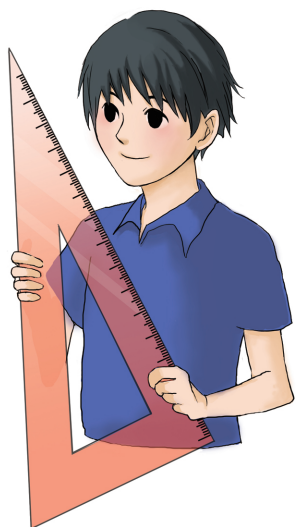


統一編號

1009801763

國中小數學教材與教學探討
— 幾何篇(四) —
國家教育研究院籌備處出版

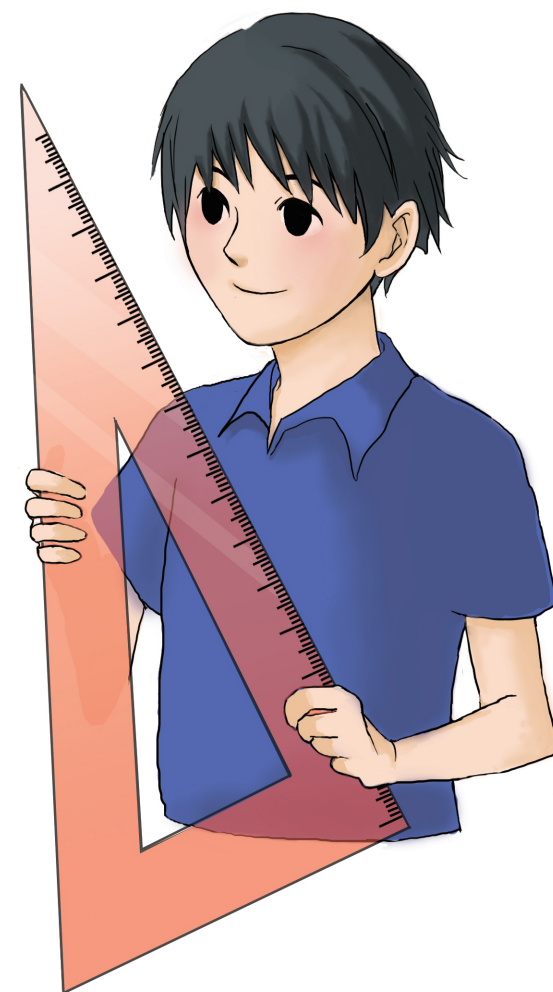
國中小數學教材與教學探討 — 幾何篇(四) —



ISBN 978-986-01-9182-0



9 789860 191820
98.08.1000
定價：290元



國家教育研究院籌備處 出版

國中小數學教材與教學探討 - 幾何篇(四)

國家教育研究院籌備處 出版

中華民國九十八年八月

陳主任序

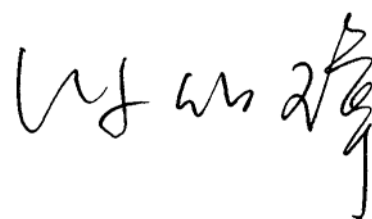
1970 年代以前的教師訓練相當重視學科知識的學習，此後，教學知識的理論和教學方法開始成為教師訓練和授證的重點項目。1970 年代到 1980 年代間的教學研究傾向聚焦於一般的教學技巧，而非教學內容之理解。在這段期間，許多研究對於過程—成果(process-product)、教師行為(teacher behavior)、教學效能 (teaching effectiveness) 作了許多描述，這些研究企圖在不考慮學科知識的情形下，尋求界定足以提升學生學習和促進學術成就的教學因素(Berliner & Rosenshine, 1977; Rosenshine & Stevens, 1986)，這種注重一般教學技巧的師資培育方式，受到許多數學家及數學教育家的批評，Shulman (1986) 便強調教師學科內容知識的重要性，他使用” Missing Paradim” 一語來形容一般教學研究之盲點在於未能著眼於學科內容知識對於教學行為的影響。此外，許多研究亦指出另一值得關注的方向：許多職前教師對於數學的了解不足，並且多侷限於數學算則的學習 (Martin & Harel, 1989; Ma, 1999; Rowland et al., 2001; Goulding & Sugate, 2001)。

因此，近年來教師的專業成長方面的研究主要在於探討教學的知識庫，提供訓練課程以及專業活動中教學複雜度的示例(Reynolds, 1989)。荷蘭的 MILE (multiple interactive learning environment, 2000) 計畫，強調情境式的教學實務，師範生或在職教師透過數位化的教學場景來將現實的教學場景轉化到學習的環境之中，透過進行反思性的對話來建構本身的數學教學知識。

本處周筱亭研究員與劉君毅助理研究員自 91 年度起，即開始進行「現實教學紀錄」對於數學教師專業成長影響之探討研究，以記錄教師們的「教學歷程」為主要的資料蒐集方式，包含以影像資料為主的「教學錄影專輯」、教師於教學前所作的「教學活動設計」以及錄影後所作的「教學後的省思」等三大部分。這個研究的最終目的在於建置一個適合國民中小學數學教師使用的「現實教學紀錄」資料庫，資料庫中擬包含數學內涵、以及數學為主軸的統整課程教學情境。該研究擬定以國中小數學課程中的十個重要領域為主軸，根據該主軸在國民中小學階段的重點教學內涵，結合學者專家的專業以及國中小教師的實務知識，針對活動設計、數學內涵、班級經營、以及學生認知等向度進行分析與整理，來建置教學情境紀錄，以做為教師實務學習的資源，並從中蒐集參與研習教師的反思及改變資訊。

這套叢書「國中小數學教材與教學探討」是前述資料庫內容的呈現方式之一，自93年度起已陸續出版以「長度」、「比例」、「時間」、「小數」、「國小幾何」、「分數」、「整數的乘除」、「因數與倍數」、「整數的數概念與加減運算」及「一元一次方程式」為主題的各冊。今年出版的將以「國中幾何」和「代數」為主題，本書為『幾何篇（四）』。每本書都包含該主軸的各單元「教學活動設計」、「教學活動實錄」和「教學後的省思」，並附上各單元的教學實錄影音光碟。同時，研究群已展開進一步計畫，將本系列叢書內容(含文本與影片)與歷年來的研究成果逐步數位化，建置成「國中小數學教師專業成長網」(網址為：<http://math.naer.edu.tw>)，期盼以數位學習(e-Learning on Demand)、教師績效支援系統(Electronic Performance Support Systems)的模式，提供教師們更便利、及時、普及與多元的服務。

在這本書付梓之際，僅以此序向各位參與的人士表達誠摯的謝意，由於他們的專心投入與犧牲週末假日的無私奉獻，讓本處能出版、製作這些教學敘事，作為以學校為基地的數學教師成長學習資源。



於國家教育研究院籌備處

民國九十八年七月

編輯要旨

- 一、本書為國家教育研究院籌備處預定陸續出版的一系列與國中小數學教材和教學相關的叢書之一，去（97）年出版的兩本書是以「整數的數概念與加減運算」和「一元一次方程式」為主題；今年預定出版的兩本將分別以國中的「幾何」和「代數」為主題，本書「幾何篇（四）」係延續國小為主的「幾何篇（一）、（二）、（三）」，收錄國中二年級至三年級的教學主題單元。
- 二、出版這類叢書的主要目的在於提供國中小教師欲提升專業能力時，可以參考或共同討論的教學案例。
- 三、本書分為兩個部分：文本和數位影音光碟(DVD)，前者包括「幾何」主題的各單元活動設計、教學實錄、教學說明和教學者教學後的省思；後者則為各單元的教學實況錄影以及擔任教學的教師於教學後所錄製的教學說明。
- 四、讀者在觀看影音光碟時，可以對照文本中的教學實錄，將更有利於掌握教學細節。
- 五、本書並未涵蓋國中小數學教材中所有「幾何」主題的相關題材，係就參與的老師們當時任教的年級與使用的版本，配合原訂的教材和教學進度，選取與「幾何」有關的重要概念，在教授們的指導之下，先設計教學活動，經過反覆的討論與修正，定案後，由本處委外錄製教學實況和教學說明。錄影紀錄皆為自然真實的上課過程，由於採用雙機錄影，影片中呈現的教學實況的畫面已經過剪輯，但音效方面則是教室現場原音重現。
- 六、由於每位教師的教學風格不同，所教學生的背景、經驗與知識也不盡相同，因而讀者不應將本書的各個案例視為「範例」。
- 七、基於環保理念，本書將逐年縮減紙本印製量，改採光碟發行，影音光碟部分則維持原形式不變，建議讀者可先將電子版「文本資料」內容載存於電腦硬碟中，再透過瀏覽工具開啟相關檔案閱讀，並可同步搭配觀看影音光碟影片。
- 八、本書內容(含文本與影片)未來將逐步數位化，以線上課程方式呈現，建置於本處「國中小數學教師專業成長網」(網址為：<http://math.naer.edu.tw>)，歡迎上網瀏覽最新資訊。
- 九、本處保留本書及影片內容之著作權及所有權利，讀者若需引用或有任何問題，歡迎逕洽本處。

目 次

線對稱	1
壹、教學活動設計	1
貳、教學實錄	11
參、教學說明	59
肆、教學後的省思	64
三角形邊長的不等關係.....	67
壹、教學活動設計	67
貳、教學實錄	74
參、教學說明	120
肆、教學後的省思	121
相似三角型.....	123
壹、教學活動設計	123
貳、教學實錄	129
參、教學說明	151
肆、教學後的省思	153
兩圓的位置關係與公切線.....	155
壹、教學活動設計	155
貳、教學實錄	171
參、教學說明	199
肆、教學後的省思	203
圓心角與圓周角.....	205
壹、教學活動設計	205

貳、教學實錄	219
參、教學說明	246
肆、教學後的省思	248
 外心	 251
壹、教學活動設計	251
貳、教學實錄	262
參、教學說明	285
肆、教學後的省思	287

線對稱

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級上學期

二、教 學 者：台北縣中山國中 陳春男 老師

三、教學目標：

【第一節】

1. 能藉由操作理解線對稱的概念，以各種方法判斷線對稱的圖形並完成線對稱的作圖。

【第二節】

2. 藉由操作能了解並熟練線對稱的意義及日常生活的運用。

四、活動目標：

活動一：利用操作活動複習線對稱的觀念。

活動二：利用操作活動複習中垂線的性質，並找出線對稱圖形中對應點的關係及說出對稱位置的坐標。

活動三：利用平面坐標系的概念，表徵一個對稱軸不是水平或鉛直的線對稱圖形。

活動四：能活用線對稱的觀念拼出線對稱圖形，並利用線對稱的性質檢驗圖形是否為線對稱。

活動五：透過拼圖與物件的操作，經由樣式的觀察，找出線對稱的規律。

活動六：能根據已給的基本圖形，透過線對稱的概念，作出自己的作品。

五、教學概要說明：

學生之前在國小已學過「線對稱」的觀念，只是國小的部分偏重於操作，只透過操作活動判斷是不是線對稱的圖形。國中階段除複習國小線對稱的觀念，希望透過操作活動之外，並引入坐標標定位置的想法，從圖形提升為了解構成圖形

的基本要素，例如：點的對應、邊的對應等關係，再經由垂直與平分的基本幾何技巧，強化線對稱的概念，並了解線對稱圖形的各種要素及構成條件，以各種方式表徵線對稱的圖形，並了解線對稱在生活中的運用。

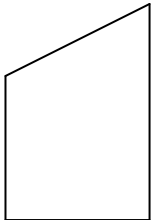
六、教學活動設計：

【第一節】

藉由操作理解線對稱的概念，以各種方法判斷線對稱的圖形並畫出線對稱圖形。

活動一：利用操作活動複習線對稱的觀念。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 教師布題	1.在國小的時候，同學們學過線對稱的圖形了，能不能說一說，什麼樣的圖形叫做線對稱圖形呢？為什麼叫做線對稱呢？	• 同學可能是先舉出生活中線對稱的例子。	• 能說出哪些圖形是線對稱圖形和理由。
	2.大家舉出那麼多的例子，能不能說出這些例子的特徵？怎麼樣用數學的語言說出線對稱的定義呢？	• 經過大家的討論之後，能說出線對稱的定義。	• 能說出線對稱的定義。
	3.老師用事先準備好的圖形讓學生來判斷哪些圖形算是線對稱圖形，並說明認為圖形是線對稱的理由。（利用電腦	• 同學會由各種角度來說明線對稱圖形的表徵。（例如：有些人會說長的一樣，有些同學會說可以對摺，有些人	• 能知道各種線對稱的要件。

老師布題，學生解題，並觀察操作	及 powerpoint 展示圖形，讓學生判斷並上台發表為何是線對稱圖形) 4. 老師將事先準備好的教具給學生分組操作，並從操作中探索答案。(事先準備如下方拼圖板，讓學生操作，拼出線對稱圖形，並說明有多少種可能答案) 	會說出對稱軸等等) 同學可能是先嘗試錯誤，後來再引導出規律性，看出對稱圖形的特徵。	能拼出對稱圖形並說出理由。
---	---	--	---

活動二：利用操作活動複習中垂線的性質，並找出線對稱圖形中對應點的關係及說出對稱位置的坐標。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
老師布題，學生操作並歸納出一般性的解法	1. 先利用構成要素「點」的對應關係，找出其對稱點坐標的方法，找出對稱圖形的對應點並完成對稱圖形。(規則圖形指圖形比較單純及對稱軸是 x 軸	能利用對摺的方法、數數的方法、利用中垂線上的點到線段兩端點等距離的性質看出或找出對稱點的坐標。	能正確找出對稱點的位置並完成對稱圖形。

	或者是 y 軸的情形) 2.老師引導學生說出中垂線的性質，並利用中垂線的性質找出對稱點。 3.導入坐標平面的概念，找出對稱點的坐標並完成對稱圖形。		能正確利用坐標的方法找出對稱點。
--	--	--	--

活動三：利用平面坐標系的概念，表徵一個對稱軸不是水平或鉛直的線對稱圖形。

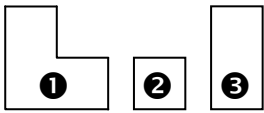
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
老師布題，學生操作並歸納出一般性的解法	1.老師引導同學利用坐標平面找出對應點的坐標，將不規則對稱圖形的對應點標在坐標平面上並完成對稱圖形。 (不規則圖形指圖形比較複雜或是對稱軸不是 x 軸或者是 y 軸的情形) 2.歸納出對稱圖形的畫法並比較國中與國小表示法的差異。 3.如果沒有方格紙，能不能作出圖形的對稱軸？怎麼作比較	- 同學可能先將圖形對摺，然後再找出對應點的位置，本活動希望學生能直接說出或看出對應點的坐標，進而完成線對稱圖形。 - 老師引導同學看出對應點與對稱軸之間的關係（有垂直	學生能分組討論，並完成解題紀錄。

	好？	平分的關係，並利用此關係，透過中垂線的作圖，就可以找出此圖形的對稱軸了）。 • 有些同學可能會利用坐標、對摺、或者其他方法找出對稱軸，本單元的重點在於導出中垂線的性質，及利用此性質來作出中垂線，即為此圖的對稱軸。	
--	----	---	--

【第二節】

讓學生藉由操作了解並熟練線對稱的意義及日常生活的運用。

活動四：能活用線對稱的觀念拼出線對稱圖形，並利用線對稱的性質檢驗圖形是否為線對稱。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 教師布題 • 學生操作	1.利用下圖的物件，拼出線對稱圖形。  上述物件需事先準備，長寬也有一定的比例關係，比如說：❶與❷可以拼成正方形，邊長比為 1：2，❸為❶與	• 同學可能拼出長方形或 T 字型及其他可能圖形。有些學生會拼出一些創意的圖形，只要能符合線對稱圖形，教師應該要適時予以鼓勵。	• 學生分組討論，並拼出所有可能圖形。 • 能解釋拼出的圖形為何是線對稱圖形。

	②面積和的一半。 2.各組拼出不同的線對稱圖形之後，老師透過引導，希望學生能夠歸納並發現拼出線對稱圖形的一般通則。 3.歸納結論：要拼出線對稱圖形的一般性規則有兩個方式： （1）將每一個圖形的對稱軸摺出來，然後將所有的對稱軸排成一直線，則排出的圖形必是線對稱圖形；（2）想辦法將圖形的邊框成為圖形的對稱軸，則排出的圖形就有可能是線對稱圖形。	• 請同學上台發表。 • 同學可能說，只要讓每個圖形的對稱軸拼成一直線或是以圖形的邊長當成對稱軸就可以了。	• 能找出對稱圖形的一般通則並能拼出對稱圖形。
--	---	--	---

活動五：透過拼圖與物件的操作，經由樣式的觀察，找出線對稱的規律。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 教師布題	1.將生活中的對稱圖形作成簡報讓學生觀察，並找出規律性，如鐵門、鐵窗、花台、圍牆的花樣、建築上的結構、衣服、服飾、	• 同學可能透過不斷的嘗試來看出最小單位，不同的最小單位可能組成不同的圖形。	• 能找出對稱圖形的規律性。

