. 老師：妳要不要把它用一個符號表示？
134. 清儀：然後，共用邊會相等，剛剛有說，那個對邊 ($\overline{AD}$ ， $\overline{BC}$) 會相等，所以這

兩邊一樣 ($\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$)。

135. 老師：對邊相等，有嗎？我們剛剛有說對邊會相等嗎？對邊相等不是我們現在要說明的嗎？對不對？

136. 學生：有啊！有講。

137. 老師：還沒啊！對邊相等還沒說，是現在要說的，還要再想想，妳少了什麼東西？

138. 清儀：還有另外一個對頂角。

139. 老師：對頂角？

140. 清儀：不是，那個內錯角，叉叉（圖十三）。

141. 老師：叉叉會一樣，是因為什麼理由？

142. 清儀：內錯角。

143. 老師：為什麼那兩個內錯角會相等？

144. 清儀：因為是...

145. 老師：因為哪兩條線平行？

146. 清儀： $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 。

147. 老師：是嗎？妳打叉叉的那兩個角是因為哪兩條線平行？

148. 清儀： $\overline{AB}$ 跟 $\overline{DC}$ 。

149. 老師：OK，那妳打圈圈的兩個角是因為哪兩條線平行？

150. 清儀： $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 。

151. 老師：OK， $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ ，所以呢？所以妳就得到什麼？

152. 清儀：ASA 相等。

153. 老師：相等？有 ASA 相等嗎？

154. 清儀：全等。

155. 老師：所以呢？就得到什麼？

156. 清儀：△ABC 等於 △...

157. 老師：等於？

158. 清儀：全等△ADC。

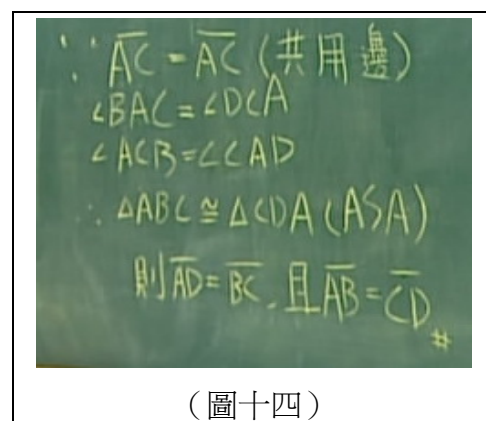
159. 老師：所以就得到什麼？

160. 清儀：可以得到 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，而且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。

161. 老師：很好，因為全等，所以就得到兩個對應邊是怎樣？相同的。有沒有人要試著上來寫寫看，把剛剛清儀講的那些寫在黑板上，有沒有人要自願的？來，家寅，你試著寫寫看剛剛清儀講的那些，把它完整的寫下來，來，快點上台。其他的同學也在講義上自己把它補上去（圖十二），自己練習寫寫看。寫完之後，檢查一下，你寫的跟家寅有什麼不一樣的地方，你覺得誰寫的比較好？每一個人都要寫。有沒有人已經寫完的？金俊，寫完了嗎？

162. 金俊：還沒。

163. 老師：那怎麼還不寫？寫完的，你看一下黑板上家寅寫的（圖十四），第一個，因為 $\overline{AC}$ 是共用邊，所以第一條他寫 $\overline{AC} = \overline{AC}$ ；第二個， $\angle BAC = \angle DCA$ ，因為又又這兩個角是一樣的；再來第三個， $\angle ACB = \angle CAD$ ，因為圈圈這兩個角是一樣的，利用到內錯角相等，得到這兩個條件。所以這三個條件，我們用前面學過的：兩個三角形，如果有兩個角對應相等，一邊對應相等的話，我們就說這兩個三角形全等，是根據哪一個全等性質？ASA 全等。所以我們就得到它的對應的邊， $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 是相同的， $\overline{AB}$ 跟 $\overline{CD}$ 也是一樣



的，所以我們就說明了什麼事情？這個平行四邊形的對邊是怎樣？

164. 學生：相同的。

165. 老師：可以嗎？有沒有問題？沒有。再來我們就要看它的對角線的部分，剛剛我們好像有講什麼是對角線？把兩個對角連起來，那一條線就是我們的對角線，可以嗎？再來，我們要去看它的對角線，猜猜看它的對角線有什麼性質？把它的對角線，兩條線把它連起來，來猜猜看它的對角線關係。

166. 學生：平分面積的關係。

167. 老師：平分面積？

168. 學生：對，再來就沒關係了。

169. 老師：來，我把兩條對角線連起來，後面看得到嗎？

170. 學生：看不到。

171. 老師：可以嗎？

172. 學生：不行。

173. 老師：太淡了，是不是？

174. 學生：對。

175. 老師：猜猜看，它的兩條對角線有什麼關係？

176. 學生：平分面積。

177. 老師：猜猜看，它是不是一個平行四邊形（圖十五）？

178. 學生：不是？

179. 老師：你怎麼知道它是不是？

180. 學生：因為它兩邊兩個顏色一樣。

181. 老師：你用到剛剛講的對邊相等？是嗎？所以它就是平行四邊形，確定嗎？

182. 學生：確定。



（圖十五）

183. 老師：對邊一樣就一定是平行四邊形嗎？這個部分我們還沒講，平行四邊形的判別我們還沒說，我們現在能檢查它是不是平行四邊形的話，就是檢查它的兩雙對邊有沒有平行，怎麼去檢查有沒有平行？去檢查它的同側內角有沒有互補，可以嗎？或者說它的鄰角有沒有互補，如果有的話我們就可以確定這兩條線，也就是紅色這兩條跟藍色這兩條是平行的，可以嗎？然後你看一下，這個平行四邊形的對角線的部分，這個是兩段可以拆開的，我這樣做出來的，它的對角線會怎麼樣？這一個平行四邊形，它的對角線怎麼樣（圖十五）？

184. 學生：很長。

185. 學生：平分。

186. 老師：兩條對角線，綠色跟黃色會一樣嗎？

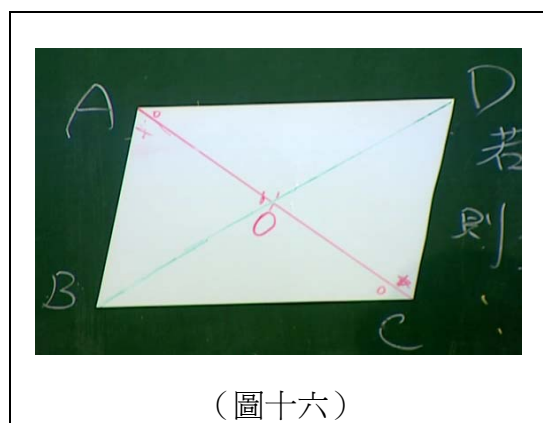
187. 學生：不會。

188. 老師：我們綠色跟黃色長度應該是兩條

不一樣的吧，對不對？懂我在講什麼嗎？因為我剛剛這是可以拆的，我拆開來之後，其實這一整條，整條綠色的是我的其中一條對角線，黃色這一整條是另外一條對角線，然後，你其實可以從裡面觀察到什麼事情？它的這條綠色對角線，會被黃色這一條怎麼樣？

189. 學生：平分。

190. 老師：為什麼它會平分？也就是現在我給你一個平行四邊形 $ABCD$ （圖十六），然後，你們剛才說平分，也就是假設這邊有個交點 O 好了，所謂的平分就是什麼意思？哪一段跟哪一段會一樣？ $\overline{AO}$ 會等於 $\overline{OC}$ ，也就是這一條 $\overline{AC}$ 會被這一條 $\overline{BD}$ 平分（紅色會被綠色平分）。 $\overline{BO}$ 也會等於 $\overline{OD}$ ，也就是說綠色



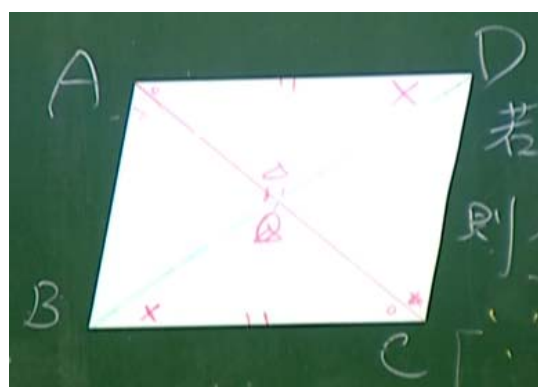
（圖十六）

的這一條 $\overline{BD}$ 會被紅色的這一條 $\overline{AC}$ 怎樣？

191. 學生：平分。

192. 老師：怎麼確定它真的會一樣？也就是我現在要去說明， $\overline{AO} = \overline{OC}$ ，再來， $\overline{BO}$ 是等於 $\overline{OD}$ 的，怎麼樣確定這一件事情？如果可以確定這個成立的話，是對的話，我就可以確定平行四邊形的兩條對角線是互相平分的。想想看怎麼樣去說明這一段跟這一段一樣（ $\overline{AO} = \overline{OC}$ ），還有這一段跟這一段一樣（ $\overline{BO} = \overline{OD}$ ）？來，想想看，其實跟剛剛（圖十三）有點類似，都是要去找什麼東西？然後去說明什麼？最後得到什麼東西？宜欣，來，妳上去試著說說看，怎麼樣去說 $\overline{AO} = \overline{OC}$ ，再來 $\overline{BO} = \overline{OD}$ ？可能妳的臉要朝大家。試試看，它是一個平行四邊形，然後我們現在要說明它的對角線是互相平分的，也就是要去說明 $\overline{AO} = \overline{OC}$ ，再來 $\overline{BO} = \overline{OD}$ ，可以嗎？來，妳把已經可以知道的條件畫出來，這邊有筆給妳，大聲一點。

193. 宜欣：這個（圖十七）對邊相等（ $\overline{AD} = \overline{BC}$ ），然後對頂角（ $\angle AOD$ 、 $\angle BOC$ ）相等，然後內錯角相等。



（圖十七）

194. 老師：妳畫的內錯角相等，那請問是根據哪兩條線平行？

195. 宜欣： $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 。

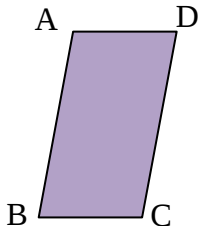
196. 老師：很好，再來得到什麼？

197. 宜欣：可以得到 $\triangle ADO \cong \triangle CBO$ 。

198. 老師：然後呢？所以得到？

199. 宜欣：所以得到這兩條線（ $\overline{BO} = \overline{OD}$ ）相等，然後這兩條線（ $\overline{AO} = \overline{OC}$ ）相等。

200. 老師：很好，她去找了兩個三角形，然後找三個條件去說明這兩個三角形是全等的，再根據兩個三角形全等，所以它的對應邊就會相等，可以嗎？來，宜柔，上去把剛剛講的把它一樣寫下來。妳如果不想要用她剛剛講的那個去寫的話也可以，如果妳有自己的方式，也是可以，其他同學自己動筆寫你的講義的部分（圖十八）。來，快點，妳可以邊寫邊講嗎？妳要用粉筆吧！要寫這邊，妳可以邊寫邊講。因為 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，所以 $\angle 2 = \angle 4$ （圖十九），她寫的部分好像跟剛剛宜欣講的部分是不太一樣的，因為平行所以得到內錯角相等，也就是 $\angle 2$ 會等於 $\angle 4$ ，請問你的 $\angle 1 = \angle 3$ ，是因為 $\overline{AB}$ 平行 $\overline{CD}$ 嗎？

1.對角線_____ 若$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$且$\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ 則_____	 (圖十八)	說明：先畫對角線，標示 兩對角線交點為__
---	---	-------------------------------------

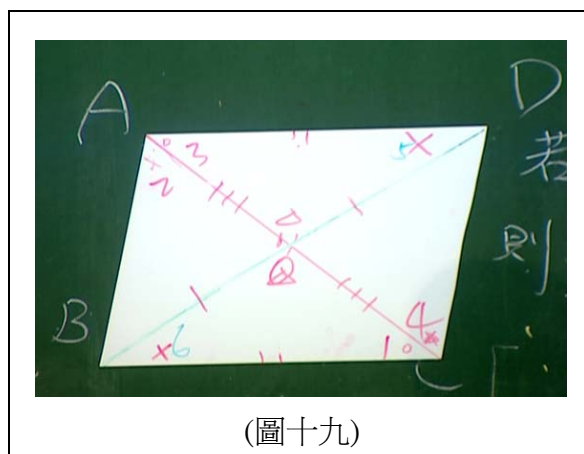
201. 宜柔：內錯角啊！

202. 老師：妳看一下， $\angle 1 = \angle 3$ （圖十九），是因為哪兩條線平行？

203. 宜柔： $\overline{AB}$ 跟 $\overline{CD}$ 。

204. 老師：是嗎？ $\angle 1$ 、 $\angle 3$ 在哪裡？是內錯角，對吧？那是因為哪兩條線平行？

205. 宜柔： $\overline{AB}$ 跟 $\overline{CD}$ 。



206. 老師：是嗎？我們的內錯角是這樣，妳可以轉過來，妳如果不想這樣看，妳把講義轉過來。妳其實不用轉的，其實這樣看到這兩個內錯角($\angle 1$ 和 $\angle 3$)，對不對？這兩個是內錯角($\angle 1$ 和 $\angle 3$)，所以是哪兩條線平行，是哪兩條？你認為是 $\overline{AB}$ 跟 $\overline{CD}$ 平行的舉手，沒有。認為是 $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 平行，所以才得到 $\angle 1 = \angle 3$ 的舉手。沒舉手的是什麼意思？來，請問， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，我們可以得到哪兩個內錯角是相同的？一起回答我，哪兩個角是相同的？看內錯角的部分的話，應該是什麼？ $\angle 3$ 跟 $\angle 1$ 可以嗎？再來（圖十九），你也可以看這個角跟這個角($\angle 5$ 和 $\angle 6$)，也是什麼？內錯角啊！所以你可以把這標上，假設這叫 $\angle 5$ 好了，這叫 $\angle 6$ ，因為這兩條線平行 ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$)，這兩個角($\angle 5$ 和 $\angle 6$)是內錯角，所以我們也可以得到 $\angle 5$ 跟 $\angle 6$ 是怎樣？

207. 學生：相同的。

208. 老師：可以嗎？可不可以？再來我們看另外兩條線， $\overline{AB}$ 跟 $\overline{CD}$ ，如果是平行的話，它被一條線所截，也就是被這條線 ($\overline{AC}$) 所截，如果這樣看很不好看的話，你就把它轉過來，這兩條線平行 ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$)，對不對？所以，可以得到 $\angle 2$ 是等於 $\angle 4$ 的，可不可以？你不喜歡這樣子看，你就把它轉過來，在考試的時候也一樣，你可以把考卷轉一下，就可以知道哪兩個角是一樣的，清不清楚？再來，所以你再確定一下你寫的東西，因為平行，所以得到 $\angle 2 = \angle 4$ ，再來，因為 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，所以可以得到 $\angle 5 = \angle 6$ ，怪怪的，而且你只有兩個條件，然後你看一下（圖十九），你現在講 $\triangle DOC$ 跟 $\triangle AOB$ ， $\angle 6$ 跟 $\angle 5$ 在這兩個三角形之外，你怎麼樣看它是全等？有沒有？你的兩個三角形在這裡， $\angle 5$ 在這邊， $\angle 6$ 在這裡，怎麼辦？是在哪兩個三角形裡面的角， $\angle B$ 跟 $\angle C$ ，哪一個？你現在要看哪兩個三角形？你要看 $\triangle DOC$ 跟 $\triangle AOB$ 的話，你就要從這裡面的條件去找，也就是找它這三個角或三個

邊，有什麼共同的性質，可以嗎？有沒有問題？宜柔，我們等一下可能就先留下來把這個完成，其他的，你們就把講義的部分先把它完成，等一下我們再讓宜柔很快地把這個部分再講完，有沒有問題？

209. 學生：沒有。

210. 老師：沒有問題，就先下課。

【第二節】

211. 宜柔： $\overline{AB} = \overline{CD}$ 、 $\angle 2 = \angle 4$ 、 $\angle CDO = \angle ABO$ ，這樣就變成…（圖十九）。

212. 老師：大聲一點。

213. 宜柔：這樣就變成 ASA 全等性質，所以這邊 $\overline{OA} = \overline{OC}$ ，然後 $\overline{OD} = \overline{OB}$ ，所以 $\overline{AC}$ 跟 $\overline{BD}$ 會互相平分，好，就是這樣。

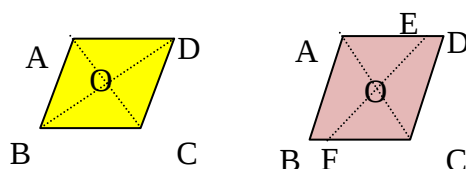
214. 老師：其他同學有聽懂她在講什麼嗎？剛剛因為有一個地方寫錯，所以卡在那邊，卡了很久，後來她發現她寫錯的地方，也就是標錯的地方是在這邊， $\angle 1$ 、 $\angle 3$ 的部分，找到這兩個三角形之後，去找它的三個條件。因為要說全等要有三個條件，找到兩個角對應相等，一邊對應相等，所以我們根據全等的性質，ASA 全等就說明了這兩個三角形全等，有沒有問題？所以，我們就得到它的對應的邊的部分， $\overline{AO}$ 跟 $\overline{OC}$ ，還有 $\overline{OB}$ 和 $\overline{OD}$ 是相同的，可以嗎？也就是說明了這兩條對角線是互相平分的，這樣子清不清楚？可以嗎？你把講義的部分（圖十八），一樣把它完成對角線的部分。再來，對角線的部分完成之後，你可以看一下後面的部分，後面有講到中心點的部分（圖二十），兩條對角線不是會有一個交點？我們把它標上了 O，通常我們會講這個 O 點是這個圖形的中心。然後我們看一下，這個中心點有什麼特性，這一個中心點把這兩條對角線平分，也就是這一段（ $\overline{OD}$ ）跟這一段（ $\overline{OB}$ ）一樣，還有這一段（ $\overline{AO}$ ）跟這一段（ $\overline{OC}$ ）一樣。現在做一件事

情，我如果把其中一條去做移動，也就是如果我把紅色這一條做移動，然後固定這個 O 點的話，有沒有看到我在做什麼事情？我把這一條 $\overline{AC}$ 移動之後，把它移到這個位置好了（圖二十一），也就是我把它移動到這邊，好，那我們一樣去看這個線段，假設這邊有一個點叫 E 點，這邊叫 F 點（圖二十一），這一條在移動之後，我們去看一下這兩段線段 $\overline{EO}, \overline{OF}$ 有什麼關係？猜猜看，它有什麼關係？這兩條，也就是 $\overline{OE}$ 跟 $\overline{OF}$ 的關係，剛剛講兩條對角線性質的時候， $\overline{OA}$ 會等於 $\overline{OC}$ ，再來 $\overline{OB}$ 會等於 $\overline{OD}$ 。我去做移動

2.中心點：_____

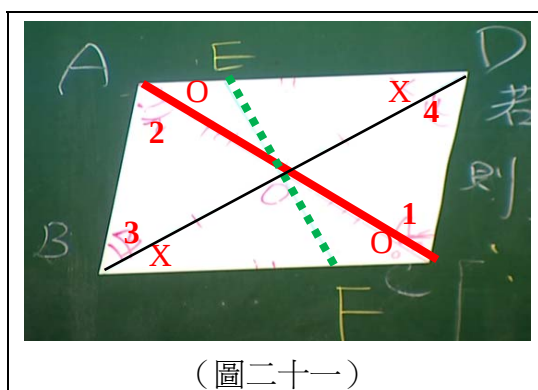
說明：

(1)固定 O，試著轉動 $\overline{BD}$ 觀察 $\overline{OE}$ 與 $\overline{OF}$ 有何關係？



（圖二十）

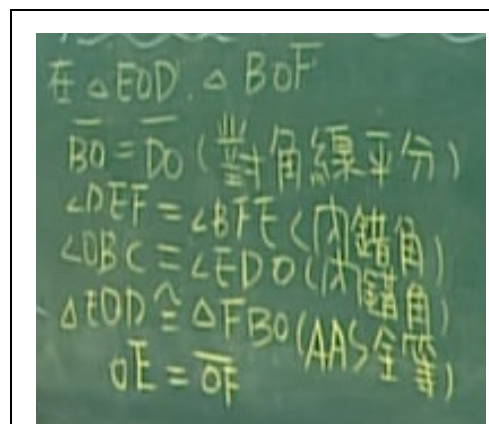
之後呢？ $\overline{OE}$ 跟 $\overline{OF}$ 的長度有什麼關係？猜猜看它有什麼關係？相等？為什麼它相等？你怎麼猜的？有沒有人可以試著說說看，為什麼它會一樣？來，有沒有人要自告奮勇的？



（圖二十一）

215. 學生：答錯怎麼辦？

216. 老師：答錯沒關係啊！有沒有人要自告奮勇？自願的？好像有耶！書萱，等一下啊！來，妳說說看，為什麼這兩個線段($\overline{OE}$, $\overline{OF}$)長會一樣？
217. 書萱：我要怎麼講？直接講？
218. 老師：對，妳可以直接講，妳邊寫邊講也可以。
219. 書萱：那這個我可以擦掉嗎？
220. 老師：其他同學也想想看，為什麼 $\overline{OE}$ 會等於 $\overline{OF}$ ？有時候我們在講兩個線段是一樣的時候，通常都會牽扯到什麼東西？通常都會講到什麼？兩個三角形嘛！再來，兩個三角形的話，我們要講到那兩個邊一樣的話，就是要去說那兩個三角形有什麼關係？
221. 學生：全等。
222. 老師：全等。再來，要講到全等的話，你就要想辦法去找有什麼條件，對不對？至少有幾個條件？
223. 學生：三個。
224. 老師：三個條件才有辦法說到全等。
225. 書萱：(圖二十一) 其實因為它這個是平行四邊形，這是對角線($\overline{BD}$ 、 $\overline{AC}$)，因為對角線會平分，所以 $\overline{BO}$ 會等於 $\overline{DO}$ 。再來，因為 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ，內錯角在這裡，因為內錯角相等，所以這個角會等於這個角($\angle x = \angle x$)。再來，因為這兩條($\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$)平行，所以這個($\angle DEF$ 、 $\angle BFE$)也是內錯角，所以 $\angle OBC$ 和 $\angle EDO$ ，一樣是內錯角， $\triangle EOD$ 會全等於 $\triangle FBO$ ，是因為 AAS 全等。因為對應邊等長，所以就可以知道 $\overline{OE}$ 會



(圖二十二)

等於 $\overline{OF}$ （圖二十二）。

226. 老師：要不要再很快地講一次？然後面對大家。

227. 書萱：好，因為這是平行四邊形，所以對角線會被平分。 $\overline{BO}$ 會等於 $\overline{DO}$ 。再來，因為 $\overline{AD}$ 會平行 $\overline{BC}$ ，然後這個是截線（ $\overline{EF}$ ），所以它的內錯角會相等，所以這個 $(\angle DEF)$ 跟這個 $(\angle BFE)$ 相等。再來它是平行（ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ），這條（ $\overline{BD}$ ）是它的截線，這個 $(\angle OBC、\angle EDO)$ 也是內錯角，內錯角會相等（ $\angle OBC = \angle EDO$ ），所以這個（ $\triangle EOD$ ）還有這個（ $\triangle BOF$ ）全等，所以是 AAS 全等，然後， $\overline{OE}$ 跟 $\overline{OF}$ 是對應邊，所以它們兩個（ $\overline{OE}$ 、 $\overline{OF}$ ）都相等。

228. 老師：很好，同學有沒有問題？也就是固定 O 這個點，然後去移動這個線的時候，不管我怎麼去移動，作出來的這兩個線段都會怎樣？

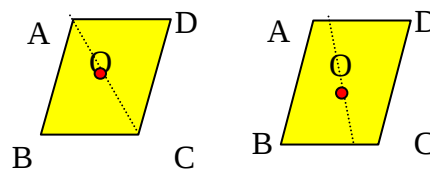
229. 學生：相同。

230. 老師：也就是這個中心點 O 點，會把那一條直線去做平分的動作，清楚嗎？有沒有問題？再來，再問你們一個問題，過這個中心點 O 點，有一條線過它這個中心點，請問我做出來的圖形有哪些圖形？懂我在問什麼嗎？也就是，我現在把這些都擦掉了，我只保留 O 點，我只留一個 O 點，然後呢？我過 O 點去找一條線，這條線跟平行四邊形切割出來的圖形，有哪些圖形（圖二十三）？我切割出來的這個圖形，有可能是什麼形狀？你們要自己想一下，然後呢？有可能是這樣切，也可能這樣移動，固定這個 O 去做移動，懂我問的意思嗎？我切割出來的這樣的圖形，有可能是哪些圖形？最簡單的是哪一個？這兩個三角形嘛！再來，我去移動它的時候，切出來的是什麼形？好像那個線太短了，這是什麼形？這是平行四邊形嗎？平行四邊形要有什麼條件？兩雙對邊分別平行，可是我這樣子有兩雙對邊平行嗎？

甲、固定 O ，試著轉動 $\overline{AC}$

觀察左右兩邊所形成圖形為？

左右兩圖形有何關係？



(圖二十三)

231. 學生：沒有。

232. 老師：沒有啊！這個是什麼圖形？它至少有哪一邊會平行？上面、下面嘛！所以是什麼形？梯形。那這切割出來的兩個三角形或兩個梯形，請問它有什麼關係？猜猜看它有什麼關係？

233. 學生：相等。

234. 老師：相等？

235. 學生：全等。

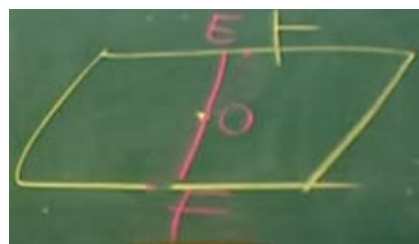
236. 老師：全等？要講相等還是講全等？

237. 學生：相等。

238. 老師：兩個圖形我們通常會講？

239. 學生：全等。

240. 老師：全等，不講相等，可以嗎？為什麼這兩個圖形會全等，也就是切出來的這個三角形，或者是我另外畫的，這邊有一個 O 點，然後我這樣子切，這樣畫的好像太像平行四邊形，這樣子，這是 O 點



(圖二十四)

、 E 點、 F 點 (圖二十四)，它有可能是三角形，也可能是梯形。這兩個切割出來的梯形或三角形，它會全等，為什麼？你怎麼知道？通常我們檢驗全等的方式有什麼？

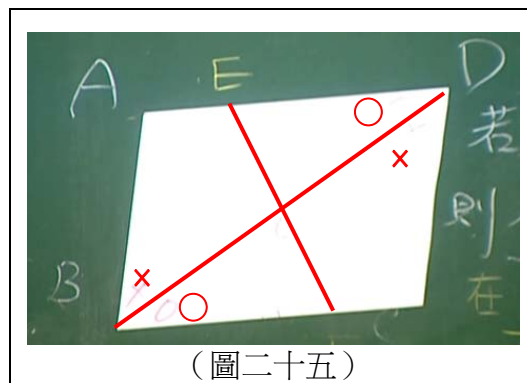
241. 學生：三角形。

242. 老師：把它三角形？什麼叫把它三角形？通常我會把它剪下來去疊在一起，對不對？如果它可以點跟點、邊跟邊都完全重合的話，我們就可以說這兩個三角形怎樣？全等嗎？再來，四邊形的話，我們一樣把它切割下來，然後把它疊合在一起，轉一下，然後疊合在一起的話，如果點跟點、邊跟邊都可以完全重合，我們也可以說這兩個圖形是怎樣？全等的，可以嗎？

243. 學生：可以。

244. 老師：可是我們不能每次都剪下來，然後疊在一起啊！對不對？應該有其他的方式，可以用我們學過的東西去說明，這兩個三角形跟這兩個梯形也會全等。

有沒有人要上來說說看？靖媛，來，試著說說看，等一下講的時候可能要大聲一點，然後記得要面對大家。



245. 靖媛：這兩個三角形全等，怎麼說？這邊會等於那邊（ $\angle ABD = \angle BDC$ ），這邊會等於那邊（ $\angle ADB = \angle DBC$ ）（圖二十五）。

246. 老師：這邊？

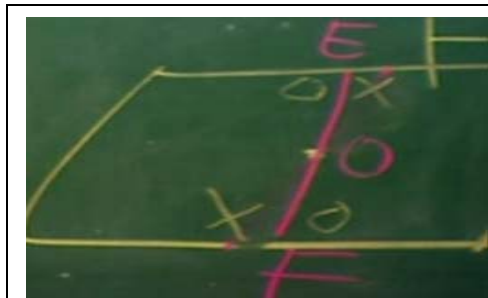
247. 靖媛：內錯角會相等。

248. 老師：角，不是邊。

249. 靖媛：好啦！這個角會等於這個角（ $\angle ABD = \angle BDC$ ， $\angle ADB = \angle DBC$ ），然後這個是共用邊（ $\overline{BD}$ ），所以這個會相等（ $\overline{BD} = \overline{BD}$ ），所以就是…

250. 老師：妳可以問他們是根據哪一個全等性質，不要都是妳一個人講，可以問他們。

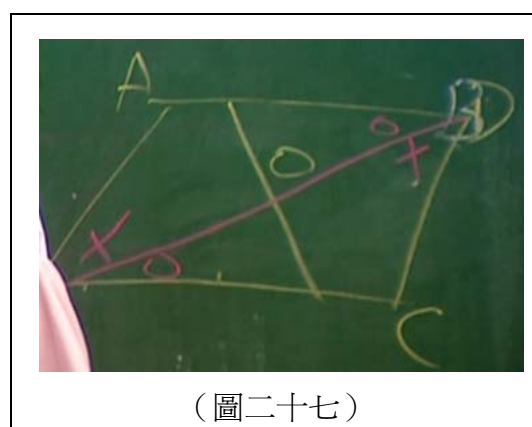
251. 靖媛：請問是什麼性質？非常好，是 ASA 全等性質。然後接下來就是下面這一個（圖二十六），這個角會等於這個角（以○表示），這個角會等於這個角（以x表示），接下來…。



（圖二十六）

252. 學生：為什麼？
253. 靖媛：內錯角，然後，等一下，怎麼不太一樣，好，我自己畫一個好了。
254. 老師：不用啊！妳快講完啦！角的部分快講完了。

255. 靖媛：真的嗎？好，這裡畫一條線（圖二十七），然後，這個是四邊形 ABCD，這裡是 O，這個角會等於這個角（以○表示），這個角會等於那個角（以x表示），因為是內錯角相等，然後對角線平分，所以這個會等於這個（ $\overline{BO} = \overline{DO}$ ），所以…。



（圖二十七）

256. 老師：少了一個，妳不是有兩個了嗎？
257. 靖媛：誤會，所以還是 AAS，不對！AAS 全等性質，講完了。
258. 老師：還沒啊，妳現在講三角形，我們現在是要講兩個梯形全等，對不對？
259. 靖媛：對啊！
260. 老師：我們要講邊數大於三的多邊形全等的話，除了要檢查它的每一個對應的角有沒有相等之外，還要去檢查它的每一個對應邊有沒有相等，對不對？妳剛剛角的部分講到一半。
261. 靖媛：角的部分講到一半。

262. 老師：對，這個圖（圖二十六），角的部分講完一半了，還有一半的角沒講到啊！

對不對？

263. 靖媛：對角相等嘛！所以這個就會等於這個

($\angle A = \angle C$ ，以 $\triangle$ 表示)(圖二十八)。

264. 老師：還有啊！

265. 靖媛：然後這裡…

266. 老師：所以啊？

267. 靖媛：怎麼辦呢？這個也會等於這個 ($\angle$

$ABC = \angle ADC$)，我已經沒有符號，沒了(圖二十九)。

268. 老師：所以四個角對應相等，再來，邊呢？妳剛剛為什麼要去說這兩個三角形全等(圖二十九)？

269. 靖媛：遇到瓶頸。

270. 老師：妳剛剛為什麼說這兩個三角形全等？

271. 靖媛：證明。

272. 老師：妳爲了要說明什麼？

273. 靖媛：說明什麼？

274. 老師：對。

275. 靖媛：邊喔！

276. 老師：問妳啊！妳剛剛為什麼說那兩個三角形全等？

277. 靖媛：要證明這個梯形。

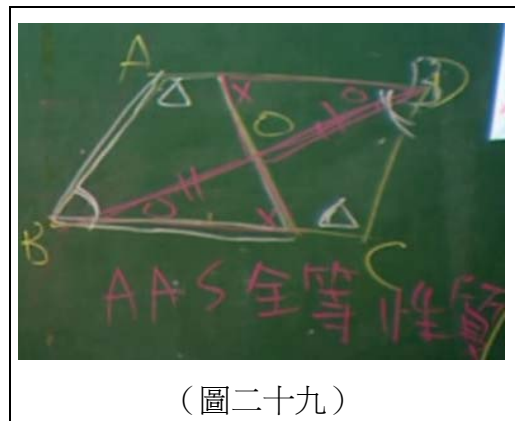
278. 老師：梯形的？

279. 靖媛：梯形的？

280. 老師：四個邊也對應相等，對不對？



(圖二十八)



(圖二十九)

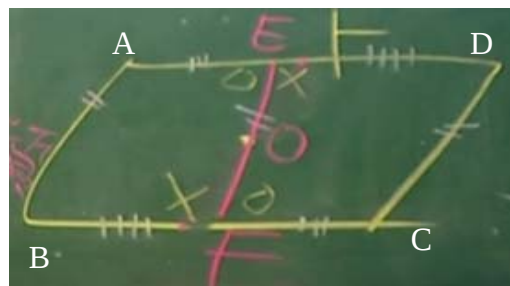
281. 靖媛：對啊！

282. 老師：對啊！

283. 靖媛：所以說…沒事。

284. 老師：快說完了，有沒有人要來幫她的？有沒有？書萱，妳要幫她嗎？她快講完了，剩下對應邊的部分。

285. 書萱：我又來了，因為（ $\overline{EF}$ ）是共用邊（圖三十），這個會一樣（ $\overline{EF} = \overline{EF}$ ）嘛！這邊，然後這個會等於這個（以||表示， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ），你看它是平行四邊形，所以對



（圖三十）

邊等長，然後因為這個，怎麼講呢？這個會等於這個（以|||表示， $\overline{AE} = \overline{FC}$ ），然後這個（以|||表示， $\overline{ED} = \overline{BF}$ ）。

286. 老師：為什麼？

287. 書萱：因為加起來會一樣長。

288. 老師：妳看一下左邊剛剛在幹嘛（圖三十一）。

289. 書萱：她畫這樣嗎？

290. 老師：她剛剛不是畫了這兩個三角形嗎？全等的對應邊會怎麼樣？

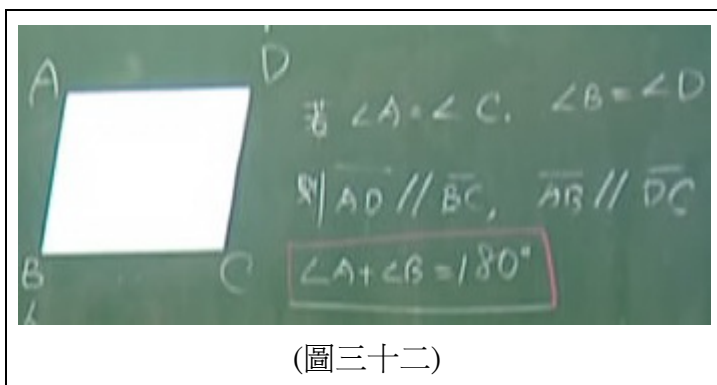


（圖三十一）

291. 書萱：一樣。（圖三十一）這樣這兩個一樣（ $\overline{ED} = \overline{BF}$ ），然後這兩邊又一樣，就是長的 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ ， $\overline{AD}$ 會等於 $\overline{BC}$ （ $\overline{AD} = \overline{BC}$ ）， $\overline{ED}$ 又會等於 $\overline{BF}$ （ $\overline{ED} = \overline{BF}$ ），所以 $\overline{AE}$ 會等於 $\overline{FC}$ （圖三十一）。這個會等於這個（ $\overline{ED} = \overline{BF}$ ），這個會等於這個（ $\overline{AB} = \overline{CD}$ ），這個又相等（ $\overline{AE} = \overline{FC}$ ），然後又有中間這條是共用邊（

$\overline{EF} = \overline{EF}$)，所以它們四個邊也都相等，剛剛講四個角又相等，所以它們一定是全等。

292. 老師：所以得到什麼結論（圖三十）？你過中心點去作任何一條直線的話，切割出來的，剛剛三角形的部分，剛才靖媛已經講完了，它是全等的。再來，梯形的部分的話，我們要去檢查，四個角對應相等，還有四個邊對應也相等，所以就得到這兩個圖形，就是這兩個梯形也會如何？全等的（圖三十）。不管怎麼去移動，我們都可以得到這樣子的結論，所以這個中心點有這樣子的一個特性，可以嗎？也就是過這個中心點，你去畫任何一條直線，我們都可以得到兩個全等的圖形，全等的圖形代表這兩塊面積會不會一樣？後面有跟這個有關的題目。來，剛剛那些都是平行四邊形的性質，反過來問你，如果有一個四邊形，它的對角部分是相同的話，請問這樣的一個四邊形，它會是一個什麼樣的四邊形？知道我在問什麼嗎？也就是，我現在有一個四邊形，我們就用這個圖好了（圖三十二），來，如果它的對角是相同的話，也就是 $\angle A$ 跟 $\angle C$ 不是對角嗎



？如果 $\angle A = \angle C$ 的話，再來， $\angle B = \angle D$ 的話，剛剛有人說它是一個平行四邊形，怎麼樣確定它是一個平行四邊形？我們要怎麼樣檢查它是平行四邊形？平行四邊形的定義是什麼？兩雙對邊分別平行，所以我們就要去說明 $\overline{AD}$ 是平行哪一段？

293. 學生： $\overline{BC}$ 。

294. 老師： $\overline{BC}$ 。再來，另外一個 $\overline{AB}$ 是平行 $\overline{DC}$ 的，來，想想看怎麼去說這個？如果有這個條件，我們怎麼樣去說到它的兩雙對邊分別平行？想想看，怎麼樣說平行？回想到之前，講平行的性質的時候，我們怎麼樣確定兩條線是平行的？我們剛剛一開始也有複習過，對不對？怎麼樣確定兩條線是平行？剛剛有人說同側內角互補，或者是什麼？內錯角相等，或者是什麼？同位角相等。如果滿足其中一個的話，我們就可以說這兩條線會怎樣？平行。來，有沒有辦法說明這兩條線平行（ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ），或者是這兩條線平行（ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ），根據 $\angle A = \angle C$ ，還有 $\angle B = \angle D$ ，有沒有辦法從這個條件去說明？平行的話，要想辦法去說 $\angle A$ 跟 $\angle B$ 加起來幾度？ $\angle A$ 跟 $\angle B$ 加起來180度，有沒有辦法說明到這個東西？這個需要說明的，懂嗎？有沒有人想到？提示一下，跟四邊形的內角和有關，想想看四邊形的內角和幾度，？

295. 學生：360度。

296. 老師：也就是告訴你什麼事情？ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$ 加起來幾度？360度。然後呢？ $\angle A$ 又跟 $\angle C$ 一樣， $\angle B$ 跟哪個角一樣？

297. 學生： $\angle D$ 。

298. 老師：所以我們可以做什麼事情？我把剛剛講的寫下來， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ ，對不對？再來，剛剛不是條件給你， $\angle A$ 跟誰一樣？ $\angle C$ ，所以你可以把 $\angle A$ 用 $\angle C$ 代換，或者是什麼？ $\angle C$ 用 $\angle A$ 代換。然後 $\angle B$ 跟 $\angle D$ 又一樣，所以等一下這邊也可以代換成同一個，可以嗎？來，所以這邊有幾個角？你要用 $\angle C$ 還是 $\angle A$ 代換？

299. 學生： $\angle A$ 。

300. 老師： $\angle A$ ，所以這邊 $\angle C$ 用 $\angle A$ 代換，所以有幾個 $\angle A$ ？

301. 學生： $2\angle A$ 。
302. 老師： $2\angle A$ ，很好，再來，因為這邊又得到是 $\angle B + \angle D$ ，所以就把 $\angle D$ 用誰來代換？
303. 學生： $\angle B$ 。
304. 老師：所以這邊幾個 $\angle B$ ？兩個 $\angle B$ ，所以等於多少？360。再來，因為兩邊都有兩倍的 $\angle A$ 跟兩倍的 $\angle B$ ，所以兩倍拿出去之後，得到兩倍的括號 $\angle A$ 加 $\angle B$ 等於360，兩倍再拿到右邊去，所以就得到 $\angle A + \angle B$ 就是幾度？
305. 學生：180度。
306. 老師：好，所以我們就得到我們剛剛要說的，同側內角怎樣？是互補的，可以嗎？同樣的道理你也可以去說明， $\angle A + \angle D$ 是幾度？
307. 學生：180度。
308. 老師： $\angle A + \angle D$ 是180度，也可以去說明 $\angle D + \angle C$ 幾度？
309. 學生：180度。
310. 老師：再來， $\angle B + \angle C$ 幾度？
311. 學生：180度。
312. 老師：所以，我們就得到 $\overline{AB}$ 跟 $\overline{DC}$ 平行，這是因為 $\angle B$ 加 $\angle C$ 是180度，所以這兩條線平行。同樣的， $\angle A$ 加 $\angle B$ 是180度的話，告訴你哪一件事情， $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 是怎樣？互相平行的。所以兩雙對邊分別平行，請問這是什麼四邊形？

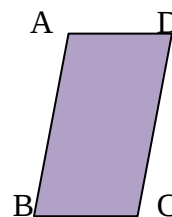
若一四邊形兩組對角相等

則四邊形 ABCD 爲_____

若 $\angle A = \angle C$ 、 $\angle B = \angle D$

則 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

說明：



(圖三十三)

313. 學生：平行四邊形。

314. 老師：有沒有問題？你要去說明一個四邊形是不是平行四邊形的話，我們可以從它基本的定義去說明，也就是它的兩雙對邊去檢查，是不是真的是平行，可以嗎？所以，現在我給你一個四邊形，對角相等的話，我們就可以確定它是一個什麼樣的四邊形？有沒有問題？把講義的部分一樣把它完成之後（圖三十三），你就看第二個部分，如果寫完的你就可以接著看第二小題的部分（圖三十四）。你們邊寫我邊問你們，剛剛我們前面有講，平行四邊形有一個性質，就是它的對邊是相同的，現在反過來問你，如果一個四邊形的對邊相同的話，請問這樣的四邊形是一個什麼樣的四邊形？

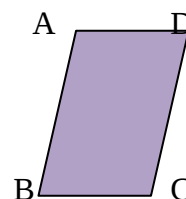
若一四邊形兩雙對邊相等

則四邊形 ABCD 爲_____

若 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} = \overline{DA}$

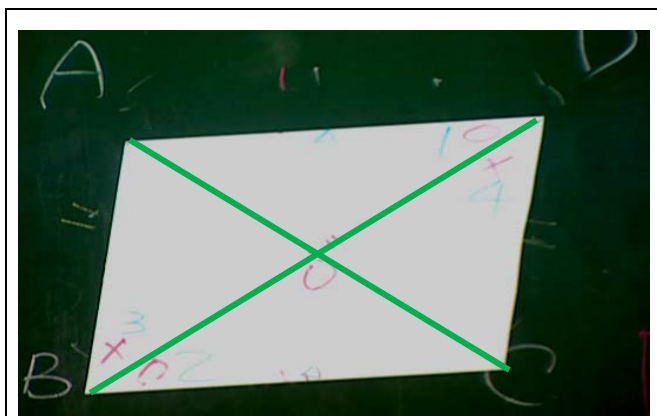
則 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$

說明：



(圖三十四)

對邊相同，也就是 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，還有 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，可以嗎？我們現在要說明的是，現在的條件是 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，要說明它是平行四邊形，你就要去檢查它的兩雙對邊



(圖三十五)

是不是平行。來，有沒有辦法說明兩雙對邊是平行的？你覺得這一邊跟這一邊一樣（ $\overline{AD} = \overline{BC}$ ），還有這邊跟這邊一樣（ $\overline{AB} = \overline{CD}$ ），怎麼樣說這邊跟這邊平行（ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ）？還有這邊跟這邊平行（ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ）？想想看，你可以利用到內錯角、同位角、同側內角，這三個的其中一個去試試看，有沒有人已經想到了？有人已經想到要怎麼寫了嗎？要怎麼說明？想想看，怎麼說平行？可能是同側內角互補，也可能是內錯角相等，也可能同位角相等。你看一下根據這個圖(圖三十五)，你覺得要用哪一個去說明會比較好說明？現在是對邊相同，所以這一邊($\overline{AD}$)跟這邊（ $\overline{BC}$ ）是一樣的，再來這一邊（ $\overline{AB}$ ）跟這邊（ $\overline{CD}$ ）一樣，然後呢？怡廷，可以嗎？上去試試看，想辦法說明，兩雙對邊是不是平行，如果是的話，也就是平行四邊形。

315. 怡廷：這一條。

316. 老師：不對，現在的條件在右邊，現在是兩雙對邊分別相等。

317. 怡廷：相等？

318. 老師：對。

319. 怡廷：相等，所以…。

320. 老師：你要講平行，要講平行就可能會講到角會相等，角會相等的話，你就會想到什麼？剛剛邊相等，你會想到兩個三角形，對不對？然後去證全等，如果現在是兩個角要講到相等的話，你就可以去…，跟剛剛其實很類似，推說…。
321. 怡廷：就是馬上把它切開，然後這個嘛，這個長度啊（ $\overline{AD}$ ）會跟這個（ $\overline{BC}$ ）一樣長。
322. 老師：這是條件給你的，很好，你講可能要面對他們，不要背對他們。
323. 怡廷： $\overline{AD}$ 會等於 $\overline{BC}$ ，所以這個相等，然後 $\overline{AB}$ 會等於 $\overline{DC}$ ，所以這也相等。
324. 老師：OK。
325. 怡廷：然後 $\overline{BD} = \overline{BD}$ ，因為是共同邊，所以 $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ ，所以呢？ $\angle C$ 會等於 $\angle A$ ， $\angle B$ 會等於 $\angle D$ ，然後…。
326. 老師：很好，你到這邊只有得到 $\angle A$ 是等於 $\angle C$ 的， $\angle B = \angle D$ 不是從這裡得到。
327. 怡廷：因為它這兩個加起來（ $\angle B + \angle D$ ），這個圈圈和叉叉（圖三十五），然後等於…。
328. 老師：所以，當一個四邊形的兩個對角，兩雙對角都相等的話，請問這樣的四邊形，剛剛第一個部分我們剛才講過，它是一個什麼樣的四邊形？聲音這麼小聲，它是什麼四邊形？
329. 學生：平行四邊形。
330. 老師：所以我們就確定說當一個四邊形的對邊，兩雙對邊分別相等的時候，我們就可以說明這樣的四邊形是一個什麼樣的四邊形？
331. 學生：平行四邊形。
332. 老師：有沒有問題？
333. 學生：沒有。

334. 老師：這個部分（圖三十四）不寫了，自己寫在講義裡面，可以嗎？

335. 學生：可以。

336. 老師：來，把它補上去，補在講義上，自己寫寫看。我等一下打鐘的時候收講義，所以請你把我們已經上過的部分，自己把該完成的部分趕快完成。有沒有人到這邊沒有跟上的？我們前面講的平行四邊形的性質，也就是它的鄰角、對角、還有對邊、對角線的性質。再來，現在反過來問你，如果有那些性質的話，它會是一個什麼樣的四邊形？我們剛剛講的，當它有兩雙對角(兩組對角)都相等的話，這樣的四邊形，我們就可以確定它是一個平行四邊形。當它給你兩雙對邊分別相等的時候，我們可以確定它也是一個什麼？平行四邊形。可不可以？我現在再改一些條件好了，如果我把一個邊的條件拿掉，就是 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 的條件拿掉，然後我把它改成 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，也就是，現在的條件變成如果只有一雙對邊相等($\overline{AD} = \overline{BC}$)，然後這雙對邊也平行的話($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$)，請問這樣的四邊形會是什麼樣的四邊形？我們也可以得到這個結論嗎？這個其實不用說了($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) 嘛！我們要說的只有後面這個($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$)，對不對？有沒有辦法從這個條件說明到 $\overline{AB}$ 是平行 $\overline{CD}$ 的？有沒有辦法？想想看， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，再來，這兩邊平行($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$)，平行的話，你就可以得到什麼性質（圖三十五）？兩平行線被一條線所截，這條線沒擦掉我們就直接拿來看，所以這邊可以標上 $\angle 1$ 就會等於什麼？ $\angle 2$ ，再來，另外也告訴你， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，這兩邊長($\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$)是一樣，再來還有呢？我們要講到這兩條線平行($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$)，假設這兩角分別為 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ ，如果我們可以說到 $\angle 3 = \angle 4$ 的話，我們就可以說明，這兩條線怎樣($\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$)？是互相平行的，可以嗎？看得出來嗎？看不出來我就轉一下給你看，這樣轉過來，兩平行線被一條線所截，當這兩個角($\angle 3 = \angle 4$)

一樣的時候，我們就可以說這兩條線怎樣？互相平行，可以嗎？有沒有問題？有沒有辦法說到 $\angle 3 = \angle 4$ ？剛剛已經有哪一個條件？這兩邊對應相等（ $\overline{AD} = \overline{BC}$ ），還有這兩角對應相等（ $\angle 1 = \angle 2$ ），我們只要再加一個條件，就可以說這兩個角相等，對不對？來，有沒有已經有很明顯的條件在上面的？我把它寫在這邊好了，剛剛 $\angle 1 = \angle 2$ ，因為 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，對不對？還有 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，再加一個條件，就可以說明這兩個三角形是全等（ $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ ）。如果這兩個三角形全等的話，它對應的 $\angle 3$ 跟 $\angle 4$ 就會相等。還有一個條件，哪一個條件？

337. 學生：共用邊。

338. 老師：有人說共用邊， $\overline{BD}$ 會等於什麼？ $\overline{BD}$ 。所以這兩個三角形會怎麼樣？全等。請問這兩個三角形全等，是根據哪一個全等性質？

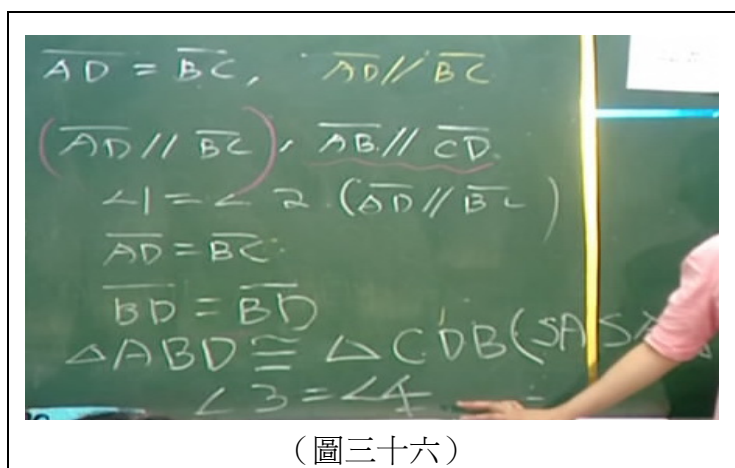
339. 學生：SAS。

340. 老師：兩個三角形，兩邊對應相等的時候，然後夾的這兩邊這個角也對應相等的时候，這兩個三角形就會根據 SAS 全等性質來說明它們是全等的。我們得到這兩個三角形全等，所以對應的角， $\angle 3$ 跟 $\angle 4$ 會不會一樣？

341. 學生：有人說會，有人說不會，

342. 老師： $\angle 3 = \angle 4$ ，也就是告訴你什麼事情？內錯角相等的话，也就是告訴你哪兩條線會平行？ $\overline{AB}$ 跟線段？

343. 學生： $\overline{CD}$ （圖三十六）。



（圖三十六）

344. 老師：可以嗎？有沒有問題？所以，給你一個四邊形，它的對邊相等且平行的時候，請問這是一個什麼樣的四邊形？

345. 學生：平行四邊形。

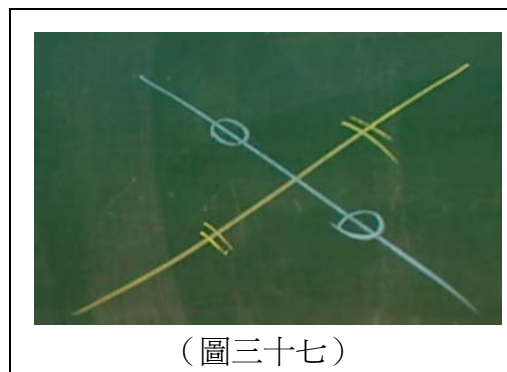
346. 老師：有沒有問題？可以嗎？所以平行四邊形的判別方法，我們剛剛已經講過，對角相等，還有呢？有一個擦掉了，兩組對邊都怎樣？相等。然後，第三個條件是什麼？只要一組對邊相等且平行的話，這樣的四邊形我們也可以說它是什麼？

347. 學生：平行四邊形。

348. 老師：可以嗎？有沒有問題？

349. 學生：沒有。

350. 老師：沒有。沒有就看後面的部分，再來，剩下一個，對角線。如果我問你，有一個四邊形，它的對角線是互相平分的話，請問這樣的一個四邊形，是一個什麼樣的四邊形？知道我在問什麼嗎？我用另外一個方式問好了，給



(圖三十七)

你兩條線段（圖三十七），如果這兩條線段，這一段跟這一段是一樣的(以○表示)，再來這一段跟這一段一樣(以||表示)，請問這樣做出來的四邊形是一個什麼樣的四邊形？

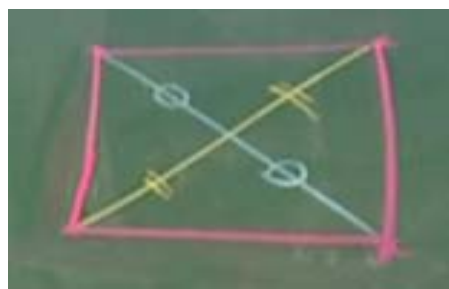
351. 學生：平行四邊形。

352. 老師：你怎麼知道？

353. 學生：對角線平分。

354. 老師：對角線互相平分就一定是平行四邊形嗎？我沒有說。來，我們來做一件事

情，把四個點連起來（圖三十八），看看它像不像平行四邊形，如果不像就是我畫的不正確，我畫的有一點不太準。其實真正在畫的時候，如果你去取這一段跟這一段一樣（以||表示），還有這一段跟這一段一樣的話（以○表示），我們再把這四個點都連起來，畫出來的四邊形，會是一個平行四邊形。



（圖三十八）

。爲什麼它是平行四邊形？想想看，我們要講平行四邊形的話，剛剛有說過要說它的兩雙對邊分別平行，從這邊有沒有辦法說到兩雙對邊分別平行？

355. 學生：可以。

356. 老師：怎麼說？已經看到什麼東西了（圖三十九）？你如果要說兩雙對邊平行，有可能這一個角跟這個角一樣（以x表示），如果這兩個角一樣的話，我們就可以說，這兩邊怎樣？



（圖三十九）

357. 學生：平行（ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ）。

358. 老師：可以嗎？同樣的道理，如果你可以說，這一個角跟這一個角一樣的話（以○表示），我們就可以說，這兩條線也會怎樣？平行（ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ）。所以我們就說明了兩雙對邊平行，這樣的一個四邊形就叫做平行四邊形。來，怎麼樣去說這兩個角對應相等？又回到前面，講到兩個角對應相等的话，相當於要說明什麼？

359. 學生：兩個三角形全等。

360. 老師：請問這兩個三角形會不會全等？
361. 學生：不會。
362. 老師：看起來是不會全等，因為我畫的不是很好。
363. 學生：會全等。
364. 老師：它會全等，為什麼？
365. 學生：因為它有三個條件。
366. 老師：三個條件，哪三個？這邊藍色的(以○表示)。
367. 學生：還有黃色的(以||表示)。
368. 老師：還有？
369. 學生：對頂角。
370. 老師：對頂角也相等，所以根據哪一個全等性質說明它們是全等的？
371. 學生：SAS。
372. 老師：哪一個？SAS 全等性質說明它全等，所以我們就得到對應的角，假設這叫 $\angle 1$ ，這邊叫 $\angle 2$ 好了， $\angle 1$ 就會等於什麼（圖三十九）？
373. 學生： $\angle 2$ 。
374. 老師： $\angle 2$ ，所以就是告訴你，四邊形 ABCD，哪兩條線是平行的？ $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 是平行的，同樣的道理也可以去說，誰跟誰平行？
375. 學生： $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 。
376. 老師：所以就可以確定這是一個什麼樣的四邊形？
377. 學生：平行四邊形。
378. 老師：來，整理一下，如果有一個四邊形它的兩組對角是相同的話，請問這樣的四邊形是什麼樣的四邊形？
379. 學生：平行四邊形。

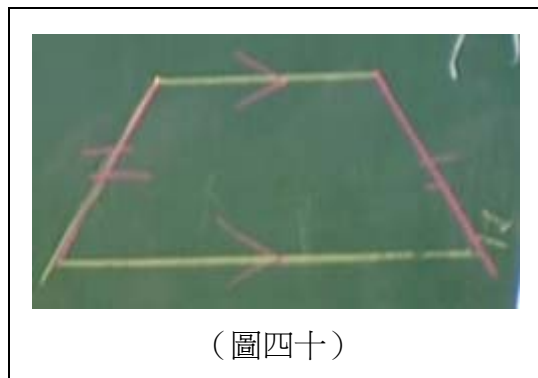
380. 老師：如果有一個四邊形，它的對角線互相平分的話，請問這樣的一個四邊形叫做？
381. 學生：平行四邊形。
382. 老師：如果有一個四邊形，它的一組對邊相等，另外一組對邊平行，請問這是什麼四邊形？
383. 學生：不全等三...，另一邊。
384. 老師：什麼叫不全等，知道我在問什麼嗎？
385. 學生：不知道。
386. 老師：如果現在變成這兩邊對應相等 ($\overline{AD} = \overline{BC}$)，然後這兩邊平行 ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$)，請問這一定是平行四邊形嗎？
387. 學生：不一定。
388. 老師：有沒有人可以畫出符合這個條件，但是它可能是平行四邊形，或者可能不是平行四邊形的圖形，有沒有人可以上來畫畫看？
389. 學生：金俊。
390. 老師：來，誰？金俊嗎？金俊來，快點，來，等你畫完這一個，來，快點...。
391. 學生：金俊快上台啦！金俊上台啊！
392. 老師：快點，等你講完這個，我們才下課。我剛才講的是，如果一個四邊形它的一組對邊等長，但是另外一組對邊是平行的話，請問這樣的四邊形是什麼樣的四邊形？
393. 金俊：可以講什麼？
394. 老師：他們叫你畫一個等腰梯形，然後看一看有沒有。
395. 金俊：我不畫了，我要求救，加油。
396. 老師：來，金俊，來畫一下。

397. 金俊：我不會。

398. 老師：有沒有其他的？來，冠融，你畫一下，快點，趕快，就是去畫一個符合我剛剛講的條件，但是它可能不是平行四邊形的，你可以畫上面，沒關係。

399. 學生：可以畫滿嗎？

400. 老師：隨便你。來，他畫的這是什麼形（圖四十）？符合我剛剛講的，如果有一個四邊形一雙對邊相等，然後另外一雙對邊是平行，請問一定是平行四邊形嗎？不見得，因為找到一個不是平行四邊形的，也就是畫



（圖四十）

出了一個什麼形狀？梯形。可以嗎？有沒有問題？所以要確定它是一個平行四邊形的話，必須一雙對邊相等而且平行的話，這樣的一個四邊形才會是什麼？

401. 學生：平行四邊形。

402. 老師：有沒有問題，可以嗎？如果有一個四邊形，兩雙對邊分別相等的話，請問這樣的四邊形是什麼樣的四邊形？平行四邊形。到這邊有沒有問題？

403. 學生：沒有。

404. 老師：後面面積的部分就留給你們自己當回家功課。這張講義明天再收，今天回家把我們沒有講完的部分完成。面積的部分跟我們前面講到的部分，很多是類似的東西，希望你回家把今天上的部分再整理一下，有沒有問題？

405. 學生：沒有。

406. 老師：沒有，沒有就下課了。

參、教學說明

我覺得這一次我在教學前的準備上，感覺是沒有像上次那樣的充分，我覺得這次在寫教案、活動設計上面，時間是蠻倉促的。因為之前請教授們看教案的時候，都會有好幾次討論的時間，然後都會做好幾次的修正。可是這一次好像只討論過一次，所以我覺得有一點擔心自己會上的不是很好，也就是，也很擔心上的並不能給其他老師做參考。所以，這一次我在上課前，跟上次不同的地方是，我有把我的教案、上課的內容，請同事幫我看一下，有沒有什麼需要修正或改正的地方，或者是內容上有什麼需要調整的地方，他們都會給我一些建議。我覺得這對我來說，在教學上，是一個很不錯，可以讓自己改進的一個方式。再來，這一次上課的方式，跟之前上課方式比較不同的地方就是，以前我比較不會用分組的方式上課，這一次我在上幾何的時候，其實就已經開始給他們做分組討論，給他們很多的空間去對一些幾何的東西做實際的操作，想要讓他們對幾何的部分比較有感覺吧!也想要幫助一些後段的學生，讓他們能夠多參與課堂上的活動。有時候我會感覺我就是用講述方式，沒有做分組活動的時候，都是我一個人在那邊講的口沫橫飛、滿身是汗的時候，我就會覺得我並不是很清楚的知道我的學生到底有沒有吸收到我所要教給他們的東西，這是我蠻擔心的部分。

其實，在最近的上課，也就是在上幾何的時候，我已經調整我自己的教學方法，我希望藉著不同的教學方式，讓更多的學生可以參與課堂上的活動，我就採取了分組，然後讓他們每個人都有上台表現的機會。之前在上課的時候，我都是指定，課本的內容或一些概念，會指定說哪一組講哪一個部分、哪一個題目。然後他們其實每一組裡，每個人都有上台表現的機會，連學習比較慢的那些同學，也會藉著這樣子的方式，也會上台去講解，會跟同一組的同學去做討論。有些學生，可能同一組的人沒有辦法教他的話，就是教的部分他沒辦法聽得懂的話，我感覺他們比較會主動跑來找我問問題。

以前每次上課的時候，問問題同學都是前段的同學，我發現我用這樣子的方式之後，後面那一些跟的比較慢的同學，因為要上台講，然後他又不想害到他那一組的同學，所以就會很想把他要講的部分，弄會、弄懂，就變成是比較會主動來找我問問題，我覺得對他們來說，可能在學習上應該是會有一些幫助吧！然後我也覺得這樣的方式，應該會讓他們學到比較多的東西，比起我自己一個人在上面一直講，他們在下面聽，而我也不知道學生到底聽懂還是聽不懂，因為他們有時候不是很有反應的樣子。所以有時候我就會覺得自己也需要對自己的教學做一些調整，針對不同的課程內容，或者是不同的學生，做這樣子的調整，我覺得可以讓學生學習到比較多。除了課堂上的知識之外，我覺得在他們的表達能力方面，還有跟同學之間的互動，也會有一些幫助。

整個課程的設計，第一節課的部分，主要是以平行四邊形的定義，一些相關的名詞，還有它的一些性質的部分去做介紹。剛開始是比較著重在讓他們用實際操作的方式，也就是利用扣條，去觀察平行四邊形的一些性質，例如鄰角、對角，還有對邊的關係。有一個部分，我覺得可能沒有做得很好，就是他們在使用量角器的部分，可能我在事後，需要做針對這一個部分再去加強他們這個部分。然後，再來就是除了對角、鄰角、對邊和它的一些性質之外，還希望他們對於它的對角線的性質，也能夠利用活動去觀察。也希望他們透過觀察，讓不同的同學上來講述之後，能讓不同的同學再把同學講述的部分，用比較完整的記錄方式寫下來。學生們在寫紀錄的時候，其實我發現，對於前段的學生，這個部分可能比較沒問題，可是我覺得對後段的學生，可能需要更多的時間再給他們做練習。我今天就是點到一個同學，那個學生我沒有預期他會在下課前，講蠻久的，好像有點搞不清楚他自己要說明的東西是什麼，就是要記錄的東西是什麼。我想，可能是他在學習上有問題，我覺得學生在學某一部分的時候，他們好像有點在背東西，並沒有完全理解我們所要教給他們的。我覺得這個部分可能是

我要加強的部分，就是讓學生對於所學的東西，不要用記憶的方式，而要教他們用理解的方式，去理解所要學的東西。

我覺得他們今天上課的表現，好像沒有之前那麼的有反應，就是感覺他們今天跟平常上課有一些不同。可是我比較希望他們表現得像平常一樣活潑、比較開放一點，有問題就會提出來問，我不知道是不是因為讓他們這樣子自由上台去講，所以感覺他們比較沒有什麼反應。我覺得可能用指定的方式，他們就會針對他們不會的地方去做討論，然後，可能會學到比較多的東西。所以這是在教學上要再加強的地方，就是多嘗試用不同的方式，我希望可以讓更多的學生可以學到更多的我上課想要教給他們的東西。

肆、教學後的省思

本次的教學單元為平行四邊形，課程時間為兩節課共 90 分鐘，中間有 10 分鐘的休息時間。教學單元預計的教學活動共有五個，但因為時間的關係，只進行到第四個教學活動。

本次教學活動的對象為國二學生，為教學者擔任導師班的學生，班上的氣氛略為活潑，平常上課時與老師的互動良好，所以對於老師所提出的問題都會回答。錄影當天採用分組教學的目的是為了讓學生之間能有充分討論，但平常上課的座位會視課程內容安排，較少採用分組的方式，所以學生在同組之間的討論氣氛似乎不如預期。在回答問題或上台講解時，有些同學可以將自己的想法清楚記錄與表達出來，但仍有部分同學雖然能記錄，但在表達上仍須加強，這是自己在未來教學上需要再多注意的地方。

在活動進行方面，本次的教學活動中用到相當多的平行線性質與全等性質，所以學生要能對這次教學活動有所了解必須對此相當的熟悉，才能較快的進入狀況。老師在上課中會點名一些學生上台寫與講解，他們較多是程度不錯的孩子，由於怕耽誤太多的上課時間，感覺上有點忽略了後段學生，但後段學生在活動中仍能用心參與課堂活動，同學間的互動也是不錯的，不過這也是往後教學上自己要注意的地方，或許讓後段學生有更多參與活動的機會與表現機會，會讓他們更想要學好課程中所要學習的概念，且有更多嘗試及發現錯誤機會而及時給予釐清，對他們的學習或許能有更多的幫助。

整個流程上來說，在教具呈現方面效果沒有預期的好，尤其拍攝起來效果，因光線、角度或某些因素，導致有些上課畫的線條、文字等，都看不太清楚，還好實際教學時學生仍然可以看清楚，不過這是以後教學時在教具準備上需要多留意的地方。

最後，雖然本次活動重點多為概念的理解與性質證明，但是為了完整的學習，多練習還是必要的，所以老師需要再多給學生一些與平行四邊形性質相關的練習，讓學生更熟悉性質的應用。

三角形重心

壹、教學活動設計

一、教學年級：九年級上學期

二、教 學 者：台北市重慶國中 蔡佩旻 老師

三、教學目標：

1. 能知道三角形中線的交點就是重心。
2. 能瞭解重心的性質。
3. 能應用三角形重心的性質解決問題。

四、活動目標：

【活動一】瞭解三角形重心的意義。

【活動二】能證明三角形的三中線會交於一點與重心的性質。

【活動三】瞭解與證明重心與面積相關性質。

【活動四】能解決正三角形、等腰三角形、直角三角形與一般三角形…等與重心性質相關應用。

五、教學概要說明：

學生前面已經學過三角形的內心與外心意義及其相關性質。本單元主要是討論重心的意義及應用其相關性質解決問題。課程活動中先透過操作讓學生去找物體的重心後瞭解重心的意義，進而再針對三角形的重心作相關討論，並證明三角形的重心會交於一點及重心到頂點距離是重心到對邊中點距離的兩倍。與重心相關的面積性質則針對兩個部分作討論：第一個部分是三角形三中線會將三角形面積六等分，第二個部分是重心與三角形三頂點連線所構成的三個三角形面積相等，除了讓學生瞭解其性質外，並透過各組討論讓學生能證明面積六等分的性質。

瞭解了重心相關性質後，並針對不同圖形作相關應用討論：就正三角形而言，能瞭解正三角形的內心、外心、重心為同一點；就等腰三角形而言，能瞭解外心與重心會在同一直線上；就直角三角形而言，透過外心性質去算與重心相關問題。除此之外也能將此性質應用到解決平行四邊形及矩形問題。

六、教學活動設計：

【活動一】瞭解三角形重心的意義。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 重心的意義	1. 老師自行準備一個不規則形狀硬紙板（越大越精確，紙板使用兩面，一面吊鐵線，鐵線上勾一重物，另一面畫上交點。） 2. (1) 觀察並提問：由各邊吊線懸吊後的鉛垂線描出的線，這些線會有什麼特性呢？是不是會交於一點呢？會位於物體的哪裡呢？有沒有可能跑到外面？ (2) 用手指或筆尖頂住交點，看看是否平衡？	• 老師實作：利用線在任意多邊形的邊上或頂點吊線，在紙板上從懸吊處向下畫鉛直線。（可多做幾次） • 學生觀察並回答交於一點。 • 說明：由實驗發現這個點，也就是會讓物體平衡的點，在物理上，是經實驗找	• 會找出任何物體的重心。

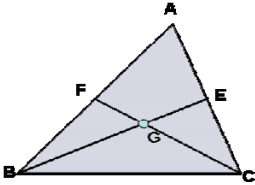
• 三角形重心	3.若以三角形情況來討論:老師準備多個三角形(鈍角、銳角、直角)如下圖:	到的近似位置，爲了方便，命名這個點叫做重心，數學上稱爲重心或幾何中心。(每一個物體都有重心，就是物體均勻密度的中心) • 視情況由老師操作或學生分組操作。	• 會找出三角形的重心。
----------------	---	---	---------------------

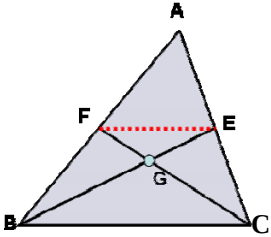
	老師操作：在各種不同三角形的各頂點用剛剛的方法去懸吊並畫上線。 4.老師提問： (1)做完兩條吊線後，請學生猜猜看第三條會不會交於一個點？交點有可能會在三角形外部嗎？ (2)用手指或筆尖頂住交點，看看是否平衡？ (3)請大家猜猜看這些線是以前三角形學過的垂線、中線、角平分線、中垂線的哪一種？	- 學生觀察。 - 若答不出來時，可給提示或是另外說明澄清下列各種直線不同(可先在不同三角形畫上各種線)。 - 垂線：過各頂點做與各對邊垂直的直線。 - 中線：三角形的各頂點與各對邊中點連線。 - 角平分線：內角的角平分線。 - 中垂線：過各邊中點與各邊垂直的直線。	能直接目視並回答。
--	--	--	---

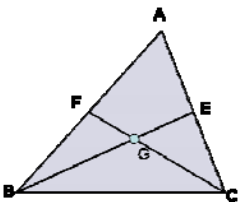
	5. 由操作活動發現，任意三角形三中線會交於一點，此點剛好與物理上所說的物體的重心是同一點，為方便起見，我們就說重心就是三角形三中線的交點。 6. 結論 (1) 三角形重心就是三條中線交點。 (2) 三角形的重心，恆在三角形的內部。		
--	--	--	--

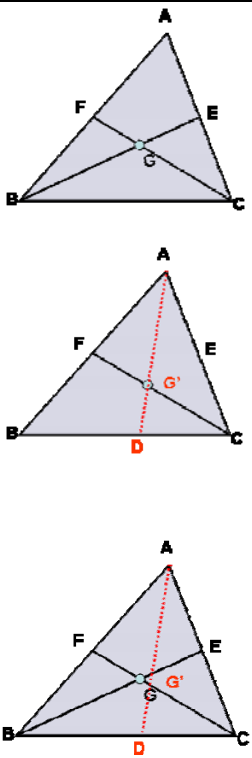
【活動二】能證明三角形的三中線會交於一點與重心的性質。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 重心到一頂點的距離與它到對邊中點距離的關係	1. 用數學論證去說明三角形的三中線會交於一點。 2. 說明三角形三中線交於一點之前，先討論與重心有關的中線長度關係。 3. 在一個 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為兩中線，且交於 G 點。 試說明： (1) $\overline{BG} : \overline{GE} =$	• 可先讓學生想一想要如何說明。 • 利用兩三角形相似，對應邊成比例及兩邊中點連	• 能利用相似性質說明中線長的關係。

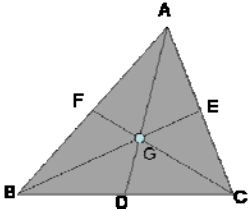
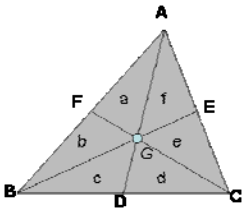
	$\overline{CG} : \overline{GF} = 2:1$ (2) $\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BE}$ $\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CF}$  • 老師提問： (1) 猜猜看 $\overline{BG}$ 與 $\overline{GE}$ 有什麼關係呢？$\overline{CG}$ 與 $\overline{GF}$ 有什麼關係？ (2) 長度比會想到跟以前學的什麼單元有關係呢？ (3) 要找哪兩個三角形呢？哪兩個三角形看起來很像呢？ (4) 要討論 $\triangle BCG$ 與 $\triangle EGF$，所以要先連接哪一條線呢？	線性質。 • 學生可能的回答： (1) 相等。 (2) 兩倍。 • 學生可能的回答： (1) 相似形。 (2) 比例。 • 學生可能的回答： (1) $\triangle BFG$ 與 $\triangle CGE$。 (2) $\triangle BCG$ 與 $\triangle EGF$。 (請學生說明原因)	• 能回答：連接 $\overline{EF}$。
--	--	---	---

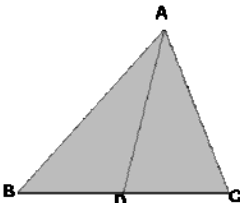
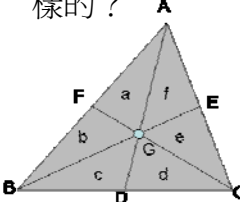
• 三中線交於一點	(5)這兩個三角形有什麼關係呢？ (6)如何判斷這兩個三角形，$\triangle EFG$ 與 $\triangle BCG$ 相似呢？ 	• 學生可能的回答： (1)相似。 (2)一樣。 • 每組學生自行練習寫。 • 可請一學生上台寫，另一學生上台說明。 • 詳細說明： 連接 $\overline{EF}$ $\triangle BCG$ 與 $\triangle EFG$ $\because E, F$ 為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 中點 $\therefore \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ $\because \angle GCB = \angle GFE$、 $\angle GBC = \angle GEF$ (內錯角) $\therefore \triangle EFG \sim \triangle BCG$ (AA相似) $\therefore \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{CG} : \overline{GF} = \overline{BC} : \overline{EF} = 2 : 1$ $\therefore \overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BE}$ 且 $\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CF}$	• 會證明三中線會交於一點。
------------------	---	---	-----------------------

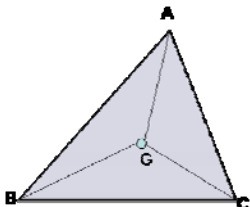
	一點。剛剛經過實驗，發現三角形的三條中線會交於一點，但是要如何說明任意三角形的三條中線一定會交於一點呢？ • 在一個 $\triangle ABC$ 中，若 G 為 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 兩中線交點。試說明：三中線交於一點。  (1) 已知其中兩條中線交點 G，假設交於另一個點 G'？ (2) 根據前面得到重心與中線長度關係，由 G 為 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 兩中線的交點可得到什麼？由 G' 為 $\overline{AD}$、$\overline{CF}$ 兩中線的交點可得到什麼？	試能不能從已知一路走到要證明的地方，反證就是直接證走不通，就反證。 • 提示：利用反證法，可假設有不同交點。	• 能回答： 作另一中線 $\overline{AD}$，並假設其與 $\overline{CF}$ 的交點為 G' • 能回答： $\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CF} \text{ , }$ $\overline{CG'} = \frac{2}{3} \overline{CF}$
--	---	---	---

	 (3)由上面得到式子，有沒有可能同一直線上找到兩個點讓 $\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CF}$、 $\overline{CG'} = \frac{2}{3} \overline{CF}$? 代表G 與G' 兩點有什麼關係呢？又代表什麼呢？ 5.結論： 三角形三中線會交於同一點，此點就是物體的重心。	• 畫兩個圖說明： 作另一中線 $\overline{AD}$，並假設其與 $\overline{CF}$ 的交點為G'，根據前面結論可知 $\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CF}$、 $\overline{CG'} = \frac{2}{3} \overline{CF}$ 故 G' 與G重合。	• 能回答： 找不到同一個點，代表三角形三中線會交於同一點。
--	---	---	--

【活動三】瞭解與證明重心與面積相關性質。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
三條中線會將三角形面積六等分	1.我們知道三角形三條中線會交於一點，三條中線會將三角形分成六個三角形區域，猜猜看這六個三角形有何關係？  設G是$\triangle ABC$的重心，連接$\overline{AG}$、$\overline{BG}$、$\overline{CG}$並分別交$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$於D、E、F點 試說明： $\begin{aligned} \triangle GAF \text{ 面積} &= \\ \triangle GBF \text{ 面積} &= \\ \triangle GBD \text{ 面積} &= \\ \triangle GDC \text{ 面積} &= \\ \triangle GCE \text{ 面積} &= \\ \triangle GAE \text{ 面積} &= \frac{1}{6} \\ \triangle ABC \text{ 面積} &= \end{aligned}$ 2.說明六個三角形面積關係之前，先複習以前學過的經驗。	- 學生可能會猜測並回答： (1)一樣大。 (2)全等。 - 爲了方便說明，將六塊三角形面積分別用簡單符號表示： $\begin{aligned} \triangle GAF \text{ 面積} &= a \\ \triangle GBF \text{ 面積} &= b \\ \triangle GBD \text{ 面積} &= c \\ \triangle GDC \text{ 面積} &= d \\ \triangle GCE \text{ 面積} &= e \\ \triangle GAE \text{ 面積} &= f \end{aligned}$ 	- 瞭解三中線會將三角形面積切割成六等分。 - 用代數等量公理說明面積關係。