教師講述	領帶、包裝紙等等。讓學生觀察並說明對稱的理由。 2.在樣式與規律的觀察中，找出構成圖形的最小單位，並看出是以何種方式構成整個圖形。（如：鏡射、翻轉、對稱等等） 3.介紹網路上 M.C.Escher 的作品及賞析其構圖的基本結構跟數學的關係。	- 老師以引導式的教學，讓學生有機會學習到整體的架構，從觀察出最小的構成單位出發，透過上、下、左、右對稱的步驟，形成一個完整的複合圖形。不受步驟先後的限制，藉此引導學生找出樣式與規律的方法。 - 只針對 M.C.Escher 作品中有關對稱的部分作品作介紹。	- 能找出圖形的樣式與規律。 - 能專注聆聽並欣賞數學結構之美。
--	---	--	---

活動六：能根據已給的基本圖形，透過線對稱的概念，作出自己的作品。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
學生操作	1.將事前準備好的圖案透過各組腦力激盪，利用鏡射、翻轉或是其他方式，完成一整個圖形。	學生可能會以各種不同的想法畫出圖形，對於樣式與規律的理解會有更進一步的思考。	- 能分組討論，並畫出該組認為是利用線對稱所作出的圖形。 - 能欣賞各組的作品並提出看法。（表達、溝通與分享。）

附錄一、學習單

學習單 (一)

班級：

座號：

姓名：

1.如下圖（一），以 y 軸為對稱軸，依據下列提示作答：

A₁的對稱點是 A₂，如果 A₁的坐標是 (-2, 4)，那麼 A₂的坐標是？ (,)

B₁的對稱點是 B₂，如果 B₁的坐標是 (-2, 0)，那麼 B₂的坐標是？ (,)

檢查看看，y 軸是不是對稱點連線 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線？是不是對稱點連線 $\overline{B_1B_2}$ 的中垂線？

完成圖（一）的線對稱圖形。

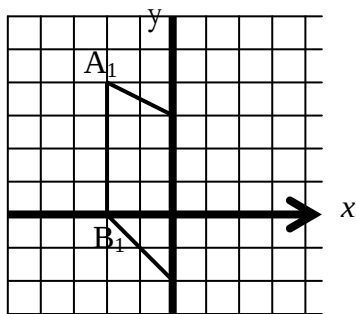


圖 (一)

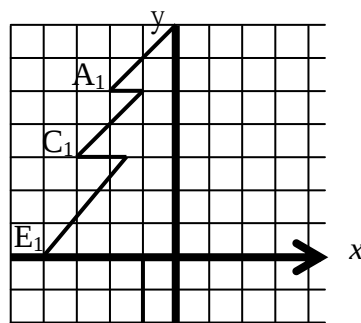


圖 (二)

2.如上圖（二），以 y 軸為對稱軸，依據下列提示作答：

A_1 的對稱點是 A_2 ，如果 A_1 的坐標是 $(-2, 5)$ ，那麼 A_2 的坐標是？（ ， ）

C₁的對稱點是C₂，如果C₁的坐標是(-3, 3)，那麼C₂的坐標是？(,)

E₁的對稱點是 E₂，如果 E₁的坐標是 (-4, 0)，那麼 E₂的坐標是？ (,)

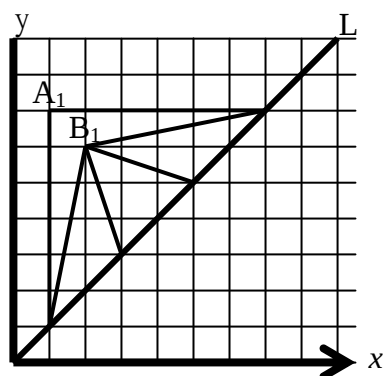
檢查看看， y 軸是不是對稱點連線的中垂線？

由這兩個例子，你觀察到對稱軸與對稱點連線有什麼關係？

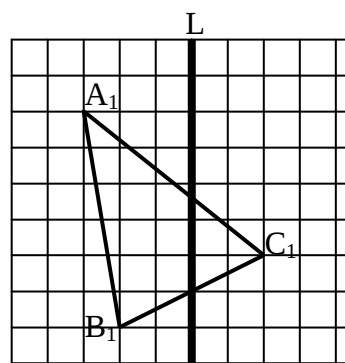
所以若要畫出線對稱的圖形，你可以怎麼作？

完成圖（二）的線對稱圖形。

3.完成圖(三)、圖(四)以L為對稱軸的線對稱圖形。



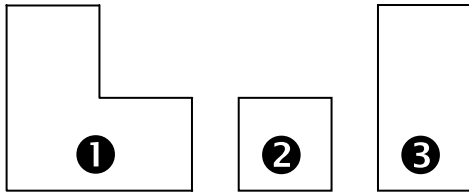
提示：標出 A_1 、 B_1 的對稱點



提示：找出 A_1 ， B_1 ， C_1 的對稱點

學習單（二） 班級： 坐號： 姓名：

1.將下列三個物件所拼出的線對稱圖形畫在下面的空格中，並寫出你認為線對稱的理由。



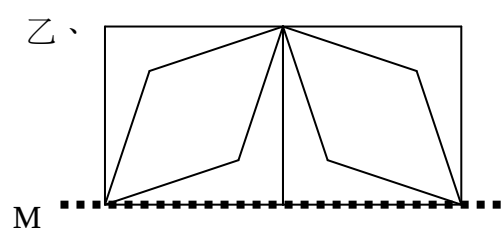
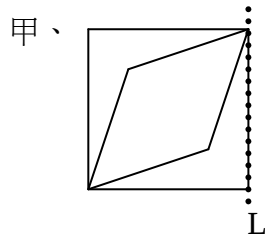
你認為線對稱的原因是因為，你覺得：



2.聽完各組發表的結果，你有發現拼出線對稱圖形的規律嗎？

3.寫出你發現的規律：

4.依照老師所陳述的步驟，完成下列線對稱的圖形：



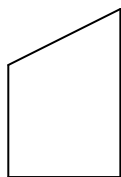
甲、以 L 為對稱軸畫出線對稱圖形。

乙、以 M 為對稱軸畫出線對稱圖形。

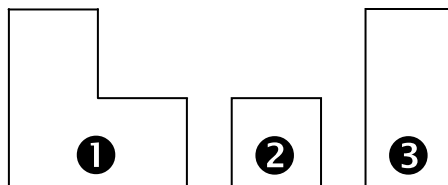
丙、將乙完成後的圖形各作上、右、左、下對稱一次，猜猜看，會變成什麼樣子？並塗上你喜歡的顏色，下次上課交回！

附錄二、拼圖物件

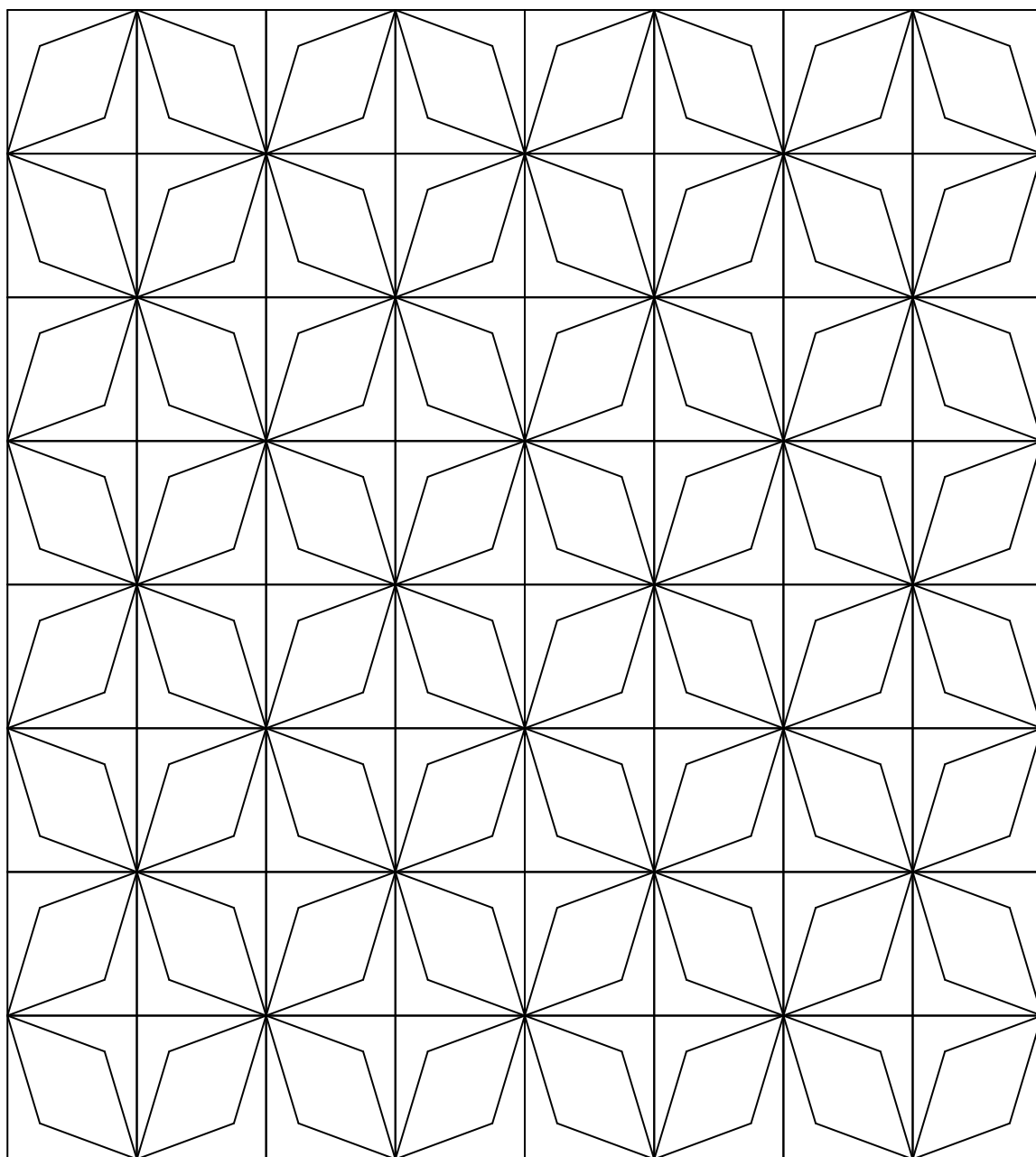
活動一拼圖物件



活動四拼圖物件



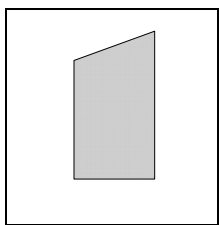
附錄三、活動六物件



貳、教學實錄

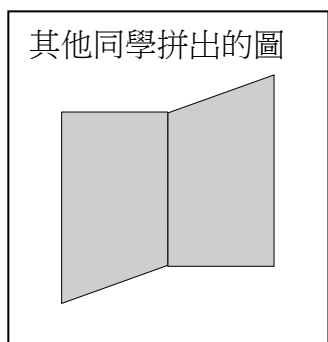
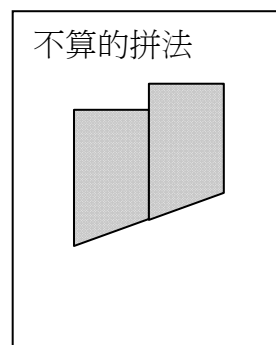
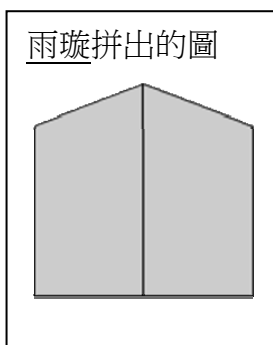
【第一節】

1. 老師：好！各位同學，我們今天要上的是有關於「線對稱」的單元，剛剛我們也



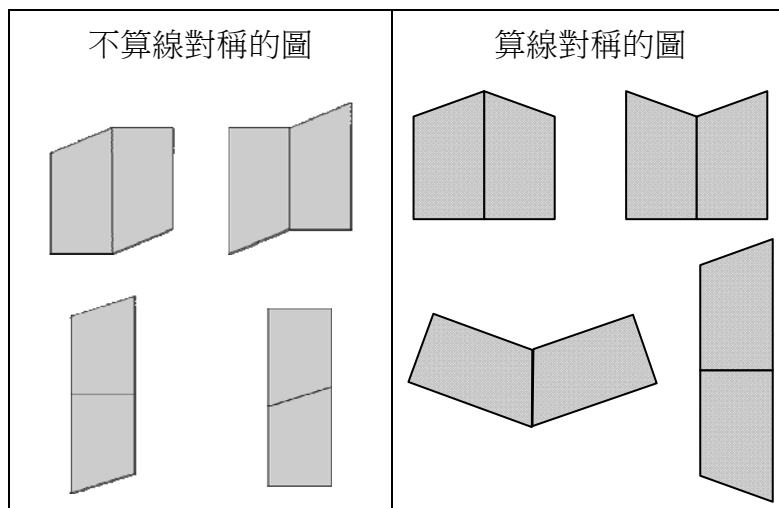
讓各位實際把我們今天要剪的道具(如圖，每人兩片，以分組方式進行，可以拼出八種圖形)也剪下來了！接下來的動作，就是將每個人手頭上的兩片梯形，在同一組的話就有很多，待會兒可能要透過各組互相討論一下，光用這兩片

梯形，可以拼成多少種圖形？你只要把相同的邊拼合在一起就可以了。我舉個例子，梯形可能是下底比較長，對不對？這兩個下底一模一樣，你可以把兩個下底，可能這樣拼在一起，也可能翻轉後拼在一起，這樣了解我的意思嗎？你們可以拼拼看，這樣的兩片拼在一起，總共可以有哪幾種圖形？那就可以開始了。把拼出來的部分做個紀錄，看你的圖形會長什麼樣子。譬如說，像雨璇這樣，他就拼出這一種，如果他拼出來，那其他人就可以想說：如果我不是拼出這樣，我還可以拼



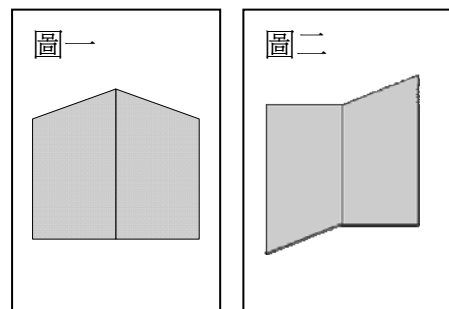
解我的意思嗎？我是希望你們把拼出來的東西分類，去分說，哪些算是對稱？哪些不是？聽得懂意思嗎？比如說，這種的就不算，因為這兩個邊不一樣，你必須把相同的邊給拼在一起，了解了嗎？他拼的這種就是。就這樣子把它拼起來吧！

那樣子也是一種拼法，因為你看這樣子，兩個拼在一起，是一種拼法。你們就討論看看，光是這兩片把它拼起來，總共可以拼成多少種？越多越好，有沒有問題？



2. 學生：沒有。
3. 老師：沒有喔！對！這樣是一種。相同的邊，這樣也是一種，這個是一種，這個也是一種，你們討論一下，除了這個，你自己算算看，你剛剛拼了幾種囉！是不是只有這四種？還有沒有別的？
4. 學生：八種。
5. 老師：你看他拼得比較多耶！哪八種？你是用算的？待會要發表你的想法哦！我覺得你的想法很快哦！
6. 老師：這種算，那種也算，他這個也算，你這個也算，他那個也算。ok！你們可能要去思考一個問題喔！這兩組很快，你看，像翰霖根本沒有拼，他就告訴我們總共有八種，你要不要發表你的想法？為什麼你沒有拼，你就會判斷這兩片來拼一定就會有八種拼法？
7. 翰霖：要站起來講嗎？

8. 老師：可以啊！你要站起來講沒有問題。你要不要來中間這裡？來這裡。翰霖根本都沒有拼，就馬上告訴我們有八種拼法，我是很好奇，他怎麼可以轉得那麼快？來，面對同學喔！看著鏡頭！你為什麼認為會有八種？
9. 翰霖：因為一個邊就有兩種，這有四個， 2×4 等於 8。
10. 老師：聽懂的舉手！好，放下！掌聲鼓勵一下！換句話說，大部分的同學嘗試的方法，就是「反正我就轉轉看，拼拼看嘛！」，而他的想法不是直接用嘗試，他的腦袋裡面會去找它的規律性。換句話說，我們在七年級也講過所謂的樣式跟規律去思考！他直接從這個部分著手，待會兒下節課我們也會提到這樣的東西，今天的主軸可能也從『對稱』裡面，找到樣式規律，想辦法跟我們的『數』作一個結合。那麼這八種圖形裡頭，現在再作第二個動作，能不能去分類？
11. 學生：可以。
12. 老師：分成哪幾種是線對稱的，哪幾種不是線對稱，有沒有問題？你們這組有沒有找到哪八種？秉宸，你當組長，你把它整理一下哦！看看有沒有找到哪八種，然後分類一下。怎麼分喔？很簡單，你把覺得是對稱的分一類，不是線對稱的分另外一類，就像這樣，哪幾種是對稱？我舉個例子，大家看看這樣算不算對稱？
13. 學生：算。
14. 老師：這個（圖一）算不算？
15. 學生：算。
16. 老師：祐程！那樣算不算（見圖二）？
17. 學生：算。
18. 老師：想清楚哦！



19. 學生：不算。

20. 老師：你要分成兩種，哪些是對稱？哪些不是對稱？有沒有什麼問題？

21. 學生：（有人說）有；（有人說）沒有。

22. 老師：有沒有？到底是有，還是沒有？你覺得是對稱，還是不對稱？（見圖三）

23. 學生：對稱。

24. 老師：對稱的。這個咧？（見圖四）

25. 學生：對稱。

26. 老師：再來咧？這個（見圖五）算不算對稱？

27. 學生：算。

28. 老師：有沒有哪些不是線對稱的？

29. 學生：有。

30. 老師：有，來！你另外要分出不對稱的來哦！

待會要說明為什麼你覺得這樣它不算

是線對稱哦！這個（見圖六），你認為算線對稱，還是不對稱？你覺得它不對稱，你能講得出理由嗎？

31. 老師：有沒有？想想看！不用太緊張啦！你這邊已經分類分完了啊！你要不要跟大家說一下，你覺得哪邊算是對稱，哪邊算是不對稱？

32. 老師：你怎麼去認定它到底是不是線對稱？

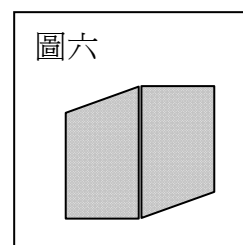
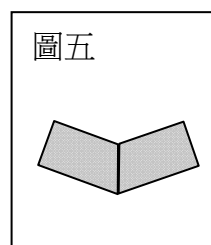
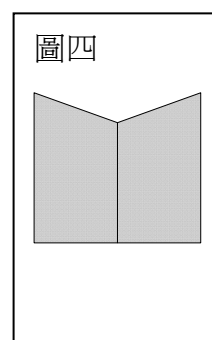
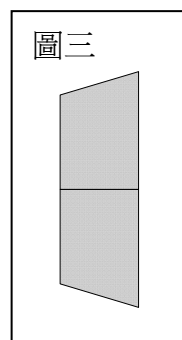
33. 學生：這兩邊相等，這兩邊不相等。

34. 老師：你是從邊的關係看出它是不是對稱的嗎？

35. 學生：對！

36. 老師：那所謂的邊相等跟邊不相等怎麼去分？因為兩個都是全等的形狀嗎？

37. 學生：對摺。



38. 老師：對摺，ok！
39. 學生：沒有完全重疊在一起。
40. 老師：就是沒有完全地重疊在一起，好，那我們看一下喔！接下來我要問喔！有沒有哪組拼不出八種圖形的？第一個問題。你說：「老師，我這邊少一種。」有沒有？都有喔！這個沒有問題吧？

41. 學生：沒有。

42. 老師：沒有。那這兩個算線對稱，還是不算線對稱？（見圖七）

43. 學生：（有人說）算；（有人說）不算。

44. 老師：算還是不算？

45. 學生：不算。

46. 老師：確定哦！

47. 學生：確定。

48. 老師：確定哦！那線對稱的意義，現在我的意思是說，如果你以對摺的這條線當作它的軸去考慮的話，你對摺在一起，可以完全的疊合，那我們就可以把它拼出來。這個我想應該都在七年級的時候都已經有上過這部分的概念喔！像這樣（見圖八），算不算對稱？

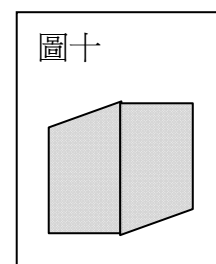
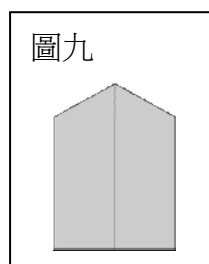
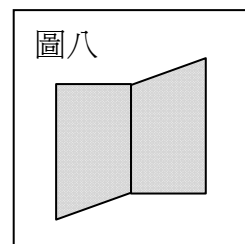
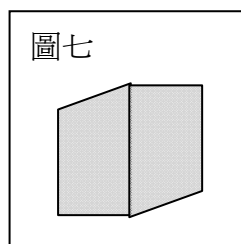
49. 學生：算。

50. 老師：它可以完全的重疊嘛！那這樣咧？（見圖九）

51. 學生：算。

52. 老師：算喔！可以喔！那這個也算線對稱嗎？（見圖十）

53. 學生：不算。



54. 老師：不算嘛！這個咧？（見圖十一）

55. 學生：不算。

56. 老師：這個（見圖十二）要特別注意哦！

57. 學生：算。

58. 老師：關於這個圖形本身，我有話要說，你們可

能要注意聽哦！你就要問：「老師要問的是什麼？」如果我們今天拼出來，
這個是一個什麼形？

59. 學生：長方形。

60. 老師：長方形是不是對稱圖形？

61. 學生：是。

62. 老師：是哦！可是如果我今天要求的是，你必須要根據這個摺痕能夠完全重疊才能算是線對稱的話，那這個對稱不對稱？

63. 學生：不對稱。

64. 老師：那就不對稱了。所以，就要看題目給你的要求在哪裡。所謂的摺痕，就是說如果我今天要以這一條線當成對稱軸來看這個圖形的話，雖然你拼出來的是一個長方形，但是它就不能算是一個線對稱的圖形，這樣有沒有問題？

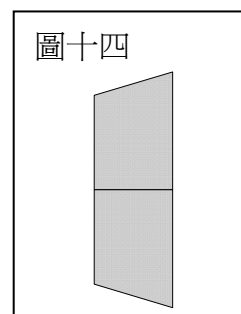
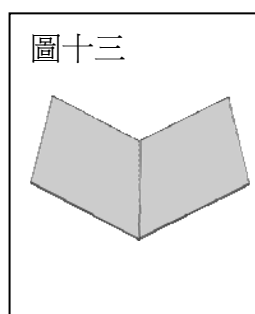
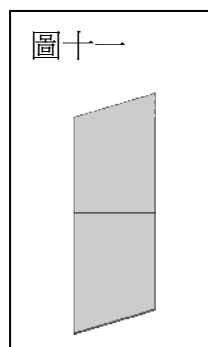
65. 學生：沒有。

66. 老師：這樣清楚哦！

67. 學生：清楚。

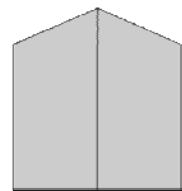
68. 老師：就看你怎麼認定喔！不然這個會有點爭議。ok！這也是一種吧！（見圖十三）

69. 學生：是。



70. 老師：算不算對稱？
71. 學生：算。
72. 老師：算哦！這個咧？（見圖十四）
73. 學生：算。
74. 老師：算哦！換句話說，我們把它拼成了八種，這八種就如同我剛剛講的第一個動作，我們可不可以把它分成兩類嘛？一種是所謂的線對稱的那一類，一種是不是線對稱的那一類。我們就發現說，這個拼合的線，我剛剛講的，你要沿著拼合的線摺起來，可不可以完全重疊？這個等於是做七年級的複習啦！從這一方面來講，這其中左半邊的這四種，你會發現，它是沒有辦法完全重疊在一起的，它就不是對稱的圖形。但是右半邊的四種，它是可以完全重疊在一起的。換句話說，可以完全重疊的，我們就根據這個摺痕，我們就可以說它是一個線對稱的圖形。到這邊有沒有問題？
75. 學生：沒有。
76. 老師：沒有喔！那就開始定義囉！這之前我們國一有講過啦！一個圖形可以沿著某一條直線對摺，使它在直線兩側的部分可以完全重疊，就稱為對稱圖形。我可能要跟同學提醒，一般的話，它只會定義到對稱軸而已，我們現在講的是，我們如何去解構一個圖形。一個圖形的構成，除了它的邊長之外，譬如說這兩邊之外，你可能要注意到是，構成圖形不一定要從邊來決定它吧！你可以抓它的什麼？點。譬如說，這個點是因為兩個點重疊在一起，它就沒有什麼特色，對不對？可是，你看，這個點它摺過來的時候，它重疊的點在哪裡？（見圖十五）
77. 學生：...。

圖十五



78. 老師：是不是就這個？我們就可以對它下一個所謂的名稱，就是說像這樣子摺過來可以完全疊合的點，我們就把它叫做它的對稱點。七年級有沒有教過這個？

79. 學生：有。

80. 老師：它只講對稱軸，有講對稱點嗎？

81. 學生：有。

82. 老師：有喔！好，如果我們了解這個概念之後，我們就慢慢去思考，哪些是對稱的圖形？看了就很熟悉了，對不對？有沒有誰願意來回答？我看這個志豪，這個很簡單！來，我們問一下，會怕嗎？對啊！來，站起來，講錯沒有關係，我們先給他掌聲鼓勵一下！來，你來判斷看看喔！我問喔！這個算不算是對稱圖形？（見圖十六）

圖十六



83. 學生：不算。

84. 老師：不算，好，講個理由。

85. 學生：因為對摺後不能重疊。

86. 老師：就是說，你找不到圖形的兩邊摺起來可以完全重疊的那條線？

87. 學生：對。

88. 老師：就是你找不到那條對稱軸。這樣大家可以接受嗎？

89. 學生：可以。

90. 老師：他講的是這個意思嗎？

91. 學生：是，對。

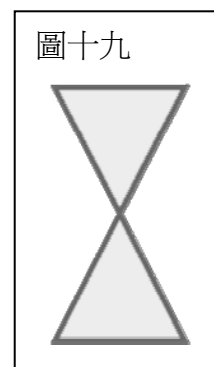
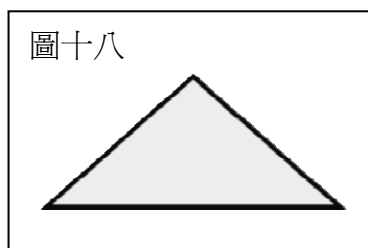
92. 老師：是嘛！很好！第二個，這個（見圖十七）是不是線對稱的圖形？

圖十七



93. 學生：是。

94. 老師：是，確定哦！那你找出它的對稱軸在哪裡？
95. 學生：...。
96. 老師：有幾條？
97. 學生：兩條。
98. 老師：兩條？你確定？
99. 學生：對。
100. 老師：哪兩條？長在什麼地方？
101. 學生：...。
102. 老師：他說一條是在這邊嘛！這個很像一個鴨蛋，對不對？
103. 學生：對啊！
104. 老師：還是雞蛋？還是鴛鴦蛋？我也不知道喔！你從這裡畫下去，可以上下對摺。
。如果你從中間畫下去，你可以左右對摺。換句話說，這個圖形的對稱軸有幾條？
105. 學生：兩條。
106. 老師：兩條喔！有沒有問題？好，再來這個。這個算是一個等腰三角形，它算不算一個線對稱圖形？（見圖十八）
107. 學生：算。
108. 老師：算，對稱軸在哪裡？
109. 學生：...。
110. 老師：中間那一條？有沒有問題？
111. 學生：沒有。
112. 老師：好，請坐！
113. 老師：再來，雨璇來，問一下好了。你不要緊張啦！來，我問你一個就好。這一



個（見圖十九）算不算對稱圖形？可不可以找到某一條線把它對摺，然後使得圖形完全重疊？

114. 雨璇：中間。

115. 老師：中間？你的中間是指這樣子的（直的），還是這樣子的（橫的）中間？

116. 雨璇：...。

117. 老師：直的？ok，好像超人。你意思是說，從這裡畫下去，來，看一下這邊沒關係。你的意思是說從這裡畫下去，然後它可以左右兩邊完全的疊合。同學同意嗎？

118. 學生：同意。

119. 老師：同意。還有沒有別的方法？這一組有人要救你的命。

120. 學生：水平。

121. 老師：水平從這裡嗎？或什麼地方？

122. 學生：中間。

123. 老師：中間這個交點。你看這樣可以上下對摺吧！這個有沒有問題？

124. 學生：沒有。

125. 老師：沒有喔！你也不錯！來，請坐，謝謝！再來，這個圖算菱形吧！我本來的意思是要做菱形，這樣看得出來是菱形嗎？（見圖二十）

126. 學生：可以。

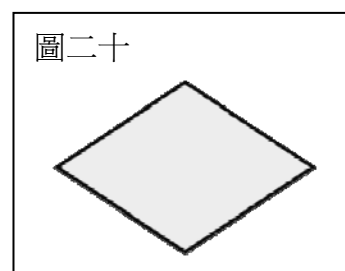
127. 老師：像不像？

128. 學生：像。

129. 老師：像。那它算是對稱嗎？

130. 學生：算。

131. 老師：算。這個有沒有問題？



132. 學生：沒有。

133. 老師：不用一個一個講啦！那這個（見圖二十一）算不算？

134. 學生：不算。

135. 老師：不算。那這個咧？（見圖二十二）

136. 學生：不算。

137. 老師：不算。麥當勞是不是？（見圖二十三）

138. 學生：是，算。

139. 老師：是。那對稱軸在哪裡？

140. 學生：中間。

141. 老師：你看你們一天到晚走在路上看到麥當勞，就對它有特別的感情，說：「老師說它是線對稱的」。這有沒有問題？

142. 學生：沒有。

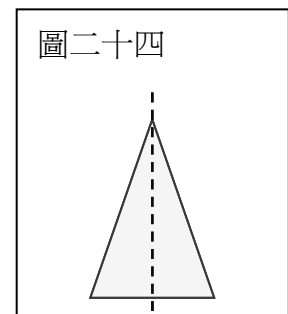
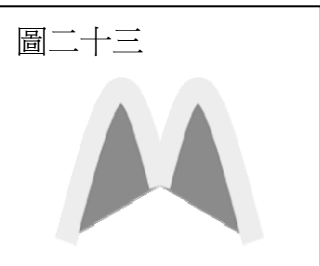
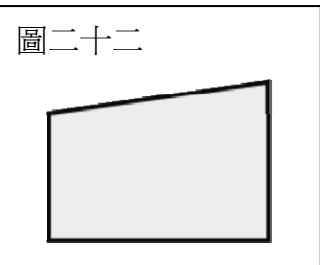
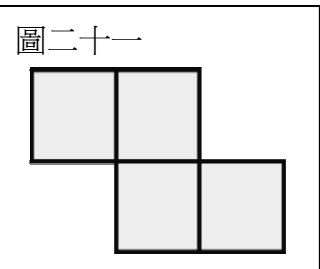
143. 老師：沒有喔！那同樣的問題，就是我們剛剛講的，想辦法畫出它的對稱軸。其實我本來的想法是說，我們把這個白板拉上去，直接就在黑板上畫出它的對稱軸。我本來是想這樣，只是可能效果會有一點點誤差，那我們今天就先試試看好了。彥儀，你要不要告訴我們對稱軸在哪裡？不錯哦！要不要上來比？試試看好了。來，掌聲鼓勵一下！來來來，你可以站我這邊。

144. 彥儀：等腰三角形嗎？（見圖二十四）

145. 老師：對。

146. 彥儀：這邊。

147. 老師：你比一下。這一條線是它的對稱軸（如圖上標示），



她講的對不對？

148. 學生：對。

149. 老師：對嘛！所以這個沒有問題。那第二個圖形。（見圖二十五）

150. 學生：有兩種。

151. 老師：有兩種，這個，這條（如圖二十五）。她講的對不對？

152. 學生：對。

153. 老師：對喔！好，不錯，謝謝！這個難度比較低喔！比較沒鼓勵。我是說待會兒比較難的，我今天有準備一下。因為上次吃你們的巧克力嘛！誰提供的？那個是蠻奇怪的巧克力，有沒有？今天回饋一下，ok！這沒有問題喔？

154. 學生：沒有。

155. 老師：來，底下難度比較高了。你可能要去思考看看哦！因為所謂難度高不是它做不到，而是你要回答我有幾條對稱軸。哎喲！有人會耶！來，謝秉宸，來，你說！講一個就好了，好不好？這是什麼形？（見圖二十六）

156. 秉宸：圓形。

157. 老師：圓形。它有幾條對稱軸？

158. 秉宸：很多條。

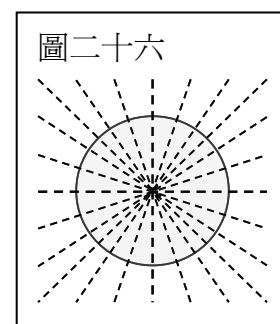
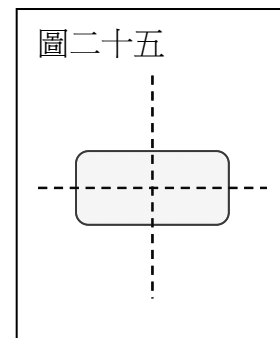
159. 老師：很多條？很多是多少？

160. 秉宸：無限多。

161. 老師：秉宸不錯耶！他跟我說他今天不講話，他今天已經講了，受不了了。好，為什麼？

162. 秉宸：因為它是圓形。因為它直徑有無限多條，直徑都是它的對稱軸。

163. 老師：聽得懂嗎？



164. 學生：聽得懂。
165. 老師：講得很好，對不對？
166. 學生：對。
167. 老師：對。很好，來，賞你一顆啦！好，換句話說，你會發現圓，我畫這個花很多時間哦！它自己跑這樣。畫完了嗎？
168. 學生：還沒。
169. 老師：還沒。但只是讓你去了解，它的對稱軸有多少條？
170. 學生：無限。
171. 老師：無限多。他剛其實提到一個重點，它既然是一個圓，構成一個圓有兩個比較重要的東西！一個是什麼？
172. 學生：圓心。
173. 老師：圓心。另外一個呢？
174. 學生：半徑。
175. 老師：講「半徑」，好，我接受。講「直徑」，我也接受。因為直徑的一半就是？
176. 學生：半徑。
177. 老師：半徑。換句話說，你只要有一個點跟一個固定的長度，就可以畫一個圓。既然是可以畫出圓的話，換句話說，以它任何一條直徑為它的一個軸，摺出來，都是叫做什麼圓？
178. 學生：半圓。
179. 老師：半圓。所以圓的對稱軸有多少條？
180. 學生：無限多。
181. 老師：無限多。這個有沒有問題？
182. 學生：沒有。