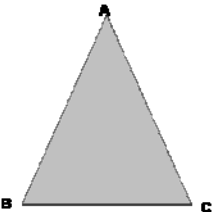
• 重心與三頂點連線所分成三個三角形面積關係 (面積三等分)	• 任一 $\triangle ABC$，若 D 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $\triangle ABD$ 面積與 $\triangle ADC$ 面積關係為何？為什麼呢？  • 由舊經驗可知道，哪些面積是一樣的？  • 試著利用這些關係找出六個三角形面積關係。		• 能回答： (1)面積一樣。 (2)等底同高。 • 能回答： $c=d, a=b, e=f$ $a+b+c=f+e+d$ $a+e+f=b+c+d$ $a+b+f=c+e+d$ • 能說明： $a+b+c=f+e+d$ $a+b=f+e \quad (\because c=d)$ $2a=2f \quad (\because a=b, e=f)$ $a=f$ $\therefore a=b=e=f$ $a+e+f=b+c+d$ $e+f=c+d \quad (\because a=b)$ $2e=2c \quad (\because e=f, c=d)$ $e=c$ $\therefore a=b=c=d=e=f$
--	--	--	--

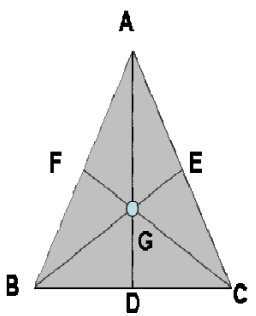
	即 $\triangle GAF$ 面積 = $\triangle GBF$ 面積 = $\triangle GBD$ 面積 = $\triangle GDC$ 面積 = $\triangle GCE$ 面積 = $\triangle GAE$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積 當然也可以說 $\triangle GBC$ 面積 = $\triangle GCA$ 面積 = $\triangle GAB$ 面積 = $\frac{1}{3}$ $\triangle ABC$ 面積  3.結論： 三角形的三中線 將三角形面積六 等分。 三角形的重心到 三頂點的連線，將 此三角形面積三 等分。		
--	---	--	--

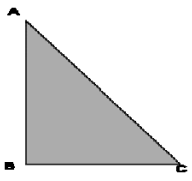
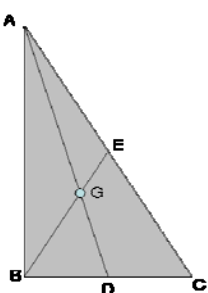
【活動四】能解決正三角形、等腰三角形、直角三角形與一般三角形…等與重心性質相關應用。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 正三角形重心性質應用	〔p.313 學習單，例題一〕 如下圖， $\triangle ABC$ 為正三角形		• 能知道正三角形外心、內心、重

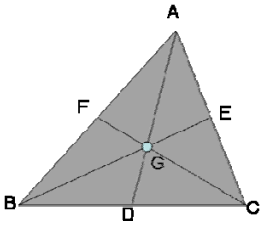
	1. 觀察三角形重心、外心、內心有什麼關係？（試簡單說明它們的關係） 2. 如下圖，$\triangle ABC$ 為正三角形，若 $\overline{AB} = 10$，則 (1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{1cm}}$、 $\overline{GD} = \underline{\hspace{1cm}}$、 $\overline{CG} = \underline{\hspace{1cm}}$ (2) $\triangle ABC$ 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$、 $\triangle ABG$ 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$、 $\triangle BDG$ 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$、 四邊形 BDGF 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$。	• 說明 利用 $\triangle ABC$ 為正三角形 (1) $\overline{AD} = \overline{CF} = \overline{BE}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB}$ $\overline{AG} = \overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ ($\because \overline{AD} = \overline{CF}$，G 為重心) $\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ (2) $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{AB}^2$ $\triangle ABG$ 面積 $= \frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積 $\triangle BDG$ 面積 $= \frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積 四邊形 BDGF 面	心意義。 • 能知道正三角形角平分線、中線、中垂線是同一條，所以正三角形重心、外心、內心是同一點。
--	--	---	---

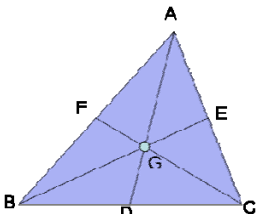
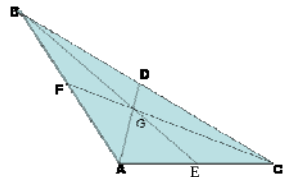
• 等腰三角形重心性質應用	3.結論： (1)正三角形的內心、重心、外心為同一點，三中線的長相等。 (2)重心 G 到頂點 A 的距離 = $\frac{2}{3}$ 高，重心 G 到邊 $\overline{BC}$ 的距離 = $\frac{1}{3}$ 高 〔p.313 學習單，例題二〕 4.如下圖，$\triangle ABC$ 為等腰三角形  (試著畫出重心、內心、外心) 5.重心與內心、外心有什麼關係？	積 $= \frac{1}{3} \triangle ABC \text{ 面積}$	• 能畫出重心、內心、外心。 • 能說出： 頂角平分線、過頂點做中線、底
----------------------	---	---	--

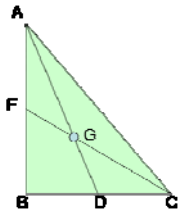
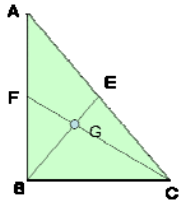
	6. 如下圖，$\overline{AB} = \overline{AC} = 13$、$\overline{BC} = 10$，  則 (1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{1cm}}$、 $\overline{GD} = \underline{\hspace{1cm}}$、 $\overline{BG} = \underline{\hspace{1cm}}$、 $\overline{GE} = \underline{\hspace{1cm}}$ (2) $\triangle ABC$ 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$、 $\triangle ABG$ 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$、 $\triangle BDG$ 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$、 四邊形 BDGF 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$。 7. 結論： 等腰三角形內心、重心、外心在<u>同一條直線上</u>。	• 說明： G 為 $\triangle ABC$ 之重心 (1) $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ $\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ $\overline{BG}^2 = \overline{GD}^2 + \overline{BD}^2$ $\overline{GE} = \frac{1}{2} \overline{BG}$ $(\because \overline{BG} : \overline{GE} = 2:1)$ (2) $\triangle ABG$ 面積 = $\frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積 $\triangle BDG$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積 四邊形 BDGF 面積 = $\frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積	邊中垂線為同一條。 • 能算出正確的答案。
--	--	--	-------------------------------------

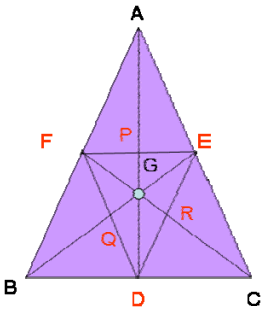
• 直角三角形重心性質應用	[p.314 學習單,例題三] 8.如下圖，$\triangle ABC$ 為直角三角形  試著畫出重心、內心、外心。 9.重心與外心有什麼關係？ 10.若 G 為重心，$\overline{AB} = 8$、$\overline{BC} = 6$，  則 (1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{1cm}}$、 $\overline{GD} = \underline{\hspace{1cm}}$、 $\overline{BG} = \underline{\hspace{1cm}}$、 $\overline{GE} = \underline{\hspace{1cm}}$ (2) $\triangle ABC$ 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$、 $\triangle ABG$ 面積為 $\underline{\hspace{1cm}}$、	• 說明： $\triangle ABC$ 為直角三角形，且 G 為重心 (1) $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ $\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ E 為外心 $\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{BE}$ $\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BE}$ $= \frac{2}{3} \overline{AE}$ $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \overline{AC}$	• 能畫出直角三角形的重心、外心和內心。 • 能說出直角三角形外心在斜邊中點上。 • 能算出正確的答案。
----------------------	--	---	---

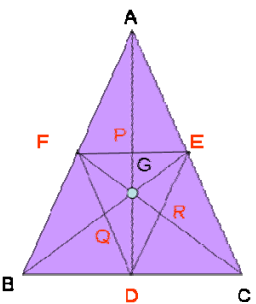
• 一般三角形重心性質應用	$\triangle BDG$ 面積為_____、四邊形 $DGEC$ 面積_____。 11.結論： (1)直角三角形內心、重心、外心在<u>同一直線</u>上。 (2)重心 G 到直角頂點 B 的距離 = $\frac{1}{3}$ 斜邊長，重心到外心的距離 = $\frac{1}{6}$ 斜邊長。 〔p.314 學習單，例題四〕 12.如下圖，$\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{AD} = 12$、$\overline{BE} =$	$= \frac{1}{2} \overline{AC}$ $\overline{GE} = \frac{1}{2} \overline{BG}$ (2) $\triangle ABG$ 面積 = $\frac{1}{3}$ $\triangle ABC$ 面積， $\triangle BDG$ 面積 = $\frac{1}{6}$ $\triangle ABC$ 面積， 四邊形 $DGEC$ 面積 = $\frac{1}{3}$ $\triangle ABC$ 面積 • 說明： (1) $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ $\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BE}$	• 能算出正確的答案。
----------------------	--	---	--------------------

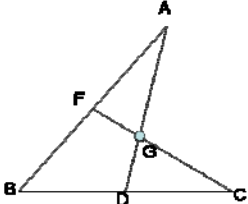
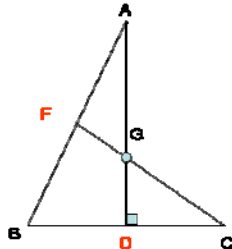
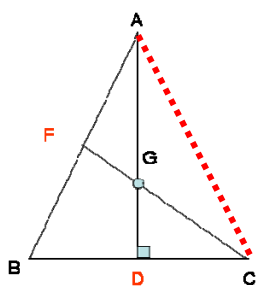
	24、$\overline{CF} = 18$、 $\triangle ACG$ 面積為 10，  則 (1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\overline{BG} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\overline{CG} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\overline{DG} + \overline{GE} + \overline{GF}$ $= \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\triangle ABC$ 面積 $= \underline{\hspace{2cm}}$ $\triangle AFG$ 面積 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 四邊形 BDGF 面積 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 〔p.315 學習單，練習 1〕 13. 如下圖，$\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{AG} = 6$、$\overline{BG} = 4$、$\overline{CG} = 5$，$\triangle AFG$ 面積為	$\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CF}$ (2) $\overline{DG} + \overline{GE} + \overline{GF}$ $= \frac{1}{3} \overline{AD} + \frac{1}{3} \overline{BE} + \frac{1}{3} \overline{CF}$ $= \frac{1}{3} (\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF})$ (3) $\triangle ABC$ 面積 $=$ $3 \triangle ABG$ 面積 $\triangle AFG$ 面積 $=$ $\frac{1}{2} \triangle ACG$ 面積 四邊形 BDGF 面積 $= \triangle ACG$ 面積 • 說明： (1) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}$ $= \frac{3}{2} \overline{AG} + \frac{3}{2} \overline{BG} + \frac{3}{2} \overline{CG}$	• 能算出正確的答案。
--	--	---	--------------------

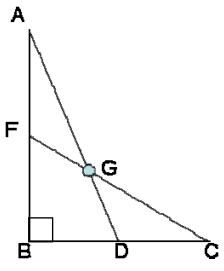
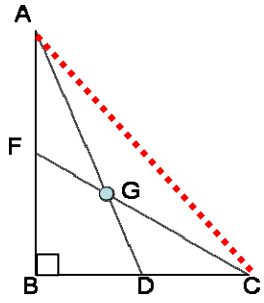
	4，則 (1) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\triangle ABC$ 面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 	$= \frac{3}{2}$ ($\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}$) (2) $\triangle ABC$ 面積 = 6 $\triangle AFG$ 面積	
	14. 如下圖，$\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{DG} = 3$、$\overline{FG} = 4$、$\overline{EG} = 5$，$\triangle ABC$ 面積為 48，則 (1) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\triangle ABG$ 面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ $\triangle AFG$ 面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 四邊形 BDGF 面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 	• 說明： (1) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}$ $= 3\overline{DG} + 3\overline{FG}$ $+ 3\overline{EG} = 3(\overline{DG} + \overline{FG} + \overline{EG})$ (2) $\triangle ABG$ 面積 = $\frac{1}{3}$ $\triangle ABC$ 面積 $\triangle AFG$ 面積 = $\frac{1}{6}$ $\triangle ABC$ 面積 四邊形 BDGF 面積 $= \frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積	• 能算出正確的答案。

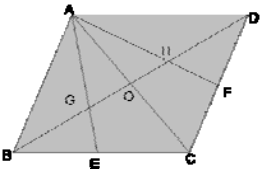
• 三角形重心與其三邊中點所形成新的三角形關係	[p.315 學習單，練習 2] 15. 如下圖，直角 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$、$\overline{CF}$ 為中線，且交於 G 點。已知 $\overline{AB} = 6$、$\overline{BC} = 9$，則四邊形 BDGF 面積 = ?  16. 如下圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為中線，且交於 G 點。已知 $\overline{BE} \perp \overline{CF}$，$\overline{BE} = 15$、$\overline{CF} = 9$，則 $\triangle ABC$ 面積 = ?  17. 如下圖，$\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若	• 說明： 四邊形 BDGF 面積 = $\frac{1}{3}$ $\triangle ABC$ 面積 • 說明： $\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 面積} &= 3 \triangle BGC \text{ 面積} \\ &= 3 \times \frac{1}{2} (\overline{BG} \times \overline{CG}) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{BE} \times \frac{2}{3} \overline{CF} \right) \\ &= \frac{2}{3} \overline{BE} \times \overline{CF} \end{aligned}$ • 三角形兩腰中點連線性質與重心性質應用。	• 能算出正確的答案。 • 能算出正確的答案。 • 能算出正確的答案。
--------------------------------	---	--	--

	$\overline{AD} = 12$、$\overline{BE} = 9$、$\overline{CF} = 15$，則 (1) $\overline{AP} = ?$ $\overline{PD} = ?$ (2) $\triangle DEF$ 三中線長的和為何？ (3) $\triangle DEF$ 面積： $\triangle ABC$ 面積=?  18.結論：$\triangle ABC$ 的重心 G 與 $\triangle DEF$ 的重心為同一點，且 $\triangle ABC$ 中線長為 $\triangle DEF$ 中線長的兩倍。	• 說明： (1) $\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AD}$ $= \overline{PD}$ (2) $\overline{PD} + \overline{FR} + \overline{EQ} = \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CF} + \frac{1}{2} \overline{BE}$ $= \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{CF} + \overline{BE})$ (3) $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ $\overline{EF} : \overline{BC} = 1:2$ $\triangle DEF$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = $\overline{EF}^2 : \overline{BC}^2 = 1:4$ • 教師可先提問： (1) 請學生觀察 $\overline{EF}$ 特性 (2) 觀察 $\overline{AP} : \overline{PD} = ?$	
--	---	--	--

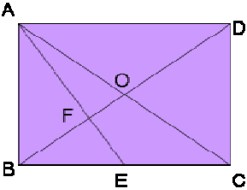
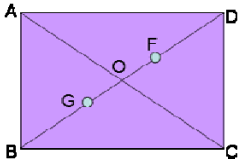
• 特殊形與三角形重心	[p.316 學習單，練習 3] 19. 如下圖，$\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{GD}=4$、$\overline{GE}=5$、$\overline{GF}=6$，$\triangle ABC$ 面積 = 20，則 (1) $\triangle DEF$ 三中線長的和為何？ (2) $\triangle DEF$ 面積 = ？  [p.316 學習單，例題六] 20. 如圖，$\triangle ABC$ 中，D、F 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AB}$ 的中點，且交於 G 點。則 (1) $\overline{AG} : \overline{GD} = ?$ $\overline{CG} : \overline{GF} = ?$ (2) 若 $\overline{CG} = 18$，求 $\overline{GF} = ?$	• 說明： (1) $\overline{PD} + \overline{FR} + \overline{EQ}$ $= \frac{3}{2} \overline{GD} + \frac{3}{2} \overline{FG}$ $+ \frac{3}{2} \overline{EG} = \frac{3}{2}$ $(\overline{GD} + \overline{FG} + \overline{EG})$ (2) $\triangle DEF$ 面積 = $\frac{1}{4} \triangle ABC$ 面積 • 說明： G 為重心 (1) $\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$ $\overline{CG} : \overline{GF} = 2 : 1$ (2) $\overline{GF} = \frac{2}{3} \overline{CG}$	• 能算出正確的答案。 • 能算出正確的答案。
--------------------	---	---	---------------------------------------

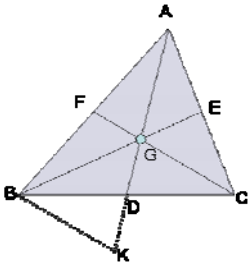
	(3)連結 $\overline{AC}$，若 $\triangle ABC$ 面積為 36，則 $\triangle CDG$ 面積為何？ (4) $\triangle CDG$ 面積為 6，四邊形 BDGF 面積 = ？  [p.316 學習單，練習 4] 21.如下圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 中垂線，F 為 $\overline{AB}$ 的中點，且交於 G 點，若 $\overline{BC} = 16$，$\overline{AB} = 10$，則 (1) $\overline{CF} = ?$ (2) $\triangle ABC$ 面積 = ？ $\triangle CDG$ 面積 = ？ 	(3) $\triangle CDG$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積 (4) 四邊形 BDGF 面積 = $2 \triangle CDG$ 面積  • 說明： (1) $\overline{AD} = 6$， G 為重心， $\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{AD} = 2$ $\overline{CG} = \sqrt{8^2 + 2^2}$	
--	--	--	--

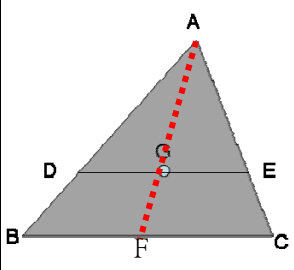
		$= \sqrt{68}$ $= 2\sqrt{17}$ $\therefore \overline{CF} = \frac{3}{2} \overline{CG}$ (2) $\triangle ABC$ 面積 = $\overline{BC} \times \overline{AD} \times \frac{1}{2}$ $\triangle CDG$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC \text{ 面積}$	
	22. 如下圖，$\angle ABC = 90^\circ$，D、F 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AB}$ 的中點，且交於 G 點，若 $\overline{BC} = 12$，$\overline{AB} = 10$，則 (1) $\overline{GF} = ?$ $\overline{AG} = ?$ (2) 四邊形 BDGF 面積 = ? 	 • 說明： (1) $\overline{CF} =$ $\sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{BF}^2}$ $= \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ $\overline{GF} = \frac{1}{3} \overline{CF}$ $\overline{AD} =$ $\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2}$ $= \sqrt{10^2 + 6^2}$	

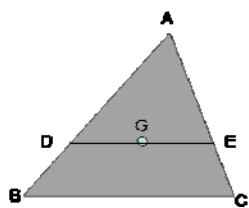
• 重心與平行四邊形	[p.317 學習單，例題七] 23.如下圖，ABCD 為平行四邊形，E、F 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 的中點，$\overline{AE}$、$\overline{AF}$ 分別交 $\overline{BD}$ 於 G、H。若 $\overline{BD} = 18$，則 $\overline{BO} = ?$ $\overline{BG} = ?$ $\overline{GH} = ?$ $\overline{HD} = ?$  (1)平行四邊形對角線性質為何？	$= 2\sqrt{34}$ $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ (2) 連接 $\overline{AC}$，ΔABC 面積 $= \overline{BC} \times \overline{AB} \cdot \frac{1}{2}$ 四邊形 BDGF 面積 $= \frac{1}{3} \Delta ABC$ 面積	• 能回答：對角線互相平分。
-------------------	---	---	-----------------------

	(2) G、H 為 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 的什麼心呢？ (3) 觀察 $\overline{BO}$、$\overline{BG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HD}$ 之間關係。 [p.317 學習單，練習 5] 24. 如下圖，長方形 ABCD 中，$\overline{AB} = 6$、$\overline{AD} = 8$，E 為 $\overline{BC}$ 的中點，則 (1) $\overline{OF} = ?$ $\overline{AF} = ?$ (2) $\triangle AOF$ 面積 = ?	(2) 利用對角線性質及瞭解 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BO}$、$\overline{AE}$ 為中線；$\triangle ACD$ 中，$\overline{AF}$、$\overline{DO}$ 為中線。 (3) $\overline{BO} = \frac{1}{2} \overline{BD}$ $\overline{BG} = \frac{1}{2} \overline{BO}$ $= \overline{HD}$ $\overline{GH} = 2 \overline{GO}$ $= 2 \times \frac{1}{3} \overline{BO}$ $= \frac{2}{3} \overline{BO}$ • 說明： (1) $\overline{OF} = \frac{1}{3} \overline{BO}$ $= \frac{1}{6} \overline{BD}$ $\overline{AF} = \frac{2}{3} \overline{AE}$ (2) $\triangle AOF$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$ 長方形 ABCD 面積 = $\frac{1}{12}$ 長方形 ABCD 面積	• 能回答：重心。 • 能觀察並說明它們之間的關係。
--	--	--	--

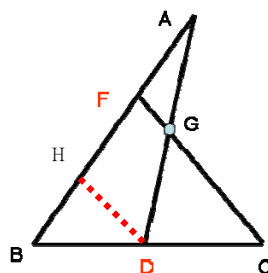
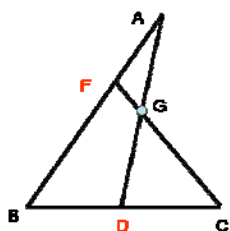
	(3)四邊形 ECDF 面積 = ?  25.如下圖，長方形 ABCD 中，$\overline{AB}=9$、$\overline{AD}=12$，若 G、F 分別為 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 的重心，則 $\overline{GF}=?$  〔p.317 學習單，例題八〕 26.如下圖，$\triangle ABC$ 中，G 為重心，$\overline{AD}=9$、$\overline{BE}=15$、$\overline{CF}=12$。	(3) 四邊形 ECDF 面積 = $\triangle CDO$ 面積 + 四邊形 ECOF 面積 = $\frac{1}{4}$ 長方形 ABCD 面積 + $\frac{1}{6}$ 長方形 ABCD 面積 = $\frac{5}{12}$ 長方形 ABCD 面積 • 說明： $\begin{aligned}\overline{GO} &= \overline{OF} \\ \overline{GF} &= 2\overline{GO} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \overline{OB} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \overline{BD} \\ &= \frac{1}{3} \overline{BD}\end{aligned}$	
--	--	---	--

	若延長中線 $\overline{AD}$ 至 K 使 $\overline{DK} = \overline{GD}$，則 (1) $\triangle GBK$ 的三邊長 $\overline{GB} = ?$ $\overline{GK} = ?$ $\overline{BK} = ?$ (2) $\overline{AB} = ?$ (3) $\triangle ABC$ 面積 = ? 	老師提問： (1) 觀察 $\overline{GK}$ 與 $\overline{AG}$ 關係？ $\overline{BK}$ 與 $\overline{CG}$ 關係？ (2) 觀察 $\triangle ABK$ 為何種三角形？	• 說明： (1) $\because G$ 為重心， $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ $\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ $= \overline{DK}$ 試說明 $\triangle BDK \cong \triangle CDG$ (SAS 全等) (2) 可提示需算出 $\overline{BK} = 8$、$\overline{GK} = 6$、$\overline{BG} = 10$。	• 能回答 $\overline{GK} = \overline{AG}$ $\overline{BK} = \overline{CG}$ • 能回答 直角三角形。
--	--	---	--	---

	(3)觀察 $\triangle BDK$ 面積與 $\triangle ABC$ 面積關係 [p.317 學習單，練習 6] 27.如下圖，$\triangle ABC$ 中，G 為重心，過 G 作 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，求 (1) $\overline{DE} : \overline{BC}$ = _____ : (2) $\triangle ADE$ 周長： $\triangle ABC$ 周長 = _____ : (3) $\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = _____ :	利用商高定理可以知道 $\triangle ABK$ 為直角三角形。 (3)由 $\triangle BDK \cong \triangle CDG$ 說明 $\triangle BDK$ 面積與 $\triangle ABC$ 面積關係 • 說明：  連接 $\overline{AG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 F 點 (1) $\overline{AG} : \overline{AF} = 2 : 3$ $\overline{DE} : \overline{BC} =$ $\overline{AG} : \overline{AF}$ (2) $\triangle ADE$ 周長： $\triangle ABC$ 周長 = $\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ (3) $\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = $\frac{\overline{DE}^2}{\overline{BC}^2}$	• 能回答 $\triangle BDK$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積。
--	---	---	---



28. 如下圖，D 為 $\overline{BC}$ 中點，G 為 $\overline{CF}$ 中點 ($\overline{CG} : \overline{GF} = 1 : 1$)，則 $\overline{AF} : \overline{BF} =$ _____ :



• 說明:
 需過 D 作 $\overline{DH} \parallel \overline{AC}$
 $\overline{BD} : \overline{DC} =$
 $\overline{BH} : \overline{HD} = 1 : 1$
 $\overline{AF} : \overline{FH} =$
 $\overline{AG} : \overline{GD} = 1 : 1$
 $\overline{AF} : \overline{BF} = 1 : 2$

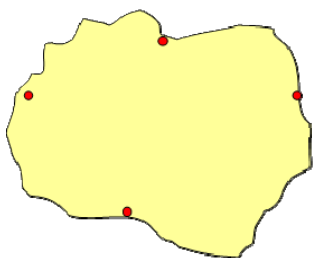
附錄：學習單

班級：_____
姓名：_____

三角形重心

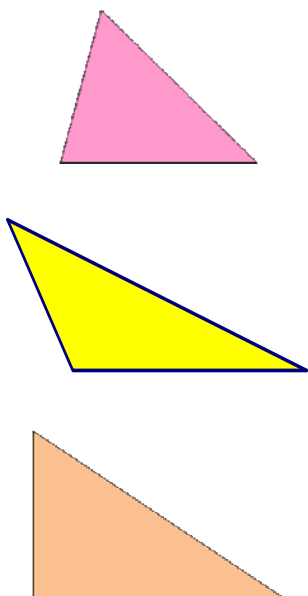
【物體平衡點--_____】

在任意多邊形的邊上或頂點吊線，在紙板上從懸吊處向下畫鉛直線。



【三角形重心】

在各種不同三角形的各頂點用剛剛的方法去懸吊並劃上線（可不可以在其它邊上吊呢？）



- (1)這些線會有什麼特性呢？是不是會交於一點呢？這個點會不會跑到外面？
- (2)用手指或筆尖頂住交點，看看是否平衡？
- (3)由實驗發現這個點，也就是會讓物體平衡的點（位於物體的_____），在物理上，爲了方便，命名這個點叫做_____，數學上稱爲_____或幾何中心。

- (1)猜猜看第三條會不會交於一個點？交點會位在三角形的哪裡呢？
- (2)用手指或筆尖頂住交點，看看是否平衡？
- (3)請大家猜猜看這些線是以前三角形學過的垂線、中線、角平分線、中垂線的哪一種？

垂線：

中線：

角平分線：

中垂線：

發現：任意三角形三條_____會交於一點，此點剛好與物理上所說的物體的重心是同一點，所以爲方便我們就說_____就是三角形_____三中線交點。

結論：

- (1)三角形重心就是_____交點。
- (2)三角形的重心，恆在三角形的_____部。（填內、外）

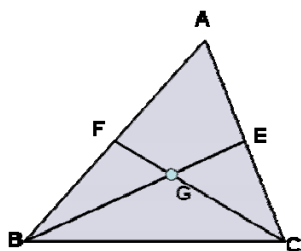
【重心到一頂點的距離與它到對邊中點距離關係】

【已知】一 $\triangle ABC$ ，若 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為兩中線，且交於G點。

【求證】

(1) $\overline{BG} : \overline{GE} = \overline{CG} : \overline{GF} = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\overline{BG} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{BE}$ 、 $\overline{CG} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{CF}$



【證明】

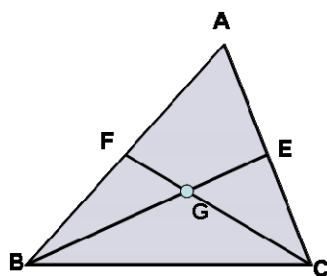
結論：

三角形的重心到一頂點的距離等於它到對邊中點距離的____倍。即重心到頂點的距離是過這頂點的中線長的_____。

【三角形的三中線會交於一點】

【已知】一 $\triangle ABC$ 中，若G為 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 兩中線交點。

【求證】三中線交於一點。(提示：反證法，可假設有不同交點)



【證明】

【重心性質：面積等分-1 三角形的三中線分原三角形為六個三角形面積關係】

【已知】設 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，連接 $\overline{AG}$ 、 $\overline{BG}$ 、 $\overline{CG}$ 並分別交 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 於 D 、 E 、 F 點

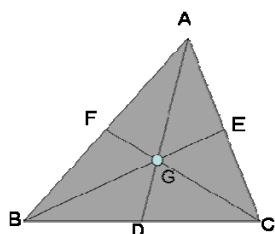
【求證】

$\triangle GAF$ 面積_____ $\triangle GBF$ 面積_____

$\triangle GBD$ 面積_____ $\triangle GDC$ 面積_____

$\triangle GCE$ 面積_____ $\triangle GAE$ 面積_____

= _____ $\triangle ABC$ 面積。



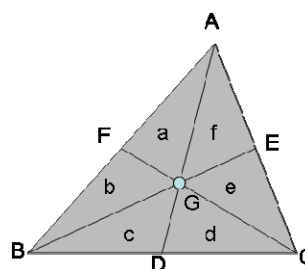
【證明】

為方便說明，假設六個三角形面積分別為

$\triangle GAF$ 面積= a 、 $\triangle GBF$ 面積= b 、

$\triangle GBD$ 面積= c 、 $\triangle GDC$ 面積= d 、

$\triangle GCE$ 面積= e 、 $\triangle GAE$ 面積= f



【重心性質：面積等分-2 三角形重心到三頂點的連線分原三角形為三個三角形面積關係】

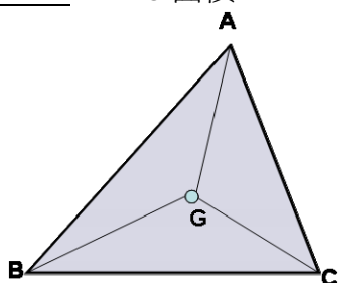
設 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，連接 $\overline{AG}$ 、 $\overline{BG}$ 、 $\overline{CG}$ ，則

$\triangle GBC$ 面積

_____ $\triangle GCA$ 面積

_____ $\triangle GAB$ 面積

= _____ $\triangle ABC$ 面積



結論：

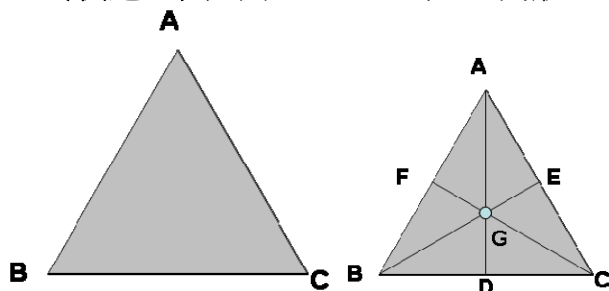
1. 三角形的三中線分原三角形為六個面積_____三角形。

2. 三角形重心到三頂點的連線分原三角形為三個面積_____三角形。

【重心應用題—特殊三角形與重心性質應用】

【正三角形重心性質應用】

〔例題一〕如圖， $\triangle ABC$ 為正三角形



（試著畫出重心、內心、外心）

結論：

- (1) 正三角形內心、重心、外心_____。
- (2) 三中線長關係_____
- (3) 重心 G 到頂點 A 的距離 = _____ · 高，
重心 G 到邊 BC 的距離 = _____ · 高

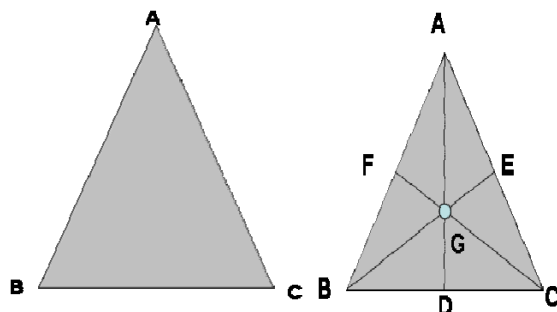
1. 重心、外心、內心有什麼關係？（試簡單說明它們的關係）

2. 如圖，若 $\overline{AB} = 10$ ，則

- (1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{1cm}}$ 、 $\overline{GD} = \underline{\hspace{1cm}}$ $\overline{CG} = \underline{\hspace{1cm}}$
- (2) $\triangle ABC$ 面積為_____、 $\triangle ABG$ 面積為_____、 $\triangle BDG$ 面積為_____、四邊形 $BDGF$ 面積為_____。

【等腰三角形重心性質應用】

〔例題二〕如圖， $\triangle ABC$ 為等腰三角形



（試著畫出重心、內心、外心）

1. 重心與內心、外心有什麼關係？（試說明它們的關係）

2. 如圖， $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ 、 $\overline{BC} = 10$ ，則

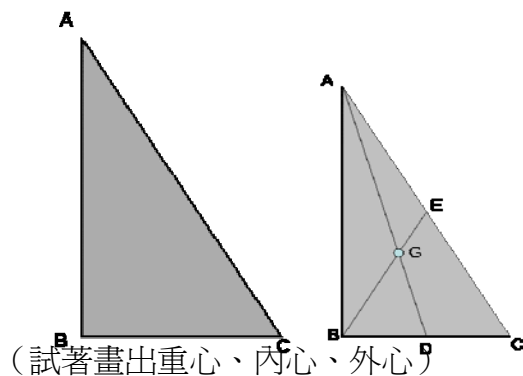
- (1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{1cm}}$ 、 $\overline{GD} = \underline{\hspace{1cm}}$
 $\overline{BG} = \underline{\hspace{1cm}}$ 、 $\overline{GE} = \underline{\hspace{1cm}}$
- (2) $\triangle ABC$ 面積為_____、 $\triangle ABG$ 面積為_____、 $\triangle BDG$ 面積為_____、四邊形 $BDGF$ 面積為_____。

結論：

等腰三角形內心、重心、外心_____

【直角三角形重心性質應用】

〔例題三〕如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形



(試著畫出重心、內心、外心)

結論：

- (1) 直角三角形內心、重心、外心____
 (2) 重心 G 到直角頂點 B 的距離 = ____
 斜邊，重心到外心的距離 = ____
 斜邊

1. 重心與外心有什麼關係？(試說明它們的關係)

2. 若 G 為重心， $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{BC} = 6$ ，則

(1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$ 、 $\overline{GD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 、
 $\overline{BG} = \underline{\hspace{2cm}}$ 、 $\overline{GE} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\triangle ABC$ 面積為____、 $\triangle ABG$ 面積為____
 $\triangle BDG$ 面積為____、四邊形 $DGEC$ 面積為____。

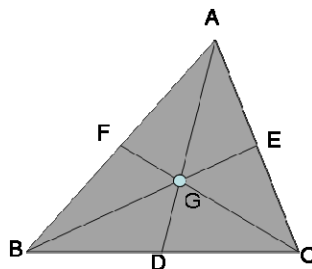
【重心應用題二一般三角形與重心性質應用】〔例題四〕

$\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{AD} = 12$ 、 $\overline{BE} = 24$ 、 $\overline{CF} = 18$ 、 $\triangle ACG$ 面積為 10，則

(1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\overline{BG} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\overline{CG} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\overline{DG} + \overline{GE} + \overline{GF} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\triangle ABC$ 面積 = ____ $\triangle AFG$ 面積 = ____
 四邊形 $BDGF$ 面積 = ____

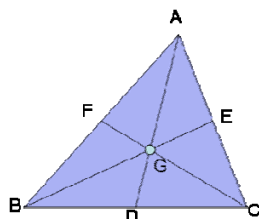


〈練習 1〉

- 1.如圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{AG}=6$ 、 $\overline{BG}=4$ 、 $\overline{CG}=5$ ， $\triangle AFG$ 面積為 4，則

(1) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} =$ _____

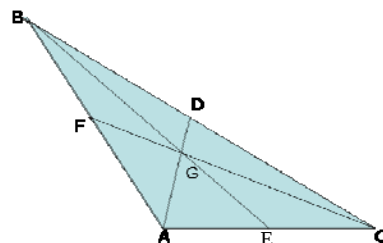
(2) $\triangle ABC$ 面積 = _____



- 2.如圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{DG}=3$ 、 $\overline{FG}=4$ 、 $\overline{EG}=5$ ， $\triangle ACG$ 面積為 48，則

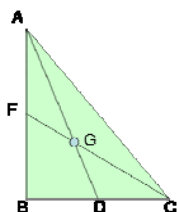
(1) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} =$ _____

(2) $\triangle ABG$ 面積 = _____ $\triangle AFG$ 面積 = _____
四邊形 BDGF 面積 = _____

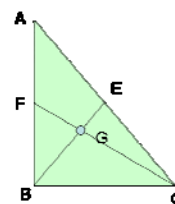


〈練習 2〉

- 1.如圖，直角 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CF}$ 為中線，且交於 G 點。已知 $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{BC}=9$ ，則四邊形 BDGF 面積 = ?



- 2.如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為中線，且交於 G 點。已知 $\overline{BE} \perp \overline{CF}$ ， $\overline{BE}=15$ 、 $\overline{CF}=9$ ，則 $\triangle ABC$ 面積 = ?



【重心應用題三-三角形重心與其三邊中點所形成新的三角形關係】

[例題五] 如圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{AD}=12$ 、 $\overline{BE}=9$ 、 $\overline{CF}=15$ ，則

(1) $\overline{AP} = ?$ $\overline{PD} = ?$

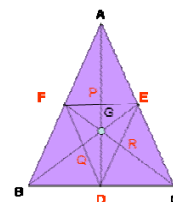
(2) $\triangle DEF$ 三中線長的和為何？

(3) $\triangle DEF$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = ?

觀察：

$\triangle ABC$ 的重心 G 與 $\triangle DEF$ 重心關係為何？

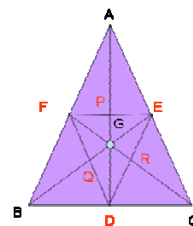
$\triangle ABC$ 的中線長與 $\triangle DEF$ 的中線長關係？



〈練習 3〉

如圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 為三中線，且交於 G 點。若 $\overline{GD}=4$ 、 $\overline{GE}=5$ 、 $\overline{GF}=6$ ， $\triangle ABC$ 面積=20，則

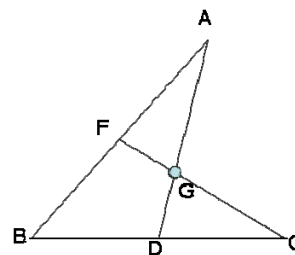
- (1) $\triangle DEF$ 三中線長的和為何？
- (2) $\triangle DEF$ 面積=？



【重心應用題四-特殊型與三角形重心】

〔例題六〕如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 F 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 的中點，且交於 G 點。則

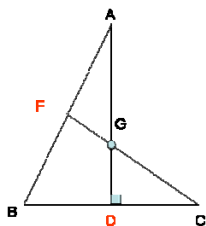
- (1) $\overline{AG} : \overline{GD} = ?$ $\overline{CG} : \overline{GF} = ?$
- (2) 若 $\overline{CG} = 18$ ，求 $\overline{GF} = ?$
- (3) 連結 $\overline{AC}$ ，若 $\triangle ABC$ 面積為 36，則 $\triangle CDG$ 面積為何？
- (4) $\triangle CDG$ 面積為 6，四邊形 $BDGF$ 面積=？



〈練習 4〉

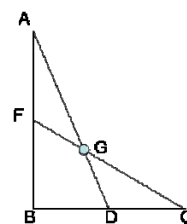
1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 中垂線， F 為 $\overline{AB}$ 的中點，且交於 G 點，若 $\overline{BC} = 16$ ， $\overline{AB} = 10$ ，則

- (1) $\overline{CF} = ?$
- (2) $\triangle ABC$ 面積=？ $\triangle CDG$ 面積=？



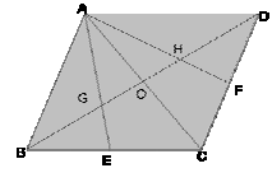
2. 如圖， $\angle ABC = 90^\circ$ ， D 、 F 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 的中點，且交於 G 點，若 $\overline{BC} = 12$ ， $\overline{AB} = 10$ ，則

- (1) $\overline{GF} = ?$ $\overline{AG} = ?$
- (2) 四邊形 $BDGF$ 面積=？



【重心應用題五-重心與平行四邊形】

〔例題七〕如圖，ABCD為平行四邊形，
E、F分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點
， $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 分別交 $\overline{BD}$ 於G、
H。若 $\overline{BD}=18$ ，則 $\overline{BO}=?$ $\overline{BG}$
=? $\overline{GH}=?$ $\overline{HD}=?$



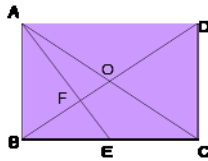
〈練習5〉

1.如圖，長方形 ABCD 中， $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{AD}=8$ ，E 為 $\overline{BC}$ 的中點，則

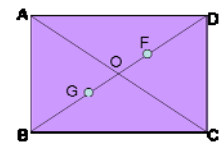
(1) $\overline{OF}=?$ $\overline{AF}=?$

(2) $\triangle AOF$ 面積=?

(3)四邊形 ECDF 面積=?



2.如圖，長方形 ABCD 中， $\overline{AB}=9$ 、 $\overline{AD}=12$ ，若 G、F 分別為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 的重心，則 $\overline{GF}=?$



【重心應用題六-其它】

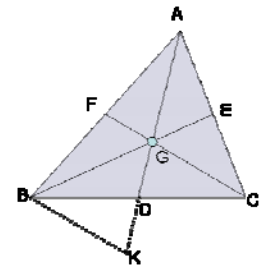
〔例題八〕

1.如圖， $\triangle ABC$ 中，G 為重心， $\overline{AD}=9$ 、
 $\overline{BE}=15$ 、 $\overline{CF}=12$ 。若延長中線 $\overline{AD}$ 至
K 使 $\overline{DK}=\overline{GD}$ ，則

(1) $\triangle GBK$ 的三邊長 $\overline{GB}=?$ $\overline{GK}=?$
 $\overline{BK}=?$

(2) $\overline{AB}=?$

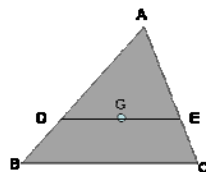
(3) $\triangle ABC$ 面積=?



〈練習6〉

1.如圖， $\triangle ABC$ 中，G 為重心，過 G 作
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，求

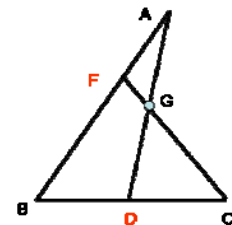
(1) $\overline{DE} : \overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}} :$



(2) $\triangle ADE$ 周長： $\triangle ABC$ 周長= $\underline{\hspace{2cm}} :$

(3) $\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積= $\underline{\hspace{2cm}} :$

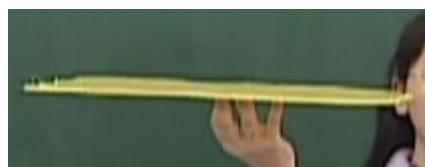
2.如圖，D 為 $\overline{BC}$ 中點，G 為 $\overline{CF}$ 中點
($\overline{CG} : \overline{GF} = 1 : 1$)，則 $\overline{AF} : \overline{BF}$
= $\underline{\hspace{2cm}} :$



貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：今天要上的是三角形的重心，前面外心跟內心的部分，我們已經講過了，接下來我們要講什麼是三角形的重心？它的性質有哪些？講三角形重心之前，我們先看一個東西，記得之前有一次在我們自己班上課，看到有一位同學在課堂上就直接拿課本來轉，然後就一直轉，後來我跟他說，下課的時候，讓他轉 5 分鐘都不能停。有沒有人可以轉 5 分鐘都不會停的？承皓喔！有機會再讓你試試看好了。他這樣一直轉、一直轉，都不會掉，對不對？請問他找的是什麼點？怎麼找出來的？中間那個點怎麼找？如果把書本換成別的東西好了，假設換成一個不規則的東西，我們怎麼找那個平衡點，請問這個點要怎麼去找（圖一）？想想看，一直掉…，反正會掉的地方就不是它的重心，是不是？所謂的重心是什麼？就是可以用來平衡東西的那個點嘛！那個點到底怎麼找？吊起來，我需要一位同學來幫我。就是你了，來，過來啊！我們來試著找找看，過來這邊，我們試試看怎麼找那個點。來，我們把這條線畫出來（圖二），代表什麼？等一下平衡的点會在哪裡？是不是有可能會在這條直線上面？然後呢？我們要找那個點，所以必須再有另外一條線出來，從別的点上面來看好了，隨便找



（圖一）



（圖二）

一個，來，這樣子（圖三）。

2. 學生：老師，手好抖喔！

3. 老師：兩條線交一個點，所以這點可能是它的什麼？重心就會在這個地方，也就是我讓這個東西平衡的點，有可能是在這個點上面。再來，你猜猜看第三條會不會跟這個點相交？

4. 學生：會。

5. 老師：怎麼知道會？因為你們猜的，我們找別的好了。有沒有看到？是不是剛好都是什麼？剛好通過這個點。對啊！好神奇喔！然後呢？來，大胖，試試看可不可以讓那個東西平衡，用那個點，然後把這個東西平衡一下，看看是不是可以？

6. 大胖：不太妙。

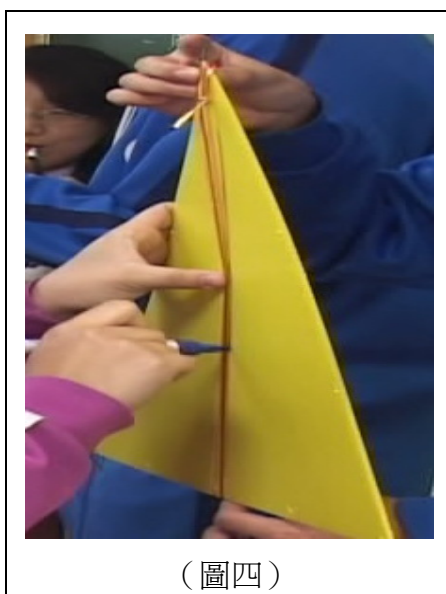
7. 老師：差不多吧！差不多可以平衡吧！其實這個點是我們經過這樣操作，找出來的的大概位置，並沒有很精確，對不對？因為這個點可以讓它平衡，所以這個點在物理上面，叫它是重心；在數學上面，我們當然也可以叫它是什麼？重心，也可以叫它是幾何的重心。讓這個物體的密度均勻分佈在各個地方，就是集中在這個點上面，有沒有問題？如果我們把它換成三角形，針對不同的三角形來試試看好了，是不是也可以找出讓它平衡的那個點？我需要六個同學，一個同學拿，一個同學吊，然後畫線，每一組派一個好了。來，一個人拿一個三角形，快點喔！趕快，一組一個，我需要六個，因為我們要針對銳角三角形，還有直角三角形。來，趕快，三、四、五組的派一個吧！快點！來，還有一個。



（圖三）

8. 學生：這個太小了。
9. 老師：沒關係，應該還是可以做。來，鈍角的，還有一組沒來？宜倫，快點過來。
10. 宜倫：又是我。
11. 老師：對啊！快點啊！小心一點。來，東西給你們，還有一組要過來這邊啊！然後有一組，這個給你們。一定要畫啊！先畫出兩條讓大家看一下，來，我這邊有筆。
12. 學生：老師，我要跟他合作喔！

13. 老師：對啊！快點。你要面對大家，做給大家看嘛！你們不要自己做自己的，大家都要看啊！來，那邊有筆嗎？先畫兩條之後，你們要觀察看看，這個交點是不是可以讓東西平衡（圖四）？如果可以的話，猜猜看第三條會不會也經過剛剛做出來的那個點。你的線歪了，面對大家做吧！其他的人除了看他們做之外，看一下講義裡面的問題(p.310 學習單)。第

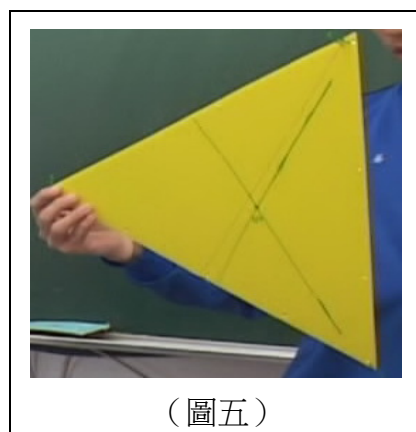


（圖四）

一個部分我們已經做過了，在任意的形狀，畫出來的那些線會不會交於一個點？大家試做看看，頂住那個點之後，可不可以讓那個東西平衡？可以的話，在物理上通常叫它是重心。做好的先停一下，在數學上，叫它是重心，也可以叫幾何中心。接下來我們做完兩條之後，看一下這是什麼三角形。這個叫什麼？等腰三角形。我們用角度去分的話，這邊有一個大於 90 度的角，叫鈍角。那個叫什麼？直角三角形。這個我們叫做什麼？銳角三

角

形。現在他做出兩條之後找到那個點（圖五），試試看，有沒有平衡？找到這個點之後做第三條，再猜猜看第三條會不會也通過剛剛那個點。來，把第三條做出來，快點，不要玩的太高興，試試看第三條可不可以也通過那個點。這一組很厲害，三條都先畫出來了，好快喔！所以你發現什麼



（圖五）

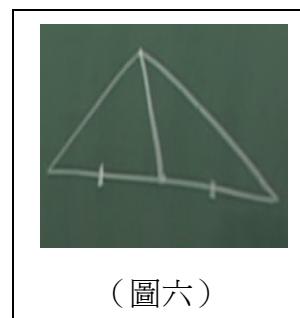
？這三條會怎樣？會交於一個點，就是可以讓東西平衡的那個點，也就是在數學上，我們會叫它是什麼？重心或幾何中心。你們先猜猜看這三條線在三角形裡面，它叫做什麼線？

14. 宜倫：中線。

15. 老師：中線。來，有沒有人可以告訴我什麼是中線？就是什麼？兩邊中垂直？宜倫，妳上去畫一下。

16. 宜倫：哪一種三角形？

17. 老師：隨便，任意的三角形。你看，銳角的也找出什麼？這個交點，它叫重心。來，這個呢？鈍角的一樣，三條線都會交於一個點。再來，這個是直角三角形，它一樣會交於一個點。我們發現這三種三角形，它的這個心都在三角形的哪裡？裡面嘛！所以代表



（圖六）

重心會不會跑到三角形外面去？不可能。因為我們要讓這個東西平衡的話，那個點不可能會跑到外面去，可以嗎？來，這個叫什麼（圖六）？怎麼找中線，怎麼畫？她已經把中線畫出來，什麼叫中線？去找邊的中點之後

，跟這個頂點連起來，這一條就是這個三角形的其中一條中線。同

樣的（圖七），我們當然也可以去找這邊（第二邊）

的中點，然後把它跟這個頂點連起來，這一條也叫

做它的什麼？中線。這邊（第三邊）找中點之後呢

？跟頂點連起來，這一條也叫什麼？中線。剛剛找

到的這些線段，有人猜測它是中線，為什麼？你怎

麼知道？你可以看得出來，這邊跟這邊怎樣？一樣。這個點就是什麼？中

點。當然你們可以自己量量看，這個你們傳下去目測一下，它是不是真

的是中點，確定那一條真的是中線，可以嗎？有沒有問題？看第二個部分

，我們針對不同的三角形去做之後，發現這三條就是它們的什麼？中線。

也就是告訴你什麼？三角形的三中線會怎麼樣？交於一個點。這個點就是

什麼？三角形的重心。這樣可以嗎？來，下面空格把它寫完(p.310 學習單)

。結論的第(1)部分，三角形的重心其實就是三中線的交點。第(2)個部分，

它的重心一定會在三角形的內部。再來，講完重心的意義之後，我們接下

來要開始去看它的一些性質。剛剛我們利用操作活動，知道三角形的三條

中線會交於一個點，對不對？這是我們用操作活動做出來的，在數學上，

我們要怎麼去說明這三條中線會交於一個點？其實在講交於一點之前，我

們會先講到一個性質，通常兩條線一定會交

於一個點，問題是，如果有第三條線，它是

不是一一定會通過這個交點？有時候也可能

會有好幾個交點，對不對？懂老師的意思嗎

？有時候三條線相交，不見得就只有一個交

點，有可能是三個（圖八），我們怎麼樣知

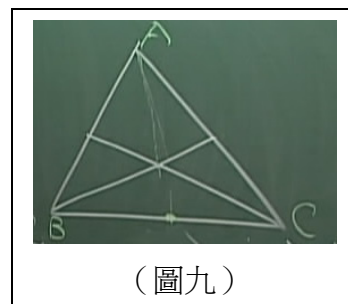


（圖七）



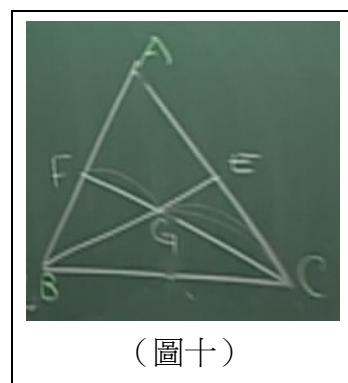
（圖八）

道這三條線會交於一個點？這個是我們要說明的。假設這個叫 A、這個叫 B、這個叫 C（圖九），我們知道這兩條一定會交於一個點，要去說明這邊找中點之後連起來，其實就會通過這個點，這條線一定會通過這個點，這是等一下我們要去說明的，可以嗎？



18. 學生：可以。

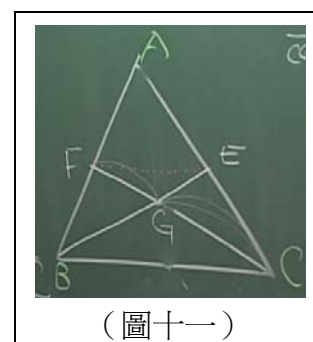
19. 老師：在講這個之前，我說要先講它的其中一個性質，因為等一下我們會用到這個性質，這個性質是什麼？假設一個 $\triangle ABC$ （圖十）， $\overline{CF}$ 、 $\overline{BE}$ 這兩條都是中線，我們要看它們長度的關係。假設這個交點叫 G，要去看 $\overline{CG}$ 跟 $\overline{GF}$ 、 $\overline{BG}$ 跟 $\overline{GE}$ 的關係。有人已經知道是 2：1，怎麼知道它是 2：1？



猜的？還是已經學過了？我們還沒上過啊！怎麼知道它是 2：1，看起來很像 2：1，所以就是 2：1，是嗎？怎麼樣去說明它的比是 2：1？

20. 學生：把那個連起來。

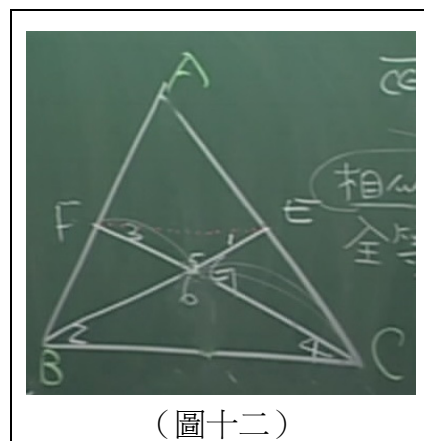
21. 老師：好厲害喔！什麼都還沒講就知道了，（圖十一）我先把 $\overline{CG} : \overline{GF}$ 、 $\overline{BG} : \overline{GE}$ 寫下來，有人猜它是 2：1。剛剛有人說要連哪一個？ $\overline{EF}$ 。怎麼知道要連這個？連這個要幹嘛？這一條是中線，有人說相似形，怎麼知道要看相似形？我們有講過，只要看



到要你說明比的關係的時候，就要想到什麼？相似形，還有什麼？或者是什麼？第一章學過的。有人說全等，為什麼會全等呢？全等是指兩個圖形

長得一模一樣，兩個長度是一樣的時候，我們才會用到兩個三角形全等。講到比的話，我們會想到什麼？相似的概念或者是什麼？比例的概念。有沒有問題？再來，你們剛剛講相似，哪兩個三角形看起來是相似的？ $\triangle EGF$ 跟哪一個三角形相似？下面這個 $\triangle BCG$ 。再來，證明全等？證明相似？它們有哪些條件？怎麼樣去說它是相似的？我把它寫下來（圖十二），

$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，假設這個 $\angle 1(\angle FEG)$ 、這個是 $\angle 2(\angle GBC)$ 、這是 $\angle 3(\angle EFC)$ 、 $\angle 4(\angle GCB)$ ，我們寫簡化一點， $\angle 1 = \angle 2$ ，這邊要標上 $\angle 5(\angle EGF)$ 、 $\angle 6(\angle BGC)$ ，後面這樣看得到嗎？好像有點小，可以看得到嗎？ $\angle 5 = \angle 6$ 。所以哪兩個三角形相似？ $\triangle BCG$ 跟 $\triangle FEG$ 是相似的，根據 AA 相似，所以



（圖十二）

就得到什麼？我們知道它們相似，所以 $\overline{EG}$ 和 $\overline{BG}$ 是成比例的($\overline{EG} : \overline{BG}$)，是幾比幾呢？

22. 學生：1：2。

23. 老師：怎麼知道是 1：2？題目沒給你耶！ $\overline{EF} : \overline{BC}$ 是幾比幾？

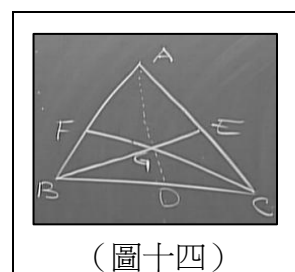
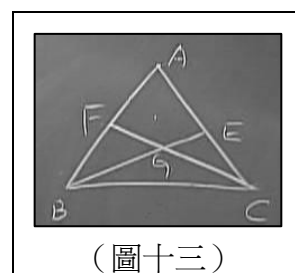
24. 學生：1：2。

25. 老師：1：2，為什麼是 1：2？

26. 學生：因為中線。

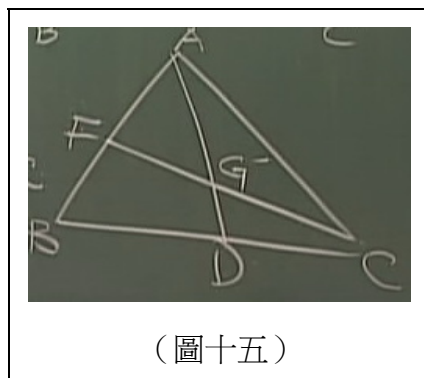
27. 老師：中線，兩腰中點連線長跟底邊長的關係是什麼？1：2。同樣的， $\overline{EG} : \overline{BG}$ 是 1：2，同樣地， $\overline{FG} : \overline{CG}$ 也是多少？1：2。這樣子有沒有問題？你們把講義的部分自己寫上去。剛剛寫的這個部分是它們長度的關係比，有沒有問題？因為講到比的話，我們就會想到什麼？相似。相似的話就要去找

什麼？兩個三角形。兩個三角形利用哪些條件可以去說明它是相似？找到之後，我們知道它相似就可以知道什麼？它對應邊的部分當然也會怎樣？成比例。利用相似的條件對應角會相等，兩對應邊會成比例，所以在結論的部分，剛剛不是看出這邊（ $\overline{BG} : \overline{EG}$ ）是 2：1，這邊（ $\overline{CG} : \overline{FG}$ ）也是 2：1，也就是一條中線給你，找到重心，我們就可以知道重心到頂點跟重心到這個邊上中點的長度的比是幾比幾？2：1。也就是告訴你重心到頂點距離跟整個中線長度的關係是什麼？就是 $\overline{BG}$ 的長度會是幾倍的 $\overline{BE}$ 的長度？重心到頂點這一段長度，會是整個中線長的幾分之幾？ $\frac{2}{3}$ 。同樣的， $\overline{CG}$ 的長度會是幾倍的 $\overline{CF}$ 的長度？也就是看另外一條中線長，重心到這個點（C 點或 B 點）的距離會是整個中線長度的幾分之幾？ $\frac{2}{3}$ 。如果問的是到邊上中點的這個（ $\overline{EG}$ ）長度是整條中線長度的幾分之多少？ $\frac{1}{3}$ 。這一段（ $\overline{FG}$ ）也是 $\overline{CF}$ 長的多少？ $\frac{1}{3}$ 。如果給你整條中線的長度，請你算這兩段（ $\overline{EG}$ 、 $\overline{BG}$ ）的長度會不會算？會。這個部分中線長度的關係有沒有問題？沒有。沒有的話我們再想一下，我們知道這兩條中線一定會交於一個點（圖十三），對不對？第三條是否也會通過這個點（圖十四），要怎麼說明？假設這兩條相交的點是 G 點，我們要怎麼去說這一條也會通過 G 點？



28. 老師：你覺得直接說好不好？作這一條中線，然後直接說它通過 G 點，這樣好不好說？不好說。如果從它的條件不能直接去說明它的话，你可以試試看另外一個方式，就是假設這條線不會通過 G 點的话，最後會得到什麼？懂老師在問什麼嗎？知道？不知道？有好幾個方式可以

說明，直接把 $\overline{AG}$ 連起來，然後去說這條是它的中線，就是它會通過 $\overline{BC}$ 中點，所以這條就是它的中線，這是其中一種方法。或者你也可以去說什麼？去作它的這條中線 $\overline{AD}$ ，作出這條之後，它跟另一條中線 $\overline{CF}$ 如果交點是另外一



個點的話，假設為 G' ，有沒有可能出現第二個點？怎麼知道不可能，要怎麼去說明不可能出現兩個點？我們兩條、兩條看（圖十三），一開始的時候是這兩條（ $\overline{CF}$ 、 $\overline{BE}$ ），我們切開來看，我剛剛去做了這條 $\overline{AD}$ ，再來（圖十五），假設這一條 $\overline{CF}$ 與 $\overline{AD}$ 交於另一點為 G' 點。剛剛老師有說要用到那個性質來說明這個只交一個點，所以如果從這個圖形（圖十三）來看的話，我們可以得到什麼？剛剛我們講到它的性質，它的長度比，這邊（ $\overline{BG}$ ）比這邊（ $\overline{EG}$ ）是幾比幾？2：1。這邊（ $\overline{CG}$ ）比這邊（ $\overline{FG}$ ）是幾比幾？2：1。然後這一段（ $\overline{CG}$ ）長度是整個（ $\overline{CF}$ ）長度的幾分之幾？ $\frac{2}{3}$ 。這一段（ $\overline{BG}$ ）長度是整個（ $\overline{BE}$ ）長度的 $\frac{2}{3}$ 。再來（圖十五），這一段（ $\overline{CG'}$ ）比這一段（ $\overline{FG'}$ ）是幾比幾？2：1。這一段（ $\overline{AG'}$ ）比這一段（ $\overline{DG'}$ ）是幾比幾？2：1。同樣的，這一段（ $\overline{CG'}$ ）是整個（ $\overline{CF}$ ）長度的 $\frac{2}{3}$ ，這一段（ $\overline{AG'}$ ）是整個（ $\overline{AD}$ ）長度的 $\frac{2}{3}$ ，所以得到什麼？剛剛我們不是說這一段 $\overline{CG}$ 長度，它會是整個長度的幾分之幾？ $\frac{2}{3}$ 。還有講到這一段（ $\overline{CF}$ ），對不對？ $\overline{CG'}$ 是幾分之幾的 $\overline{CF}$ ？ $\frac{2}{3}$ 倍的 $\overline{CF}$ 。再來，你看喔！ $\overline{CG}$ 的長度是 $\frac{2}{3}$ 的 $\overline{CF}$ ，然後 $\overline{CG'}$ 的長度也是 $\frac{2}{3}$ 的 $\overline{CF}$ ，代表什麼意思呢？這兩個點（ G 、 G' ）會不會是代表不同的點？有沒有可能在同一條線上有兩個點會讓這個長度比是 $\frac{2}{3}$ ？一條線上，有沒有點可能讓這邊長度比是 2：1，又找到另外一

個點，讓它的比也是 $2:1$ ，有沒有可能？不可能，所以代表 G 跟 G' 怎樣？代表同一點。這說明了什麼？它三條中線會怎麼樣？交於一個點。可以嗎？有沒有問題？沒有，來，自己把它寫上去，這是三中線交於一個點的說明。我們先假設它的另外一條中線跟原來這兩條是交到不同點，最後得到什麼？矛盾，不可能是不同的點，所以說明了什麼？它其實代表的是什麼？同一點。也就是告訴你三條中線是怎樣？交於一個點。這樣可以嗎？有沒有問題？有沒有人這個部分聽不清楚？確定沒有？你們要不要給一點回應？都沒有什麼聲音耶！

29. 學生：沒有。

30. 老師：沒有，來，把它(p.310 學習單)完成。如果你完成的話，請你看到後面的題目。剛剛我們不是畫出三條中線，它把整個三角形分幾塊？六塊。猜猜看這六塊三角形，有沒有什麼關係？

31. 學生：面積。

32. 老師：面積會怎樣？

33. 學生：一樣。

34. 老師：一樣，你怎麼知道？你們怎麼都那麼厲害啊！一看就知道一樣嗎？一看就知道面積會一樣喔！同底等高，等一下，誰同底等高？告訴我，誰跟誰同底等高？來，請告訴我誰跟誰同底等高，起來回答，你剛剛說誰跟誰啊？來，起來啊！因為你剛剛會講同底等高，應該是有看到哪兩個三角形，或者好幾個三角形是同底等高，對不對？快點啊！要起來回答，不然後面會聽不到你的聲音，要站起來，快點，你說誰同底等高？哪兩個三角形？還是好幾個三角形是同底等高的？

35. 翔安：兩個、兩個都是。

36. 老師：哪兩個、兩個？你要告訴我，來，你上來寫，讓大家看一下你說的是哪一個。因為你不說，大家都不知道是哪一個啊！或許有很多人都沒看出來。

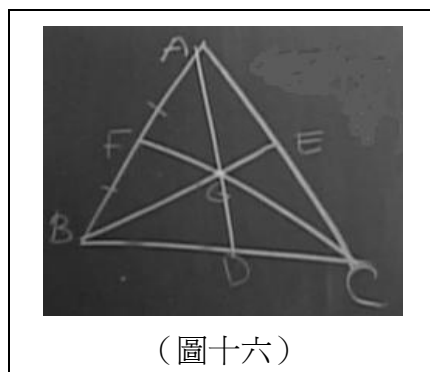
37. 翔安：先看這個（圖十六）， $\triangle AGB$ 。

38. 老師： $\triangle AGB$ ，很好，然後呢？

39. 翔安：F 是中點。

40. 老師：對，因為 $\overline{CF}$ 是中線。

41. 翔安：它的高一樣，所以這兩個面積（ $\triangle AFG$ 和 $\triangle BFG$ ）就一樣。



（圖十六）

42. 老師：怎麼知道它面積一樣？

43. 翔安：因為高一樣啊！對啊！

44. 老師：所以呢？把它寫下來，好不好？哪兩個三角形一樣？ $\triangle AFG$ 面積 = $\triangle BFG$ 面積。你剛剛說它是同底等高嗎？為什麼說它是同底等高？

45. 翔安：因為 F 是 $\overline{AB}$ 的中點。

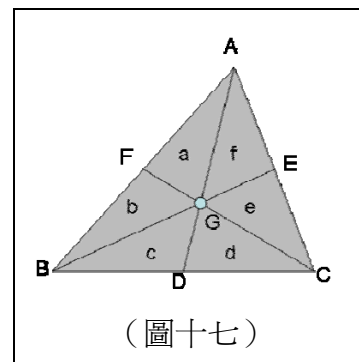
46. 老師：同底等高的意思是什麼？你們想一下，底一樣？是指同底還是等底？是哪一個？

47. 翔安：等底同高。

48. 老師：你把它寫下來，等底同高，還是同底等高？兩個不太一樣，對不對？同底是指它們的底是同一個。等底是指什麼？它們的底是怎樣？一樣長的底叫等底，所以就得到 $\triangle AFG$ 跟 $\triangle BGF$ 的面積是一樣的。你們可以給她一點掌聲。這是利用到什麼？它們的底是一樣的，高是同一個，所以它們面積是一樣。看得出來這兩個三角形（ $\triangle AFG$ 跟 $\triangle BGF$ ）面積是一樣，還有其它三角形的面積是一樣嗎？同理可以說這兩個（ $\triangle BDG$ 和 $\triangle CGD$ ）面積一樣、這兩個（ $\triangle AEG$ 和 $\triangle CEG$ ）面積一樣。只說到這兩個（ $\triangle AFG$ 跟 $\triangle BGF$ ）

面積一樣，這兩個（ $\triangle BDG$ 和 $\triangle CGD$ ）面積一樣，這兩個（ $\triangle AEG$ 跟 $\triangle CEG$ ）面積一樣，你有說到六個都一樣嗎？還沒有嘛！對不對？剩下的部分給你們每一組去想，接下來要怎麼去講六個三角形面積是一樣的？爲了方便，假設這些面積分別爲 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、

f ，不要去寫那一長串的文字，我們就假設（ $\triangle AGF$ ）這個面積爲 a ，（ $\triangle BGF$ ）這個面積爲 b ，（ $\triangle BGD$ ）這個爲 c ，（ $\triangle DGC$ ）這邊爲 d ，再來（ $\triangle CGE$ ）這邊爲 e ，（ $\triangle EGA$ ）這邊爲 f （圖十七）。利用到她（翹安）剛剛講三角形裡面這兩



（圖十七）

塊面積是一樣的，來，開始去看，怎麼去看六個三角形面積是一樣的？寫在白板上，等一下每一組派兩位同學上來，拿著你的白板，一個人拿白板，一個人講。六塊面積一樣要講喔！我把它寫下來，剛剛只有說到其中這兩個塊面積一樣，也就是 $a=b$ ， $c=d$ ， $e=f$ ，還沒有講到六塊面積一樣，對不對？來，剩下的給你們想，每一組都要討論，不要做自己的事情，一起討論，然後一起想，把學過的東西用進來就對了，不管你用什麼方法，只要學過的東西，你都可以用進來，它沒有一定的方法，可能每一組想的都不一樣，也可能某兩組想的是一樣，也沒關係。趕快！你們不要拖到下課還沒想出來喔！不要把它想太難，就用剛剛翹安講的等底同高的概念去想，然後你就可以寫出哪些面積會一樣啊！給你一個提示，利用到等底同高的概念，你可以看出哪些面積是一樣的，絕對不會只有 a 跟 b 一樣、 c 跟 d 面積一樣及 e 跟 f 面積一樣，應該還有某些三角形面積是一樣的。

這一組怎麼沒討論，不要做自己的事情，要一起討論。這一組呢？還在想。好棒喔！有些組有在認真討論，看起來好像快出來了，好厲害喔！你們

有想出來嗎？證完了嗎？有證了六塊面積一樣了嗎？

49. 學生：六塊雞？太緊張了。

50. 老師：不要緊張，等一下你們要各找兩位喔！每一組各找兩位，一位負責幫你拿白板，拿高一點，另一位負責說明你們這組的想法。有一組已經寫出來了，好棒喔！等一下你們第一個上去講。這一組還沒動工？很好啊！那就寫上來了，你就畫圖，然後去說明。圖可畫也可以不畫，用我黑板上面的圖也可以，好不好？這樣你的說明才可以寫多一點。你圖太大的話，說明的部分就會太小，後面就會看不到，字不要寫太小喔！你們還需要多久？

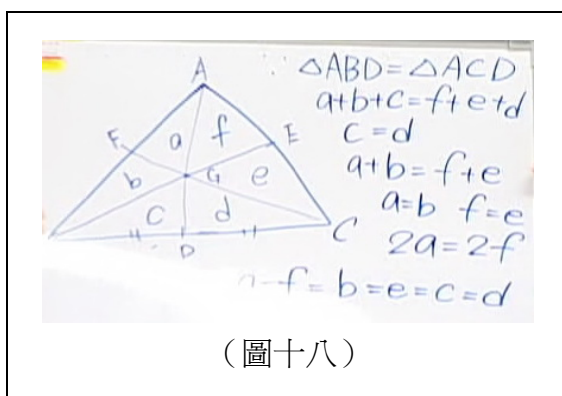
51. 學生：10 分鐘。

52. 老師：10 分鐘太久了啦！我看有些組都已經寫出來了，已經寫完的是哪一組？第一組。還有嗎？只有第一組，這組還在想，這組也還在想，這組看起來快出來了，這一組也還在想。來，準備了喔！等一下第一組先上去，好不好？還是有哪一組要先的？等一下就算你沒有寫完的話，也上去說一下你們剛剛討論了什麼東西，沒想出來沒關係，每一組還是要派兩個人上台。有哪一組要先？第二組要先嗎？第一組，要讓第二組先嗎？

53. 學生：沒意見。

54. 老師：沒意見，來，那你們給他掌聲吧！記得台上在講的時候，大家都要看前面，並暫停你的討論。

55. 翔安：我們先看這個 $\triangle ABD$ 跟 $\triangle ADC$ （圖十八），因為 $\overline{AD}$ 是中線， $\overline{DC} = \overline{BD}$ ，它們是等底同高，所以 $\triangle ABD$ 的面積跟 $\triangle ADC$ 面積會一樣。剛剛我們已經證過



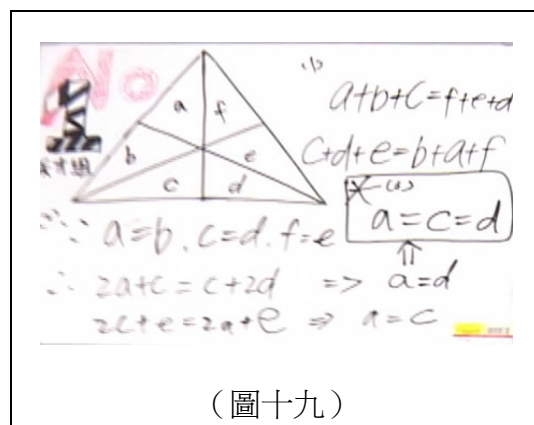
$c=d$ ，所以 $a+b=f+e$ ，剛剛也證過 $c、d$ 會一樣，這兩個($a、b$)會一樣，這兩個($f、e$)也會一樣，所以就全部一樣。

56. 老師：好棒喔！她得到六個都一樣，好清楚。下一節一開始的時候，再讓第一組先講，其他還沒想出來的，趕快利用下課時間想。

【第二節】

57. 老師：好，來。

58. 黃筠：這是一個大三角形（圖十九），分成六份分別是 $a、b、c、d、e、f$ ，因為 $a+b+c=f+e+d、c+d+e=b+a+f$ ， a 的面積等於 b 的面積，然後 c 的面積等於 d 的面積， f 的面積等於 e 的面積，所以，換你了。



59. 理捷：好，妳講完了。（圖十九）把這些代換，所以就變成 $2a+c=c+2d$ ，然後 $2c+e=2a+e$ ，兩邊同時消去 e 的話，就是 $2c=2a$ ，同理， $a=d$ 。因為 $a=c$ ，然後 $a=d$ ，所以…

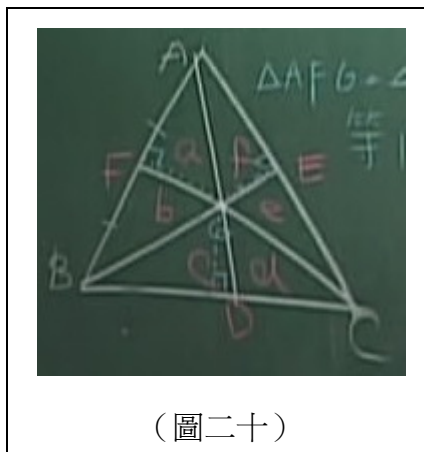
60. 理捷： $a=c=d$ 。

61. 學生：好，謝謝。

62. 老師： $a=c=d$ ，再拿上面一點給我看， c 本來就等於 d 啊！那 e 跟 f 呢？怎麼沒有跟這些連一起， e 跟 f 哪裡去了？是寫錯了嗎？先下一組，等一下再給你們補充說明，好不好？來，下一組，速度快一點。可以啊！你可以直接用黑板上的圖。

63. 婉之：那個三角形，就是講義上那個大家都一樣（圖二十）。因為 $\overline{AD}$ 是中線，所以 $\overline{BD}=\overline{CD}$ 。因為它每一個（ $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ ）都是中線，所以 $\triangle AGB$ 中

， $\overline{AF} = \overline{FB}$ 。因為底一樣，高又一樣，所以等底同高， $a=b$ 。然後它這個也是一樣($e=f$)，底又一樣，它的高也一樣，又是等底同高。這個(c 、 d)也是等底同高，然後看中間這塊大的三角形($\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$)，它的這個底一樣，它的高也一樣，所以這個三角形的面積會等於這個三角形的面積($\triangle ABD \cong \triangle ACD$)。因為它的 $\overline{BD} = \overline{CD}$ ，所以 $a+b+c=f+e+d$ 。都是等底同高，所以大家的面積都一樣($a=b=c=d=e=f$)。



(圖二十)

64. 老師：聽得懂嗎？等一下，你們有沒有看到她上面有寫奇怪的符號， $\triangle c$ ， $\triangle d$ ，我剛剛說 c 跟 d 是什麼？ a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 是什麼？面積，所以你前面要不要加一個三角形？就不用了，那個符號就不要，就直接寫 $c=d$ ，好不好？你們以後寫的時候自己注意一下，不要加一些奇怪的符號。有沒有問題？來，下一組，第三組嗎？趕快，就一個拿、一個講。

65. 學生：我自己拿，我自己講。

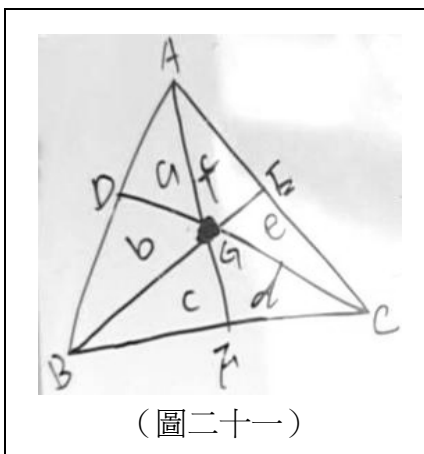
66. 學生：我幫你拿。

67. 老師：來，快點。

68. 承皓：等一下，我可以擦個東西嗎？

69. 老師：等他們這一組講完，再讓你們補充說明剛剛沒有講完的部分，OK，開始了。

70. 承皓： $\triangle ABC$ 中(圖二十一)，因為 G 是重心，所以我把 $\overline{AF}$ 連起來的話， $\overline{BF}$ 會等於 $\overline{FC}$ ，而且它們的高都一樣，因為在同一個三



(圖二十一)