183. 老師：第二個是什麼形？

184. 學生：正方形。

185. 老師：來，想想看哦！正方形的對稱軸有幾條？來，若麟來！

186. 若麟：四條。

187. 老師：四條。哪四條？

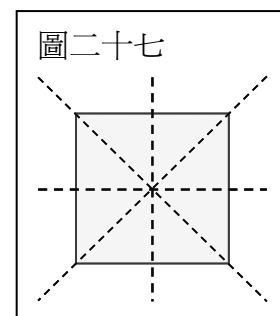
188. 若麟：這一條、這一條、這一條、這一條。（見圖二十七）

189. 老師：聽得懂嗎？

190. 學生：聽得懂。

191. 老師：他講對了沒？

192. 學生：講對了。

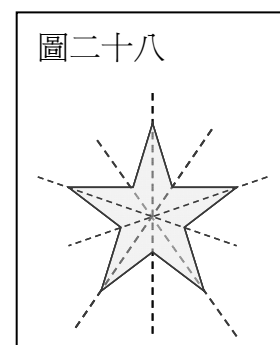


193. 老師：講對了。ok，來！這蠻簡單的，不客氣！我現在可能要提醒各位，你要不要去思考一個問題？這是正四邊形，它的對稱軸一、二、三、四，四條。

我的意思是，你可以試試看思考一個問題，就是正多邊形的對稱軸跟它的邊數，到底有沒有關係？你可以去思考看看，我待會兒會呈現另外一種方式去思考看看。譬如說，你今天去考慮一個正六邊形或一個正八邊形，它的對稱軸到底有幾條？這是我拋出的問題，你不一定要今天回答我，了解嗎？不是說今天一定要回答我，你下次再回答我也沒有關係。譬如說，像這個在畢達哥拉斯時代，你把它畫一畫，其實有點像五角星形，我們上次在上視覺藝術，不是有講到黃金比例跟黃金分割嗎？

跟它是有點相關。這是我故意畫出來的一個軸，那你

會發現說，有人告訴我，像我昨天給我兒子看喔！他就不會跟我說是五角星形，他給我的第一個答案，是你們昨天吃的水果？（見圖二十八）



194. 學生：楊桃。
195. 老師：像不像？
196. 學生：像。
197. 老師：然後他就說：「爸爸，你畫一個楊桃幹什麼？」，我就問他說：「那有沒有對稱軸？」你就想想看喔！因為，你看，如果你從這裡畫，它有沒有對稱？
198. 學生：有。
199. 老師：算不算一個對稱軸？算，對不對？那還有沒有別的？
200. 學生：有。
201. 老師：那這個當成五角星形。事實上，你把這五角星形，我抓點的話，把它畫出來，幾邊形？
202. 學生：正五邊形。
203. 老師：正五邊形。有多少個對稱軸？
204. 學生：五個。
205. 老師：你確定嗎？
206. 學生：確定。
207. 老師：確定？
208. 學生：確定。
209. 老師：真的？
210. 學生：真的。
211. 老師：好，今天怎麼表現這麼好？太可怕了！那你現在想想看喔！我現在畫了一條，對不對？其他四條在哪裡？
212. 學生：...。
213. 老師：來，有沒有找到規律性？誰能夠告訴我？來，尚寧來。

214. 尚寧：像它這個點對到這邊，它這就是一條。所以，它這個點對到這邊，它也有一條。然後這邊對到這邊，這又有一條。這條、這條。

215. 老師：來，沒關係。他講的對嗎？

216. 學生：對。

217. 老師：ok，謝謝！等我一下哦！自己拿吧！不用客氣！

218. 尚寧：可以拿兩個嗎？

219. 老師：可以啊！你先要我預支給你沒問題，那待會兒還要回答一題啊！這個有沒有問題？

220. 學生：沒有。

221. 老師：現在我們把它畫出來。五條嘛！那這是幾邊形？（見圖二十九）

222. 學生：八邊形。

223. 老師：幾邊形？

224. 學生：八邊形。

225. 老師：八邊形。那你看，我現在已經把它畫出了幾條像對稱軸的東西，對不對？那我就問啊！它有幾條？來，秉宸，你認為有 16 條。來，怎麼看？

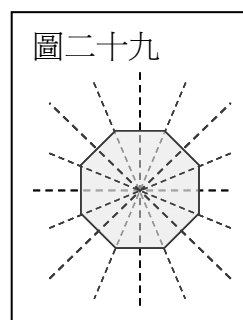
226. 秉宸：就是它那個邊可以變成兩半，然後畫下來。取中點跟對邊的中點一條，再乘以二。

227. 老師：你的意思，譬如說，這個是中點，然後跟對邊的中點一條。然後呢？

228. 秉宸：那總共有 8 個邊，好像 8 個。

229. 老師：來，你想清楚，你再告訴我們一次，你想清楚。再給他一次機會，沒有關係。

230. 秉宸：應該有 8 條啦！



231. 老師：你剛剛的答案是 16 個，那現在認為是有 8 個，你等於做了修正，對不對？
232. 秉宸：對。
233. 老師：那你用什麼方式去想出來？
234. 秉宸：因為有 8 個邊，因為邊取中點，然後跟對面的邊連成一條線，然後所以除以 2，因為要有兩條線，兩點可以連成一條線，所以要除以 2，把它除於 2 等於 4。然後還有頂點的部分，可以跟對邊的頂點連成一條線，所以 8 個頂點除以 2 等於 4，然後 4 加 4 等於 8。
235. 老師：聽得懂嗎？
236. 學生：聽得懂。
237. 老師：確定？來，聽懂的舉手。好，放下。有沒有要補充？還是你覺得他講的不夠清楚。俊宏，你會覺得他講得不太好，你講得比較好，有沒有？你說，我是大師，他不是，會不會有這種想法？你覺得有 8 條，對不對？你能不能上來跟同學說那 8 條長什麼樣子？ok，那你可以站對面，來！這枝給你，沒有問題。
238. 俊宏：...。
239. 學生：看不到。
240. 俊宏：就是說，畫這三條線...。
241. 學生：四條。
242. 俊宏：四條，一、二、三、四，然後還有一、二、三、四，所以總共是八條。
243. 老師：這個有沒有問題？
244. 學生：沒有。
245. 老師：他其實基本上講得不錯！我覺得他比較好的地方，是他已經把它自動分成兩類。各位有沒有發現哪兩類？一個是從頂點的角度去看，來，請坐。我

不曉得，我嘗試幫他做解釋啦！因為他剛剛解釋，我不曉得同學們是不是掌握得很清楚？基本上它是一個八邊形嘛！決定八邊形有兩個角度去看，一個是它的邊長部分，他已經抓到這個部分。第一個，我抓到這個物體的一個結構，八邊形，所以它有八個邊嘛！八個邊長的話，反正這個一定有一個對邊嘛！這邊也一定有一個對邊，這邊也有一個對邊。換句話說，八是兩個、兩個湊成一對，總共就會有四對，四對的話，就可以畫出四條，到這裡有沒有問題？

246. 學生：沒有。

247. 老師：沒有問題。第二個，他抓到第二個結構，八邊形從不同角度來看，我叫八個頂點，一、二、三、四、五、六、七、八，八個頂點的話，我只要是點跟點之間的連線，比方說，這個點跟這個點連起來，那它構成的就是一個對稱軸。那我們可以看一看哦！這樣是不是總共有八條，所以他談的是正確的。這樣是不是對稱？

248. 學生：是。

249. 老師：在哪裡？

250. 學生：在...。

251. 老師：有兩個，對不對？我這邊舉這個例子，是要告訴各位說，各位想想看，英文字母有沒有很多對稱的字？

252. 學生：有。

253. 老師：隨便舉三個。

254. 學生：A、B、C、E、O。

255. 老師：剛有人講O，O是一定對稱的嘛！有人講豬（D），豬（D）算不算？

256. 學生：（有人說）算；（有人說）不算。

257. 老師：有人點頭，有人搖頭，算不算？
258. 學生：算。
259. 老師：算。所以你看，其實英文字母對稱的字很多，最後三個字你猜猜看嘛！前面 A、B、C、豬（D）都對稱嘛！那 x 對不對稱？
260. 學生：對稱。
261. 老師：y 呢？
262. 學生：對稱。
263. 老師：我說 y 大寫，印刷體大寫。
264. 學生：對稱。
265. 老師：對稱嘛！那 z？
266. 學生：...。
267. 老師：z 不是線對稱，z 我們來講的是？
268. 學生：點對稱。
269. 老師：點對稱喔！這將來會談到。那「中山」？
270. 學生：有。
271. 老師：你看，中山取得好耶！你看到沒有？我們都取對稱的字啊！我問一下，你的名字的字裡面有對稱的字嗎？有，沒有。來！陳翰霖的「霖」有沒有對稱？
272. 學生：有。
273. 老師：有。來，佳靜咧？
274. 學生：有。
275. 老師：雙木林有沒有對稱？
276. 學生：有。

277. 學生：黃。
278. 老師：「黃」有沒有對稱？
279. 學生：有。
280. 老師：「黃」有沒有對稱？
281. 學生：有，黃有。黃有嘛！
282. 學生：尚。
283. 老師：吳尚寧的「尚」？
284. 學生：（有人說）有；（有人說）沒有。有啦！
285. 老師：所以，發現有些人的名字本身也是對稱的字，你看中山的「中」，有兩條對稱軸；「山」呢？
286. 學生：一條。
287. 老師：一條而已。所以，第一個大概從這個方式來處理。
288. 老師：今天我要找出一個坐標系，所謂平面坐標的概念來看對稱。我剛剛講說構成的要素有兩個，一個是邊，一個是抓它的點，我待會兒會呈現一些例子，你們會看出來，其實抓點有時候比抓邊還快，它的構成搞不好只有三點，你只要抓到那三個點就完成了。在整個直角坐標平面裡頭，因為我們之前講過數線，構成數線的要素，第一個就是要有原點，第二個是要有它的方向，有箭號的部分是代表正向，還有一個是單位長，譬如說，這個單位長叫 1，有了 1 之後，我只要取相同的單位長，2 就出來，再取同單位，3 就出來，一直往右邊是正的，往原點的左邊是負的。這是單一的數線的部分，可是，如果我們現在在垂直的部分再畫一條線，一定要有箭頭，因為箭頭代表的是正向。在原點之下，它代表的就是負的。所以，同樣的道理，你在這邊一樣可以標出它的位置，但這個部分叫：-1、-2、-3。

289. 老師：這個軸通常我們習慣上叫「 x 軸」。另外一個軸我們習慣上給它的名字叫做「 y 軸」。在原點的上方，正向嘛！1、2、3、4、5。
290. 老師：那在原點的下方，它是負的，那就是-1、-2、-3、-4、-5。我的意思就是說，今天如果我們要去找到一個點的位子，去表示它，通常那個部分，跟我們一年級所學的一個符號，就叫做「最大公因數」的符號很像，但它事實上是代表一個位子，那個位子我們把它稱做「坐標」。舉個例子來講，你可以看地圖，你要找一個地方，很難找，可是地圖左、右兩軸事實上有分，比如說這邊分 A、B、C，這邊分 1、2、3，有沒有？A1 再過來，在 A1 區的是有哪些？譬如說，在 C5 區又是哪些東西。所以，舉個例子來講，比方說，我今天一個點的位子假設是在這裡，我們習慣上怎麼去表達它？譬如說這個位子，我假設就叫它「A」好了，那我們會說 A 的 x 坐標對過來是多少？
291. 學生：2。
292. 老師：2。那它的 y 坐標：1、2、3。所以這個 A 的坐標表示法，第一個代表的是 x 的坐標，第二個代表的是 y 的坐標。為什麼要這樣講？因為為了要溝通方便，如果全世界都講 (x, y) ，而你跟人家講的是 (y, x) ，結果人家講的你聽不懂，你說的人家也聽不懂，就會找出不同的位子。譬如說，現在很流行導彈，對不對？你瞄準一個 (2,3) 跟一個 (3,2)，打出來的位置不一樣？
293. 學生：不一樣。
294. 老師：不一樣。你可能本來要打美國，不小心打到哪裡去，我也不曉得。所以，你看，這叫 2，這叫做 3，這就代表 A 點的位置的表示法。就是一種溝通，否則你可以用別的方式做表示，我都沒有意見，可是，它有個前提，就是

你講的別人要聽得懂，而他也可以透過你講的東西去作你的回應，這樣了解意思嗎？所以，這大概是我們待會兒呈現主題的一個方式。如果你了解這個是一個坐標的概念，你就可以慢慢學習我們在學習單裡面所要學到的東西。譬如說，它不是有講到「對稱點」嗎？出來沒？很擔心耶！出不來就慘了。出來了哦！一般來講，像資訊融入，它必須要有很多的條件，如：硬體設備的完善，像我現在這種電腦最怕沒電，沒電那你就不用玩了，什麼都玩不起來。像這個圖形的意思是說，有沒有人直接來處理的？因為流暢的關係，我這邊很簡單找，彥儀，你要不要上來簡單把它畫一下？

295. 彥儀：直接畫嗎？

296. 老師：對啊！直接畫。這個很簡單啊！看得清楚這個圖形嗎？

297. 學生：看得到。

298. 老師：能不能把它的對稱圖形畫出來？

299. 彥儀：可以啊！

300. 老師：可以，來，請！這簡單吧！你要告訴我你怎麼找的哦！這時候你要標出那個位置，對不對？要知道要標在哪裡。第一個，你講話的時候，面對大家，這樣才看得到。請動作。來。

301. 彥儀：先畫？

302. 老師：來，先畫。不要自己把自己擋住就看不到了。ok，再側身一點，否則那邊光源，自己把自己擋住了，來，沒關係，用力過猛，對不對？

303. 彥儀：好了。

304. 老師：ok，你要不要跟我講，你為什麼要這樣找？你找的是邊，還是找點？

305. 彥儀：點。

306. 老師：點。怎麼找的？來，這枝借你。你可以像老師這樣側著面對大家，然後比

著這邊就可以說了。它的對稱點在哪裡？

307. 彥儀：這裡。這裡對過來，把點找出來之後，連起來就是它的對稱圖形。

308. 老師：把點找出來之後，連起來就是它的對稱圖形嘛！你只要找到點之後，邊能不能找到？

309. 彥儀：可以。

310. 老師：直接就出來了。所以，有時候找點比找邊來得快，而且快很多，這樣清楚嗎？

311. 學生：清楚。

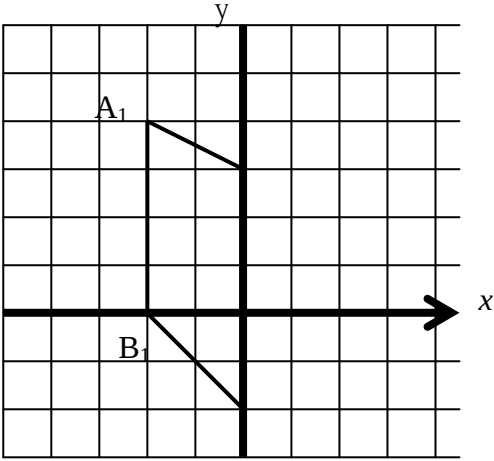
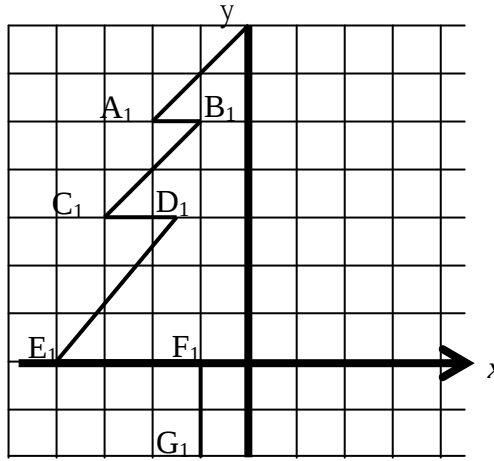
312. 老師：好，謝謝！要不要吃一個？好，來。

313. 學生：謝謝！

314. 老師：不客氣！ok，你看她畫出來跟我們講的有沒有一樣？有沒有完全重疊？這是一個很簡單的問題。這部分我希望能夠導進來是說，如果以紅線為對稱軸，畫出線對稱圖形，我們就可以開始把坐標的概念導進來囉！這一條就是我剛講的什麼軸？y 軸。這條虛線叫什麼軸？x 軸。你就可以看你學習單的部分了。(見 P.34 學習單(一) 圖(一))我第一個，這點叫 A_1 ，那 A_1 的坐標應該怎麼定？可以看一下黑板，然後等一下就可以開始寫。你看哦！ A_1 在這裡，它是在原點 x 軸的左邊嘛！所以，這一格叫-1，這一格叫-2，所以 A_1 對過來的 x 是不是叫-2？那它的 y 呢？1、2、3、4，到這裡對過來，所以， A_1 點的坐標代表多少？我可不可以直接寫在上面？在 x 兩個單位，所以，叫-2。那它的 y，1、2、3、4，所以，這點叫 4，那 A_1 點的坐標叫 (-2，4)，對不對？它的對稱點呢？剛剛彥儀已經把它寫在這裡了，相對應嘛！這點叫 A_1 ，我把這個點稱為 A_2 好了，那它的坐標叫做什麼？有沒有人可以告訴我？洛麟。這應該很簡單，來，看大家，然後講一講。

315. 洛麟：1、2、3、4...