角形裡，所以我們可以知道它們是兩個等底同高的三角形，面積會一樣， $\triangle ABF$ 面積是 $a+b+c$ ， $\triangle ACF$ 面積是 $f+e+d$ 。同理可證，這兩個三角形也是等底同高的三角形（ $\triangle BGF$ 、 $\triangle CFG$ ），所以 c 會等於 d 。 $a+b+c=f+e+d$ ，因為它們 c 、 d 一樣，所以我們就把它 c 、 d 消掉，消掉以後就可以得到 $a+b$ 會等於 $f+e$ ，就可以知道 $\triangle ABG$ 面積會等於 $\triangle ACG$ 面積。再來 $\triangle ABE$ 面積 $= \triangle CBE$ 面積，同理因為是等底同高。再來 $\triangle AGC$ 中，因為等底同高，所以 f 會等於 e 。然後這兩個大三角形（ $\triangle ABE$ 、 $\triangle BCE$ ），又是 e 、 d 、 c 還有 f 、 a 、 b 合起來的三角形，所以我又可以把 e 、 f 消掉了， $c+d$ 會等於 $a+b$ 。從我們推出的這兩個結論，就可以知道 $a+b=c+d=e+f$ 。

71. 老師：還沒完啊！你說的那三塊面積一樣，對不對？

72. 承皓：對。

73. 老師：最後我們要說六塊，對不對？

74. 承皓：只有三塊，然後又可以知道，我也不知道為什麼知道 $a=b$ 。

75. 老師：為什麼 $a=b$ ，怎麼知道？

76. 承皓：因為等底同高，對。

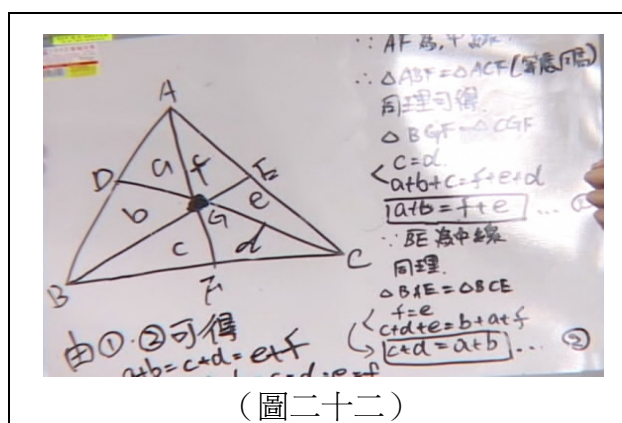
77. 老師：那為什麼 b 又會等於 c ？

78. 承皓：證過了啊！

79. 老師：哪裡？你上面哪裡有寫？你上面沒有寫 $b=c$ 啊！在哪裡？

80. 承皓：這邊啊！

81. 老師：沒有啊！（圖二十二）上面沒有一行有 $b=c$ ？你從第二

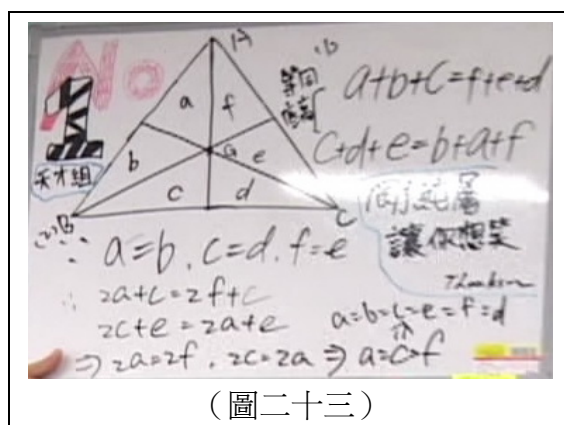


個式子看一下 $c+d=a+b$ ，就可以得到什麼？ $c=d$ 、 $a=b$ ，所以 $b=c$ 。建議你下次要寫清楚，好不好？可以嗎？其他人有沒有問題，他沒有寫得很完整，漏了幾個，你們自己再把它補上去，好不好？來，下一組，第一組趕快去補充一下，剛剛你們沒講完的部分。有沒有發現有些組用的方法不一樣？每個人想法都不一樣，所以你在證明一些結論的時候，可以知道其實有很多方法，不是一定要用什麼方法，只要你學過的東西，都可以拿來用。

82. 理捷：好，一切歸零。(圖二十三)因為這兩個三角形($\triangle ABF$ 、 $\triangle ACF$)，它們同底然後又等高，所以這兩個的面積相等。

83. 老師：同底，還是等底？

84. 學生：等底同高，所以這兩邊($\triangle ABF$ 、 $\triangle ACF$)就會相等， $a+b+c$ 會等



(圖二十三)

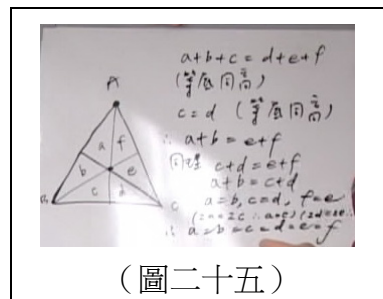
於 $f+e+d$ 。用同樣的方法，也可以寫出另外一個式子，你們就自己看吧！因為這兩個三角形等底同高，所以 $a=b$ ， $c=d$ ， $f=e$ 。然後，我們就可以把這些不要的統統刪掉，就變成 $2a+c=2f+c$ ，然後這個也是一樣，可以變成 $2c+e=2a+e$ 。用等量減法的話，就可以變成 $2a=2f$ ， $2c=2a$ ，所以 $a=c=f$ 。因為 $a=b$ ，然後 $c=d$ ， $f=e$ ，就可以寫成 $a=b=c=d=e=f$ ，所以就證明這六個面積相等。

85. 老師：很好，他剛剛說鬼東東刪掉，不是刪掉，是做代換喔！來，下一組，五要先，還是六？六，上去，快一點。對，壓軸，等一下要講最精采的。來，快點。

86. 紹齊：在 $\triangle ABC$ 中。

100. 宜倫： $a+b+c=d+e+f$ ，等底同高(圖二十五)，所以從這個可以看得出來 $c=d$ 、 $a+b=e+f$ ，同理可證， $c+d=e+f$ 、 $a+b=c+d$ 。然後 $a=b$ 、 $c=d$ 、 $e=f$ ，把它代進去之後，就可以發現 $a=b=c=d=e=f$ 。

101. 老師：他剛剛少講了那個，代換進去式子他有寫出來(圖二十五)，所以就得到最後六個面積是一樣的，很好。這六組都講得很不錯耶！大家都有不同的想法，所以你從不同的地方去想，得到不同的想法之後，可是最後我們得到的結論



都是一樣的。這六塊的面積會怎麼樣？相等。有沒有問題？所以如果給你整個三角形面積，會不會算其中一塊面積，或者是其中兩塊面積？會。如果把這個圖換成像這個(圖二十六)只給你重心 G，請問重心與三頂點所構成的這三塊面積會怎麼樣？相等。用剛剛那個方式，因為這六塊面積一樣(圖二十一)，當然我這邊切割出來這兩塊、兩塊、兩塊都會一樣的話(圖二十六)，合起來之後兩個、兩個加起來，當然也會怎樣？相等。來，講義的部分把它完成(p.312 學習單)，你覺得哪一組寫的比較好，可以把它寫在你的講義上面。如果覺得你那一組講的最好的話，就可以把它寫在上面；或者是你覺得他講的還不錯，可以先寫下來，或是怕以後自己忘記的，也可以記錄在上面。在(p.312 學習單)第三頁左邊空格的部分是問你六個三角形面

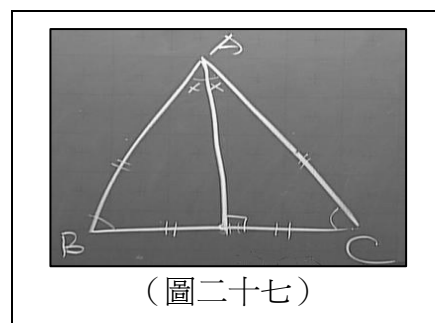


積的關係，因為我們知道這六個三角形面積是一樣的，所以其中一塊是整個面積幾分之幾？其中一塊是 $\triangle ABC$ 的幾分之幾？假設我問你的是 $\triangle AFG$ ，因為六塊面積一樣，所以其中一塊是全部面積的幾分之幾？ $\frac{1}{6}$ 。很好，

像剛剛這個（圖二十六）分三等分的話，其中一塊 $\triangle ABG$ 的面積會等於全部面積的幾分之幾？ $\frac{1}{3}$ 。剛剛這個結論是告訴你什麼？三條中線所構成的六塊三角形面積是一樣的。再來，如果現在是給重心的話，把重心跟三頂點連結起來，會把這個三角形面積分三等分，有沒有問題？如果可以的話，寫完的同學等一下就準備先看後面應用的部分，接下來講完重心的性質之後，我們就開始應用重心的中線長度的關係，還有它的面積的關係，看一些應用的題目。都寫完了沒？寫完了啊！接下來我們先看一些特殊的三角形，假設我畫的這個圖（圖二十七），它是一個正 $\triangle ABC$ ，講到正三角形你會想到什麼？

102. 學生：三個角都是 60 度。

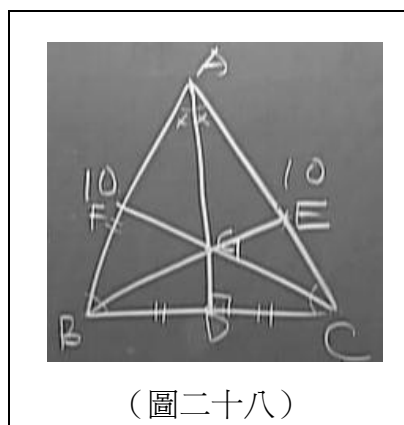
103. 老師：三個角都是 60 度，還有呢？三邊一樣長。還有沒有？我們以前還講過它的什麼性質？在講內心或者是外心的時候有講過什麼？我先問你好了，這一條（圖二十七）如果它是角平分線，它除了是角平分線



（圖二十七）

之外，還會是什麼線？中垂線，垂直這邊 $(\overline{BC})$ 中點。除了是中垂線之外，也可以是我們現在講的什麼線？中點跟頂點連起來，所以這一條線是什麼？中線，也會是中垂線，然後也會是角平分線。我們去作 $\angle B$ 的這三條線，也會是同一條；同樣的，作 $\angle C$ 的這三條線，也會是什麼？同一條。你可以發現什麼事情？這三條線都是一樣的，所以它的什麼代表同一個點？中線可以作出什麼心？重心。中垂線可以作出什麼心？外心。角平分線可以作出什麼心？內心。你可以發現這個特殊的正三角形，它的這三個心代表的是同一個點。這樣有沒有問題？它的三條中線也是一樣的，三條中垂

線也是一樣，三條角平分線也都會是一樣的。算出其中一條中線之後，其他兩條中線是不是就可以出來？可以。來，我們看旁邊的題目（p.313 學習單[例題一]），如果給你一個正三角形（圖二十八），它的邊長是 10，接下來要算它的中線長跟面積。中線長怎麼算？給你邊長 10，運用剛剛我們講過的中線長性質，還有面積性質，面積等一下再來講。來，這邊不是有個重心 G，對不對？剛剛我們有講過它的性質，第一個要算的是 $\overline{AG}$ ，再來算 $\overline{GD}$ 。 $\overline{AG}$ 怎麼算？先算哪一個？高（圖二十八）。這邊假設給你一個 D， $\overline{AD}$ 怎麼算？這相當於是三角形的什麼？這個（ $\overline{AD}$ ）相當於是它的高嘛！正三角形的高怎麼算？ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 去乘上什麼？邊長 10。所以它的高就知道（ $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$ ），這樣子可以嗎？再來，這個高知道之後， $\overline{AD}$ 也是它的中



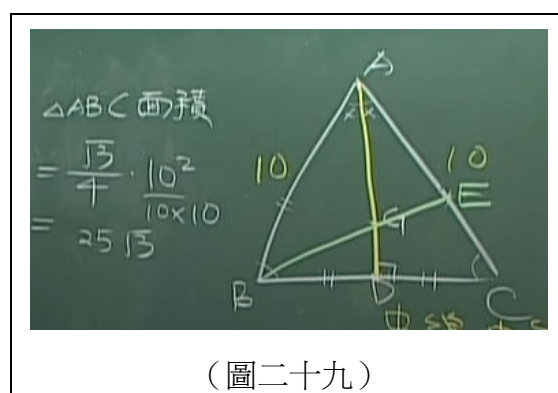
（圖二十八）

線，所以 $\overline{AG}$ 的長度是整個長度的幾分之幾？ $\frac{2}{3}$ 。 $\overline{AG}$ 就會等於 $\frac{2}{3}$ 去乘上 $\overline{AD}$ 的長度， $\overline{AD} = 5\sqrt{3}$ ，（ $\overline{AG} = \frac{2}{3} \times 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ ）所以整理過後 $\overline{AG}$ 就是多少？ $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ，這樣子可以嗎？再來，如何算 $\overline{GD}$ 呢？它是全部長度（ $\overline{AD}$ ）的多少？ $\frac{1}{3}$ 。（ $\overline{GD} = \frac{1}{3} \times 5\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ）自己把它寫完，可以嗎？這是長度的部分。如果叫你算 $\overline{BG}$ 、 $\overline{GE}$ 的話會不會算？還要不要再另外算？不用。它其實跟這一段（ $\overline{AG}$ ）是一樣的，也就是 $\overline{BG}$ 跟 $\overline{AG}$ 是一樣長的，再來 $\overline{DG}$ 跟 $\overline{GE}$ 是一樣的，所以就直接用剛剛算出來的就可以了，不用重新再算，有沒有問題？

104. 學生：沒有。

105. 老師：再來看面積的部分，第一個叫你算 $\triangle ABC$ 的面積（p.313 學習單[例題一]），

來，面積怎麼算？給你一個 $\triangle ABC$ 的邊長，給正三角形的邊長，請問它的面積怎麼算？怎麼知道是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ？ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 乘上什麼？ 10^2 。也就是如果一個正三角形邊長是 a 的話，它的面積就是什麼？ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。這我們前面有講過，所以就不另外再講了，可以嗎？有沒有問題？我們就直接拿來用，整理過後（ $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2$ ），記得喔！ 10^2 是10乘10喔，不是10乘2喔！這邊注意一下，最後得到什麼？ $25\sqrt{3}$ 平方單位（圖二十九），這樣可以嗎？整個面積知道，當然我們要去算其中這一塊或者一小塊的面積，是不是就可以知道？來，自己完成空格的部分，第一個要你算 $\triangle ABG$ 的面積，第二個要你算 $\triangle BDG$ ，再來，第三個要你算的是四邊形 $BDGF$ ，我點人回答喔！今天是幾號啊？今天17號喔！來，17號第一個， $\triangle ABG$ 的面積，起來回答，17號是誰？告訴大家你算出來是多少？



（圖二十九）

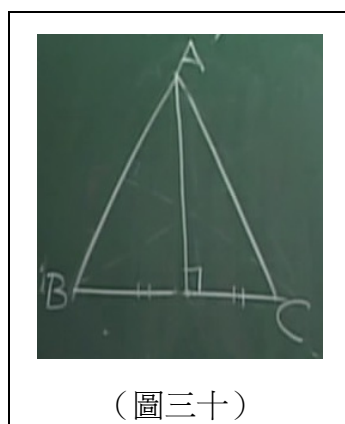
106. 學生： $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ （ $\triangle ABG = \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{1}{3} \times 25\sqrt{3}$ ）。
107. 老師：很好，再來第二個呢？要點另外一個嗎？27號。
108. 學生：沒有。
109. 老師：37號，賈德，來，第二個你算出來是多少？ $\triangle BDG$ 的面積為多少？整個面積知道，這一塊 $\triangle BDG$ 面積是全部的幾分之幾？這一小塊喔！要算的是這一小塊，是全部幾分之幾？大聲一點， $\frac{1}{6}$ ，很好，所以它的面積算出來是多少？6分之多少？ $\frac{25\sqrt{3}}{6}$ 。很好，再來，47號，有47號嗎？來，下一個，這個四邊形它佔了兩個三角形的面積，所以其實它在整個 $\triangle ABC$ 裡面，它的面積是全部幾分之幾？3分之1。很好，所以你算出來是哪一個？剛剛

有一個 $\frac{1}{3}$ 的答案是哪一個？大聲一點啊！怎麼了？是哪一個？是這個還是這個（ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{25\sqrt{3}}{6}$ ）？哪一個？左邊（ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ ）還是右邊（ $\frac{25\sqrt{3}}{6}$ ）？左邊這一個（ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ ），有沒有問題？其他同學可以嗎？有沒有人算錯的？都算對嗎？都對的舉手。所以有人有錯喔！有人還不會算嗎？那一組呢？那一組是還沒算完，速度比較慢；那一組都 ok；這一組呢？ok，這一組呢？很好。來，如果沒問題的話，看下一題等腰三角形(p.313 學習單[例題二])，如果給你一個等腰三角形，你想一下，剛剛的正三角形，它三個心是代表同一個點，請問一下，等腰三角形有沒有這麼好？

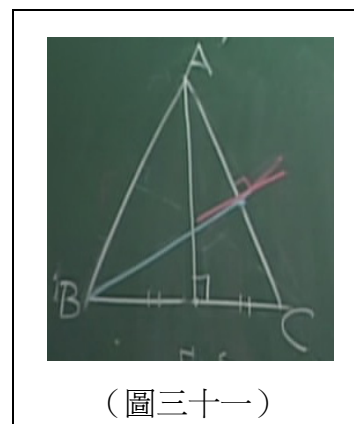
110. 學生：沒有。

111. 老師：沒有？可是它三個心有什麼性質（圖三十）？頂角的平分線其實是底邊的什麼？高。也是什麼？中垂線。這一條也是什麼？中線。我們只看這一條喔！可是你去作其他的，你發現什麼？ $\angle B$ 的對邊($\overline{AC}$)所作的中垂線（圖三十一），會不會跟 $\angle B$ 與對邊($\overline{AC}$)所作的中線是同一條，會不會？在腰上面的，有人點頭耶

！中線是找什麼？線段($\overline{AC}$)中點跟 B 點連起來，中垂線呢？線段中點且垂直，有沒有同一條？沒有。同樣的，另一點



（圖三十）



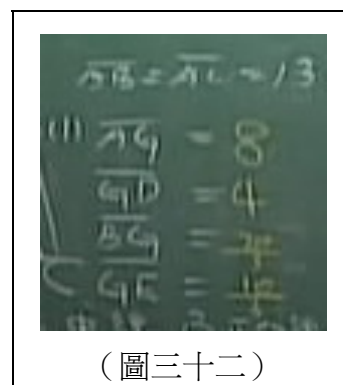
（圖三十一）

C 與對邊($\overline{AB}$)作出來的中線與對邊($\overline{AB}$)的中垂線會不會同一條？不會。所以它的中垂線所作出來的重心跟中線作出來的重心，會不會是同一個點？不會。可是我們知道它的這些心會在哪裡？這一條中線上（等腰三角形的

高)。可以嗎？它的三心也就是重心、外心，還有它的內心，沒有像正三角形那麼好，會在同一點上，但是因為它這一條（等腰三角形的高）是什麼？中垂線、中線、角平分線，所以它的心都會落在哪裡？會落在這一條線上面。因為剛剛腰上面作出來的中垂線，還有它的中線，不會是同一條，角平分線也不會是同一條，所以它不會在同一個點上。但是它有一個特性是什麼？它會剛好在這一條中線上面，有沒有問題？沒有。來，一樣看題目(p.313 學習單[例題二])，給你條件 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，找人上來寫好了，誰最想上來寫？小老師喔！好，等一下找你上來寫。第一個算 $\overline{AG}$ ，再來算 $\overline{DG}$ 、 $\overline{BG}$ 、 $\overline{GE}$ ，這是第(1)個部分，第(2)個部分去找它的面積，等一下這一題請小老師上來寫，就是第四頁右邊的下面那一題。面積的部分呢？有沒有人要志願？誰要志願？楊理捷喔！好，理捷，有嗎？理捷要志願嗎？

112. 理捷：沒有。

113. 老師：沒有喔！沒關係啦！這題就給你寫，好不好？來，先上來寫，其他同學就在自己的位置上寫。第(1)部分，長度的部分都給你寫，好不好？如果需要算式你就寫出來，不需要的話那你就直接寫，來，理捷上來寫。第一個長度的部分，我們找一個同學上來講好了，好不好？都沒算式，都只有



(圖三十二)

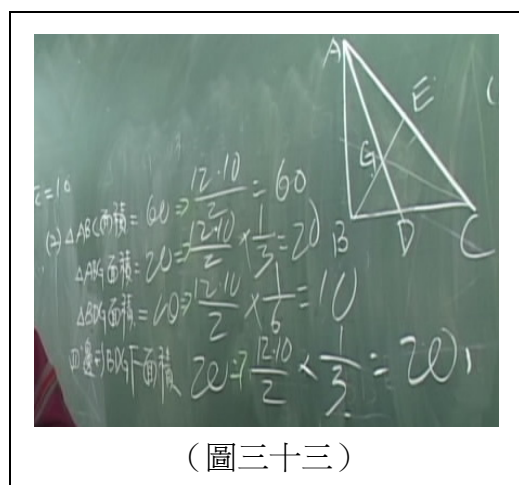
答案耶（圖三十二）！如果是計算題，你不能直接寫答案喔！算式要寫上去。第一個請佳祐上來講好了，第二個的話，看一下有誰？怡廷上來講這個面積的部分，好不好？

114. 學生：D 在哪裡？

115. 老師：D 點在下面啊！ $\overline{AD}$ 。

116. 怡廷：這是等腰三角形喔！

117. 老師：對。好了嗎？要先講第二個面積，是不是？來，面積部分我點人了嗎？怡廷，上來，趕快！你跟他做的不一樣，真的喔！沒關係，可以用你的想法講，然後這個給你們參考（圖三十三），他寫的有點亂亂的，記得下次上來寫的時候，要寫整齊一點，這樣大家才看得懂你在寫什麼？



（圖三十三）

麼？用你的也可以，也可以先用他的講一下，或者是用你自己寫的講都可以。

118. 怡廷： $\triangle ABC$ 的面積是..。

119. 老師：等我一下下，上面在講的時候，下面同學請看黑板上面喔！

120. 學生：好。

121. 學生： $\triangle ABC$ 的面積是底乘高除以 2，就會等於 60（圖三十三），然後 $\triangle ABG$ 面積是全部的 $\frac{1}{3}$ ，把全部的面積乘以 $\frac{1}{3}$ 會等於 20。 $\triangle BDG$ 面積等於全部面積的 $\frac{1}{6}$ ，全部的面積乘以 $\frac{1}{6}$ 會等於 10。四邊形 BDGF 面積是它裡面的兩塊面積，所以它面積是總面積乘以 $\frac{1}{3}$ 會等於 20。

122. 老師：那妳(怡廷)的想法哪邊跟他不一樣，特別指出來。

123. 學生：因為它有六塊，然後它的總面積是 60，所以就是除以 6。

124. 老師：所以妳就知道每一塊的面積，很好，這個也可以，不錯！這樣很快，對不對？她直接知道每一塊面積之後，知道要算哪一塊，所以就直接乘多少倍

，這樣子也可以。好了嗎？

125. 學生：快好了！

126. 老師：快好了喔！

127. 佳祐：老師。

128. 老師：要準備啊！等她寫完，因為你要講她的喔！

129. 佳祐：我講她的喔？

130. 老師：對啊！佳祐，上來。他要來講了喔！趕快認真聽啊！

131. 佳祐：這邊($\overline{AB}$)是 13。

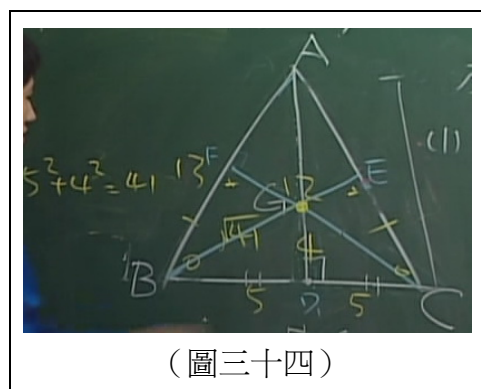
132. 老師：你的作法有沒有跟她一樣？

133. 佳祐：差不多。

134. 老師：差不多，好，等一下你可以指出她跟你不一樣的地方，好不好？

135. 佳祐：(圖三十四) $\overline{AB}$ 是 13， $\overline{BD}$ 是 5，因為

$\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BC}$ ，所以 $\overline{AD}$ 就是 12。 $\overline{AD} = 12$ ， $\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$ ，所以 $\overline{AG}$ 就是 8， $\overline{GD}$ 就是 4。 $\overline{BD}$ 是 5、 $\overline{GD}$ 是 4、 $\overline{BG}$ 就是 $\sqrt{41}$ 。因為 $\overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1$ ，所以 $\overline{BG}$ 是 $\overline{GE}$ 的兩倍， $\overline{GE}$ 就是 $\frac{\sqrt{41}}{2}$ 。



(圖三十四)

136. 老師：如果題目叫你算 $\overline{BE}$ 呢？

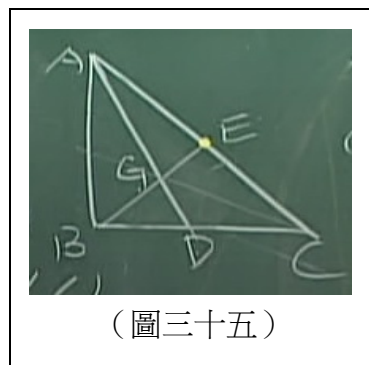
137. 佳祐： $\overline{BE}$ 在哪裡？

138. 老師：就是整條中線長 $\overline{BE}$ 。

139. 學生：就是 $\frac{3}{2}$ (指 $\frac{3}{2} \overline{BG}$)。

140. 老師：很好！知道為什麼 $\frac{3}{2}$ ？好，這題有沒有問題？她的作法有沒有跟你不一樣？沒有，都一樣。其他同學這一題有沒有問題？沒有。沒有的話來看一

下直角三角形，剛才看過正三角形，還有等腰三角形，接下來看直角三角形的（p.314，學習單[例題三]），一樣去找它的重心，重心是三中線的交點，應該沒問題吧！請告訴我 E 是什麼點（圖三十五）？G 點是重心，對不對？E 是什麼點？我們之前講過的外心？外心的定義是什麼？



（圖三十五）

141. 學生：三邊中垂線的交點。

142. 老師：三邊中垂線的交點，所以直角三角形的外心會在這裡？斜邊的中點上面。E 點又是我們這邊（ $\overline{AC}$ ）上的中點，它跟 B 連起來這條就是中線 $\overline{BE}$ ，我們去看這個重心跟這個外心的距離是多少？它跟整個中線長有什麼關係？知道我在問什麼嗎？這個外心(E)跟重心(G)它們有什麼關係？它們會在同一條線上，對不對？我們先不去討論它角平分線的部分，那個比較麻煩，現在只看它的重心跟外心的部分。如果考你算 $\overline{EG}$ 的話，會不會算？這條中線（ $\overline{BE}$ ）你會不會算？這一條中線（ $\overline{BE}$ ）跟斜邊（ $\overline{AC}$ ）有沒有關係？因為 E 是中點，所以這邊（ $\overline{AE}$ ）跟這邊（ $\overline{EC}$ ）會怎樣？一樣。因為這個點 E 又是外心，所以這三段長度（ $\overline{AE}$ 、 $\overline{EC}$ 、 $\overline{BE}$ ）會不會一樣？外心到三角形三頂點距離是怎樣？等距離的。如果我要算出外心跟重心的距離，其實你就找出什麼？這一段 $\overline{BE}$ 長。然後這邊幾比幾（ $\overline{GE} : \overline{BG}$ ）？1 比上多少？2（1：2）。所以這一段 $\overline{GE}$ 長就可以算出來，可以嗎？等一下題目會有一個是要算重心跟外心的距離（p.314 學習單[例題三]），所以你可以用這樣的方式算。它面積的部分，其實都跟前面的很類似。來，你們先自己算，然後我再找人上來寫，上來寫的就順便講解你寫的東西，好不好？第一個

找誰呢？溥鑫，給你第一個，再來第二個，第二個找毓淳，你們直接上來寫了，好不好？趕快上來寫啊！比較特別的就是這一部分，講到重心跟外心的距離（ $\overline{GE}$ ），趕快把這題寫完，我們再下課喔！來，趕快先上去寫了，毓淳，趕快！等她寫完再準備講喔！來，溥鑫趕快，要講完再下課。

143. 溥鑫：還要講喔！

144. 老師：對，快點。

145. 溥鑫：不是另外一個人喔！

146. 老師：沒有，我剛才說同一個人講。

147. 溥鑫：直角三角形嘛！

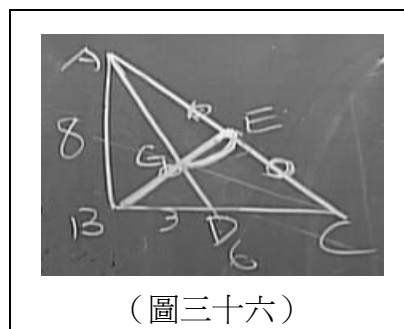
148. 老師：要看前面。

149. 溥鑫： $\overline{AB}$ 是 8、 $\overline{BC}$ 是 6（圖三十六）， $\overline{AD}$ 是中線，所以 $\overline{BD}$ 是 3， $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ ， $\overline{AG}$ 就是

$\frac{2}{3} \sqrt{73}$ 。然後 $\overline{GD}$ 是 $\frac{1}{3} \overline{AD}$ ，所以 $\overline{GD}$ 就是 $\frac{1}{3} \sqrt{73}$ 。E 點是外心，外心到三頂點等距，

然後用商高定理， $\overline{AC}$ 是 10，E 是中點， $\overline{CE}$

跟 $\overline{AE}$ 都是 5，所以 $\overline{BE}$ 也是 5； $\overline{BG}$ 就等於 $\frac{2}{3} \overline{BE}$ ， $\overline{BG}$ 就等於 $\frac{2}{3}$ 乘以 5， $\overline{BG} = \frac{10}{3}$ ； $\overline{GE}$ 等於 $\frac{1}{3} \overline{BE}$ ， $\overline{GE} = \frac{5}{3}$ （圖三十七）。

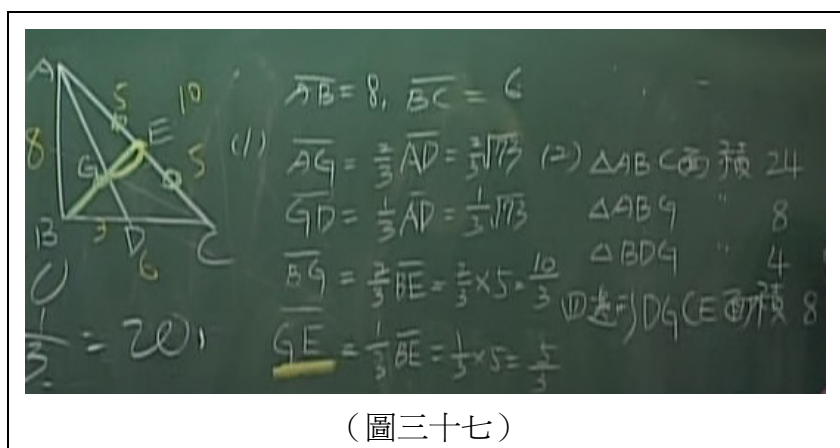


（圖三十六）

150. 老師：很好，給他鼓掌，如果題目考你外心到重心的距離，會不會算？直角三角形的部分要會算，再來換毓淳。

151. 毓淳： $\triangle ABC$ 的面積就是底乘以高除以 2，所以 $\triangle ABC$ 的面積就是 24，然後 $\triangle ABG$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{1}{3}$ ，所以 $\triangle ABG$ 面積是 8。 $\triangle BDG$ 面積是 $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積，所以 $\triangle BDG$ 面積是 4。然後四邊形 DGEC 面積是 $\frac{2}{6} \triangle ABC$ 面

積，所以四邊形 DGCE 面積就是 8。



152. 老師：有沒有問題？其他同學有沒有問題？沒有的話，我們今天就先上到這邊，其他對於一般三角形的部分，還有它應用的部分，我們下一次上課再上，如果沒問題的話就先下課。

參、教學說明

我教的單元主題是三角形的重心，在選擇這個主題之後，就開始跟我們團員討論，問他們，如果是你在教的時候，你會怎麼進行這個課程？然後也會去參考現在一些版本，看各版本的課程內容有哪一些，就開始著手去想自己上這個主題的時候，要怎麼去進行。開始設計自己的課程內容時，最頭痛的，就是一開始的時候，我到底要怎麼去進入這個課程或引導學生進入這個主題？這是每次我花最多時間的部分，所以我就會去跟人家討論到底要怎麼上會比較好。也因為花在這個部分的時間很久，所以在教案的設計部分也就比較慢，會寫比較久。因為我們寫完教案之後，會跟教授們討論

，我寫的速度比較慢，想說要把它寫完之後再去討論，討論的次數也就相對的變少了，所以其實在拍攝時間上，就會有一點倉促。本來預期要拍攝的時間是比較早的，因為討論完之後覺得有一些部分，還是要再做修正，所以因為一些因素，就把時間延後，希望把改過的教案，跟教授討論之後再去上，覺得這樣自己在上這部分課程上可能就不會那麼緊張害怕，或者是怕拍不好之類的。也希望經過這樣的教案設計、課程規劃之後，能讓學生對這個主題，在概念上的學習，會有比較清楚的了解。我在課程裡嘗試著讓學生可以有多一點的互動，希望他們在互動裡面可以互相學習、互相模仿、互相去觀摩人家的想法，然後可以順便釐清他們自己一些錯誤的觀念，或者是讓他們上台講的時候可以澄清一些他們可能有的錯誤觀念、想法之類的，讓他們分組討論、分組發表之後，可以多看看幾組不同的想法，後面（小白板）的部分就是他們在上課時候的一些討論、作法。

其實從他們的互動、討論裡面，我們可以看到很多他們不同的想法，或者是一些錯誤的作法、觀念之類的，然後可以及時給他們釐清。我覺得他們有些想法很不錯，是我自己也沒有想到的部分，這是我上課的進行方式。

教學重點的部分，這個主題主要是講三角形的重心，一開始希望可以透過活動讓他們了解物體的重心意義是什麼？然後帶入三角形的重心跟三條中線交點的關係，再去看重心的一些性質。它的應用部分，希望學生可以透過重心的性質，去解決一些跟重心相關的應用題目，或者是生活上的一些問題，這是教學重點的部分。

今天學生上課表現的部分，其實平常上課比較少做分組的活動，但是還是會讓他們有上台發表，或是寫他們的想法、作法，讓他們更多的互動機會。今天的上課方式是給他們分成六組，一開始的時候有設計一些活動，讓他們先上來做，然後去觀察，找三角形重心的部分，就是三中線的交點。有些組很好玩，本來是叫他們先找出兩條，然後再去觀察第三條會不會通過那個點，他們其實可能真的有先學過，很快就把它

畫出來了。

在活動的進行上面，我覺得比預期的慢了很多，可能就是希望在活動裡面，讓學生有更多參與機會。學生發表中要多注意學生的一些表達方式，或者一些觀念上要糾正的地方。在說明三中線交於一點的部分，也花了一些時間讓他們先討論。本來一開始的時候，有些組討論不出來，自己在寫自己的，我鼓勵他們大家一起想、一起討論，後來其實每一組都有寫出他們自己的想法，當然有些組的想法是滿類似的，但是有一些組的想法其實還不錯，是別組沒想到的。例如像有些組已經用到我們一開始講的中線長性質 2:1 的部分，有些人就很厲害，可以把它應用上去。有些人就是利用到等底同高的部分去說明，大部分都是用等底同高，還有代數算式的等量部分去做運算，推得六塊面積是一樣的。剛剛還有看到一組很特別，就是我們說明出六塊面積是一樣之後，我剛才把他們的白板收過來，就看到有一個很特別，畫了一塊披薩，他就馬上應用到生活裡面的題目。他知道那六塊面積一樣，可是他把有一塊就特別畫多了一點點，所以那一塊的面積是比較大的，我的想法就是他是故意這樣玩的，但是他也有把上課學到的東西應用上來，還不錯。

他們整體的表現，我覺得還不錯，都滿有反應的、很活潑。希望透過這樣子的活動，可以讓他們更喜歡上數學課，在數學學習上面，也更有興趣。對觀念的釐清部分，也比較可以達到預期的效果。我看他們最近考試，覺得他們在幾何的部分，好像不是學的很好。因為我們是分組上課，所以他們以前就是來自不同老師的教法，我希望可以透過這一年，用類似像這樣子的方式，把他們以前不足的部分，盡量去把它補足，希望他們也可以把一些學到的東西，運用在生活裡面，然後也可以嘗試讓他們多想想，就是多思考、多想，促進他們的一些思考。我常常鼓勵他們把自己的想法講出來，不要去背東西，看完人家的東西之後，自己去想過、自己去寫過，這樣對自己的收穫會比較多。像今天上課的時候，有讓他們一個寫，然後一個去講，有同學就告訴我

說：「老師，我寫的跟他不一樣」。我就跟他說：「沒關係，你就講完他的之後，再講一下他的哪個部分跟你的不一樣，你可以特別講出來。」並不一定說某些題目，就只能用某一些方法，當然有一些題目有各種不同的方法，自己去選擇覺得比較好的作法，比較不容易計算錯誤的方法，這樣對自己會比較好，不要去硬背一些人家的公式什麼之類的。

最後，覺得這一次上課，因為拍了很多次，所以就感覺沒有那麼緊張。我覺得用這樣上課的方式，真的感覺起來學生會比較活潑，可是其實有進度的壓力的話，這種方式可能就不能常用，但對學生的學習上面，我覺得會有比較好的學習效果。以後如果帶新的班，可能我從國一開始就要嘗試用這樣的方式，多給他們互動的機會，然後多去看他們的想法。在課堂裡面，就可以把他們一些觀念錯誤的部分即時去把它釐清，我覺得這樣對學生的學習效果上面會比較好。對於自己的教學上面，也會適時的去做一些調整，就是不同的單元，用不同的教法來教學，可能對學生的學習上面會比較好，不要一直執著在某一種方法，或者傳統的方法上面。

肆、教學後的省思

本次的教學單元為三角形的重心，課程時間為兩節課共 90 分鐘，中間有 10 分鐘的休息時間。教學單元預計的教學活動共有四個，但因為時間的關係，只進行到學習單(p.316)的練習 4，其餘的部分當作學生於課程結束後的作業。

本次教學活動的對象為國三學生，為教學者任課班級的學生，因為是國三學生，學校有分組教學，大部分學生數學程度還不錯，而平日班上的上課氣氛略為活潑，平常上課都能與老師互動，對於老師所提出的問題都會回答。課程活動中有分組討論，分組教學的目的是為了讓學生之間能有充分討論，因為學生程度都不錯，所以學生在同組之間的討論氣氛似乎還不錯，而且討論得蠻熱絡的。學生在回答問題或上台講解

時，可以將自己的想法清楚記錄與表達出來，並能從中發現問題，馬上糾正。

在活動進行方面，本次的教學活動中提到一些與重心相關性質，希望學生能對這次教學活動有所了解與熟悉重心性質並能應用性質解決問題。老師在上課中會點一些學生上台寫與講解。因為是分組上課，所以這些學生較多是程度不錯的孩子，學生在活動中大部分都仍能用心參與課堂活動，同學間的互動也是不錯的，但唯一就是不夠主動，不太喜歡在大家面前表現自己或是說出自己的想法，不過若多嘗試幾次，相信在他們表達能力上會更有幫助。