316. 老師：聲音大一點。好，這樣有沒有問題？好，請回座。同樣的道理， A_2 點你可以找出來。來， B_1 點的坐標，歆如。這個有點難度，你站在位子講，聲音儘量放大，不用怕。 B_1 點的坐標，你看它的 x 是多少？

學習單（一）	班級： 座號： 姓名：	
2. 如下圖（一），以 y 軸為對稱軸，依據下列提示作答： A_1 的對稱點是 A_2，如果 A_1 的坐標是 $(-2, 4)$，那麼 A_2 的坐標是？（<u> </u>，<u> </u>） B_1 的對稱點是 B_2，如果 B_1 的坐標是 $(-2, 0)$，那麼 B_2 的坐標是？（<u> </u>，<u> </u>） 檢查看看，y 軸是不是對稱點連線 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線？是不是對稱點連線 $\overline{B_1B_2}$ 的中垂線？ 完成圖（一）的線對稱圖形。  圖（一）  圖（二）		

317. 歆如：...。

318. 老師：大聲，可以嗎？

319. 歆如：-2。

320. 老師：好，-2。ok！那它的 y 在哪裡？

321. 歆如：0。

322. 老師：這個很厲害哦！第一次教就會。0 嘛！這裡才 1、2、3、4，那這一點對過

來是不是就叫 0？所以，在 x 軸上的點坐標有一個很重要的特徵，這叫 x 軸嘛！對不對？ x 軸上的點它的 y 坐標一定是多少？

323. 學生：0。

324. 老師：0。這個可以抓出來。那它的對稱點叫 B_2 ，對不對？來，看一下，那 B_2 的坐標要叫多少？

325. 歆如：2。

326. 老師：2。然後呢？

327. 歆如：0。

328. 老師：0，請坐，謝謝！有沒有發現一些什麼問題？你看哦！

329. 學生：負號。

330. 老師：很快耶！它的差異在哪裡？

331. 學生：負號。

332. 老師：它的 y 會怎樣？它的 y 會長得一樣，它的 x 只會差一個...？

333. 學生：負號。

334. 老師：負號。差一個負號，叫做什麼？

335. 學生：相反數。

336. 老師：相反數嘛！所以，你看到沒有？其實對稱很好抓，你只要以 y 軸為對稱軸的圖形，它的 x 坐標就只差一個負號，它的 y 坐標一定會長一樣。你既然要去找它的對稱圖形，其實就很方便地可以去找出來。這樣有沒有問題？可以哦！

【第二節】

337. 老師：第二部分就是聖誕樹(見 P36.學習單(一) 圖(二))，我想這樣看會比較清楚，我把黑板擦一下。一般我們找對稱，同學一樣把它對摺，找它的對稱點，

就可以把它畫出來。找一個人好了。

338. 學生：小老師。

339. 老師：小老師喔？可以啊！小老師，今天坐哪裡？坐在後面，來，上來。很好玩喔！把它完成，會不會？第一個你可以用找點的方式，你也可以用找邊的方式，那先找它的對稱點。ok，好，再來。我知道你的意思了，幫你服務一下，不收小費的。好，完成了，對不對？

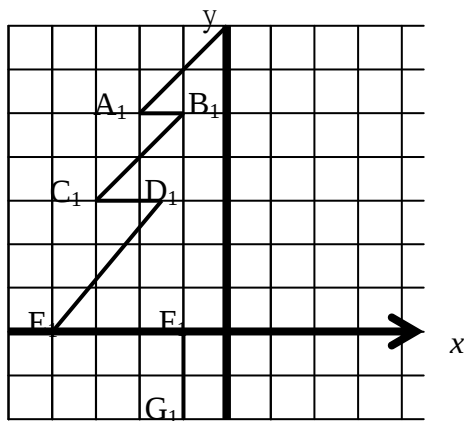
340. 學生：對。

341. 老師：你們做出來有沒有跟她一樣？

342. 學生：一樣。

學習單 (一)

圖 (二)



2.如上圖（二），以 y 軸為對稱軸，依據下列提示作答：

A_1 的對稱點是 A_2 ，如果 A_1 的坐標是 $(-2, 5)$ ，那麼 A_2 的坐標是？（ ， ）

C_1 的對稱點是 C_2 ，如果 C_1 的坐標是 $(-3, 3)$ ，那麼 C_2 的坐標是？（ ， ）

E_1 的對稱點是 E_2 ，如果 E_1 的坐標是 $(-4, 0)$ ，那麼 E_2 的坐標是？（ ， ）

檢查看看，y 軸是不是對稱點連線的中垂線？

由這兩個例子，你觀察到對稱軸與對稱點連線有什麼關係？

所以若要畫出 線對稱的圖形，你可以怎麼作？

完成圖二的線對稱圖形。

343. 老師：你們在每個學習單上面是不是都可以畫出相對應的圖形？既然是我的小老

師，我就問她多一點。有沒有跟小老師畫的一模一樣？有嘛！完全都重疊了。第二個，如果你用坐標的方式去處理它的話，我就很想問， A_1 的坐標是多少？來。我寫 A_1 好了，你負責寫 A_2 ，這樣分開寫會比較快。你要用什麼顏色？

344. 學生：紅色。

345. 老師：不要啦！黃的好了，比較清楚。好，來。各位，你們看一下哦！ A_1 的坐標在這邊，你看看它 x 對過來是多少？如果你把這條線當成 y 軸的話，幾個單位？-1、-2，是不是在這裡？往上，你看！1、2、3、4、5！有沒有問題？

346. 學生：沒有。

347. 老師：所以，你看， A_1 點我可不可以寫做 $(-2, 5)$ ？你想想看，你在 A_2 找出對應點的坐標，寫在上面。看得清楚嗎？

348. 學生：看得清楚。

349. 老師：她寫對了沒？

350. 學生：對。

351. 老師：對喔！再來， B_1 在這裡，我 B_1 的坐標是多少？那我就算啊！你看，從原點算過來，在這裡，這裡是多少？-1 嘛！這裡 1、2、3、4、5。所以，你看， B_1 點的坐標 $(-1, 5)$ 。那你就可以對應出來 B_2 點的坐標了，就可以把它寫進去了。你看她後來就寫的很快。我後來是不是找到一個規律性？只要會用，是不是就很快寫出來？好，譬如說 C ， C_1 點的對應點是 C_2 。我 C_1 點在這裡，你看，-1、-2、-3，然後這裡 1、2、3，所以我的位子是 $(-3, 3)$ ，那你 C_2 的位子在什麼地方？ok，好，那我的 D_1 點在這裡，-1、-2 的中間，對不對？這叫負多少？ $-\frac{3}{2}$ ，1、2、3，所以是 $(-\frac{3}{2}, 3)$ 。那你的位子要在什麼地方？來， $(\frac{3}{2}, 3)$ ，對不對？

352. 學生：對。

353. 老師：對。那你們的呢？再來看我的 E_1 ， E_1 在這裡，-1、-2、-3、-4，(-4, 0)，跟秉宸上次問我的差一點點，他一直問我說(-4, 3) 在第幾象限？記不記得？答案不是在第幾象限，他告訴我富士山這個點在日本。好，再來， F_1 ，那你的對應點在 F_2 ，對不對？來，我的 F 在這裡，對過來是-1，1，2，所以我這個點叫(-1, 0)，那你的那個點咧？有沒有問題？

354. 學生：沒有。

355. 老師：那 G ， G_1 、 G_2 ，這邊 1，那這個點就是(-1, -2)，那看看你那邊？所以，各位可以看一下，來，辛苦了。到這裡對不對？（見圖三十）

356. 學生：對。

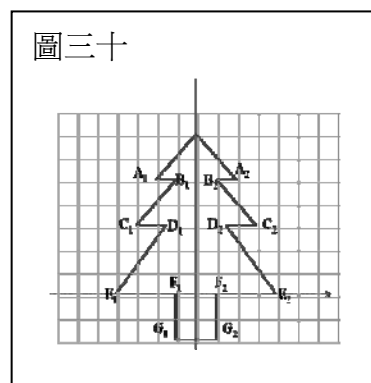
357. 老師：對。來，掌聲給她鼓勵一下！她陪我站這麼久。

你有沒有發現，它所有的對稱點跟這個軸有什麼關係？比方說 A_1 、 A_2 跟這條線，我們上次講過所謂「垂直平分線」的關係，有沒有？你看 B_1 、 B_2 有沒有？

358. 學生：有關係。

359. 老師：有關係，對不對？那 C_1 、 C_2 是不是也是有這樣的關係？看得懂嗎？了解意思嗎？其實我現在只是讓同學去了解，國小的方式是可能我只要對摺就可以畫出來，我在國中的話，可能我利用坐標平面的方式，我標出來它的位置，我就能夠找到它的關聯。這個圖來講，有人會告訴我說：「老師，這個好麻煩！」你看好多個點，對不對？那是因為這個圖形比較複雜的關係，可是，不是所有題目都這樣啊！你會看到有的題目是長這個樣子的哦！我們看看喔！我故意把這個對稱軸不是畫正正的啦！就畫斜斜的，這樣看得

圖三十



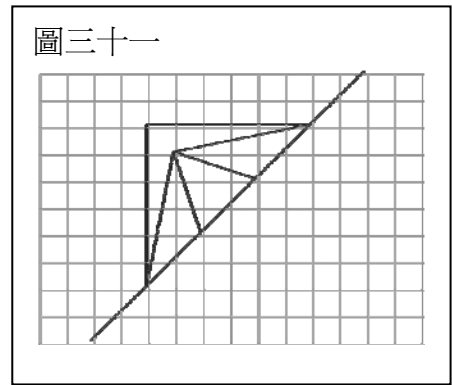
清楚嗎？(如圖三十一)

360. 學生：看不清楚，不會很清楚。

361. 老師：不會很清楚喔？

362. 學生：把布幕拉下來。

363. 老師：布幕？我又要跳一下耶！來，若麟你來幫忙，你夠高啊！



364. 老師：可以了，好，那你看這個布幕啊！它的對稱軸是怎樣？斜斜的。怎樣去找這些圖形的對稱圖形？你要透過邊，你看有多少個邊？

365. 學生：六個邊。

366. 老師：六個邊。你要畫六個邊，對不對？可是，今天如果我們從它頂點去做結構的話，抓幾個點就夠？

367. 學生：兩個。

368. 老師：抓兩個點就結束了，有沒有看到？我事實上只要抓兩個點就可以了，沒錯哦！那乃文，你不是要吃糖果？要吃糖果嗎？

369. 乃文：不要。

370. 老師：不要，是吧？它只要抓兩個點，是不是？這個點在這裡，對不對？

371. 學生：老師，你叫信文還是乃文？

372. 老師：都可以，反正兩個都很像，無所謂。

373. 學生：不像啊！

374. 老師：來，大師來！大師終於要講話了，來！你可以站那邊，或站我這裡都可以，然後對著鏡頭，聲音大聲一點，來！

375. 學生：這種可以比嗎？

376. 老師：對啊！可以比啊！就這個和這個啊！你有沒有抓到點？哪一個點？

377. 學生：這個。(見圖三十二)

378. 學生：錯了！這裡啦！

379. 學生：我剛指這個啊！(見圖三十二)

380. 老師：好，來，再來咧？

381. 學生：然後，就連過來。然後，又連過來。

382. 老師：抓一個點連兩邊嘛！對不對？好，再另

外一個點咧？

383. 學生：這個。(見圖三十二)

384. 老師：對不對？

385. 學生：對。

386. 老師：為什麼我不敢畫在布幕上？你可以以這個(圖三十二中的紅線)為軸嘛！

用中垂線的概念畫出來。你這邊畫出來是不是兩格？這條線有兩格，那條線也有兩格，點出來，那就可以畫到你想要的東西了。

387. 學生：這邊。

388. 老師：這邊。ok！再來咧？

389. 學生：然後...右，還是一樣，然後又跑到這邊來。

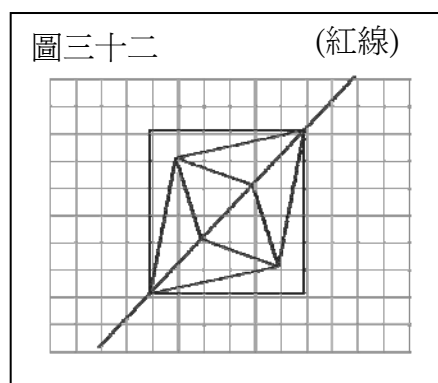
390. 老師：這樣是不是就可以把它的邊、點找出來？所以，你看！如果你是用抓點的方式，事實上它是比較快的。這個有沒有問題？

391. 學生：沒有。

392. 老師：沒有問題哦！

393. 學生：沒有。

394. 老師：所以，其實這時難度還好，我覺得底下這個是比較難的。你看哦！拿一個三角形，以這條線為對稱軸，畫出它的對稱圖形(見圖三十三)。來，在學



習單上面，馬上做，做完待會兒就可以
有人上來。

395. 學生：老師，我做完了。

396. 老師：來，你會是吧？好，來。

397. 學生：畫完了。

398. 老師：畫完啦！來，我們看一下，做對了沒？

399. 學生：做對了。

400. 老師：抓點嘛！對不對？ok。你的咧？有沒有問題？

401. 學生：老師，我上去哦！

402. 老師：好。哪一個？可以嗎？他先預約，待會兒還有另外一張，你不要緊張。你的點抓對了沒？畫直一點啦！你畫對了。來，你找對稱。隔壁跟他問問看，討論看看怎麼做，對了。你的我覺得還不錯耶！你們很容易就抓到我要給你表達的東西了，蠻快的。八個嘛！對不對？來，這邊多少人？九個。待會就比較有挑戰性了啦！要預約，沒問題哦！好，可以，沒問題。

403. 學生：老師，你座號的「座」打錯啦！

404. 老師：座號的「號」打錯喔？

405. 學生：座號的「座」啦！

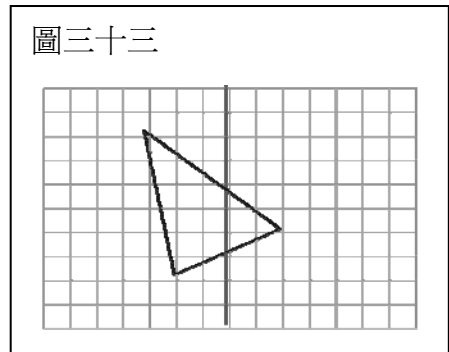
406. 老師：下次改進。還有八張，對不對？這張不用寫，這張是下次要交給我的。

407. 學生：老師，要畫圖嗎？

408. 老師：你怎麼知道我要做什麼？太厲害了！好啦！慢慢來。來，這個，誰要上？
好，來！他已經預約了，就給他上，你要告訴我們，你是怎麼畫出來的哦！

409. 學生：好！

410. 老師：可以畫在黑板上嗎？好不好？



411. 學生：好。

412. 老師：白板上我覺得不是很清楚耶！畫在黑板上比較好。這個布幕要怎麼收？我不太會。個子長得不好，所以就很難。來，你想辦法處理喔！同學，我問一下，你覺得抓點比較快，還是抓邊比較快？

413. 學生：抓點。

414. 老師：有沒有快很多？

415. 學生：有。

416. 老師：那抓點的有沒有用到所謂中垂線的特性？

417. 學生：有。

418. 老師：第一個，兩邊要不要等距離？

419. 學生：要。

420. 老師：要！那有沒有垂直平分？

421. 學生：有。

422. 老師：有。所以，其實這樣檢驗就很快。ok，

麻煩你把那個三角形畫出來。

423. 學生：可以邊講嗎？

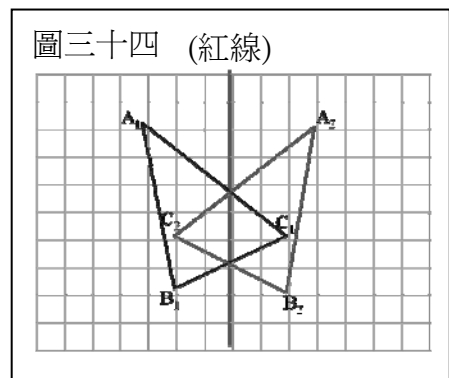
424. 老師：可以啊！可以邊講邊畫。

425. 學生：因為這邊有兩格嘛！所以就...。

426. 老師：需要我服務嗎？

427. 學生：需要。

428. 老師：ok，第一個，把它的對稱點找出來。這個點跟這個點（見圖三十四），就這條線（紅線）來講，是做這個線段（ A_1A_2 ）的一條垂直平分線，所以，第一個找到的點在這裡（ A_2 ）。第二，同樣的道理，這邊有兩格，這邊也有兩



格，找到第二個點（ B_2 ），對稱出來之後，把這條線連起來（ $\overline{A_2B_2}$ ），這樣可以嗎？

429. 學生：可以。

430. 老師：同樣的道理，這邊對應點（ C_1 ）兩格，這邊對應點（ C_2 ）也兩格，一樣把這條線（ $\overline{A_2C_2}$ ）也連起來，再把這段（ $\overline{C_2B_2}$ ）也連起來，他找出它的對稱圖形。這樣有沒有問題？

431. 學生：沒有。

432. 老師：他做對了，ok，來。他已經等很久了，好，那看你做對了沒？

433. 學生：賓果。

434. 老師：有沒有一樣？

435. 學生：有。

436. 老師：有。那就 ok 了。所以，這是第一個部分我們所講的課程。

437. 學生：沒有了。

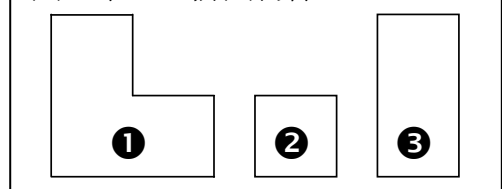
438. 老師：這是第一個課程（一）啊！

439. 學生：課程（一）？

440. 老師：還有一個課程（二），你不用緊張。好，再來，待會三角形把它擦掉就可以了。

441. 老師：好，那接下來的活動，我們拿第二個道具了，第二個道具有三個物件（拼圖物件如圖三十五），就長這樣，有沒有看到？是不是三個？麻煩一下，蒼麟，來幫我拉一下，這應該比較不用畫圖了。純粹操作就可以了。好，來，同學拼拼看喔！拼出線對稱的圖形，然後告訴我理由。很簡單啦！隨便

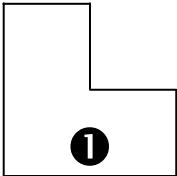
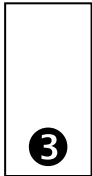
圖三十五：拼圖物件



拼都有一個啦！這樣可以啊！可是不只一種啊！對不對？有幾種？它只要這三個，一定要用三個拼出來。這是一種嘛！他的跟他的，你看她的就跟你的長不一樣，但是她的是對的還是錯的？

442. 學生：對的。

443. 老師：她可以怎麼樣？所以，你看，她的想法跟你的想法不一樣囉！你可以想想看，你這樣有沒有對稱嘛！她有她不同的想法，看到沒？她有沒有對稱？她的就是把兩個 L 拼起來。沒有強迫要邊對邊。可以，但是你要說明為什麼這樣是對稱圖形哦！第二個，我希望能夠找出來一般性喔！我們一般性看出來：「老師，這個要拼其實很簡單」的一種方法！你覺得這樣有對稱嗎？這樣的長跟這樣的長有沒有一樣長？有，你說從這裡看，對不對？不只啦！很多種。他排的你就不有了啊！有沒有看到？他這樣也是一種。你要告訴老師，對稱軸在哪裡？不然你怎麼確定它是線對稱？哪一條？就是這個 L 形的這一條中間的部分。答案肯定不只唯一，而且還有很多很多啦！至少超過十種以上。好，這個有沒有對稱？（分組操作活動，針對學生拼出各種圖形，逐一做回答。）

學習單二		班級：	坐號：	姓名：
將下列三個物件所拼出的線對稱圖形畫在下面的空格中，並寫出你認為線對稱的理由。  ①  ②  ③				

你認為線對稱的原因是因為，你覺得：

444. 學生：有。

445. 老師：有。ok，她可以解釋了，對不對？你把你拼出來認為是對稱的，就畫在你的學習單上面，待會兒下課會收回來哦！你可以找到跟人家不一樣的，都可以啊！你為什麼會覺得它是線對稱的？因為什麼？它不是有叫你寫理由嗎？對啊！在這上面，你把它畫出來，你認為它線對稱的理由是什麼？可以畫很多個，或許很多人都會拼成一個長方形嘛！那是最不用傷腦筋的拼法，可是，如果收回來四十張，有三十張都是畫長方形，你覺得咧？你就跟別人差不多囉！你能不能自己找出線對稱圖形？可以，你把它畫上去。而且畫不止一種都沒關係，因為我看秉宸那邊，他至少畫了六、七種。

446. 學生：三個。

447. 老師：你這邊不是畫四個？

448. 學生：三個。

449. 老師：喔！三個。他已經畫一、二、三、四、五、六...

450. 學生：四個。

451. 老師：四個。它這個有難度啦！我會把這個沒拼完的回家當作業，就是想想到底有多少種？

452. 學生：無限可能。

453. 老師：無限？才三個東西而已耶！就可以拼得無限喔？兩邊同時去處理，對不對

？你現在是把它兩個弄成是完全一模一樣的圖形，對不對？那你能不能待會兒想想看，它為什麼能有無限多？它的對稱軸在哪裡？因為你的對稱軸根本都沒有動過，對不對？我看到有人拼出來的是一個 T 啦！有沒有辦法拼成 T？

454. 學生：有。

455. 老師：可以嗎？

456. 學生：可以。

457. 老師：T 有對稱嗎？

458. 學生：有。

459. 老師：光是 T 的樣子就好幾種耶！怎麼樣？你們的答案比我想像的多很多。我昨天回去想了一下，發現其實答案真的太多了。有人告訴我十字架，算不算對稱？

460. 學生：算。

461. 老師：它可以拼得出十字架，對不對？那你能不能找到它的規律性？

462. 學生：應該有。

463. 老師：應該有。有人跟我說應該有耶！你有掌握到什麼？

464. 學生：完全沒有。

465. 老師：不要告訴我說沒有，這個不好啦！想想看啊！把你認為線對稱的圖形畫出來，甚至我會建議你，今天要找規律性比較簡單的方法是，假設你現在用藍色的筆畫出你認為對稱的圖形了，對不對？你用紅色的虛線或紅色的筆把它的對稱軸畫出來，我想這樣很容易去做確認說，這個是不是你所認定線對稱的圖形。這樣是一個思考的方法，最後你可以嘗試幫我們去下一個結論。像這樣拼一個物件，我們怎麼說出它是一個線對稱的圖形？你看憶

雯畫得很好哦！她呈現的狀況是不錯的，她已經把它的對稱軸也畫出來了哦！有沒有看到？她有找到它的對稱軸哦！ok。豪哥有沒有問題？

466. 豪哥：沒有。

467. 老師：沒有哦！這樣你畫出來是不是很簡單？你看，祐程把我給的物件做編號，我覺得不錯。這個可以算對稱圖形，對稱軸在哪裡？好，你就可以把它畫出來啦！你要什麼東西？擦子，我把它聽成警察局。鈺娟也畫了好幾個，不錯哦！立婷也不錯。你的對稱軸在哪裡？試試看啦！不用緊張，好不好？像這種東西，因為它只有三個物件，可是它可以拼出很多種可能。一般我們在數學上，就將這樣子的問題稱為「開放性的問題」。佳靜，你不是跟我預約了，對不對？

468. 佳靜：我不要這一題（見學習單二的 2.3.）。

學習單二

2.聽完各組發表的結果，你有發現拼出線對稱圖形的規律嗎？

3.寫出你發現的規律：

469. 老師：你不要這一題，是吧？ok！最好是能把它規律找出來，如果能夠找到規律，真的就蠻厲害的。如果有問題的時候，你做出來，但你不曉得做得對不對，你可以跟同學互相討論看看，互相討論一下，沒有關係。雖然你做的跟我做的不一樣，但是你為什麼這樣做？你的想法是什麼？翰霖，你的想法可能要跟鉅原討論一下，你能不能找到一些規律？因為他的方式跟你的方式有些地方很像，有些地方不太一樣。像他的對稱軸是長在物件的外面，你的對稱軸是長在物件的裡面，那你怎麼去做歸類？建豪，你可以做下面的圖啦！這個可以做之外，那像這種的對稱圖形，你很快就做出來了。不用太拘束，如果有問題，可以跟隔壁的、同一組的討論看看，說你想

的跟我想的到底有沒有一樣？各位如果有空，實在應該好好上來發表，因為它的東西可以很多啦！你看這個1、2、3、4、5、6、7、8、9，他已經畫九種了。翰霖喔！他很懶，他只畫一個圖，然後告訴我答案無限多。你可以嘗試再拼拼看。我覺得重點是你能不能歸納出來，說明為什麼你這樣拼就能掌握它絕對是線對稱。

470. 學生：可以畫醜一點嗎？

471. 老師：可以畫醜一點啊！什麼意思？你說把兩個部分重疊起來喔？那當然不行！你把它疊一疊，就自己跟自己一樣啦！這樣不行！

472. 學生：直接畫下來。

473. 老師：沒關係啊！你可以用其他板子把它縮小啊！像秉宸他就在旁邊用鉛筆畫，是他的草圖，那草圖很小，他草圖非常小，比我的物件二還要小耶！所以，你看他這個格子裡面就可以塞很多東西進來了。所以，剛剛我講，他畫了九種，那沒問題。俊宏有問題嗎？還可以喔！哇！這個也很多，1、2、3、4、5、6、7、8，你有沒有什麼規則去讓你自己這樣想說：「我覺得這樣就是線對稱」？

474. 學生：沒有。

475. 老師：沒有。那你能不能告訴老師，舉個例子來講，像你拼出這樣（見圖三十六），對稱軸在哪裡？

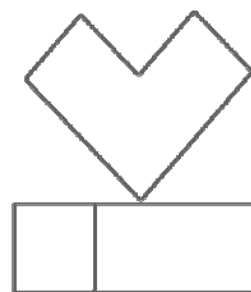
476. 學生：在這裡。

477. 老師：中間那一條線？好，那譬如說，像這個（見圖三十七），對稱軸在哪裡？

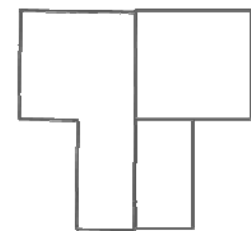
478. 學生：這邊。

479. 老師：好，像這個，對稱軸在哪裡？好，你會發現，你剛

圖三十六



圖三十七



剛跟我講的這些東西，甚至這個，我發現你有一個共通點，葉于寧，你的紅筆可以借我一下嗎？還有一枝尺，借我一下。來，你把你的對稱軸畫出來，虛線就可以了。對，好。

480. 學生：第二個？

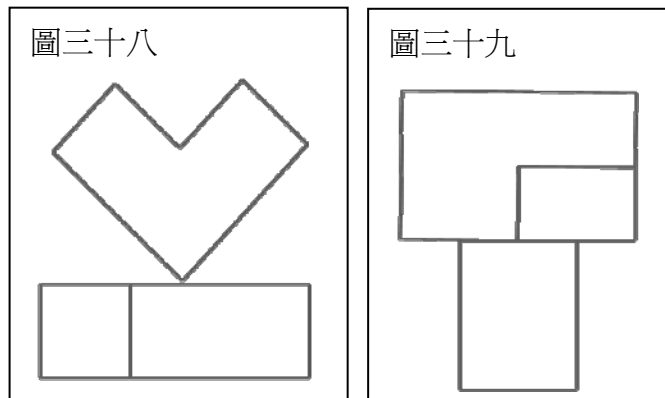
481. 老師：這樣就好，我懂你的意思。再下來，譬如說，像這個，然後這個，對稱軸在哪裡？沒關係，我大概看得懂。搞清楚哦！你想想看哦！可是，這樣有對稱嗎？你懂我的意思喔？所以，你會發現說，你現在分成兩類，我為什麼會認為跟這個同類？你會發現它的軸經過它的邊，一種對稱軸是經過它物體的（見圖三十八）。現在就要慢慢把你的結論找出來。所以，像這樣的東西，你怎麼去思考？像這樣子，這是一種，對不對（見圖三十九）？你的對稱軸在哪裡？

482. 學生：這裡。

483. 老師：有沒有經過它的邊？這個算不算邊？

484. 學生：有。

485. 老師：有。那你就經過邊了，對



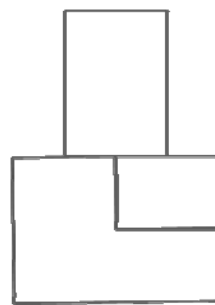
不對？你看，像這樣，對稱軸就是以邊來考慮。另外一種考量方式是，物體本身的對稱軸在哪裡？你看你的考量方式跟建豪的考量方式就不一樣。你發現他的對稱軸都是經過他物體的哪裡？這個是通過邊的，這個是經過中間的，所以他巧妙地運用兩種的關係在處理，你有沒有發現？你可以再去思考很多種東西哦！來！我看看這邊喔，華廷，有沒有想到？

486. 學生：有。

487. 老師：你有沒有找到一些什麼樣的規則？在中間。剛剛翰霖為什麼說無限多？其

實很簡單，你看喔！這樣拼出來跟這樣拼出來，這兩個圖形有沒有完全一樣？既然一樣的話，那對稱軸在這裡？對。可以。來，我看差不多哦！很多哦！來，我們看看！我問一下，拼出長方形的舉手，這最簡單嘛！最不用動腦筋，他是不是線對稱？請放下。再來，第二個，有沒有拼到 T 字形的？舉手，我看看，很多人。上凸下凸或者是講 T，無所謂。來！這個，拼成這樣（見圖四十）的有沒有？還是有耶！這叫什麼？

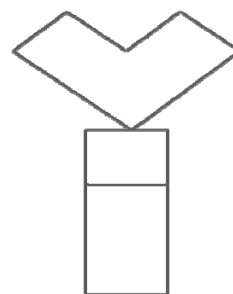
圖四十



488. 學生：中指。

489. 老師：喔！這叫中指喔！比喻的很好喔。好，手放下。這種的有沒有（見圖四十一）？這樣有沒有線對稱？

圖四十一



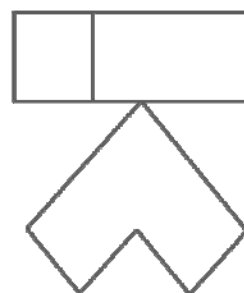
490. 學生：有。

491. 老師：它是不是圖形？可不可以呢？你認為它是不是線對稱的圖形？

492. 學生：是啊！

493. 老師：算不算？來，佳靜舉手，你有拼出這個（見圖四十二）嗎？有拼這個的舉手，來。就少一點了，對不對？好，再來，我把它稱為 VI 啦！或是 IV 的啦！VI 在羅馬字母就是六！那這 IV 就表示四！看要四還是要六的，有沒有？好，再來，有沒有這一種的？還是有耶！所以你看！佳靜很厲害哦！那 V—或者是 V 一橫，或者是倒的 V，是不是線對稱？這個，有沒有這一種的？每個人想法都不一樣，我很想問就是說，有沒有找到規律性？

圖四十二

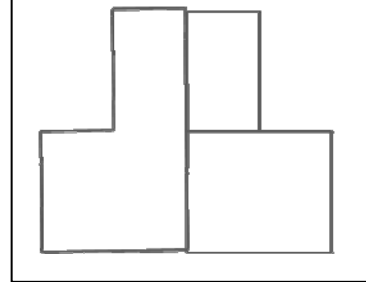


494. 學生：有。

495. 老師：像剛剛那個翰霖大師跟我們說有無限多種，你要不要跟我們解釋一下，為什麼你認為有無限多種？你把你的東西帶著，好不好？需要幫忙嗎？俊源要不要來當助手？需要幫忙嗎？好，來！大聲一點沒關係。

496. 翰霖：把它變成兩個一樣的圖形（見圖四十三），你就放這樣子，不管你怎麼變都是線對稱的啊！

圖四十三
（翰霖的作法）



497. 老師：你的對稱軸在哪裡？

498. 翰霖：中間啊！

499. 老師：需要我一隻手幫忙嗎？好，這當它的對稱軸。

500. 翰霖：還是怎麼動都是線對稱圖形啊！

501. 老師：聽懂的舉手。好，放下。我問一下喔！他其實很聰明，你知道為什麼嗎？他拼成兩個全等的東西嘛！這是個 L 嘛！對不對？一個長方形跟這個東西拼出來的叫什麼？L，兩個 L 一樣的話，我只要找到我要對稱的地方，應該都可以吧！隨便角度，同時挪就可以了嘛！這樣有多少個對稱圖形？

502. 學生：無限多。

503. 老師：無限多。那你會發現它的對稱軸是在這個物件的...？

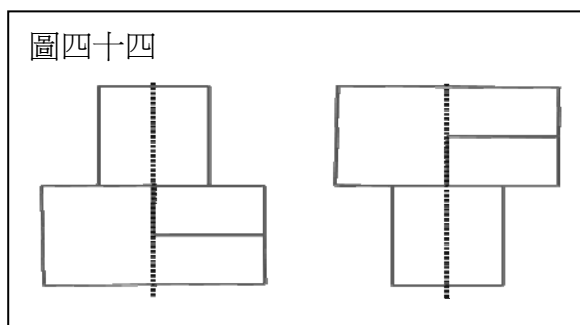
504. 學生：外面。

505. 老師：外面。ok，來，那我們現在很希望說，還要嗎？喔！要，來，謝謝！掌聲鼓勵一下。你們有沒有覺得他腦袋轉很快？

506. 學生：有。

507. 老師：很快去找到你要的東西。你看喔！很多物件的對稱軸，我們剛剛給各位看過很多物品了，對不對？它有沒有規律性？這是我們今天要討論的地方，所以，如果你找得到，我覺得今天的課程應該就差不多了。來，我們看一

下，它的軸在這裡，有沒有看到？它的軸在哪裡？是不是在虛線的位置？（見圖四十四）



508. 學生：虛線的位置。

509. 老師：在虛線的位置。有沒有看到對

稱軸的規律性？我先問一件事哦！這三個物件是不是線對稱圖形？

510. 學生：是。

511. 老師：是。那你只要把它的對稱軸拼成什麼？它的對稱軸是這一條啊！它的對稱軸是這一條，它的對稱軸是這一條，我只要把三個物件的對稱軸拼成『一條直線』，它是不是就是線對稱的圖形？懂我講的意思嗎？