整個流程上來說，一開始的實驗討論花了不少時間，但透過這樣方式能讓他們更瞭解重心的意義也是不錯的。在教具呈現上面效果感覺還可以，但不知道有沒有更好的呈現方式是自己可以再去思考的問題，爲了這次活動，也參考了建議，去買了六個白板，方便讓學生討論及寫下各組的想法，這樣的方式可以解決六組把想法寫在黑板上密密麻麻的問題，以後若有分組討論也可以多嘗試用這樣的方式，多看看學生不同想法並從中找出各組間學生問題並及時作糾正，對他們學習會有更多助益。

最後，本次活動重點爲概念的理解與性質證明及性質應用，因為學生討論花較多時間，故未能將所有課程內容設計教授完畢，後面未上完部分皆偏重計算題型，若他們對於前面講的概念及性質都能清楚瞭解的話，應用題目應該不會有太大的問題。這單元有很多重心常考的相關題型，所以學生仍須於課後做更多練習，讓他們更熟悉性質應用。

圓幂性質探秘

壹、教學活動設計

一、教學年級：九年級上學期

二、教 學 者：台北縣江翠國中 陳彩鳳 老師

三、教學目標：

1. 能推導並應用圓的內幂性質解決問題。
2. 能推導並應用圓的外幂性質解決問題。
3. 能推導並應用圓的切割線性質解決問題。

四、活動目標：

1. 能透過相似形發現圓內幂性質，並用非文字(口語化)敘述結論。
2. 能透過相似形發現圓外幂性質，並用非文字(口語化)敘述結論。
3. 能透過外幂性質猜想切割線性質，並證明且能用非文字(口語化)敘述結論。
4. 能發現在圓內幂、外幂、切割線條件下，所作的兩矩形面積相等。
5. 透過欣賞畫展的布題，找出欣賞畫時在哪個位置看得最清楚。

五、教學概要說明：

傳統的圓幂教學，大都是透過相似形直接證明性質，再出幾個計算的題目確定學生是否學會；但是這樣的學習方式，學生少了探索、猜測的活動，學生較沒有感覺；所以第一堂課我在「圓內幂性質」中，兩弦交於圓內(此交點為內分點)探討時，透過先給數字，要學生求出其中的一條線段，讓學生思考可行的辦法，學生利用兩三角形相似得到線段成比例，再轉換成線段相乘的方式，最後希望學生不要使用英文文字的背誦，可以用自己的語言表達出所求得結論，雖然這樣

較花時間，但是學生會較有感覺，且記憶較為深刻。接著透過梯形面積為(上底+下底) $\times$ 高 $\div 2$ ，希望學生可以看出平行四邊形和三角形的面積等同於梯形面積；再透過類化，希望學生可以看出圓外幕性質其實就是圓內兩弦交於圓外(此點為外分點)，希望學生可以發現其實它與圓內幕性質是等同的；再將其中一條割線變成切線，希望學生也可以類化出結論；而介紹內分點和外分點，同時也為未來再上一堂「分比性質」埋下伏筆。在圓內幕、外幕、切割線討論時，讓學生從老師作好的幾何動態軟體 GSP 中，觀察當 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$ 變動時， $\overline{PA} \times \overline{PB}$ and $\overline{PC} \times \overline{PD}$ 的值永遠相等。

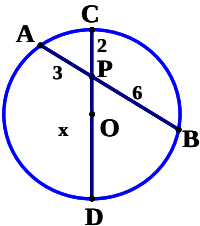
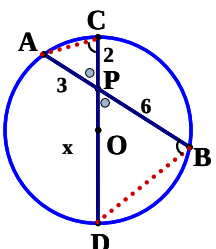
第二堂課，我希望學生不要只停留在數的計算而已，也能夠提升到形的概念，所以我利用線段相乘等同於面積的概念，分別利用圓內幕、外幕、切割線性質，各畫出兩個矩形讓學生觀察它們的面積之間的關係，希望學生可以將數的計算提升到形的概念。最後透過欣賞畫展引起動機，希望學生透過所學習過關於圓的性質找出最佳觀賞的位置(視野最清楚，視角最大)，因為這是一個很有挑戰性的問題，在學生沒有概念的狀況下，教師要適度地給予引導。

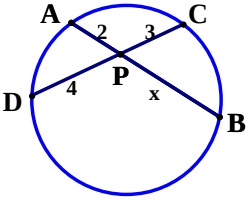
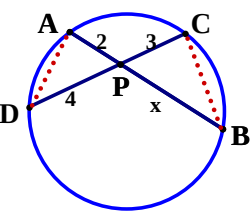
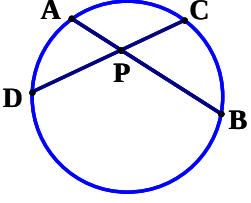
六、教學活動設計：

【活動一】能透過相似形發現圓內幕性質，並用非文字(口語化)敘述結論。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 複習舊經驗	1. 跟圓有關的角有哪些？	• (1) 圓心角：頂點在圓心的角或是兩半徑所形成的角。 圓心角的度數跟所對的弧的度數相同。	• 能回答圓心角、圓周角、圓內角、圓外角、弦切角；並能說出他們的度數。

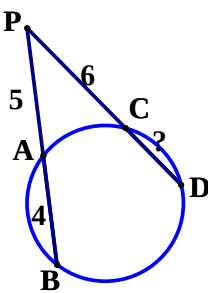
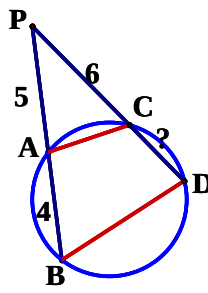
	2.什麼是圓心角、圓周角、圓內角、圓外角、弦切角？它們的角度有多大？	(2)圓周角：頂點在圓周上的角或是兩弦交於圓周上所形成的角。 圓周角的度數等於它所對弧度數的一半。 (3)圓內角：兩弦交於圓內所形成的角。 圓內角的度數等於它所對弧的度數和它的對頂角所對弧度數和的一半。 (4)圓外角：兩弦交於圓外所形成的角；或兩割線相交所成的角；或是一切線和一割線相交所形成的角；或是兩切線相交所形成的角。 圓外角的度數等於它所夾兩弧度數差的一半。 (5)弦切角：一弦和一切線所形成的角。	
--	---	---	--

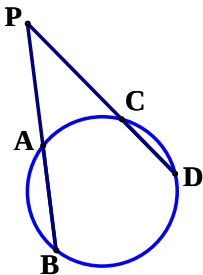
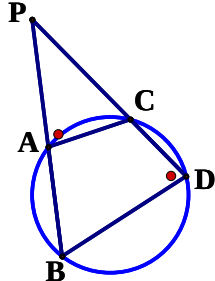
• 圓內幕性質	3.圓內接四邊形有何性質？ 4.如下圖，兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 交於P點，若 $\overline{AP}=3, \overline{BP}=6, \overline{PC}=2$，求 $\overline{PD}=?$ 	弦切角的度數等於弦和切線所夾弧度數的一半。 • 學生可能的想法： $2 \times 6 = 3 \times x$ or $2 \times x = 3 \times 6$ • 學生可能透過觀察線段的長短說出 $2 \times 6 = 3 \times x$ 是錯誤的，進而思考 $2 \times x = 3 \times 6$ 發現連接 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$  $\angle C = \frac{1}{2} \widehat{AD} = \angle B$ 同理 $\angle A = \angle D$ $\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB$ (AA 相似) $\overline{PC} : \overline{PB} = \overline{AP} : \overline{DP}$ $2 : 6 = 3 : x$ $\therefore x = 9$	• 能答出圓內接四邊形的對角互補及任一外角度數等於其內對角。 • 能回答： $\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}$ $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$。 • 可以利用相似形求出線段長。
----------------	--	---	--

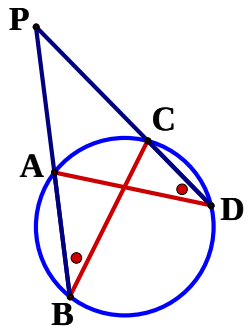
	5. 下圖中，兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 交於P點，若 $\overline{AP}=2, \overline{CP}=3, \overline{PD}=4$，求 $\overline{PB}=?$ 	• 連接 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CB}$  $\angle A = \angle C$ (對同弧 BD) 同理 $\angle B = \angle D$ $\therefore \triangle APD \sim \triangle CPB$ (AA 相似) $2:4 = 3:x$ $\therefore x=6$	• 能回答： $\overline{PA}:\overline{PD} = \overline{PC}:\overline{PB}$ 或 $\overline{PA}:\overline{PC} = \overline{PD}:\overline{PB}$ 。
	6. 圓內兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 相交於一點P，請問有何結論？ 	• 學生可能得到的結論： $\overline{PA}:\overline{PD} = \overline{PC}:\overline{PB}$ 或 $\overline{PA}:\overline{PC} = \overline{PD}:\overline{PB}$	
	7. 在 $\overline{PA}:\overline{PC} = \overline{PD}:\overline{PB}$ 中，由比例積可以得到什麼結論呢？		• 學生會利用比例積得到 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 。
	8. $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 與比例 $\overline{PA}:\overline{PC} = \overline{PD}:\overline{PB}$	• 學生會回答： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$	

	哪一個比式子比較記得住? 9.把看出來的性質，不用數字與英文字母說一遍。	• 學生回答: 兩弦相交於圓內一點，被該點分割出來的兩線段的乘積會相等。 (讓學生練習先去說，徹底表達後，再由老師說出數學上慣用的講法，透過共識所建立起來的術語式的說法。)	
--	--	---	--

【活動二】能透過相似形發現圓外幂性質，並用非文字(口語化)敘述結論。

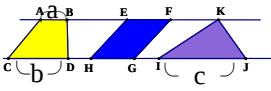
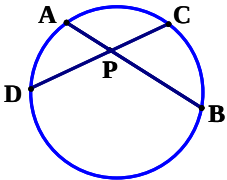
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 圓外幂性質	1.若兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 交於圓外一點P 且 $\overline{PA}=5$, $\overline{AB}=4$, $\overline{PC}=6$，求 $\overline{CD}$ 長 	• 學生可能的想法: 設 $\overline{CD}=x$ (1) $5:4=6:x$? (2) $5:6=4:x$? (3) $5:6=x:4$? (4) $5:6=(6+x):9$?  • 連接線段 AC 和 BD，設 $\overline{CD}=x$	• 能推導說出: $\overline{PA}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PB}$ 亦可以表示成 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。

		$\because$ ABDC 爲圓內四邊形 $\therefore \angle PAC = \angle D$, 且 $\angle P = \angle P$ $\therefore \triangle PAC \sim \triangle PDB$ (AA 相似) $5 : 6 = (6+x) : 9$ $\therefore x = 1.5$	
	2.若兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 交於圓外一點P，可以得到什麼樣的結論呢？ 	• 學生可能得到的結論： (1) $\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PB} : \overline{PD}$ (2) $\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$ (3) $\overline{PA} \times \overline{AB} = \overline{PC} \times \overline{CD}$ (4) $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 	• 能夠得到正確的結論。
		• 連接 $\overline{AC}, \overline{BD}$ $\because$ ABDC 爲圓內四邊形 $\therefore \angle PAC = \angle D$, 且 $\angle P = \angle P$	

		$\therefore \triangle PAC \sim \triangle PDB$ (AA 相似) $\therefore \overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$ 亦可以表示成 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$	
	3.輔助線一定要是 連接 $\overline{AC}$ 線段和 $\overline{BD}$ 線段嗎?爲什 麼呢?	也可以連接 $\overline{AB}, \overline{BC}$，進而發現 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PCB$ 相似。  $\therefore$ 連接 $\overline{AD}, \overline{BC}$ $\angle B = \angle D$ (對同弧 AC)，且 $\angle P = \angle P$ $\therefore \triangle PAD \sim \triangle PCB$ (AA 相似) $\therefore \overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$ 亦可以表示成 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$	能思考一題多解。
	4.請學生把看出來的 性質不用數字 與英文字母說一 遍。	兩弦交於圓外一點，則此點與弦的兩個端點距離的乘積會相等。 (讓學生練習先	學生會用自己的方式說明外幕性質。

		去說，徹底表達後，再由老師說出數學上慣用的講法，透過共識所建立起來的術語式的說法。	
--	--	---	--

【活動三】能透過外幂性質猜想切割線性質，並證明且能用非文字(口語化)敘述結論。

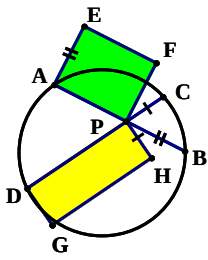
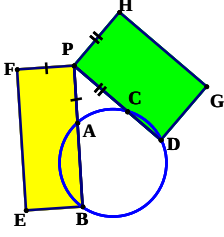
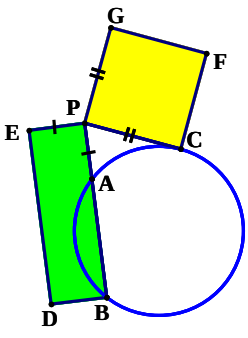
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
三角形面積、平行四邊形與梯形面積相同(上底為0)	1. 觀察下面的圖形，其中L//M且距離為h，  與梯形等高的平行四邊形和三角形，它們的面積可以看成梯形公式嗎？ 2. 下面兩個圖形的性質是什麼呢？ 	- 學生回答: 1. 梯形面積 $= (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$ $= (a + b) \times h \div 2$ - 三角形面積 $= c \times h \div 2$ $= (0 + c) \times h \div 2$ $= (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$ $\therefore$ 它們的結論可以看成一樣。	- 能回答平行四邊形和三角形面積公式與梯形同。 - 能回答 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

• 切割線性質	3.若D點與C點重合，且C 為切點，(先不呈現圖形)猜猜看應該會有何結論？ 4.讓學生從老師作好的幾何動態軟體GSP中，觀察當$\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$變動時，$\overline{PA} \times \overline{PB}$和$\overline{PC} \times \overline{PD}$的值永遠相等。	• 依上面的規律可得 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC}^2$ • ∴ 連接 $\overline{AC}, \overline{BC}$， 且 $\overline{PC}$ 為切線	• 能從內幕及外幕性質推測切割線性質。 • 能在 GSP 中觀察出 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 和 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC}^2$。
----------------	---	--	--

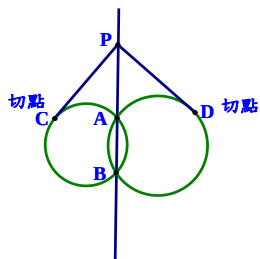
	5.請證明您的猜想。 6.請把看出來的性質不用數字與英文字母說一遍。 7.介紹名稱：內幂性質、外幂性質、切割線性質。	$\therefore \angle PCA = \frac{1}{2} \widehat{AC}$ 的 度數 $= \angle B$，且 $\angle P = \angle P$ $\therefore \triangle PAC \sim \triangle PCB$ (AA 相似) $\therefore \overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PC} : \overline{PB}$ $\therefore \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC}^2$ • 圓外一點到圓的切線長的平方會等於此點到圓的割線與圓的兩交點距離的乘積。	• 能利用相似形證明切割線性質。 • 學生會用自己的方式說明外幂性質。
--	---	---	---

【活動四】能發現在圓內幂、外幂、切割線條件下，所作的兩矩形面積相等。

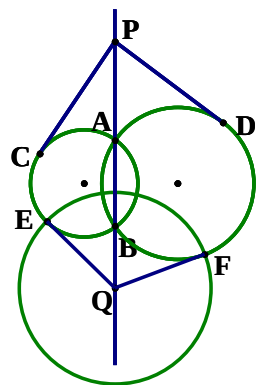
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 圓幂性質應用	1.根據所給的條件觀察圖中兩矩形面積關係。	• 面積相等 $\therefore \text{矩形 AEFP} = \overline{PA} \times \overline{AE} = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 矩形 DGHP = $\overline{PD} \times \overline{PH} = \overline{PD} \times \overline{PC}$	• 能藉由圓內幂性質知道面積相等。

	 2.根據所給的條件 觀察圖中兩矩形 面積關係。  3.根據所給的條件 觀察圖中兩矩形 面積關係。 	又圓內幕性質 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ∴ 矩形 AEFP 面積 = 矩形 DGHP 面積 • 面積相等 ∴ 矩形 BEFP = $\overline{PB} \times \overline{PF} = \overline{PB} \times \overline{PA}$ 矩形 DGHP = $\overline{PD} \times \overline{PH} = \overline{PD} \times \overline{PC}$ 又 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ∴ 矩形 BEFP 面積 = 矩形 DGHP 面積 • 面積相等 ∴ 矩形 BDEP = $\overline{PB} \times \overline{PE} = \overline{PB} \times \overline{PA}$ 矩形 CFGP = $\overline{PC} \times \overline{PG} = \overline{PC} \times \overline{PC} = \overline{PC}^2$ 又 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC}^2$ ∴ 矩形 BDEP 面積 = 矩形 CFGP 面積	• 能藉由圓外幕性質知道面積相等。 • 能藉由切割線性質知道面積相等。
--	---	--	---

4. 兩圓相交於A、B兩點，在AB直線上的任一點P， $\overline{PC}$ 與 $\overline{PD}$ 為切線，請問您有何猜想？寫清楚可能的狀況。



5. 如下圖，在直線AB上任取一點Q，過Q作左圓的切線 $\overline{QE}$ ；以Q為圓心， $\overline{QE}$ 長為半徑畫圓，交右圓於F；請問 $\overline{QF}$ 為切線嗎？



- 學生可能較不易看出複雜的圖形，此時可引導學生先看左圓，再看右圓，就會得到下列的結論：

∵ 兩圓相交於A、B兩點且
 $\overline{PC}, \overline{PD}$ 為切線

$$\therefore \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC}^2$$

且

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PD}^2$$

$$\therefore \overline{PC} = \overline{PD}$$

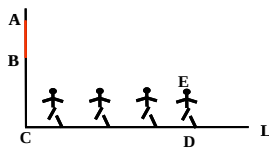
- 能藉由切割線性質知道 $\overline{PA} = \overline{PC}$

- 學生會回答是切線。但是這裡因為牽涉到逆性質，因此若學生無法回答，老師就簡單說明。

- 會猜測它是切線。

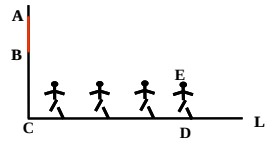
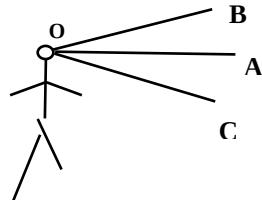
【活動五】透過欣賞畫展的布題，找出欣賞畫時在哪個位置看得最清楚。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
圓幕性質的應用	1.請學生手伸直，把課本高高舉起，鎖定一個目標區，將課本從前方往頭上前進，看看在哪個位置時，目標區內的字看得最清楚。 • 也可以在下課時，老師刻意在黑板上方的牆壁上，貼一行不要太大的字(故意寫成橫行)，請同學實際走一次，看看要站在哪裡看得最清楚？ 2.為什麼靠越近，反而越看不清楚？ 3.老師舉實例說明:  三月份時，國父紀念館舉辦宗教與藝術展;陳老師參觀時，看到牆上有一	• 學生可能的回答 (1)好像都差不多。 (2)看不出來。 (3)其他 • 因為學生在理化課學過視角，所以可能回答視角變小了!	• 能實際操作。 • 會說出越靠近，反而越看不清楚的理由。 • 學生能活用所學過關於圓裡面角的性質及圓幕性質，畫出正確的位置。

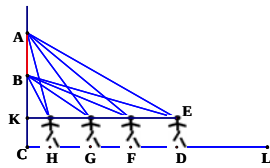


幅畫，掛在比我們身高高出一些，欣賞時若太靠近看不清楚，太遠也不清楚的地方；如下面側面圖，線段AB表示掛圖處；陳老師從D處往前走，請問應該走到哪裡時看得最清楚？

(若掛圖的上方及下方對眼睛所形成的角度 $\angle BOC$ 稱為視角)

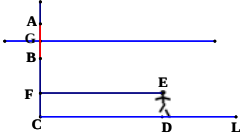
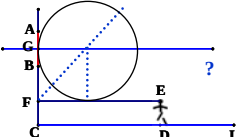
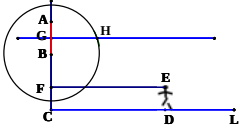
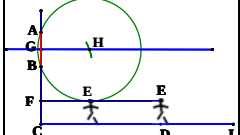
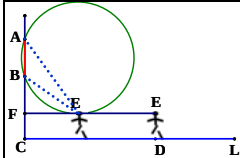


- 哪一個視角可能比較清楚？

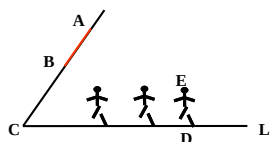


- (1) 做 $\overline{AB}$ 的中垂線，找三角形的外心，但不知道眼睛應該在哪裡！

- 如果學生沒有想法，可由老師說明。
- 畫圖由老師呈現

		，或學生跟老師同步作。 說明完，由聽得懂的學生再上台說明一次。	
	(2)作$\angle AFE$的角平分線。角平分線上任一點到角的兩邊等距離。	    	
	(3)$\overline{GF}$ 其實就是半徑，以B為圓心，$\overline{GF}$ 長為半徑畫弧，交前面的中垂線於H 點。		
	(4)再以H為圓心，$\overline{GF}$ 長為半徑畫弧。		
	(5)當人前進到左邊的E點時，視角最大。		

4.課後作業(置於學習單)在展覽館的一角落，陳老師看到牆與地面未垂直，且牆上有一幅畫，如下面側面圖，線段AB表示掛圖處；陳老師從 D 處往前走，請問應該走到哪一個點時視角最大?(即當眼睛為 E 點時， $\angle AEB$ 的度數最大)



附錄：學習單

[圓冪探秘]學習單:

座號: 姓名:

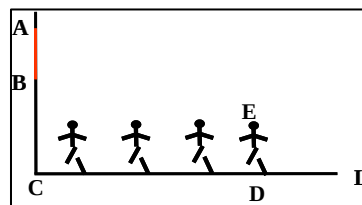
- 1.三月份時，國父紀念館舉辦宗教與藝術展;陳老師參觀時看到牆上有一幅畫，掛在比我們身高高出一些，欣賞時若太靠近看不清楚，太遠也不清楚。如下面側面圖， $\overline{AB}$ 表示掛圖處，陳老師從 D 處往前走，請問應該走到哪裡時看得最清楚？



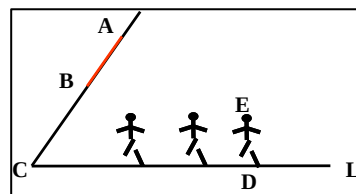
(若掛圖的上方及下方對眼睛所形成的角度 $\angle AEB$ 稱為視角)

請將您的想法畫在下面的圖上，並寫出您的作法。

作法:



- 2.在展覽館的一角落，陳老師看到牆與地面未垂直，且牆上有一幅畫，如下面側面圖， $\overline{AB}$ 表示掛圖處；陳老師從 D 處往前走，請問應該走到哪一個點時視角最大？(即當眼睛為 E 點時， $\angle AEB$ 的度數最大)

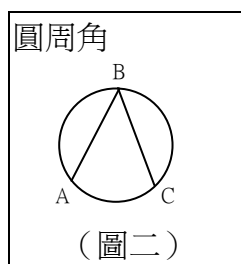
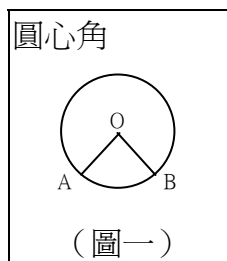


作法:

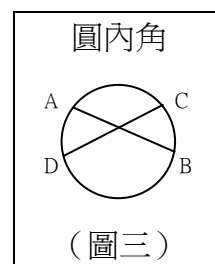
貳、教學實錄

【第一節】

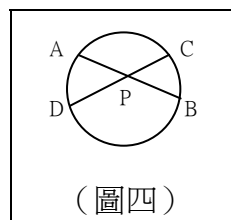
1. 老師：來，同學上課。
2. 學生：起立，立正，敬禮。
3. 學生：老師好。
4. 老師：各位同學大家好，請坐下。上禮拜四跟你們上過一堂課，我發現那種感覺很棒。上次完全沒有介入今天的主題，我們今天的主題是什麼呢？同學請唸一遍。
5. 學生：圓幕性質探秘。
6. 老師：盈盈老師也還沒有上到這個主題，對不對？
7. 學生：對。
8. 老師：老師希望你們今天表現出原來上課的狀況就好。我們複習一下角，同學先想想看，圓裡面的角有哪些？
9. 學生：圓心角、圓周角、圓內角、圓外角、弦切角。
10. 老師：請同學比一下，什麼叫圓心角？請在空中畫，什麼叫圓心角？畫一個圓，圓心角是怎樣的？
11. 學生：一個圓心再兩個半徑。
12. 老師：對，是不是就是這種狀況（圖一）？
，所以 $\angle AOB$ 叫圓心角。 $\angle ABC$ 叫什麼角呢（圖二）？
13. 學生：圓周角。
14. 老師：好，請問圓周角度數等於多少？



15. 學生：所對弧的一半。
16. 老師：請不要告訴我 $\frac{1}{2}$ 弧，我希望你們用國字詮釋，劉明同學，請站起來，你剛剛怎麼說？
17. 劉明：所對的夾弧一半。
18. 老師：所對的夾弧一半？
19. 劉明：所對夾弧度數的一半。
20. 老師：所對夾弧度數的一半。請問同學，他有沒有說贅字？他說，所對的夾弧的一半，我們讓劉明再修正一遍，請你說。
21. 劉明：所夾度數的一半。
22. 老師：所夾度數的一半，請問現在有沒有「夾」？我知道你指的那個「夾」，可能跟我的，有認知上的問題，你們剛剛怎麼說？所對弧度數的一半。對！你剛剛是說所「夾」，我知道你的意思是，這二條弦 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 所夾這個 $\widehat{AC}$ （圖二），你的意思是不是這樣？我想還是把它統一一一下，是所對弧度數的一半，這樣比較好。好，我們給他鼓掌，請坐下。我們再看第三個角是什麼？
23. 學生：圓內角。
24. 老師：來，同學請畫一下，圓內角是什麼？
25. 學生：交叉。
26. 老師：什麼東西交叉？二條弦交在圓內所夾的角，叫圓內角（圖三），對不對？請問圓內角度數是什麼？哪個同學願意說？還是要我點名。好，余偉同學，請站起來。
27. 余偉：就是它所對的大弧加小弧的一半。
28. 老師：所對的大弧跟小弧，請問小弧是旁邊的弧嗎？



29. 余偉：就是它夾的大弧 $\widehat{AD}$ ，然後加比較起來的小弧 $\widehat{CB}$ 的一半（圖三）。
30. 老師：請你再畫一遍。
31. 余偉：就是一個圓，然後它夾的弧，大弧加小弧的一半。
32. 老師：你說 $\widehat{AD}$ 加 $\widehat{BC}$ ，是不是？好，那我們應該用準確一點的說法，假設別人沒有看到你這樣畫，就不懂你說什麼，我們先給余偉同學鼓掌。同學先想想看，請你用國字來說，什麼叫圓內角？有沒有哪個同學自告奮勇？好，偉志請站起來，誰叫你離我那麼近。請你告訴我，你會用怎麼樣的方式來詮釋圓內角？用國字說。請站起來，你會怎麼樣詮釋圓內角？你剛剛說兩條弦交在圓內，然後呢？
33. 偉志：然後…。
34. 老師：什麼叫圓內角？圓內角的度數等於什麼？ $\widehat{AD}$ 加 $\widehat{BC}$ 的一半，對不對？可是我們現在就是不要用文字來呈現，也就是純粹用國字來敘述，你會怎麼樣敘述？你很緊張，對不對？好，請坐下。剛剛把名字吊在天花板上的那位同學，請站起來，宜帆，來，請你說。你們都太緊張了，有沒有同學要拯救她？好，請說，那個又什麼？
35. 學生：又增。
36. 老師：又增同學，好。
37. 學生：就是角 $\angle APD$ 所對的弧 $\widehat{AD}$ ，跟它對角 $\angle BPC$ 所對的弧 $\widehat{CB}$ ，和的一半（圖四）。
38. 老師：什麼叫對角？
39. 又增：就是它這個角($\angle APD$)對過去的($\angle BPC$)。
40. 老師：對，這個角($\angle APD$)對過去的那個角($\angle BPC$)，它不叫對角，它叫做什麼角



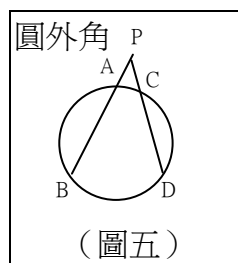
？

41. 又增：對頂角。

42. 老師：請你再說一遍。

43. 又增：就是這個角所對的弧和它對頂角所對的弧，和的一半。

44. 老師：太厲害了！我們給他鼓掌，很棒。老師不希望你告訴我
 $\angle APD$ 所對的弧及對頂角 $\angle BPC$ 所對弧，和的一半，剛剛又增是不是這樣子講，對不對？希望同學不要光用
 $\widehat{BC} + \widehat{AD}$ ，括號起來的 $\frac{1}{2}$ ，希望用文字呈現。我們再看
 第四個角是圓外角，請你們告訴我，怎麼詮釋圓外角？



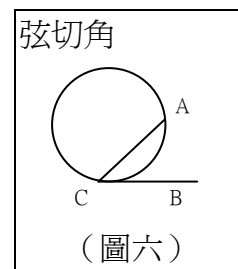
有沒有哪個同學自告奮勇？正語，你要不要說？有沒有同學願意拯救他，好，佑澄，請說。

45. 佑澄：兩條割線或一條割線、一條切線，或是兩條切線交點在圓外（圖五）。

46. 老師：他說二條割線，對不對？或者是一條割線、一條切線，或者二條都是切線，在圓外所成的角叫圓外角，這個角的度數是什麼？

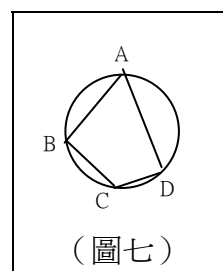
47. 佑澄：它所夾大弧減小弧的一半。

48. 老師：好，請問同學，佑澄講的有沒有很清楚？非常清楚！我們給他鼓掌。而且他剛才還特別強調一件事，他說二條割線，或者是一條切線、一條割線，或者二條切線交在圓外，那個角就叫圓外角。圓外角的度數就等於它所對過去的大弧減掉小弧的一半，反正就是兩個對弧的絕對值相減，再一半也可以。再過來是弦切角，有沒有同學願意解釋什麼是弦切角？顧名思義，弦、切角應該是什麼？



49. 學生：弦和切線的夾角。

50. 老師：對，弦跟切線的夾角，那它的度數有多大？如果我把圖形呈現在這邊（圖六），有沒有誰願意告訴我們，什麼叫弦切角的度數？它應該多大？漢生，你要不要解釋一下？你一定知道 $\angle ACB$ 有多大，只是現在用國字呈現。
51. 漢生：就是弦切角中間那個弧…。
52. 老師：嘿！
53. 漢生：的一半。
54. 老師：同學要不要再說一遍，是怎樣？
55. 學生：弦跟切線所夾弧度的一半。
56. 老師：好，我們給漢生鼓掌。我想問在圓裡面，你時常會用到的一些角度，除了上面的五種角以外，還常常用到哪一個角？跟圓沒有關係的角，但是常常會用到？什麼角？
57. 學生：對頂角。
58. 老師：還有什麼角？
59. 學生：直角。
60. 老師：還有什麼角？
61. 學生：同側內角。
62. 老師：同側內角要平行線才有用，同學應該常常用到，但是沒有刻意的去注意它，那就是三角形的怎樣？
63. 學生：外角。
64. 老師：所以在圓裡面，你時常會用到六種角，第一種是圓心角，第二個是圓周角，第三個是圓內角，第四個是圓外角，第五個是弦切角，第六個就是三角形的外角，因為圓裡面一定有圓內接三角形。接著我們來看圓內接四邊形，請告訴



我，如果老師呈現這個（圖七），你認為會有什麼性質？用國字說。

65. 劉明：兩種。

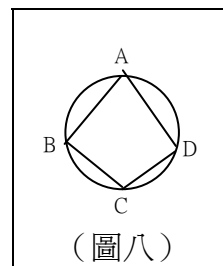
66. 老師：對！哪兩種？劉明，請你說，你剛剛說兩種，請問是哪兩種？

67. 劉明：兩對邊相加的和相等。

68. 老師：對邊相加，你說上加下等於左加右？

69. 劉明：對。

70. 老師：有沒有人要挑戰他？可是老師講的是什麼？圓內接，他剛剛說的是圓外切，對不對？很好，我們都分得很清楚，沒關係！我們再讓他說圓內接四邊形，他把接跟切弄混了。好，如果是這個圖（圖八），對角怎樣？

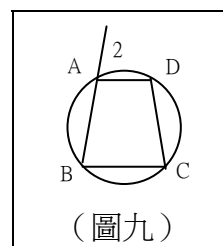


71. 劉明：互補。

72. 老師：對！第二個性質呢？

73. 劉明：其中一個角的外角度數，等於它的對角度數。

74. 老師：什麼叫等於它對角度數，我現在再呈現這一個圖，（圖九）請你告訴我 $\angle 2$ 等於誰？



75. 劉明： $\angle C$ 。

76. 老師：你剛剛說其中一個外角等於什麼？

77. 劉明：等於它對角的度數。

78. 老師：等於它對角的度數？那請問一下，這個對角在哪裡（圖九）？所以你少了一個字，外角會等於它的什麼？

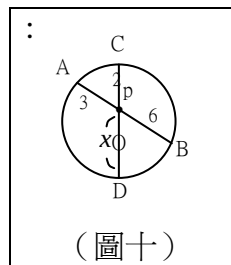
79. 劉明：它的對角度數啊！

80. 老師：等一下，這個 $\angle 2$ 在這啊！對角在哪裡？應該怎麼說？外角度數會等於它的…？我們都知道劉明他很清楚， $\angle 2$ 跟 $\angle C$ 一樣，可是 $\angle C$ 是 $\angle 2$ 的什麼

角？有沒有同學願意幫他說？叫什麼角？多一個字就好了。好，讓劉明說，讓他雪恥再說一遍。

81. 劉明：它的角度等於內對角的度數。

82. 老師：對，圓內接四邊形的一個外角，會等於它內對角的度數，好，我們給他鼓掌，太棒了！請坐下，接著我們就要進入今天的主題了。請看這裡，兩條弦交在圓內一點 P（圖十），老師故意告訴你說，其中這條弦是通過圓心，言下之意它就是一條什麼？



83. 學生：直徑。

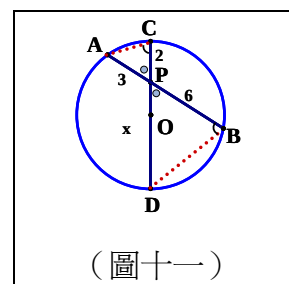
84. 老師：條件是 $\overline{CP}$ 長為 2， $\overline{AP}$ 長為 3， $\overline{PB}$ 長為 6，請問 $\overline{DP}$ 有多長？

85. 劉明：9。

86. 老師： $\overline{DP}$ 等於 9，我沒有說你錯喔！因為其它同學還沒有講，所以我們等同學一下，同學手上有計算紙，可以算算看。(學生計算中)為什麼剛剛劉明同學說是 9？為什麼是 9？假設我現在算出來的答案跟他不一樣，我就要趕快想到底是他對還是我對？劉明同學，假設等一下有人答案是 6，你就要想，到底是他對還是我對？我再驗證一遍。所以很快就寫出來的同學，要做驗證的工作。好，做出答案是 9 的同學請舉手，好，請放下。有沒有哪個同學自告奮勇要上來說？請舉手。好，請上來，佑澄同學，那就麻煩你邊寫邊講解。

87. 佑澄：把 $\overline{AC}$ 還有 $\overline{BD}$ 連起來（圖十一）。

88. 佑澄：然後 $\angle C$ 所對的弧是 $\widehat{AD}$ ， $\angle B$ 對的弧也是 $\widehat{AD}$ ，所以這兩個角會相等。同樣的方式，也可以證明 $\angle A$ 會等於 $\angle D$ ，這兩個三角形($\triangle APC$ 、 $\triangle DPB$)就相似，所以



$2:6$ 會等於 $3:x$ 。

89. 老師：對。

90. 佑澄：這樣可以求出 x 。

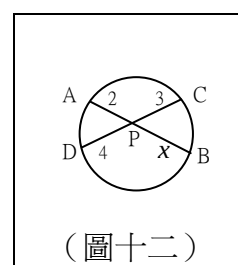
91. 老師：好，同學有沒有問題？我們給佑澄鼓掌，真的是很厲害。同學可以看一下，老師剛剛已經在 PPT 檔上播放，老師用對頂角相等（圖十一），而他用另外一個圓周角，我們就得到這兩個三角形($\triangle APC$ 、 $\triangle DPB$)是相似的。剛剛佑澄說 $\triangle APC \sim \triangle DPB$ ，對應要對好喔，A 對誰？

92. 學生：對 D。

93. 老師：對 D，A 對 D，因為它們都對同一個弧，所以 $\triangle APC$ 就相似於 $\triangle DPB$ 。相似後，對應邊成比例，答案就出來了。很顯然地，跟它有沒有通過圓心，有沒有什麼關係？

94. 學生：沒有。

95. 老師：沒有，對不對？我故意要騙你們，看會不會上當。好，請同學看這邊，如果是這樣，兩條弦交在圓內一點 P（圖十二）， $\overline{AP}$ 長度為 2， $\overline{PC}$ 長為 3， $\overline{PD}$ 長為 4，請問 $\overline{PB}$ 長度多長？



96. 學生：6。

97. 老師：好，為什麼是 6？找一個女同學上來說，好不好？哪個女同學自告奮勇？因為每次都是男生說，讓女生說一下好了。風紀，要不要請妳上來說？不要，是不是？試試看嘛！我們發現每次都是男生一直說，女生都比較內向，偉志，讓你雪恥一下好了，請上來，你要連接誰？

98. 偉志：一定要上去？

99. 老師：對，不上來也可以，你就這樣子(拿老師簡報筆給學生)，你就按(筆燈的開

關)，你不可以按這個(Enter)，因為這樣答案就 Show 出來了。你要按筆燈鍵，請你說，你要連接誰？你覺得要怎麼做？對，連接 D 跟什麼？

100. 偉志：連接 A 跟 D (圖十三)。

101. 老師： $\overline{AD}$ 跟什麼？

102. 偉志： $\overline{CB}$ 。

103. 老師：好，那有什麼性質？它可以怎麼樣？

104. 偉志：然後 x 。

105. 老師：我幫你連，好，請告訴我，這樣連接上有什麼好處？誰跟誰一樣？

106. 偉志：連 A 跟 D，C 跟 B。

107. 老師：你說 $\angle D$ 跟誰一樣大？

108. 偉志： $\angle B$ 。

109. 老師：跟 $\angle B$ ，為什麼？對，它們都等於 $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ ，還有咧？

110. 偉志：然後 $\angle APD$ 等於 $\angle CPB$ 。

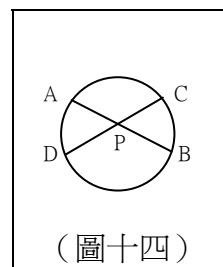
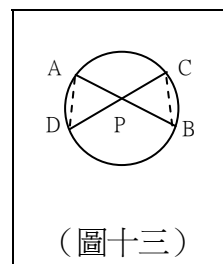
111. 老師：你說這兩個角度一樣，那是什麼角？