512. 學生：懂。

513. 老師：如果這樣，有多少種拼法？就很多種了，對不對？不一定要這樣子拼每一個對稱軸，而且，像這個對稱軸不是只有這一條啊！它也可以長怎樣？斜的。這個可不可以轉過來？就可以轉了嘛！所以，你發現說，第一個規則我們可以慢慢去找出來，你看，對稱軸。第二種方式是，你拼成一個物件之後，這個物件的對稱軸找出來，跟它的對稱軸成一直線，是不是也是 ok 的？這個有沒有問題？所以，你看！只要對稱軸拼成一直線就可以了，這個有沒有問題？

514. 學生：沒有。

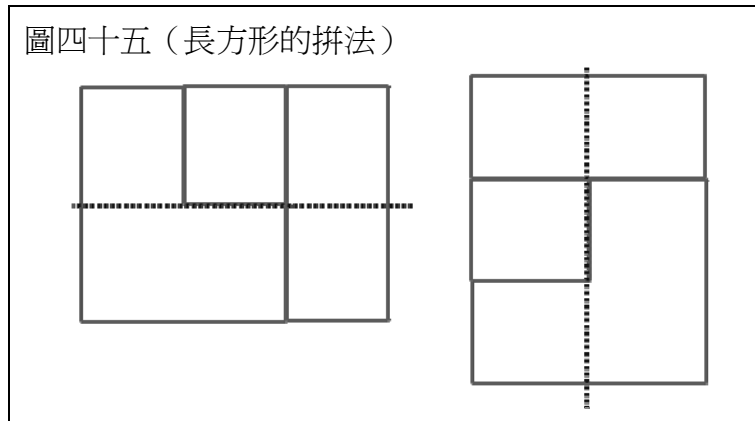
515. 老師：聽得懂喔？

516. 學生：聽得懂。

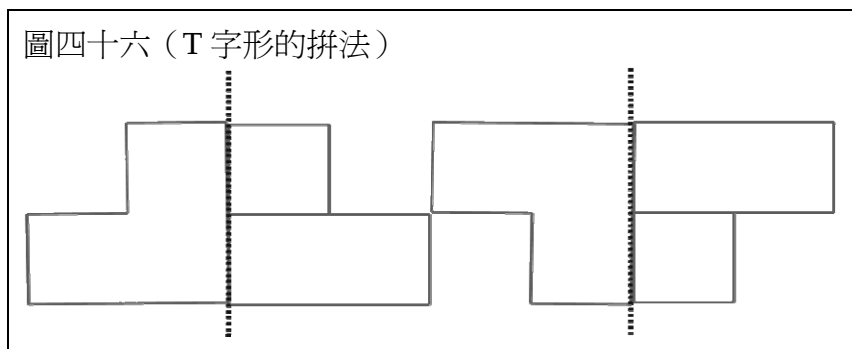
517. 老師：確定喔？

518. 學生：確定。

519. 老師：好，每個拼起來的圖形的對稱軸，像這種長方形的拼法，我覺得比較簡單，你的物件拼排完之後，你以它的邊當成你要的對稱軸。有沒有經過它的邊？（見圖四十五）



520. 學生：有。
521. 老師：有。你看哦！就像剛剛的 T 字形也一樣哦！你看，你拼成 T 字形以後，它的邊變成你的什麼？它的邊變成你的...？
522. 學生：對稱軸。（見圖四十六）

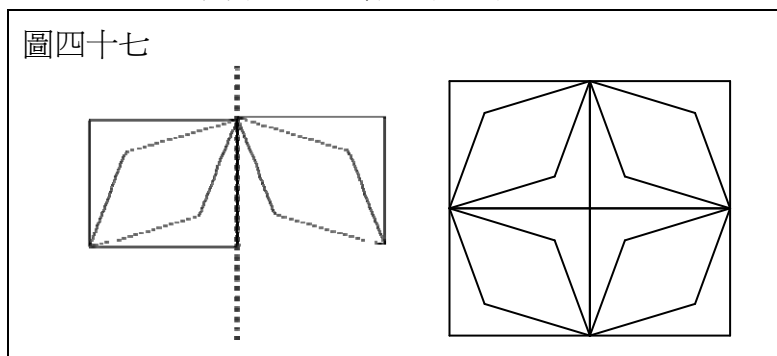


523. 老師：對稱軸。這樣有沒有規律性？所以，你要你的物件成為對稱圖形很簡單，兩個思考方法，我們把它做一個結論喔！一個方法就是說，第一個，只要你的對稱軸能夠拼成一直線就可以了。這個可以接受嗎？
524. 學生：可以。
525. 老師：很簡單，對不對？你只要拼成物件的邊變成你要的對稱軸就 ok 了。這樣懂

我講的意思嗎？

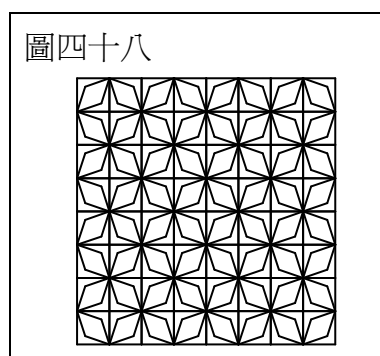
526. 學生：懂。

527. 老師：這個算是比較困難的部分，接下來我們就來看一下我們的學習單，大概要耽誤各位大約三到五分鐘吃飯的時間。待會兒還有一個問題，很簡單，你可以思考看看喔！第一個，本來的虛線在這裡嘛！（見圖四十七）那先後對稱是不是畫出來就長這樣？有沒有問題？



528. 學生：沒有。

529. 老師：沒有。那出來是不是變成這樣了，對不對？再來是向下，是不是變成這樣？我現在談的目的是什麼？各位可以看學習單上面的那一張，最後一張發的圖案，有沒有？來，就這個（見圖四十八）。本來的圖形很複雜，對不對？你把它解構出來，最基本型是什麼？



530. 學生：飛鏢。

531. 老師：飛鏢。還有沒有？我發給各位這一張，跟我黑板上的圖形有沒有關係？

532. 學生：有。

533. 老師：那回歸到最原本的圖形是什麼，就可以處理了。來，各位思考看看，我不是只要這半邊就可以了？你看哦！我只要這半邊（見圖四十九），做幾次

對稱？

534. 學生：兩次。

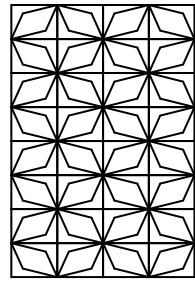
535. 老師：這裡對稱一次嘛！過來再對稱一次，這樣是不是就是你要的圖形了？注意看！找到一個最小單位，就可以找到你要的東西了。各位可以看一下！看學習單最後一張哦！你看，我之前

故意的，你看我學習單上的順序是什麼？第二張的最後：上、右、左、下，有沒有看到我的甲、乙、丙？有沒有看到？（見本頁下方學習單二）

536. 學生：有。

537. 老師：我故意上、右、左、下，可是，問一個問題喔！上、右、左、下做對稱一次，來，給你猜，會產生什麼樣子？你看，我故意寫上、右、左、下哦！我不是上、下、左、右，我也不是左、右、上、下，差別在哪裡？來，看一下黑板，很快可以處理。這第一個原始圖形，對不對？來，『上』怎麼辦？這裡翻上去就叫做『上』嘛！對不對？

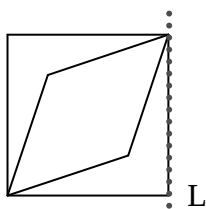
圖四十九



學習單二

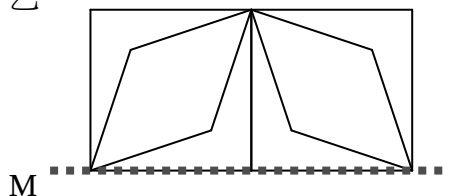
依照老師所陳述的步驟，完成下列線對稱的圖形：

甲、



以 L 為對稱軸畫出線對稱圖形。

乙、



以 M 為對稱軸畫出線對稱圖形。

將乙完成後的圖形各作上、右、左、下對稱一次，猜猜看，會變成什麼樣子？並塗上你喜歡的顏色，下次上課交回！

538. 學生：對。

539. 老師：所以，第一個，「上」，可以接受嗎？

540. 學生：可以。
541. 老師：再來，「下」是怎樣？「下」就是從這裡整個往下嘛！可以分成幾個？
542. 學生：兩個，四個。
543. 老師：到這裡有沒有問題？
544. 學生：沒有。
545. 老師：好，那什麼叫「左」？「左」是不是變成這一條？往哪邊？往這邊。來，你看看，「左」。再來咧？
546. 學生：「右」。
547. 老師：「右」。「右」是往哪邊？以這個為主，往那邊翻，長怎樣？
548. 學生：不知道。
549. 老師：跟它（學習單最後的圖形）一樣不一樣？
550. 學生：不一樣。
551. 老師：我是用上、下、左、右啊！那有人又問我：「老師，那如果是左、右、上、下呢？」你會被我的圖形給疑惑，你先從個數去思考嘛！本來幾個？
552. 學生：一樣。
553. 老師：有了，有人有意見了。來，哪一個要講？最後一個問題了。來，于寧來，你覺得圖形會長怎樣？你手上有那一張嗎？
554. 于寧：有。
555. 老師：有。來，為什麼？
556. 于寧：一樣就是以這個為中心，它說是左嘛！以這個圖形，然後向左翻過來。然後右，這兩個翻過來就變右翻嘛！然後下，由這裡往上翻，變成這一半。所以，不管怎麼樣，都是一樣的。
557. 老師：她是從圖形。那有沒有告訴我是從個數去考慮的話？原來是幾個？

558. 學生：一個。
559. 老師：一個。翻了一次變幾個？
560. 學生：兩個。
561. 老師：再翻一次變幾個？
562. 學生：四個，八個，十六個。
563. 老師：有沒有規律性？
564. 學生：有。
565. 老師：跟你上、下、左、右翻有沒有差別？
566. 學生：沒有。
567. 老師：來，我們來看一下于寧講的對不對。原始的單位在這裡嘛！好，什麼叫「左」？往這邊嘛！
568. 學生：對。
569. 老師：往這邊，來，你看，第一個，這樣算不算「左」？
570. 學生：算。
571. 老師：那「右」是什麼意思？就以這個為邊，整個翻過去，變幾個？
572. 學生：四個。
573. 老師：四個。什麼叫做「上」？把這個往上翻，變成幾個？
574. 學生：八個。
575. 老師：那什麼叫「下」？
576. 學生：往下，變十六個。
577. 老師：跟你原來的圖長得一樣不一樣？
578. 學生：一樣。
579. 老師：好，再來，猜猜看，那左、上、右、下咧？

580. 學生：一樣。

581. 老師：不跟我玩了，是吧？還是這個規律性，對不對？

582. 學生：對。

583. 老師：所以，你會發現說，第一個，找到最小單位；第二個，他有沒有找到樣式跟規律。如果有，你會找到你要的東西。否則的話，你會玩很久。你看第一個，什麼叫「左」？

584. 學生：左邊。

585. 老師：本來一個變幾個？

586. 學生：兩個。

587. 老師：一個變兩個，兩個變...？

588. 學生：四個。

589. 老師：四個。往上嘛！到這裡，對不對？這叫「上」。那「右」咧？往右邊過去，是不是長這樣？

590. 學生：是。

591. 老師：然後咧？「下」。有沒有一樣？

592. 學生：一樣。

593. 老師：有。再來咧？一個，什麼叫「上」？

594. 學生：往上。

595. 老師：再來咧？

596. 學生：往右。

597. 老師：「左」是往...？

598. 學生：左。

599. 老師：這邊。再來。

600. 學生：下。
601. 老師：下。
602. 學生：都一樣。
603. 老師：有沒有都一樣？
604. 學生：有。
605. 老師：有。來，一個作業。這個太素了，回去用你的腦筋想想看，上不同色會不會呈現不同的東西。我們上次有看 M.C. Escher 的東西，有沒有印象？
606. 學生：有。
607. 老師：換句話說，如果你今天能找到最小的單位去處理它的話，能不能抓到它的規律性？今天所用的都只有一個觀念，哪一個觀念？找到對稱軸做什麼？線對稱。所有問題就解決了，這樣有沒有問題？
608. 學生：沒有。
609. 老師：沒有問題。好，我們今天的課就上到這邊，給自己掌聲，也給辛苦的工作人員掌聲。好，班長，下課啦！

參、教學說明

一、關於我的教學活動設計

我今天拍攝的單元是有關於「線對稱」的部分，我本來預計設計這個單元是屬於七年級要用的，可是，因為我這學期上的班是八年級，所以，我把內容做了一部分的修改，根據能力指標的部分再修正，因為它算第四階段，所以，我把這個單元活動的設計分為兩節課。第一節課打算先複習有關國一「線對稱」部分的概念，讓學生們透過拼圖去了解線對稱的圖形有哪些的結構特徵，我希望再導入八年級有關於「坐標平面」的部分，讓他們去發現一個平面圖形是可以抓到它一些結構的要件的，譬如說，

你可以從它的邊去找對稱，或從它的頂點去找對稱點的坐標，把頂點的對稱坐標找出來之後，再加以連線，就可以完成所謂「線對稱」的圖形。我第一節課本來是打算讓他們透過這個觀點，再用垂直平分線的概念結合坐標平面，可以找出它對稱點的坐標，然後就可以很快完成它所謂線對稱的圖形。

第二節課我打算是反向操作，因為以往課程的安排都是圖形出來，然後讓學生檢驗它是不是線對稱的圖形。我覺得這樣子的方式太過於簡單，我就反向去思考說，我今天給你們三個物件，讓孩子們在課堂上實際去操作，看你如何拼出線對稱的圖形，而且，你必須檢驗出來，為什麼它就是線對稱的圖形。在這個部分裡，除了操作之外，我也希望孩子們能夠歸納出：你要拼出這三個物件是線對稱圖形物件的一些原則。所以，我在課堂當中，不要求學生能夠拼出所有的圖形，就如同孩子們上課所反應的，第一個，他能夠拼出線對稱的圖形，事實上是有無限多種，所以，不可能完全拼出來。但是，能夠透過這樣的活動操作設計中，讓他去了解，甚至於發現，事實上，要拼出線對稱的圖形，只要找到兩個原則就可以達成了。第一個部分就是，如果你找出來這三個物件本身就是線對稱的圖形，找到它們的對稱軸，只要把它們的對稱軸拼成一直線，不管這個圖形怎麼變，它就會是線對稱的圖形。第二個，我是希望他能夠把物件跟物件加以結合，結合之後的物件本身會形成新的對稱軸，跟剛剛的原理一樣，你只要把新的物件的對稱軸跟原來物件的對稱軸拼成一直線就成為線對稱的圖形，不然的話，就是第三種情形，就是利用他拼成的圖形的邊，利用它的邊變成我們要形成線對稱圖形的對稱軸的話，那麼這個圖形一定呈現出來的也是線對稱的圖形。這就是我有關於活動內容的設計，就是：第一，能夠了解線對稱的概念，然後結合坐標平面跟對稱點的關係，找到一個物件的對稱點，完成線對稱的圖形；第二，能夠透過線對稱圖形的操作，了解要拼成線對稱圖形的重要特徵；第三，我希望它能夠跟生活做結合。

所以，在第二堂課的最後部分才會從一個很複雜的圖形中去解構，讓他知道，生活上如此複雜而有幾何規律的圖形到底是怎麼樣產生的，最原始可能只是一個很簡單的正方形，然後抓它對角線四等分點中的兩點，裡面會形成一個所謂菱形的結構，透過左右跟上下的對稱一次，你就能夠形成一個非常具有幾何結構而且非常美麗的幾何圖形。

二、學生的反應

就學生的反應，在這兩節課的部分來講，我會覺得學生上課的反應還好，這個班事實上是我這學期才新接的班，坦白講，上這個班的時間不是很長，還不到兩個月的時間，但是，這個班的學生整個上課的氣氛相當地活潑，讓任課老師很容易將氣氛帶起來，尤其是在課程當中，很需要有他們分享、發表、表達，或是跟同學們做溝通的部分，一般的孩子也都蠻樂意接受這樣子的一種上課方式，並不會像有些的班級，你今天要叫他上來講，他還不太敢。這個部分沒有這樣的困擾，表現的方式還不錯。有時你需要他做發表，就像上課時候的反應狀況，私底下來跟我講的，就是說：「老師，我要先跟你預約，待會你要找我，否則等一下被別人講去了，我就沒有機會上來做說明。」所以這個部分是我覺得還蠻欣慰的部分。

第二個部分是，我本來預期希望他們能夠透過實際操作來拼出八種圖形，可是，有些孩子的反應很快，他並不是從實際的操作中才歸納出來說：「原來我有八種可以拼成的圖形」。他很快的，譬如說像第一節課拼的兩個 T 形，他很快就找出來：「我有兩個梯形，可是每個梯形都是四個邊。」邊跟邊要做疊合的話，他很快就發現，有兩種拼合的狀況，四二得八，他馬上就很快地發表說：「我有八種拼出來的圖形。」，這個部分的反應就是超出老師事先所預期跟規劃的部分。我本來是預計，他們可能要經過一些操作的時間，然後慢慢從歸納跟探索當中，找出原來它有八種拼出來的圖形，而且這圖形裡面可以分成兩類，一類是可以線對稱的，一類是不可以線對稱的。可是，