112. 偉志：對頂角。

113. 老師：不是對角，叫對頂角，很好。很顯然答案為 $2:3=4:x$ ，同學心算一下， x 應該等於多少？

114. 學生：6。

115. 老師：剛剛算 6 的同學請舉手，很好，請放下來。接著再看這一題，現在老師想問你結論是什麼？我們剛剛算了兩題，你可不可以給它下結論了？圓內兩條弦交於 P 點 (圖十四)，四個線段 ($\overline{AP}$ 、 $\overline{BP}$ 、 $\overline{CP}$ 和 $\overline{DP}$) 有什麼關係？你覺得誰比誰等於誰比誰？或隨便你說，你覺得性質是什麼？



116. 學生： $\overline{AP}$ 比…。
117. 老師： $\overline{AP}$ 比上什麼？
118. 學生： $\overline{PC}$ 。
119. 老師： $\overline{AP} : \overline{PC}$ 會等於什麼？ $\overline{DP}$ 比上？
120. 學生： $\overline{PB}$ 。
121. 老師： $\overline{PB}$ ，對，非常好。也就是說，我們剛剛講 $\overline{AP} : \overline{PC}$ 等於 $\overline{PD} : \overline{PB}$ ，對不對？可是如果要你用記的時候，你會不會覺得這樣比較好記($\overline{AP} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$)？還是你覺得我們學過比例積，什麼叫比例積？同學知道嗎？願意說的同學請舉手，漢生同學的後面叫做元嘉，要不要說一下，你不敢講？那我們麻煩漢生，請說，什麼叫比例積？
122. 漢生：比例積。
123. 老師：哈哈。(∵學生以為是肯德雞的雞)
124. 漢生：我們讓劉明表現一下。
125. 老師：好，劉明同學，請說。
126. 劉明：那個(內項相乘)等於(外項相乘)。
127. 老師：他說內項乘積跟外項乘積是一樣，你的意思是這樣，對不對？請坐下來，我們給他鼓掌。很好，內項相乘等於外項相乘，所以同學，你覺得它的性質是什麼？ $\overline{PA}$ 乘以 $\overline{PB}$ 會等於 $\overline{PC}$ 乘以什麼？
128. 學生： $\overline{PD}$ 。
129. 老師：是不是乘以 $\overline{PD}$ ？我最喜歡這一招，請不要用文字，而使用一般語言敘述，請不要用 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ，因為萬一我把順序調了一下，你就再見了，對不對？所以同學，你要怎麼敘述？有沒有同學願意嘗試看看？你們在心裡想想看，可能之前都是停留在文字這樣說，那我們這堂課就嘗試一下

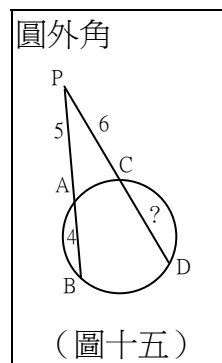
用國字呈現，好，漢生，讓你雪恥。

130. 漢生：兩弦相交，兩條弦各被分割的線段，相乘會相等。

131. 老師：同學，假設沒有看圖，聽他講，你知道在說什麼嗎？麻煩你再說一遍，我們現在不要看黑板上的圖，我把圖弄掉，麻煩你說。

132. 漢生：一個圓內兩弦相交，兩條線各被分割成兩條線段，相乘會相等。

133. 老師：好，同學有沒有搞清楚？他說圓內兩條弦相交於一點，你最好說相交於一點，然後各自分成了兩條線段，相乘會相等，好，我們給他鼓掌。如果現在兩條弦在圓內沒相交，把它延長到圓外去，讓它相交於一點 P（圖十五），還是一樣，圓內的兩條弦相交在圓外， $\angle P$ 叫做什麼角？



134. 學生：圓外角。

135. 老師：圓外角。現在我們來探討一下，如果弦交在圓外，如果老師給你 $\overline{PA}$ 為 5， $\overline{PC}$ 為 6， $\overline{AB}$ 為 4，我要問你 $\overline{CD}$ 有多長？同學不妨畫在你的紙張上面，算算看， $\overline{CD}$ 長度應該多大？

136. 劉明：3。

137. 老師：你說答案 3，是不是？好，劉明 同學說答案是 3，答案跟他一樣的請舉手。好，佑澄，請說，你答案多少？佑澄 算到一半，有沒有人算出來了？沒有同學附和你的答案喔！或許同學還在算，所以請你(劉明)再算一遍。答案跟劉明 同學不一樣的請舉手。怡帆，你的答案是不是跟他不一樣？你的答案是多少？因為我覺得她剛剛的表情告訴我，她的答案不一樣，她的答案是 $\frac{3}{2}$ ，是劉明 同學的一半。來，請問算出 $\frac{3}{2}$ 的同學請舉手，這麼多同學附和她喔！5 個，好，請放下。來，劉明 同學，請你再算一遍，我們讓你雪恥好了。好，請上台，呈現你錯的那一面，說不定你上台之後，答案就對了。

。在座位上的同學先想想看， $\overline{CD}$ 可以怎麼求？好，劉明，你剛剛怎麼算出 3 的？

138. 劉明： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ （圖十五）。

139. 老師：為什麼對？你都這樣算，應該有原因，對不對？還是你之前有先學過，有沒有先學過？

140. 劉明：沒有，我有記性質。

141. 老師：喔！他有記性質，可是我想如果你先懂為什麼，會不會比較容易記？那你來證證看，剛才說 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ， $5 \times 9 = 45$ ，然後等於 6 乘誰？是不是那一大段 $\overline{PD}$ ？45 除以 6 嘛，就是 $\frac{15}{2}$ ，也就是 7.5，上面($\overline{PC}$)是 6，所以理論上 $\overline{CD}$ 是多少？你寫寫看，你要告訴我們，為什麼你這樣做？

142. 老師：剛剛算出 1.5 的同學，我想請問你們怎麼做的？我剛剛看到兩個女生，玉琪跟佳璇，你們算錯，對不對？劉明講的性質沒錯，可是他的答案是有問題的，好，我們給他鼓掌。

143. 劉明： $5 \times 9 = 6 \times x$ ， $\therefore x = 7.5$ 。

144. 老師：所以我很喜歡請說錯的同學上來寫，因為這樣才能夠知道自己到底錯在哪裡，好，劉明同學請下來。我們再請兩位女同學，來，佳璇跟玉琪，你們兩個同學，哪個願意上來說為什麼？好，我們給佳璇鼓掌，第一位女生上台喔，很好，告訴我們為什麼這樣做？

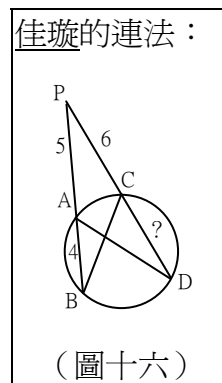
145. 佳璇：連接 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ （圖十六）。

146. 老師：等一下，我們請妳換個位置，這樣才不會背對鏡頭。

147. 學生：連接線段 $\overline{CB}$ ，然後…。

148. 老師：好特殊的連法，好，繼續說。

149. 佳璇：然後 $\angle B$ 對 $\widehat{AC}$ ， $\angle D$ 也對 $\widehat{AC}$ （圖十六），所以它們兩個



角相等。 $\triangle PAD$ 跟 $\triangle PCB$ 它們有同樣一個 $\angle P$ ，所以這兩個三角形會相似。

150. 老師：好，請妳把它寫出來，寫在左邊，列一下式子（圖十七），很棒喔！她一直在找對應，A 對誰，然後 B 對誰。

151. 佳璇：然後再來就是……。

152. 老師：請問一下，這叫什麼相似？

153. 佳璇：AA。

154. 老師：很棒，AA 相似，兩個角對應就是兩個 A。

155. 佳璇：再來， $\overline{PB} : \overline{PD}$ 會等於 $\overline{PA} : \overline{PC}$ ，然後再代數字進來。

156. 老師：停，剛剛有同學說錯了，來，你覺得她哪裡錯？

157. 佳璇： $\overline{PC} : \overline{PA}$ 。

158. 老師：你看，她自己也找到錯了！

159. 佳璇：再代一次進去， $\overline{PB}=9$ ， $\overline{CD}$ 稱它是 x ，所以 $\overline{PD}=6+x$ ， $\overline{PC}=6$ ， $\overline{PA}=5$ ，然後跟它相乘（圖十八）。

160. 老師：可不可以先約分？6 跟 9 先約？

161. 佳璇：3 跟 2， $\frac{9}{6+x} = \frac{6}{5}$ ， $15=12+2x$ ，所以 x 就會等於 $\frac{3}{2}$ 。

162. 老師：好，麻煩妳這邊把它用逗號分開，不然會變成 $2xx$ （學生寫成 $15=12+2xx=\frac{3}{2}$ ），好，我們給她鼓掌，很棒喔！剛剛佳璇同學，她在這個地方是寫反了（ $\overline{PA} : \overline{PC}$ ），這邊可能被她

佳璇的做法：

在 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PCB$ 中

$$\because \angle B = \frac{1}{2} \widehat{AC} = \angle D$$

$$\angle P = \angle P$$

$$\therefore \triangle PAD \sim \triangle PCB (\text{AA 相似})$$

（圖十七）

$\triangle PAD \sim \triangle PCB (\text{AA 相似})$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$$

$$\frac{9}{6+x} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{3}{6+x} = \frac{2}{5}$$

$$15=12+2x$$

$$x = \frac{3}{2}$$

（圖十八）

遮到，所以同學沒有注意到她說 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$ 是顛倒的，而那邊有同學發現應該是 $\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$ 。我發現佳璇同學很喜歡回來看這邊圖形的對應（圖十六），對不對？有沒有同學不用那樣做？（有學生舉手）對，因為妳這裡相似形對應寫得已經夠清楚了，而且她對應得很好。她會注意 A 對 C，然後 B 是對 D，你注意到這點，就不要再看回圖形了，在相似對應這邊看就很簡單。 $\overline{PB} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PA}$ ，可不可以說是 $\overline{PB} : \overline{PD} = \overline{PA} : \overline{PC}$ ？這樣就反了，如果是 $\overline{PB} : \overline{PD}$ ，那你就要說 $\overline{PC}$ 比上什麼？

163. 學生： $\overline{PA}$ 。

164. 老師：就是 $\overline{PA}$ ，她剛剛做了這個動作 $\overline{PB} : \overline{PD} = \overline{PA} : \overline{PC}$ ，這樣子做對不對？就錯了。請問這個題目有沒有問題？

165. 學生：沒有問題。

166. 老師：用不同方法的同學請舉手，輔助線畫得跟她不一樣的請舉手。你們剛剛都是這樣子畫的，都是連接 $\overline{BC}$ 跟 $\overline{AD}$ ？有沒有同學有不一樣的畫法？她這樣的畫法非常另類，因為一般的同學不是先這樣子連的，請問你剛才畫法跟她不一樣的請舉手，也就是，你剛剛不是連接 $\overline{BC}$ 跟 $\overline{AD}$ ，你是連接別的，有沒有同學這樣做？

167. 學生：有。

168. 老師：好，尤約書亞，你要不要說一下，請問你怎麼畫？你還沒畫，是不是？好，這樣好了，除了連結 $\overline{AD}$ 跟 $\overline{BC}$ 以外，你還有什麼樣的方法可以畫出來，連接誰？ $\overline{AC}$ 跟什麼？

169. 學生： $\overline{BD}$ 。

170. 老師：對，同學現在不妨試試看，我之前是故意寫成 $5 : 4 = 6 : x$ ， $5 : 6 = 4 : x$ ， $5 : 6 = x : 4$ ， $5 : 6 = (6+x) : 9$ ，這樣亂比、亂比，看同學有沒有被我搞亂掉，

請告訴我一下， $5:4$ 會不會等於 $6:x$ ？

171. 學生：不會。

172. 老師：除非怎樣？

173. 學生：平行。

174. 老師：除非哪兩段平行？

175. 學生： $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 。

176. 老師：對，請問 $5:6=4:x$ ，有沒有這種比法？

177. 學生：沒有。

178. 老師：也沒有，對不對？ $5:6=4:x$ 這樣很奇怪，它就是跟上面的 $5:4=6:x$ 方法是一樣的嘛！把它內項交換，就是 $5:4=6:x$ ，對不對？這個是不成立的， $5:6$ 會不會等於 $x:4$ ，會不會有這種比法？

179. 學生：沒有。

180. 老師：也沒有，那會不會 $5:6=(6+x):9$ ？會不會是這樣的？很懷疑，這個到底對不對？

181. 學生：不對。

182. 老師：這個對不對？你認為 $5:6=(6+x):9$ ，對的請舉手，4 位同學。好，沒關係，我們再讓同學看一下。你再想想看這個 $5:6=(6+x):9$ ，到底對不對？

183. 學生：對。

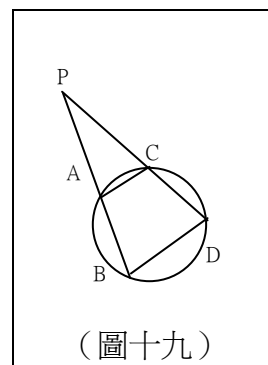
184. 老師：我們換個方式，剛剛佳璇同學她是用什麼？

185. 學生：三角形。

186. 老師：你看一下， $5:6=(6+x):9$ ，這樣對不對？好，因為我剛剛沒有讓你好好的再把輔助線畫出來，所以你可能會有疑問，請問 $5:6=(6+x):9$ 這個式子對不對？

187. 學生：對。

188. 老師：應該對，現在請問同學，你們剛才說連接 $\overline{AC}$ 跟 $\overline{BD}$ ，如果是這樣連接（圖十九），我們開始來找，哪兩個三角形是相似的？請同學告訴老師，現在有哪些三角形可以證明它們相似， $\triangle PAC$ 跟三角形？



（圖十九）

189. 學生： $\triangle PDB$ 。

190. 老師：很棒！你們沒有說 $\triangle PBD$ ，你們會說 $\triangle PDB$ ，很好！
為什麼？又增同學，麻煩你說。

191. 又增：因為 $\angle PCA = \angle PBD$ ， $\angle PCA$ 的內對角是 $\angle PBD$ 。

192. 老師：對不起，麻煩再說一遍，你說哪個角？

193. 又增： $\angle PCA$ 。

194. 老師：喔！這個角。

195. 又增：對，它的內對角，中間不是有一個四邊形嗎？它的內對角就是 $\angle PBD$ 。

196. 老師：說 $\angle B$ 就可以。

197. 又增：所以那兩個相等。

198. 老師：你認為這個角跟這個角($\angle PCA = \angle B$)是相等，好，用國字說。

199. 又增：用國字說，因為這個嘛！

200. 老師：我們剛剛說了兩個性質，劉明同學說的，來，兩個性質中的第二個。

201. 又增：第二個是內對角相等。

202. 老師：對啊！但是前面那句話是什麼？

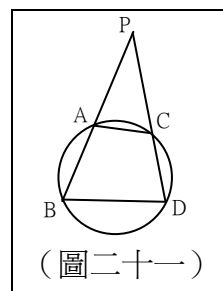
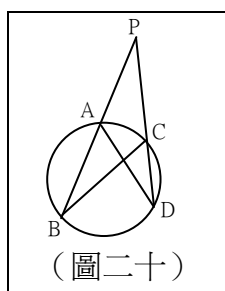
203. 又增：外角和它的內對角相等。

204. 老師：對，再前面那句話是什麼？它的條件是什麼？

205. 又增：圓內接四邊形。

206. 老師：對，要說圓內接四邊形，假設那個四邊形不是圓內接四邊形，會不會有外角等於內對角這個性質，有沒有？
207. 學生：沒有。
208. 老師：沒有就不會，好，我們給他鼓掌。老師只是方向跟他相反而已($\angle PAC = \angle D$)， $\angle P$ 跟 $\angle P$ 一樣的，所以它們是不是相似了？
209. 學生：是相似。
210. 老師：相似，我們來看一遍喔！ $\overline{PA} : \overline{PC}$ 會等於什麼？ $\overline{PB} : \overline{PD}$ ，再聽一遍喔！ $\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PB} : \overline{PD}$ ，對不對？
211. 學生：不對，反了。
212. 老師：我又反了，對不對？好，應該是怎樣？ $\overline{PA} : \overline{PC}$ 等於什麼？
213. 學生： $\overline{PD} : \overline{PB}$ 。
214. 老師：因為相似的時候是 $\angle PAC = \angle D$ ，跟 $\angle P = \angle P$ ，所以 $\angle PAC$ 所對的邊跟 $\angle D$ 所對的邊，應該是對應邊，這樣子有沒有問題？老師會故意唸錯喔！你要小心。可是老師剛剛講了一件事，請你告訴我這個($\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PB} : \overline{PD}$)對，還是這個($\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$)對？上面還下面？
215. 學生：下面($\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$)。
216. 老師：下面，對不對？請問 $\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$ ，對還是錯？
217. 學生：對。
218. 老師：好，那我們可以把它改寫成什麼？
219. 學生： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 。
220. 老師：對， $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ，怎麼跟剛剛那個(內幕)一樣？我們剛剛那一題，上面那兩條弦交在圓內的時候，是不是也是 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ，我現在把那兩條弦交在圓外，這樣性質變不變？還是 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ，是不是性質

不變？你們佳璇先說這個（圖二十），可是一般的小孩他會看那個（圖二十一），所以我說你們很另類，竟然去看這樣的三角形（圖二十），因為這個圖比較不容易看。請不要用文字，再說一遍，你現在心裡想想看， $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ，怎麼用語言去呈現這個性質？佑澄願意說，好，請站起來，我們看佑澄怎麼說？

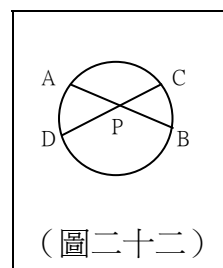


221. 佑澄：兩條割線在圓外交於一點。
222. 老師：喔！他說二條割線，老師剛剛說二條弦交在圓外，他定義那條線叫做什麼線？割線。因為之前老師有說過，如果跟圓相交於一點的，那條線稱為什麼線？
223. 佑澄：切線。
224. 老師：那個交點就稱為什麼？
225. 佑澄：切點。
226. 老師：如果跟圓交於二點的，那條線就叫做什麼？
227. 佑澄：割線。
228. 老師：割線跟圓相交於兩點，好，請你說，我們現在不要看圖形，好，麻煩你再說一遍。
229. 佑澄：兩條割線在圓外交於一點，就是說第一條的圓外部分乘以整條，會等於第二條的圓外部分乘以整條。

230. 老師：你的整條就是整條割線，是不是？同學，你聽得懂他講什麼嗎？
231. 學生：不懂。
232. 老師：聽得懂的同學請舉手，你知道他在說什麼的請舉手，好，請放下來。三分之一的同學懂，麻煩你再說一遍，要不要再修正一下，讓另外三分之二的同學也懂。
233. 佑澄：兩條割線交在圓外一點，從這圓外一點到圓周上這段，和圓外部分乘以整條割線會相等。
234. 老師：圓外部分乘以整條割線，各自相乘會相等，就是 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 會等於 $\overline{PC} \times \overline{PD}$ 。好，剛剛的三分之一請不要舉手，現在聽得懂他講什麼的請舉手，1 位、2 位、3 位、4 位，好，請放下來。君涵同學，你要不要敘述一下他剛剛說什麼？請站起來說，沒關係，就用你自己的方式詮釋，不一定要跟佑澄一樣。他有一點緊張，有沒有同學要拯救他？他是救火隊，好，來。
235. 學生：圓的兩割線，圓外部分的線段乘以原本線段會相等。
236. 老師：你是說 $\overline{PA} \times \overline{PD} = \overline{PC} \times \overline{PB}$ ？
237. 學生：乘以原來的線段。
238. 老師：所以同樣一條割線，在割線上兩個部分各自相乘會相等，你意思是這樣嗎？
239. 學生：啊！你說什麼？
240. 老師：我說太快了，好，我剛剛說兩條割線交在圓外一點，這條割線與圓的兩個交點的線段，各自相乘會相等，就是這邊乘這邊會等於這邊乘這邊($\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$)，我的意思是這樣，這樣可以聽得懂嗎？他搖頭，他搖頭喔！所以再說一遍。
241. 學生：就是圓的兩條割線，在圓外兩條各被分割的線段，乘以它們原來的線段會

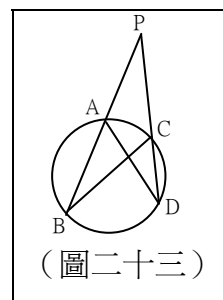
相等。

242. 老師：好，我們給那些同學鼓掌，很棒喔！同學可以看一下，這是（圖二十二）二條弦，交在圓內。這個（圖二十三）是交在圓外，請問它們的性質一不一樣？是不是一樣？如果 D 點跟 C 點重合喔，而且 C 是切點，請問它的性質會變成什麼？



243. 學生：外幂。

244. 老師：變成什麼呢？說一下變成什麼，同學猜測會變成什麼？C 跟 D 重合，有什麼性質說說看。



245. 學生： $\overline{PA}$ 乘 $\overline{PB}$ 等於 $\overline{PC}$ 平方。

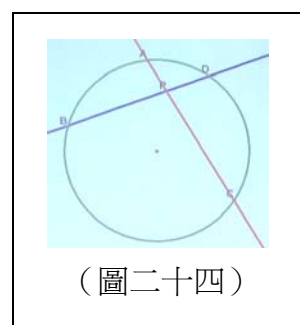
246. 老師：變平方，對不對？因為 D 跑到哪裡去了？

247. 學生：C。

248. 老師：是不是跑到 C 那邊去了，對不對？

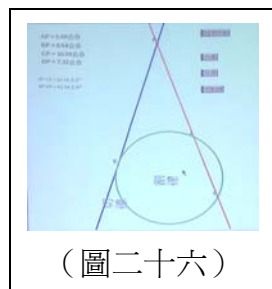
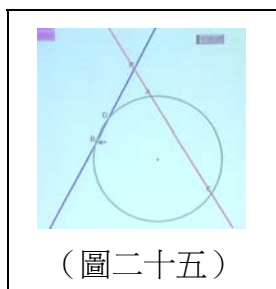
249. 學生：對！

250. 老師：好，你們猜測是這樣，是不是？我們來看一個東西，看一下 GSP，我們中山國中有一位老師很會做 GSP，請上你們自己學校的網站，看鄒老師幾何的部分，他做了上千個 GSP 檔案。來，看一個我們學生做的



的 GSP，我不曉得能不能夠看得清楚（圖二十四），老師讓 P 點在圓內，同學請注意， $\overline{AP} \times \overline{CP}$ 和 $\overline{BP} \times \overline{DP}$ 的數據，當老師移動 P 時，左上角的數據和左下角的數據不停地在變動。

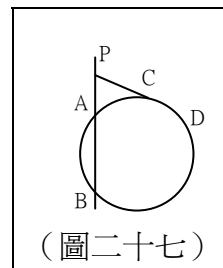
251. 老師：但是這二組數據 $\overline{PA} \times \overline{PC}$ 和 $\overline{PB} \times \overline{PD}$ 是不是一樣的？很抱歉，後面同學看不太清楚。我們再看，如果把 P 點移到外面去（圖二十五），這裡的 $\overline{PA} \times \overline{PC}$ ，下面是 $\overline{PB} \times \overline{PD}$ ，老師把 P 點移動，我們發現這二組數字是不是都一樣？所以不管我怎麼樣變動， $\overline{PA} \times \overline{PC}$ 和 $\overline{PB} \times \overline{PD}$ 它們都是一樣的。同學看到是不是這樣子？好，那我再把 P 點移過來一下（圖二十六），假設這條 $\overline{PB}$ 是切線，那這條 $\overline{PC}$ 是什麼？



252. 學生：是割線。
253. 老師：同學請看這兩個數據($\overline{AP} \times \overline{CP}$ ， $\overline{BP} \times \overline{DP}$)是不是一樣？所以可見它永遠是怎樣？是相等的。其實你們也可以自己做做看，要不然就上學校的網站去看 GSP。因為現在下課了，所以我們先休息一下，下一節課繼續。好，同學直接下課。

【第二節】

254. 老師：我們再繼續剛剛的內容，如果是兩條弦交在圓內，跟我們把兩條弦交在圓外，發現性質是怎樣？
255. 學生：一樣。
256. 老師：如果我們把 D 點挪到 C 點去，像剛剛老師看那個 GSP，這樣過去的時候，你會發現 D 跟 C 重合，C 是什麼（圖二十七）？



257. 學生：是切點。

258. 老師：你們剛剛的猜想是什麼？

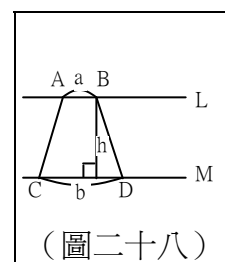
259. 學生： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PC}$ 。

260. 老師： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PC}$ ， $\overline{PC}$ 的平方，對不對？好，老師想讓你們看一個主題（圖二十八），假設我們說 L 跟 M 互相平行，同學可以說 ABCD 是什麼形狀？

261. 學生：梯形。

262. 老師：好，這個梯形的面積是什麼？

263. 學生： $(a+b) \times h \div 2$ （圖二十八）。

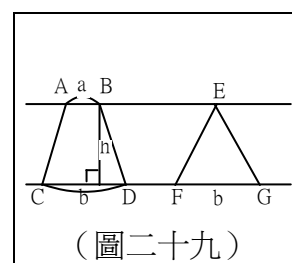


264. 老師：如果圖中這個三角形底邊也是 b（圖二十九），請告訴我，這兩個圖形的面積會不會一樣？

265. 學生：不會。

266. 老師：好，我應該要這樣說，它的公式不一樣？

267. 學生：不一樣。



268. 老師：覺得一樣的請舉手，覺得不一樣的請舉手。剛剛有人舉一樣，可是你們都說不一樣，對不對？好，偉士，你也舉手了，來，你要不要解釋為什麼三角形跟梯形面積是一樣的？請你站著說，為什麼這兩個是一樣的？

269. 偉士：因為三角形它上面的上底就是零。

270. 老師：同學知道他在說什麼嗎？

271. 學生：知道。

272. 老師：他說三角形的上底可以當做是什麼？

273. 學生：0。

274. 老師：所以還是(上底+下底) $\times$ 高 $\div 2$ ，對不對？好，我們給偉士鼓掌，不錯。我們發現這兩個面積的公式是不是一樣的？

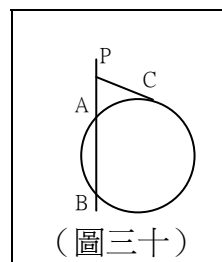
現在再回來看一下，剛剛說有相同的結論，對不對？我們

如果把它改成這樣，來，同學可以看一下，如果這個 $\overline{PC}$

是切線（圖三十），請問為什麼 $\overline{PC}^2$ 會等於 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ ？我們現在來思考

一下，為什麼這個性質是成立的？請問你是怎麼得到的？你為什麼知道 $\overline{PC}$

平方會等於 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ ？剛剛是猜想，現在我們要真正證明它，連接什麼？



275. 學生：連接 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BC}$ 。

276. 老師：連接 $\overline{AC}$ 跟 $\overline{BC}$ （圖三十一），好，老師幫你連，我們來看

你們想要做什麼？發現後面的同學沒什麼反應，有沒有後

面的同學要上來說？好，芝瑜，她把名牌舉得高高的，這

樣表示她願意上來說，請上來。芝瑜同學，請妳把名牌拿

下來，因為後面的同學被妳遮到。芝瑜，妳要不要說？我

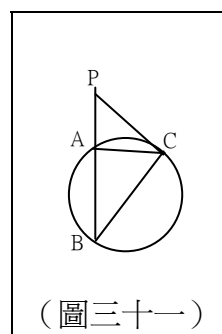
們請宇文同學，請你上台說說看，沒關係，就你所知的，你想要證明哪兩

個三角形相似？你現在想要證明誰跟誰相似？請上來說，不要，是不是？

好，有沒有哪個女同學願意拯救他？劉明剛剛一直舉手，我說哪個女同學

，他就趕快放下來(因為劉明是男生)。請上來說，發現女生都不太敢上來

，女生覺得講錯了會被笑，其實不會。念真，請上台說。



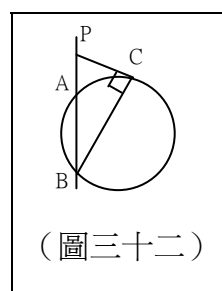
277. 念真： $\overline{PC}$ 是切線，所以 $\angle PCB$ 是垂直的，然後…（圖三十二）

。

278. 老師：暫停，同學，她說的，對不對？

279. 學生：對。

280. 老師：你認為對的請舉手，你認為這個 $\angle PCB$ 是直角的請舉手，或許老師畫得太



像了，認為它是直角的請舉手。認為不是直角的請舉手。不是，好，請最後一個同學，紹宇同學，為什麼不是？

281. 紹宇：沒有過圓心。

282. 老師：你說這個不曉得有沒有過原點，對不對？喔！我們應該說圓心，對不起，我沒有聽清楚。你說這個 $\overline{BC}$ 線段沒有過哪裡？

283. 紹宇：圓心。

284. 老師：沒有過圓心，對不對？請問我這裡有沒有畫圓心？沒有。可見它未必會通過，所以你認為它不是直角，我們給他鼓掌。還有給剛剛答對的同學鼓掌，很棒！所以它($\angle PCB$)不是直角，我們沒有辦法保證它一定是直角，沒關係，繼續讓她做。妳現在想要證明哪兩個三角形相似，先把它找出來，妳覺得哪個三角形？

285. 念真： $\triangle PBC$ 。

286. 老師： $\triangle PBC$ ，太好了，妳覺得它會跟誰相似？

287. 念真： $\triangle PAC$ 、 $\triangle PCA$ 。

288. 老師： $\triangle PCA$ ，好棒！她本來說 $\triangle PAC$ ，為什麼不是這樣？為什麼不是 AC 而是 CA ？

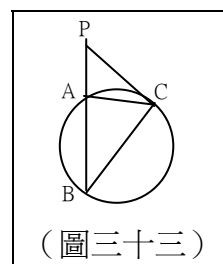
289. 念真：對應。

290. 老師：對應，好，我們假設 $\angle PCA$ 為 $\angle 2$ 好了（圖三十三），開始找條件，妳先說 $\angle 2$ 等於多大？慢慢來。

291. 念真：會等於 $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ 。

292. 老師： $\frac{1}{2}$ 的什麼？

293. 念真：會等於 $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ 。



294. 老師：對！ $\widehat{AC}$ ，然後還會等於什麼？

295. 念真：會等於 $\frac{1}{2}\angle B$ 。

296. 老師：要不要加 $\frac{1}{2}$ ？不用，對不對？妳剛剛直接說 $\angle B$ ， $\angle 2 = \frac{1}{2}\widehat{AC} = \angle B$ ，那這樣夠不夠相似了？

297. 念真：夠。

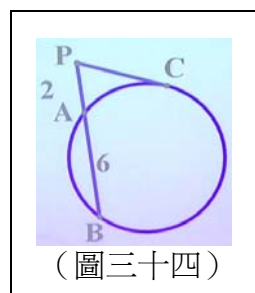
298. 老師：好，請妳等一下，還有一個 $\angle P = \angle P$ ，現在請把它完成，所以三角形根據什麼相似？

299. 念真： $\angle P = \angle P$ ， $\angle 2 = \frac{1}{2}\widehat{AC} = \angle B$ ， $\triangle PBC \sim \triangle PCA$ 。

300. 老師：對，我們希望後面多寫一個 AA 相似。好，再請繼續，因為我們想要印證 $\overline{PC}^2$ 平方。(此時念真又從圖形中去找對應邊)好，其實我們可以不要再看圖形，直接看相似形的對應關係。好，直接回到 $\triangle PBC \sim \triangle PCA$ 來看對應就好了，你聽得懂老師的意思嗎？不要再看圖形，直接看 $\triangle PBC \sim \triangle PCA$ ， $\overline{PB} : \overline{PC}$ 等於誰比誰，直接這邊寫。她還是看回圖形找對應邊，沒關係，直接看 $\triangle PBC \sim \triangle PCA$ 就好。念真寫 $\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PC} : \overline{PA}$ ，所以 $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ ，我們給這位同學的勇氣鼓掌，她真的好緊張，非常棒！請問有沒有問題？

301. 學生：沒有。

302. 老師：所以我們可以對它（圖三十）做猜想，可是最後希望同學要回去驗證，為什麼這個性質是成立的？還有問題的請舉手，沒有。那我們馬上讓同學看一下，到底同學有沒有真的搞清楚。請你做這一題（圖三十四），老師故意喔，我說 $\overline{PA}$ 長度2， $\overline{AB}$ 長度6，請問 $\overline{PC}$ 有多長？



303. 學生：4。

304. 老師：為什麼會是4？不是 2×6 嗎？

305. 學生：2×8。

306. 老師：喔，沒有被我騙到，這裡2乘以什麼？整條 $\overline{PB}$ ，對不對，2乘以8等於什麼？ $\overline{PC}$ 的平方，所以 $\overline{PC}$ 等於多少？4。好，同學有沒有問題？

307. 學生：沒有。

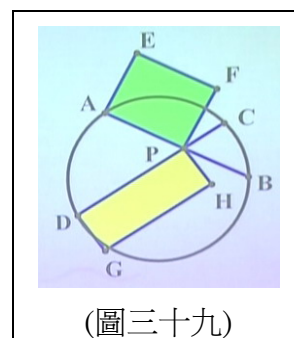
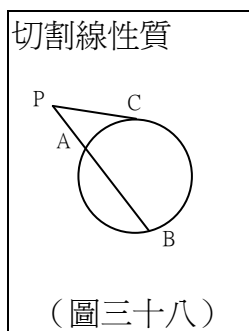
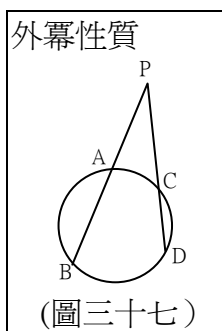
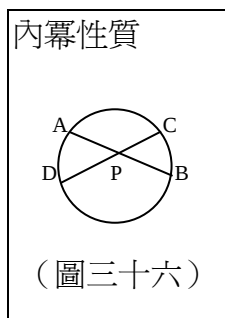
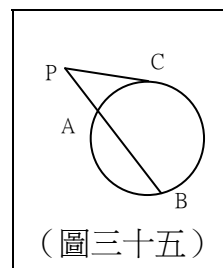
308. 老師：請同學看一遍（圖三十五），同學可以怎麼說？我們一起說一遍好了，這條線 $\overline{PC}$ 是什麼線？

309. 學生：切線。

310. 老師：切線的平方會等於割線到圓上面兩交點的兩條線段相乘，好，這個有沒有問題？

311. 學生：沒有。

312. 老師：好，沒有，來看一下，我們總共有三個性質：內幕性質（圖三十六）， $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ；這個就叫做什麼？外幕性質（圖三十七）， $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ；這個叫做什麼？切割線性質（圖三十八）， $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 。所以今天的主題就叫做圓幕性質探秘，現在老師想問一件事，請注意看（圖三十九），這兩個長方形你覺得會怎樣？

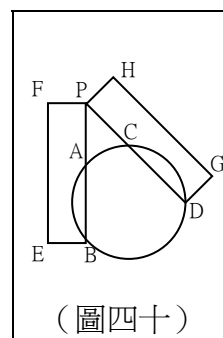


313. 學生：相似。

314. 老師：相似？好，請問同學，會不會相似？

315. 學生：不會。

316. 老師：相似有什麼條件？
317. 學生：對應角相等。
318. 老師：這樣對應角都相等，因為這二個都是長方形。對應邊還要成比例，請問對應邊有沒有成比例？
319. 學生：沒有。
320. 老師：這個矮矮胖胖，這個高高瘦瘦，對不對？好，這兩個長方形會相等嗎？
321. 學生：還要看線段。
322. 老師：說得好，對，佑澄同學說還要看線段，對不對？好，你覺得 $\overline{AE}$ 會跟誰一樣？
323. 佑澄： $\overline{AE} = \overline{PB}$ （圖三十九）。
324. 老師： $\overline{AE}$ 跟 $\overline{PB}$ 一樣，請站起來說，還有呢？
325. 學生： $\overline{PH}$ 跟 $\overline{PC}$ 。
326. 老師：你的意思是這兩個相等($\overline{AE} = \overline{PB}$)，然後這兩個相等($\overline{PH} = \overline{PC}$)，是不是？請坐下來，非常棒。請問這兩個圖形面積會不會一樣？
327. 學生：會。
328. 老師：為什麼會？
329. 學生：內幕性質。
330. 老師：對啊，內幕性質是什麼？請說一遍。
331. 學生： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 。
332. 老師： $\overline{PC} \times \overline{PD}$ ，對不對？然後剛剛 $\overline{PH} = \overline{PC}$ 、 $\overline{AE} = \overline{PB}$ ，所以面積是不是一樣的？有問題嗎？沒問題。好，所以下一次你要知道這兩個長方形的面積是一樣的喔！再請問一下，如果老師這樣出（圖四十），請告訴我這兩個長方形會



不會一樣？還是要有條件，對不對？什麼條件？同學說一下。

333. 學生： $\overline{PC} = \overline{PH}$ 。

334. 老師：P 什麼？

335. 學生： $\overline{PA} = \overline{PF}$ 。

336. 老師： $\overline{PA}$ 要等於 $\overline{PF}$ ，然後呢？ $\overline{PC}$ 等於什麼？

337. 學生： $\overline{PH}$ 。

338. 老師：好，我想要澄清，同學剛剛講了一件事，說 $\overline{PA} = \overline{PF}$ ，再來 $\overline{PC} = \overline{PH}$ ，我請問同學先有誰，再有誰？是先有 $\overline{PF}$ ，還是先有 $\overline{PA}$ ？

339. 學生：先有 $\overline{PA}$ 。

340. 老師：先有 $\overline{PA}$ ，對不對？好，那表示 $\overline{PA}$ 是已知，那 $\overline{PF}$ 是什麼？

341. 學生：未知。

342. 老師：請問可不可以說已知等於未知？

343. 學生：假設。

344. 老師：所以你們要假設怎樣，告訴我。

345. 學生： $\overline{PF} = \overline{PA}$ 、 $\overline{PH} = \overline{PC}$ 。

346. 老師：是已知等於未知，還是未知等於已知？

347. 學生：未知等於已知。

348. 老師：要未知等於已知，所以你們看老師呈現方式，我一定先呈現 $\overline{PH}$ ，因為 $\overline{PH}$ 是未知，對不對？它跟哪一段是一樣的？ $\overline{PC}$ ，有沒有問題？

349. 學生：沒有。

350. 老師：你會覺得不是有交換律嗎？甲等於乙，乙也會等於什麼？

351. 學生：甲。

352. 老師：可是在幾何裡面，我們會很在意這件事，已知等於未知跟未知等於已知，

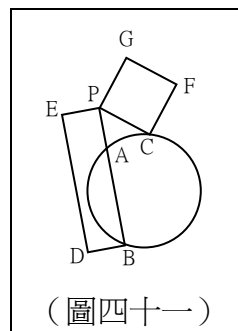
請問同學，你覺得 $\overline{PF}$ 跟誰一樣？

353. 學生： $\overline{PA}$ 。

354. 老師：對。好，如果有這個性質，你能不能感覺到這兩個長方形面積的關係？

355. 學生：相等。

356. 老師：它們的面積應該是相等。請問有沒有問題？有問題的同学請舉手，沒有。那隨便請一位同學，文惠同學，請告訴我們，妳覺得這兩個圖形會不會一樣大（圖四十一）？妳要不要先問我什麼條件？好，有沒有什麼條件，妳說。我問這兩個面積有沒有相等，我都沒有給你條件，所以妳會怎麼樣問我？對，請站起來，妳要問我什麼？



357. 文惠： $\overline{PE}$ 有沒有等於 $\overline{PA}$ ？

358. 老師： $\overline{PE}$ 有沒有等於 $\overline{PA}$ ，是不是？好，我說有。妳還要問我什麼？

359. 文惠： $\overline{PG}$ 有沒有等於 $\overline{PC}$ ？

360. 老師：對，我都說有。很好，請妳告訴我，這兩個面積會不會一樣？

361. 學生：會。

362. 老師：會，為什麼會？你們都叫文惠？來，文惠，請問為什麼會一樣？

363. 學生：沒為什麼。

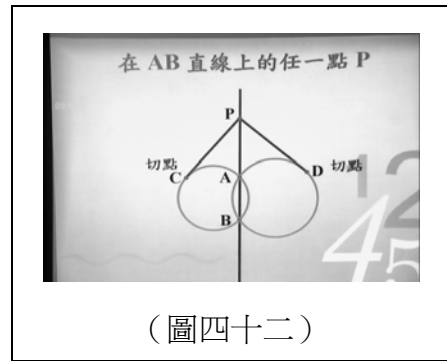
364. 老師：為什麼？我們可以利用剛剛哪個性質？

365. 文惠：切割線性質。

366. 老師：切割線性質。那切割線是什麼？請說一下，是誰乘誰等於誰乘誰？請你說一遍。

367. 學生： $\overline{PA}$ 乘以...

368. 老師： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC}^2$ ，對不對？好，我們給文惠鼓掌，真的很棒。接著我們再請同學看一個，一個圓、二個圓，然後交於二點（圖四十二），那二點連線叫公弦，共同的弦 $\overline{AB}$ 把它延長出去，在上面隨便找一個點P，我對左邊做一條切線，也對右邊做一條切線，請問你發現了什麼？



369. 學生：相等。

370. 老師：什麼東西相等，誰跟誰？

371. 學生： $\overline{PC}$ 。

372. 老師： $\overline{PC}$ 跟什麼？

373. 學生： $\overline{PD}$ 。

374. 老師： $\overline{PD}$ ，為什麼？好厲害喔！為什麼？哪一個同學願意說？希望剛剛都沒被錄到的同學，我現在隨便找一個，他叫做林山鳥同學(原來這個孩子叫林峻鵬同學，因為他把他的名牌用三張紙組合，在峻和鵬中間重疊，所以出現林山鳥這三字)。

375. 學生：因為連起來叫林山鳥。

376. 老師：請你說為什麼，請站起來。

377. 學生：他會害羞。

378. 峻鵬：左邊的那一個圓。

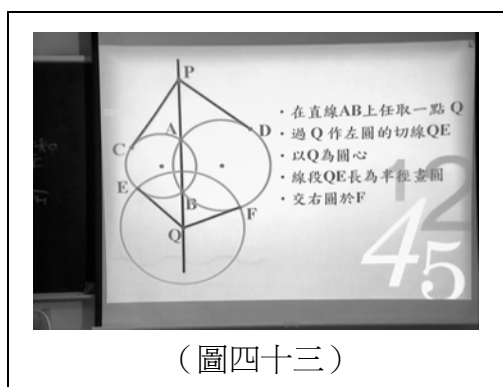
379. 老師：好棒，他說先看左邊的圓，好，請說。

380. 峻鵬：然後 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 。

381. 老師：再說一遍，左邊的圓用什麼性質？

382. 峻鵬：切割線。
383. 老師：對，什麼性質，唸出來。
384. 峻鵬：切割線性質。
385. 老師：對，切割線性質，請用文字說。
386. 峻鵬： $\overline{PC}$ 的平方。
387. 老師：然後？
388. 峻鵬：等於 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 。
389. 老師：太厲害了，再來。
390. 峻鵬：然後再看右邊那個。
391. 老師：右邊的圓，然後呢？
392. 峻鵬： $\overline{PD}$ 的平方會等於 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 。
393. 老師：太厲害了，我們給他鼓掌，真的很厲

害，對不對？所以希望同學以後看到兩個圓的時候，你就專門只看左邊的圓，看完再看右邊的圓，你一定可以找到東西，對不對？好，很棒！再接再著請看這裡（圖四十三），如果老師



（圖四十三）

在直線 AB 的下方找到一個點叫 Q ，我現在做左邊圓的切線過去，然後以 Q 為圓心， $\overline{EQ}$ 長為半徑畫一個圓，這個圓交右圓在 F 點，請你告訴我，你覺得 $\overline{PF}$ 會是什麼？不是 $\overline{PF}$ ，對不起， $\overline{QF}$ 會是什麼？

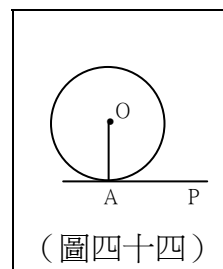
394. 學生： $\overline{QE}$ 。
395. 老師：等於 $\overline{QE}$ ，當然，為什麼？
396. 學生：半徑。

397. 老師：我不是要問你兩個($\overline{QE}$ 、 $\overline{QF}$)是不是相等，我要問你覺得 $\overline{QF}$ 會是什麼？
398. 學生：切線。
399. 老師：切線，對不對？那我就要問為什麼？好，請上來說，佑澄同學，他很斯文喔！
400. 學生：最好是斯文。
401. 老師：我說錯了嗎？因為我們的學生，他們會從桌子上跨過去，請說。
402. 佑澄：在這條弦上面的一點做這兩個圓的切線，距離會相等，長度會相等，因為它是這個圓的半徑，所以這段 $\overline{QF}$ 等於這段 $\overline{QE}$ ，這二段切線距離會相等，長度會相等，所以這一段長度 $\overline{QF}$ 跟這段長度 $\overline{QE}$ 相等， $\overline{QF}$ 就是它的切線。
403. 老師：你認同的請舉手，只有 1 位、2 位。好，請你站過去一點點(因為遮到同學)，再解釋一遍。
404. 佑澄：就是在一條公弦 $\overline{AB}$ 上面選一個點，對這兩個圓做切線的時候，這兩個切線長度會相等。那既然是它的半徑，半徑處處會相等，所以 $\overline{QE}$ 會等於 $\overline{QF}$ 。既然 $\overline{QE}$ 等於 $\overline{QF}$ ，這兩條半徑長度相等，所以一定同樣是切線。
405. 老師：你贊同的請舉手。
406. 漢生：老師，我有問題。
407. 老師：好，你說。
408. 漢生：他剛剛說直接作 $\overline{QE}$ 跟 $\overline{QF}$ 的切線，他直接說作那兩個圓的切線，那 $\overline{QE}$ 跟 $\overline{QF}$ 就已經是切線了！
409. 老師： $\overline{QE}$ 跟 $\overline{QF}$ 就已經是切線了，其實他的意思不是這樣，他的意思是說，因為這條 $\overline{QE}$ 是切線，現在這兩個長度 $\overline{QE}$ 和 $\overline{QF}$ 是一樣，所以 $\overline{QF}$ 也變成切線，佑澄的意思是不是這樣？他的意思是這樣，但是你們剛剛聽到是他說做兩

條切線，是不是？

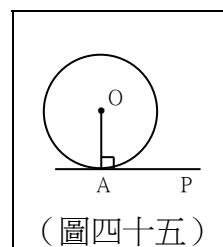
410. 漢生：對啊。

411. 老師：你們剛剛聽到是做兩條切線，是不是？因為他說了兩次，好像都不太一樣，對不對？他的意思是我剛剛做的解釋，對不對？你認同的請舉手，好，請放下來。我們好像沒學過這個性質，只學過過半徑的端點，做這個半徑的垂直線，那麼這條垂直線就是這個圓的什麼（圖四十四）？



412. 學生：切線。

413. 老師：是有這個性質。還有假設這條 $\overline{PA}$ 是切線的話，圓心到切點的連線會垂直於這一條切線（圖四十五），我們才學過這兩個性質，但是有沒有學過這樣的性質：如果這條 $\overline{QE}$ 是切線，若有一條線段 $\overline{QF}$ 跟它一樣長，這條線段也叫做



切線（圖四十三）。請問你有沒有學過這個？這個應該變成逆定理了，反過去的定理，可是我們有沒有談過反過去的定理，沒有談過這個性質，不過還是要給他鼓掌，來，給佐澄同學鼓掌。我覺得如果這部分只談到這裡，有點可惜，所以老師就延伸一個問題，就是我們現在想辦法證明 $\overline{QF}$ 是切線，這條線會不會是切線？如果左邊 $\overline{QE}$ 已經確定是切線，那它就會有什麼結果？來，請說一遍，它就有什麼結果？光看左圓而已，會有什麼結果？

414. 學生：切割線性質 $\overline{QE}^2 = \overline{QB} \times \overline{QA}$ 。

415. 老師： $\overline{QE}$ 平方等於 $\overline{QB}$ 乘以 $\overline{QA}$ ，可是現在 $\overline{QF}$ 跟 $\overline{QE}$ 一樣長，所以導致於 $\overline{QF}$ 平方也會等於 $\overline{QB} \times \overline{QA}$ 。可是反過來說，如果 $\overline{QB} \times \overline{QA}$ 等於 $\overline{QF}$ 的平方，那這條 $\overline{QF}$ 就叫切線，我們以前有沒有學過這個性質？沒有，這個就是切割線的逆性質。國中有沒有談到這個逆性質？沒有，但是我們可以證明，可以怎

麼樣證明？同學看一下，現在交在一點 F，那我連 $\overline{BF}$ 、 $\overline{AF}$

以後，請問這裡有沒有三角形會相似（圖四十六）？

416. 學生：有。

417. 老師：哪裡會相似？我們剛剛已經得到什麼？ $\overline{QF}$ 的平方會等於 $\overline{QB}$ 乘以 $\overline{QA}$ ，剛剛是不是這個性質？然後你怎麼去證明這兩個三角形是相似的，哪兩個三角形？請同學說一下。

418. 學生： $\triangle QBF$ 跟 $\triangle QFA$ 。

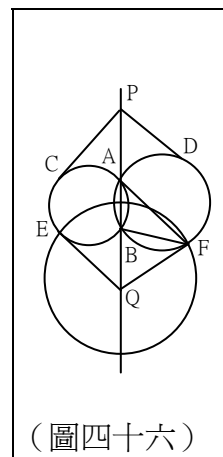
419. 老師： $\triangle QBF$ 跟 $\triangle QFA$ ，我們這樣證明它相似有什麼用處？目的是想要證明 F 是切點，對不對？也就是我們想要證明 $\angle BFQ$ 是什麼？

420. 學生：弦切角。

421. 老師：弦切角，如果 $\angle QFB$ 是 $\widehat{BF}$ 的一半。現在請問同學，我們剛剛只有複習過，弦切角的度數是所夾弧度數的一半，有沒有反過去說，如果有一條弦跟一條直線的夾角，且這個夾角的度數是這個弧度的一半，那這條線就叫切線。我們有沒有說這個性質？

422. 學生：沒有。

423. 老師：沒有，所以它還是逆性質，這逆性質我們到高中才討論。老師其實只是要告訴你一件事，我們這樣子做的話，會利用到逆性質。所以這個部分，等到高中的時候再繼續討論，我們就先不討論。現在老師要你做一件事，手上都有名牌，請把你的名牌拿出來，這個名牌太大了，或者你有沒有帶書，如果沒有，沒關係，請你做這個動作：把手伸直，把你的名牌這樣從前面拉過來，然後往後移，你覺得到哪裡的時候是最清楚的？懂我的意思嗎？就是你的字這樣子移過去以後，到哪一個位置是最清楚的。來，老師這樣做，你注意看，到哪裡最清楚(老師幫學生拿名牌，由學生的前方一直移



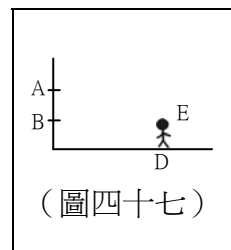
到學生的頭頂上)？到這裡就不清楚了，對不對？

424. 學生：對。

425. 老師：因為那個視角很小了，你覺得到哪裡是最清楚的？好像都很清楚，是不是？因為這些字太大了，如果小一點，你可能會比較有感覺。沒關係，老師目的只要告訴你一件事，你這樣停留，往前走到一個固定的定點時候，你看到那個字跡是最清楚的。這個東西因為要證明就比較難了，所以現在想要做這件事，剛剛說這個我們就跳過去了。現在老師用情境布題，請問你有沒有看過「宗教與藝術展」？

426. 學生：沒有。

427. 老師：「宗教與藝術展」在國父紀念館，有去逛過的同學請舉手，沒有，是不是？我在它結束的前二、三天去看，賞畫的時候，我就想到一個題目可以設計，很高興。我們假設牆壁上掛一幅畫（圖四十七），這幅畫長度是 A 到 B，我現在從 D 的地方要往前走，走到哪一個定點的時候會最清楚？同學，你可以看一下，我要你說到哪一個點看得最清楚，同學會問我們要看哪個角，什麼角是最大角？



428. 學生：視角。

429. 老師：視角，是不是？你們知道什麼叫視角喔！我想請問什麼叫視角？來，第一位同學，啓鵬，我叫錯了嗎（因為學生在笑）？

430. 學生：沒有，很好笑。

431. 老師：啓鵬，請說一下，你覺得什麼叫視角？

432. 啓鵬：（學生用手比的）。

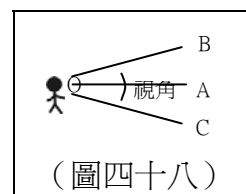
433. 老師：好，你們知道他講什麼嗎？

434. 學生：不知道。

435. 老師：請你站到前面來，告訴我們什麼叫視角。

436. 學生：眼睛的那個…。

437. 老師：他說眼睛的那個，應該說餘光，是不是？還是怎樣？就是你看出去的時候，我們說水平方向往上 $\angle AOB$ 叫仰角，水平方向往下 $\angle AOC$ 叫俯角（圖四十八）。理化有學過，對不對？



438. 學生：沒有。

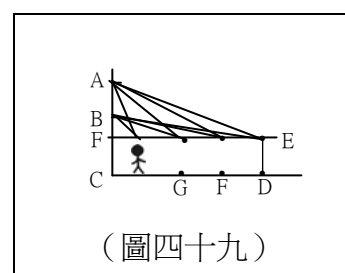
439. 老師：沒有？那在後面的單元。我們現在說視角，你再比一次視角是怎樣？你用比的，用眼睛這樣比出去，還有咧？

440. 啓鵬：(用比的)。

441. 老師：對，這個 $\angle BOC$ 就叫視角（圖四十八），我們給啓鵬鼓掌。我以為你們不曉得什麼叫視角，很棒喔！我們說走到哪裡時， $\angle AEB$ 的角度會最大（圖四十七），佑澄，剛剛是不是說 $\angle AEB$ 要最大，對不對？沒錯！就是我要說的， $\angle AEB$ 要最大。我們再看一下，這個時候什麼角叫視角（圖四十八）？

442. 學生： $\angle BOC$ 。

443. 老師：對， $\angle BOC$ 就叫視角。麻煩請同學看，圖中（圖四十九）哪一個視角最大？我們說 $\angle AEB$ 嗎？還是我讓圖上這個人到F？



444. 學生：哦~

445. 老師：這個很簡單，你們沒學過 POWER POINT 嗎？

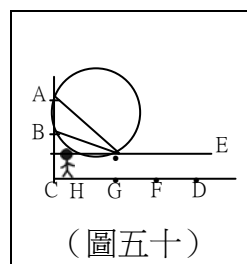
446. 學生：沒有。

447. 老師：我是用 POWER POINT 做的，你們看，再往前走一點到 G，好，再往前走一點，再走，你覺得哪裡的視角最清楚？在哪一個點最有可能？
448. 學生：G。
449. 老師：好像 G，對不對？請問你能不能用畫圖，畫出來給我看，眼睛在哪個位置的時候，視角會最大？請問同學有沒有帶圓規？
450. 學生：有。
451. 老師：請拿出來畫畫看，剛剛講到視角角度的大小，你現在想想看，那個角度要過哪裡，它的端點是在 A 跟 B 的位置（圖四十七）喔！我們講的視角跟什麼有關係，同學不妨想想看，你可以怎麼樣畫出來。
452. 學生：用圓規？
453. 老師：對，用圓規畫，你的前提是這樣（圖四十九），畫在 A 跟 B 的位置，你人在這裡(D)，要往前走，就在 $\overline{EF}$ 線段上移動，應該移到哪裡的時候，那個角度 $\angle AEB$ 是最清楚、最大的？你如果有想法，就可以上來喔，不見得你要做對。沒有關係，因為說不定同學可以從你做錯的地方開始修訂，又增，你有想法了，是不是？還沒。因為我看他胸有成竹的樣子。
454. 學生：他每天都這樣。
455. 老師：喔！他每天都這樣。你想像可以做些什麼，我們這個單元學了哪些角？哪些角可以派上用場？兩個同學可以互相討論，不一定要孤軍奮戰，有人畫圓，因為他想說用圓規，就是要畫圓，沒錯！就是要畫圓。可是你的圓應該要通過哪裡？你想想這個圓應該通過哪裡？哪三個點？
456. 佑澄：A、E、B。
457. 老師：喔！來，佑澄說了一個很棒的點子，那個圓要通過 A 跟 B，還有什麼？
458. 學生：自己的眼睛。

459. 老師：自己的眼睛，太好了，你怎麼做？(老師不小心秀出了中垂線)

460. 學生：作中垂線。

461. 老師：秀太快了，抱歉。來，你們先想想看，我們假設 E 點在這裡，E 點當然不會在那邊，對不對？好，剛剛同學的 E 點在哪裡？你們認為立足點是在 G (圖五十)，對不對？所以你們現在要做一件事，佑澄說要做一個圓，通過這三點(A、E、B)，請問這個點(E)會是什麼點？



462. 學生：切點。

463. 老師：好，如果這個點是切點，請問 $\angle AEB$ 是什麼角？再看一遍，如果這個點(E)是切點，要過這三個點(A、E、B)嘛，那我的圓是不是長這樣 (圖五十)？請問有沒有想法？ $\angle AEB$ 是什麼角？

464. 學生：弦切角。

465. 老師：這個角($\angle AEB$)是弦切角嗎？再看一遍，所以立足點在 G 的這個角($\angle AEB$)是什麼角？

466. 學生：圓周角。

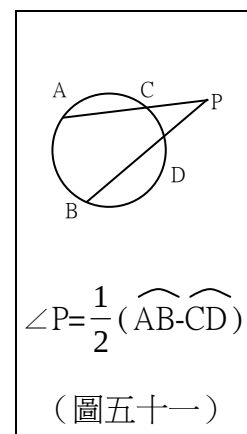
467. 老師：圓周角。請問立足點在 D 的角，叫什麼角？是圓外角。請問立足點在 F 的角，是什麼角？再看一遍，立足點在 H 的是什麼角？

468. 學生：圓外角。

469. 老師：是不是圓外角？那些圓外角都比你的圓周角要怎樣？

470. 學生：小。

471. 老師：為什麼小？它都這樣出去，然後它的度數是兩個弧差的一半 (圖五十一)，只有立足點在 G 的圓周角，才剛好是 $\widehat{AB}$ 的二分之一嘛，所以你現在有想法了，對不對？



請開始畫，現在做圓，過這三個點 A、E、B，所以第一個你會做什麼？沒關係，跟著老師一起來，作 $\overline{AB}$ 的什麼？

472. 學生：中垂線。

473. 老師：好，請把它做出來，你會做中垂線，對不對？忘記了，好，忘記的同學請看這邊，分別以 A 跟 B 為圓心，適當的長…。

474. 漢生：老師，我的圓規可以借你。

475. 老師：我不要用圓規，謝謝。

476. 學生：那我的。

477. 老師：我用電腦的線來當圓規，我們分別以 A 跟 B 為圓心，用大於 $\frac{1}{2} \overline{AB}$ 長為半徑畫圓，這樣只有一個弧而已，另一邊也要啊，所以重來一遍。

478. 學生：沒有帶圓規，好強。

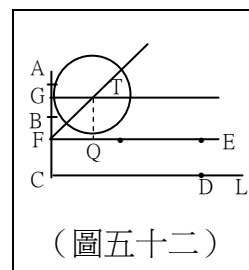
479. 老師：就這樣子，你手邊的東西都可以當做工具來使用，好，有沒有問題？接著再請問你，E 點在哪裡？圓的半徑在哪裡？我們現在還找不到圓心，對不對？你要畫圓應該要知道半徑、知道圓心，請問你的半徑在哪裡？半徑多大？要先知道半徑，才有辦法找出它的圓心。請問半徑多長？現在知不知道？你想想看，我們做一個圓，過 A 和 B 嘛，所以這個圓叫做什麼圓？

480. 學生：外接圓。

481. 老師：那外接圓的圓心是什麼？

482. 學生：外心。

483. 老師：是三角形的外心。重點在我不曉得頂點在哪裡，我怎麼找外心，最起碼我可以做一條中垂線 G（圖五十二）。那現在可不可以知道半徑有多長了？同學想一下，我有沒有辦法知道半徑有多長？如果老師這麼說，你看看喔



，你現在只要幫老師看我的方法對不對。我現在找三角形外心，我不知道眼睛在哪裡，所以我就作 $\angle AFE$ 的角平分線和中垂線交在這一點 T ，然後畫垂直線下來交 $\overline{EF}$ 於 Q 點，我就以 $\overline{TQ}$ 長度為什麼？

484. 學生：半徑。

485. 老師：畫一個圓，因為這兩個長度 $\overline{TQ}$ 、 $\overline{TG}$ 一樣嘛，所以這個圓一定通過 G 點。請問這個圓是我要求的嗎？

486. 學生：不是。

487. 老師：不是，對不對？有沒有開始有概念了，怎麼做？誰是我的半徑？

488. 嘉佑：移過去。

489. 老師：等一下，他說移過去，是不是？怎麼移？好點子！好，嘉佑請站起來，剛剛嘉佑說把這個圓移過來，對不對？同學知不知道意思？

490. 學生：知道。

491. 老師：那言下之意你告訴我，哪一段是半徑？

492. 嘉佑： $\overline{GF}$ 。

493. 老師：我們給他鼓掌，太厲害了！嘉佑他說：以 $\overline{GF}$ 長度為半徑，因為 $\overline{TQ}$ 跟 $\overline{GF}$ 一樣嘛（圖五十二），然後把圓再向左移過來，對不對？讓這個圓通過哪裡呢？ A 、 B 兩點。有沒有更好的方法直接找出圓心，而不要讓他們這樣子移動，因為這樣子移動比較不正式。（此時有學生說話）喔，厲害！來，冠廷同學請上來，因為他上一堂課很安靜，這堂課發揮他的功力了，請上來。好，我的工具借你（借學生電腦線），你要怎麼做？你是以誰為圓心？

494. 冠廷：以 G 為圓心， $\overline{GF}$ 長為半徑畫弧。

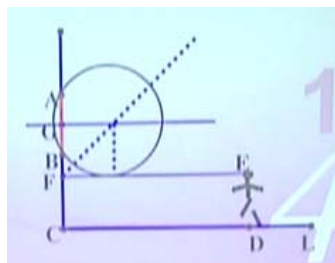
495. 老師：你們覺得是嗎？

496. 學生：老師，他說什麼？

497. 老師：你再說一遍，我也沒有聽清楚。

498. 冠廷：G 爲圓心， $\overline{GF}$ 長爲半徑畫弧，交點就是圓心。

499. 老師：Wait！那這個剛好是這個圓喔，現在圓不是這樣，剛剛嘉佑同學要把這個圓向左移過來喔。來，我現在這樣子移動，你可能會比較好做一點，對不起，你先站那邊。來，我們就應觀眾要求，過去、過去、過去，(在 PPT 中將圓向左移動)這樣沒有很標準喔。好，如果是這樣（圖五十三），請問你的圓心在哪裡？圓心不是在這裡（T 點），對不對？所以不可以以 G 爲圓心了，這樣你要怎麼做？我現在圓長那樣喔！



（圖五十三）

500. 冠廷：交點…。

501. 老師：再說一遍，以什麼爲圓心？圓心在這個位置（T 的左邊），那這個圓心可以怎麼找？現在可以以誰爲半徑？

502. 學生： $\overline{GF}$ 爲半徑。

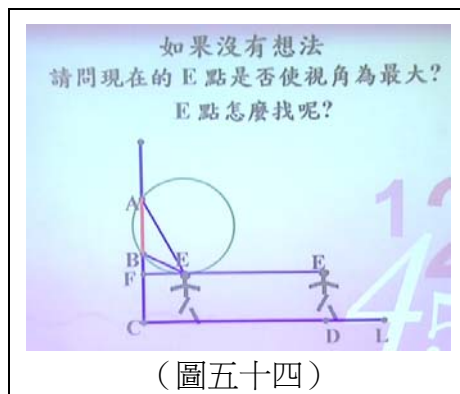
503. 老師：以 $\overline{GF}$ 爲半徑，你剛剛說了。可是你以誰爲圓心？

504. 學生：A。

505. 老師：A，是不是？好，那你畫畫看，你以 A 爲圓心試看看。來，你用這樣畫，請問對不對？(學生用上面的方法畫出圓心位置)

506. 學生：對。

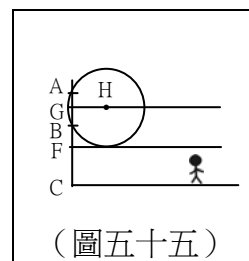
507. 老師：對了，我們給他鼓掌。所以我們希望每個同學上課都有反應，不要每次就幾個人在講，這樣比較沒意思。好，我們重來一遍，假設你沒有想法，那老師就問你，現在目標是 E 點，可以怎麼找（圖五十四）？同學剛剛有概念了，對不對？請你找一遍，從頭再做一遍。第一個先做 $\overline{AB}$ 的中垂線，那你不要再找剛剛的角平分線，因為那樣子找到的圓心是不對的，畫出來的圓是要經過慢慢移動的，我不希望這樣做圖，這樣是不夠嚴密的。同學可以畫畫看，要畫這個圖，就是佑澄剛剛說移過來那個圖。



（圖五十四）

508. 學生：嘉佑。

509. 老師：是嘉佑說的作法。畫出來的同學請舉手，好，請上來，尤約書亞，你的名字太好記了，你媽媽取名字，取得多好。來，老師幫你畫到這邊，然後你可以開始來畫，你



（圖五十五）

- 不要自己遮自己喔（因為學生正好站在圓的前方，遮到單槍的光，就看不到黑板上的圖）。剛剛是以什麼為半徑？你先量一下（學生量 $\overline{FG}$ ），對，再來以什麼為圓心（學生以 B 為圓心）？好，他用 B，跟我一樣，那我幫你播放 PPT 的順序好了。沒關係，你看，你剛剛是不是這樣畫，接著 H 點就是圓心了。（圖五十五）然後呢？你用說的沒關係，老師幫你畫。

510. 約書亞：然後以 H 為圓心，就是…。

511. 老師：以誰為圓心？

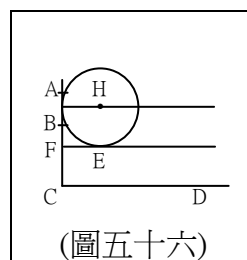
512. 約書亞：以 H 為圓心，然後…。

513. 老師：好，你說。

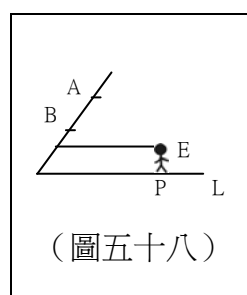
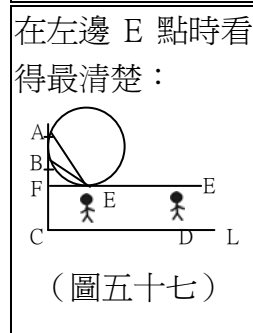
514. 約書亞：就畫圓啊！

515. 老師：對，是這樣畫圓，好，那請問呢？

516. 約書亞： $\angle AEB$ 就是最大的那個角，然後 $\overline{HE}$ 是半徑， $\overline{EF}$ 是切線，所以就是這個點 E（圖五十六）。



517. 老師：好，有沒有問題？其實我們剛剛已經畫出來了，好，我們給他鼓掌。 $\angle AEB$ 就是最大的角（圖五十七），有沒有問題？我覺得一個題目如果到此為止，那就太可惜了，所以我想繼續情境布題。陳老師又走到一個樓梯，我們知道樓梯有一個角度，那裡當然也不能浪費（圖五十八），所以果然掛著一幅畫。這幅畫的地方叫 $\overline{AB}$ ，我還是一樣從 E 點走過來，請問我走到哪裡的時候會最清楚？這個題目就當做同學的課後補充教材，所以你們課後就跟盈盈老師繼續討論，同學可以把這個圖畫下來，本來牆壁是垂直的，但現在是斜角，夾角幾度不重要，這



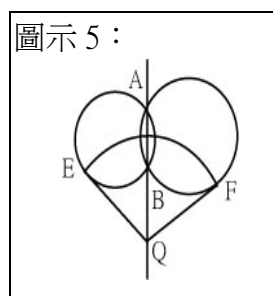
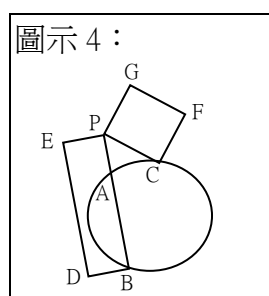
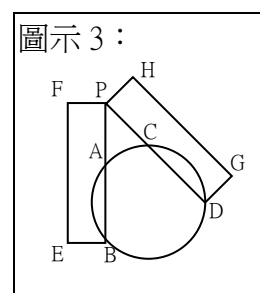
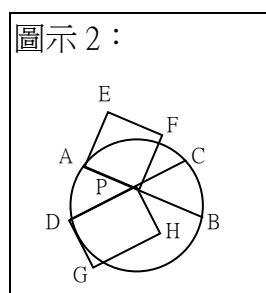
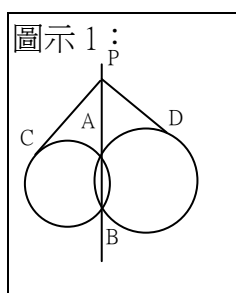
個問題就是要利用到剛剛學過的圓幕性質，或者你也可以利用直角三角形，斜邊上高的平方部分，就可以解決這個問題。這個問題挑戰性更高，希望同學下課的時候，可以繼續把它完成。好，我們今天的課就上到這邊，謝謝各位同學這麼合作！同學請起立，我們謝謝在這裡參與的所有工作人員跟同學們，謝謝各位！

518. 學生：謝謝老師！

參、教學說明

我原本是在江翠國中教書，95 年的暑假退休，當初想呈現圓幂性質探討的時候，就想到可以利用中山國中的學生，所以我選擇了九年二十班的同學，跟原班的謝盈盈老師，我們兩個搭配好。在圓幂性質的探討這個部分，謝老師完全沒有呈現，因為下週段考，而這個單元正好是這次段考的範圍，所以我選擇了考前一週來呈現圓幂性質的探討。學生的起點行為為零，他們只有學過圓內所有角度的問題。而我這個單元的設計重點，是想呈現一個想法，希望學生先透過計算，去發現他在計算長度時，需要透過三角形的相似，進而得到圓內幂、圓外幂跟切割線的三個重要性質。學生在第一堂課的表現，有一點出乎我的意料，可能孩子們看到正式錄影，所以有點緊張。但是在第一節下課以後，我們透過謝盈盈老師跟孩子們稍微溝通了一下，所以第二堂課的時候，發現孩子們真的很願意上來發表。我發現一般的狀況是女生比較不喜歡上台，所以這堂課我希望發表想法時，重點放在女生的部分。可能因為我說話太快了，很多小孩還沒有會過意來，不曉得我想要問孩子們什麼樣的問題，這點是我以後要改進的地方。第二堂課我希望呈現的是，孩子們不要只停留在內幂性質是 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ，他們可以把數的概念帶到形的部分，所以我就讓孩子們去觀察，透過內幂、外幂及切割線的性質，所做出來的兩個長方形面積的比較（圖示 2、圖示 3、圖示 4），透過這個活動讓孩子們有一點感覺。目前我覺得孩子們比較有障礙的是學了沒有感覺，這個部分是我們老師需要去琢磨的地方；第二個重點，我希望不是單純的討論圓內幂或者圓外幂或者切割線性質，希望透過兩個圓交於兩點，把公弦延長以後（圖示 1），在上面任意找一個點，對左邊的圓作切線，再對右邊的圓作切線。沒想到孩子們的感覺這麼的強烈，馬上可以發現左邊的切線 $\overline{PC}$ 跟右邊的切線 $\overline{PD}$ 是一樣的（圖示 1），這點是我滿意外的。因為在一般的班級裡面，要找到這樣子的孩子並不多，他們能夠馬上警覺到，可以透過左邊的圓看到切割線性質，再透過右邊的圓，又可以得到另外一個切

割線性質的式子，這樣子透過中間的割線媒介出來，發現左邊的切線跟右邊的切線長度是一樣的。



第二個部分我覺得活動設計的不是很好，就是在公弦的直線上面一個點，對左邊的圓做切線 $\overline{QE}$ （圖示 5），然後再以那個切線長為半徑，以 Q 為圓心所做的圓，交在右邊圓上一個點 F 。我希望孩子們可以感覺右邊 $\overline{QF}$ 就是所謂的切線，可是這個部分的證明，對孩子來講是有困難的。因為要用到我們所謂的逆定理，判別切線的逆定理，這個部分是我們國中沒有討論的，但是這個部分的呈現，只是希望孩子能夠感覺到那條線是切線，先讓他有一點感覺。再來，我想透過實物操作的活動，原本希望透過孩子們把書拿出來，放在頭頂上慢慢的移動，然後去發現到哪個位置是最清楚的，可是因為他們今天沒有帶課本，所以就沒有辦法用課本的部分來呈現，改用名牌，名牌又太大了。後來我們就用原本去國父紀念館欣賞[宗教與藝術展]的情境來呈現，那個部分真的是對孩子們挑戰性滿高的，可是我完全沒有想到有一個同學，竟然用角平分線和中垂線的交點所作的圖，往左移動過 A 、 B 兩點，可是這樣的做法不是正規的做法，所

以我後來才又呈現正規的方式。不過蠻意外的是，有些孩子還是可以跟得上怎麼樣去做圖，當初設定如果孩子沒辦法做出的時候，由我來一步步呈現，孩子跟著我一步步來。

因為已經下課了，所以我後來呈現另外一個，假設牆壁不是跟地面垂直的狀況，這個部分因為挑戰性非常的高，我是希望有興趣的孩子可以在課後的時候繼續去探索。兩堂課整體給我的感覺，是孩子們的表現非常棒、非常的用心，可見原班的老師帶得非常好。今天我自己的收穫也滿多的，因為這一年多來，我沒有接觸過普通班的孩子，十幾年來我一直任教於數理資優班，沒想到普通班孩子的表現也能夠那麼的好，我想我也會繼續自我挑戰，再設計一些課程在一般的班級使用，這是我給自己的目標。

肆、教學後的省思

一、圓幂探祕

傳統的圓幂性質教學，大都是直接證明三角形相似對應邊成比例，推導出公式，再用公式去代入數字。我想呈現的是直接給數字，讓學生去找出相似形，利用線段成比例，最後得到結論。且我希望學生能夠確實明瞭性質，所以我要學生用數學的語言（在不使用英文文字下）詮釋性質，並能在腦中或是空中畫出圖形；我不希望學生只是將這些性質停留在數字的計算，更期望學生能夠將它們也用在形的探討，並能加深、加廣地思考到兩個相交圓的探討，利用圓幂性質及圓的角，解決生活中的問題。

二、學生分析

因為我已經退休，在沒有一般學生教學的情況下，我選擇中山國中九年級，兩個班級的組合班中的 A 組討論。在正式教學前一週，星期五的第三節課，我跟

孩子們正式碰面，希望讓孩子們了解我上課的方式及上課應有的態度。我選了我的主題式教學[用心看]，透過這個教學，希望孩子們知道適時的發問可以使問題更清楚，也不可以眼見為是，更要隨時發表自己的想法。

三、錄影教學

在教學過程中，我發現孩子們被大型的錄影機及錄影的氣氛嚇到，比較不敢發言，到後來才較放得開。其實孩子們有自己的想法，如果老師們在教學過程中可以適度停下來，聽聽孩子的想法，給予適度的鼓舞和修正，每個孩子都是一塊寶。

有時候老師可能會有迷思，因為大多數的聲音會影響到我們的認知，以為孩子們都懂了，但是事實上不然。就像在求外冪圖形的過程中，原本我以為大多數的同學都懂，但是當我呈現幾個列式時，就看到學生的迷思了。因此老師可能要花時間多出幾個小題，確認學生是否真的了解。

在解題過程中，我要求先算出答案的同學，如果聽到別的同學答案跟你不同時，也要思考為什麼別人的答案是這樣，也要反思是否自己有盲點。

在解題的講解過程中，我盡量請說錯的同學上來說他的作法，希望透過他自己的說明，釐清自己的迷思觀念，也讓有相同想法的孩子能明瞭。

另外，猜想也是學習的方法，讓孩子勇於猜想，再去找出原因，並自圓其說；訓練孩子勇於表達的能力，是數學的另類學習。

教學後經朱教授建議，要對「冪」加以詮釋。在算學上稱數的「乘方為乘冪」，如平方稱一乘一冪；覆蓋食品的方布，因此冪是指面積。

四、感恩指導教授

感恩周筱亭教授、朱建正教授、鍾靜教授、謝堅教授的指導，讓我明白數學教學時應有的態度。

國家圖書館出版品預行編目資料

國中小數學教材與教學探討.幾何篇 /陳春男等作；周筱亭, 劉君毅主編.
--初版. -- 臺北縣三峽鎮：國家教育研究院籌備處, 民 98.08- 冊； 公分
ISBN 978-986-01-9182-0 (第 4 冊：平裝附數位影音光碟)
ISBN 978-986-02-5497-6 (第 5 冊：平裝附數位影音光碟)
1.數學教育 2.教學活動設計 3.中小學教育
523.32 98011987

國中小數學教材與教學探討---幾何篇（五）

主 編：周筱亭 劉君毅
教學指導：謝 堅 鍾 靜 朱建正 周筱亭
作 者：梁翠玲 李進福 黃士哲 陳菽紋 蔡佩旻 陳彩鳳
發行人：吳清山
發行機關：國家教育研究院籌備處
地 址：台北縣三峽鎮三樹路二號
電 話：(02) 8671-1111 轉 教學資源中心
網 址：<http://www.naer.edu.tw>
出版年月：中華民國 99 年 12 月
版 次：初版
電子出版品說明：本書籍影片同時登載於「國中小數學教師專業成長網」
網址為：<http://math.naer.edu.tw>

定 價：新台幣 420 元
印 刷 者：曦望美工設計社
地 址：臺北市萬華區西園路2段261巷12弄44號1樓
電 話：(02)2309-3138

展 示 處：政府出版品展售門市

地址及電話：

- 1.五南文化廣場台中總店：台中市中山路 6 號 TEL：(04) 2226-0330
網址：<http://www.wunan.com.tw>
- 2.國家書店松江門市：台北市松江路 209 號 1 樓 TEL：(02) 2518-0207
網址：<http://www.govbooks.com.tw>

GPN：1009903928

ISBN：978-986-02-5497-6

國家教育研究院籌備處保留本書籍附件影片資料之著作權及所有權利。