學生的反應很快，他直接告訴我四個邊，每個邊拼出來有兩種情形，因為可以直接拼，或一種翻轉的方式。他直接就告訴你說，四二得八，這個部分我是覺得超出我的預期，但是它是一種蠻正面、可喜的現象。

另外，我本來是預計他還需要一點思考跟探索的時間，才能夠發現上、下、左、右的順序調動，事實上不影響最後呈現的一個結果。可是，有些孩子的反應其實很快。我本來是希望能夠把「幾何」的東西跟「代數」的部分所談到「樣式跟規律」結合，讓他能夠歸納出來。譬如說，從一個最基本的單位，翻轉一次之後，一就變成二，再翻轉第二次，二就變成四，再來四變成八，然後八變成十六。我後來發現學生的反應好像不需要老師在這個部分特別慢慢去提醒他，他們很快就能夠歸納出來，它所形成的是一個所謂「等比數列」的樣式，也就是所謂的 1、2、4、8、16 的樣式，不管你是上、下、左、右的順序如何地變動，它就可以呈現出我們最後所要呈現出來的一個結果。

因為我在這學期才新接這個班，而今年我是教育部深耕種子教師的關係，減了十節課，所以教務處配了一堂「視覺藝術」的課給我。在這之前，我也事先讓學生分組上網查詢一些線對稱的作品，或是透過照相機拍了一些所謂「線對稱」的建築，孩子們呈現出很多的建築結構，讓我覺得非常棒。透過我們一些中國的古蹟，或者是中國結，或者是一般的圖騰，或者是國外的建築，比如說：像巴黎的鐵塔，或是羅浮宮、凱旋門的建築等等，我之前其實也布了一些題，讓他們了解所謂的線對稱在整個建築和生活中應用的部分。

三、檢討與反省

第三個部分我所要談的，就是有關我今天上課的一種反省。我覺得其實就事先的

準備來講，不是非常的充份。基本上，上課還要讓學生事先花很多的時間在剪所謂的拼排的道具，這是我下次做為其他單元準備、規劃的時候，可以改進的地方，事前的準備更充份的話，這部分的時間就可以省下來，讓後面的課程進行更加地順暢。有關於資訊融入的部分，我今天做了兩種方式去呈現，一種是用布幕的方式呈現，一種是把布幕拉上去，單槍投射在黑板上的方式做呈現。那麼，可能是因為實際上 power point 軟體製作底色的關係，或是因為現場環境的限制，我發現投在布幕上的時候，那個圖形還算清楚。可是當你布幕拉上去，要學生實際在黑板上操作的時候，就會呈現出一種不是很明亮或不是很顯眼的問題。當然，這是屬於資訊操作技術上的問題。跟傳統的教學做一些比較，比如說：我在第二節課的最後，呈現一個簡單的結構，經過上、下、左、右不同順序翻轉的結果，希望呈現出來的是最後相同的圖形。那麼，在一般傳統的教學現場上，你就很難去實際地操作，真的用上、下、左、右的順序去翻轉。用資訊融入在整個布幕呈現，就會發現這樣的呈現方式，第一個，非常的簡單、清楚、明瞭，學生也很快地透過你呈現的順序，你只要設定播放的程序：上、下、左、右，或是左、右、上、下，或者是上、左、下、右的步驟去呈現，他很快就可以歸納出結論來，就是 1、2、4、8、16 去布滿整個平面圖形的結果。我覺得這是資訊融入跟傳統教學比較之後，資訊融入比較佔優勢的地方。當然，這些也都是在嘗試當中，沒有一定的定論，或者是說什麼樣的方式一定會比較好。

當然，第四個我所要檢討的部分是整個上課的流程當中，我覺得一個很大的缺點，是時間並沒有掌握得非常好，這個部分是我將來在整個單元設計跟實際教學現場當中，還可以再作加強或改進的地方，可以讓整個流程更順暢，讓整個教學的重點更精準地去呈現。以上就是針對我今天所上的有關於「線對稱」的單元兩節課做一個很簡單的介紹，也做一個簡單的反省，希望在第一線教學現場的老師，如果對於我這樣子

的教學內容跟我教學的單元所呈現的方式有不同的意見或建議的話，歡迎給我一些的批評和指教，讓我能夠在整個教學的生涯規劃中，呈現一種更好、更精準的一種教學流暢度，也提升我自己一個專業的素養。另外也相當感謝教育研究院籌備處能夠讓我有這樣的一個機會，去拍攝我自己實際的教學狀況，讓我有一些檢討跟改進的空間，也非常地謝謝。今天是我做一個簡單的檢討跟反省的部分，以上是我對於整個單元結構所做的一些說明。

肆、教學後的省思

我這次教的單元是線對稱，原本是計畫在國一（七年級）教授的單元，但是開學後發現是國二（八年級）的班級，因此只好將內容加深，有幾個部分是我在教授此單元考慮的重點：

- 一、嘗試將「數與形」作連結：一般教到此單元時，大部分只是純粹的形的觀察與判別，判斷是不是線對稱圖形就結束了，我則嘗試在第一節課透過學生的操作，由形的觀察找出對稱的規律，進一步由對稱的結構找出對稱點與中垂線的關係，導入坐標平面的概念，透過坐標的操作，讓學生由對稱點的位置嘗試畫出線對稱的圖形。
- 二、反向思維「線對稱」的結構與要素：第二節課則反過來思索，讓學生自行拼出圖形，並說明如何判斷所拼出的圖形是不是線對稱圖形。一方面讓學生自由創作，培養思考與探索的能力，一方面則由發表的過程，學會用數學語言與同學溝通。最後，由日常生活中的圖形解構，找出基本的單元，並由操作嘗試將數與形連結，讓學生找出樣式與規律，發現生活中的圖形與數學的關係。
- 三、利用資訊融入數學教學：將上課所需的圖形、簡報全部鍵成檔案歸檔，利用單槍投影機與筆記型電腦投射在黑板上，當需要操作或學生說明的時候，則視適當的

時機將投影布幕拉上去，讓學生直接在黑板上作答，也算是資訊融入教學的另一種嘗試。

至於在實際教學後，針對上課的情形，提出幾點省思與建議：

- 一、事前的準備要充分：因為時間的關係，許多的拼圖物件是直到學生上課時才由學生自己剪出，耽誤不少時間；好處是透過學生自己操作可以讓學生上課更專注，但是若能事前準備好，上課的狀況會更從容。
- 二、男女學生的回答要均衡：該班學生有幾位男生的反應特佳，例如關於操作的部分，大部分的學生須透過操作才知道有八種圖形，可是有少數男生卻由數的思維直接思考： $4 \times 2 = 8$ ，總共有八種圖形，因此難免在課程中，偏重男生的回答。若能更仔細的設計，可以考慮某些題目由女生來回答，這樣可以使整個課程更均衡。
- 三、資訊融入的考量：資訊融入需要透過電腦操作來完成，因此硬體環境的限制不得不列入考慮。例如：教室的電力電壓、採光、單槍投影機的流明度、乃至於教室分組位置的安排都與課程的實施息息相關。像此次影像教學的拍攝，因為使用電力較平常多，結果造成跳電，影響上課的進行。這是要使用資訊融入教學時，必須考慮的重點。
- 四、資訊融入的方式：此次課程的實施是在一般教室進行，與在電腦教室實施的方式不同。另外，學生回答的部分特意將布幕拉起，由學生直接在黑板上作答，好處是可以節省板書的時間，但是必須注意流明度要夠，否則投射在布幕與黑板上是不同的。更重要的是，資訊融入的時機與傳統教學作比較，需有明確的融入點。例如：作圖形的上、下、左、右對稱變換，甚至改變圖形對稱順序時，資訊融入就會有比較好的切入點。

以上提供個人的經驗與意見，供大家參考，請先進賢達不吝指教。謝謝！

三角形邊長的不等關係

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級下學期

二、教 學 者：台北市瑠公國中 賴梅葵 老師

三、教學目標：

1. 能夠利用扣條操作，了解三角形三邊長「任意兩邊和大於第三邊」。
2. 藉由檢驗三線段是否構成三角形的過程中，體會只要檢查「較短兩邊和大於第三邊」。
3. 從已知兩線段中，找出可以構成三角形的第三邊，其滿足「小於兩邊和，大於兩邊差」。
4. 利用電腦 gsp.動畫操作，驗證三角形三邊不等的關係。
5. 指導學生練習，並進行隨堂測驗。

四、活動目標：

【第一節】

1. 從所給的教具（扣條）中，探索找出構成三角形三邊長的關係。
2. 從「任意兩邊和大於第三邊」的學習過程中，體會只要「較短兩邊和大於第三邊」即可。
3. 給定兩根扣條，讓學生學會尋找構成三角形的第三邊的範圍。

【第二節】

1. 配合電腦動畫，讓學生熟練列三邊不等式。
2. 給予不同類型題目的練習，加強學生概念。

五、教學概要說明：

學生在學習此單元以前，已學過不等式的運算，無理數的化簡。

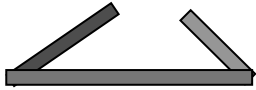
第一節課：在此單元，學生要學會三角形三邊不等關係「任意兩邊和大於第三邊」。從已知的三個線段判斷是否能夠構成三角形。若邊長是無理數，學生要懂得比較邊長大小。從檢驗三邊長的過程中，體會只要「較短兩邊和大於第三邊」即可。若給與二個邊長，其第三邊滿足「小於兩邊和，大於兩邊差」，學生必須學會列出不等式。配合電腦動畫呈現邊長不等關係，可加深學生印象。

第二節課：配合電腦動畫，加強學生第三邊的範圍，並學會列出不等式。配合課本作重點總整理，讓學生用抽象文字符號列出三邊不等式。在此節，作題目加強練習，並給予學生題目不同的變化，加深概念。在下課前 5 分鐘，作簡單的測驗以驗收成果。

六、教學活動設計：

【第一節】

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
任意兩邊和大於第三邊	1.教師複習整個章節的架構，並將已學過有關三角形的概念作一概括的描述。然後將這一節將要學習的內容作簡單的介紹。 2.問題(1)哪三種扣條可以組成三角形？原因是什麼？	教師從學生的操作過程，詢問學生是如何且為什麼知道要挑這三根？請學生發表心得。	知道如何挑出構成三角形的扣條。
較短兩邊和大於第三邊	3.兩邊和大於第三邊的直觀看法。 4.從「任意」兩邊和大於第三邊的不等式中知道有兩個不等式是多餘	- 利用扣條說明直線是最短的距離 - 教師多舉例說明，並請不同程度的學生指出哪兩個式子是多餘的。	

• 無法構成三角形的三邊長 • 布題練習	的。 5. 檢驗三線段是否構成三角形，只要檢查較短兩邊和大於第三邊。 6. 問題(2)哪三種扣條不可以組成三角形？原因是什麼？ 7. 利用電腦 gsp 檔呈現動畫，再次驗證構成三角形的條件。 8. 【練習】1. 下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的邊長？ (1) 4、6、7 (2) 3、4、7 (3) 2、4、7 9. 【練習】2. 下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的邊長。 (A) 5、6、7	• 讓學生歸納結論，並且能夠用扣條建立以下圖像：  之後可以配合課本說明。 • 教師一邊操作電腦一邊請學生回答問題。 • 教師盡量請中等或中下程度學生回答。 • 所給的三邊長用不同的元素呈現，增加題目的難度。	• 學會如何判斷三線段是否可以構成三角形，而且只要檢查較短的兩邊和大於第三邊。 • 知道較短兩邊和小於或等於第三邊，就不能構成三角形。 • 能從教師所給的三邊長，判斷是否可以構成三角形。
---	---	---	---

• a、b、c 為三邊長， $a-c < b < a+c$	(B) 10、20、30 (C) 4、5、$\sqrt{11}$ (D) $2a$、$3a$、$4a$ ($a > 0$) 10.問題(3) 已知有兩支扣條長度為 14.14、8.66，則第三支扣條可以選擇哪一種？若為整數？ 11.利用電腦 gsp 檔呈現動畫，說明第三邊是有範圍的。	•教師可以在旁邊提醒，有多少個？是否有無限多個？請學生一一寫出來。 •請學生說明如何寫出第一個及最後一個。 •讓學生體會第三邊是有範圍的，並且能夠看出是介於哪兩數之間。	•學生可以一邊寫出整數邊長，一邊驗證自己所寫的答案是否構成三角形。
--	---	---	--

【第二節】

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• a、b、c 為三邊長， $a-c < b < a+c$ • 重點總整理	1.布題，練習找第三邊範圍，利用電腦 gsp 檔呈現動畫。 2.將第三邊的範圍寫出不等式。 3.利用文字符號表示三邊不等式。	•學生可以從電腦動畫中，再次印證第三邊的範圍。 •請學生將三邊不等式利用文字符號表示，寫在講義上，並請學生看課本 p. 135。	•學生可以自行將第三邊的範圍利用不等式列出。 •請學生口頭回答。

• 評量	4.利用扣條解釋課本 p.136。 5.布題練習，題目加深變化。 【練習】3.設一個三角形的三邊長分別是 4 公分、7 公分、a 公分，若 a 是整數，則滿足此條件的 a 共有多少個？ 【練習】4.有三線段，長分別為 $x-2$、$x+2$、$x+6$，如果這三線段可以構成一個三角形，請問 x 的範圍如何？ 【練習】5.兩線段的長度分別為 5 公分、11 公分，下列哪一個線段長可以和這兩線段為成一個三角形？ 6.9 公分、15 公分、20 公分、$\frac{20}{3}$ 公分 【測驗】1.△ABC 中，若 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=5$，則下列何	• 教師帶著學生練習，並巡視學生練習狀況。 • 請學生口頭回答。 • 利用下課前 5 分鐘做測驗，檢視學生學習狀況。	• 能自行練習。 • 請學生訂正錯誤。
-------------	--	---	-----------------------------------

	者不可能是 $\overline{AC}$ 的長？ (A) 3 (B) $\sqrt{35}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $7\sqrt{3}$ 【測驗】2.若三角形的三邊長分別為 5、12、x，則 x 的範圍_____。 【測驗】3.若三角形的三邊長分別為 4、9、$1+2x$，則 x 的範圍為_____。	• 指定回家功課。	
--	--	-----------	--

附錄一、學習單

學習單（一）

班級：

座號：

姓名：

一、探索活動

器具：扣條 6 支，長度依次為 14.14、10、8.66、 7.07×2 、5 公分。

問題（1）哪三種扣條可以組合成三角形？原因是什麼？

問題（2）哪三種扣條不可以組合成三角形？原因是什麼？

問題（3）已知有兩支扣條長度為 14.14、8.66，則第三支扣條可以選擇哪一種？

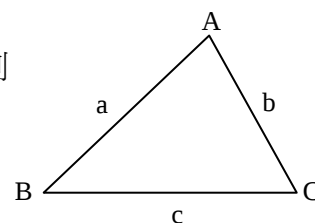
二、三角形三邊關係

（1）如圖，若 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三邊長，我們可以得到

也就是說

但是，若 $c \geq a$ ， $c \geq b$ ，我們不用每次都檢查三遍，只要檢查_____。

所以我們可以將上述結論改成_____。



（2）如圖，若 a 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三邊長，則 b 必須具備什麼條件？

【練習】1.下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的邊長？

(1) 4、6、7

(2) 3、4、7

(3) 2、4、7

2. 下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的邊長？

(A) 5、6、7 (B) 10、20、30 (C) 4、5、 $\sqrt{11}$ (D) $2a$ 、 $3a$ 、 $4a$ ($a>0$)

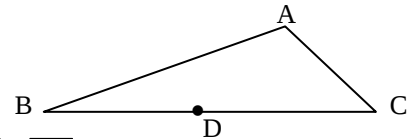
3. 設一個三角形的三邊長分別是 4 公分、7 公分、 a 公分，若 a 是整數，則滿足此條件的 a 共有多少個？

4. 有三線段，長分別為 $x-2$ 、 $x+2$ 、 $x+6$ ，如果這三線段可以構成一個三角形，請問 x 的範圍如何？

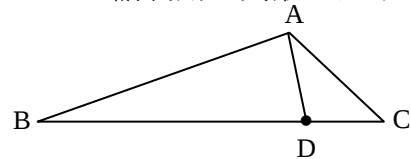
5. 兩線段的長度分別為 5 公分、11 公分，下列哪一個線段長可以和這兩線段為成一個三角形？

6.9 公分、15 公分、20 公分、 $\frac{20}{3}$ 公分

6. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。請利用三角形三邊不等式，說明 $\overline{AB} > \overline{CD}$ 。

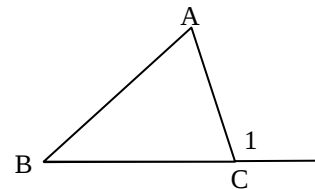


7. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AB} = \overline{BD}$ 。請利用三角形三邊不等式，說明 $\overline{AC} > \overline{CD}$ 。

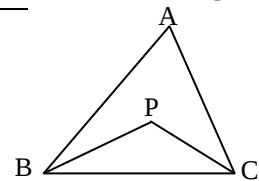


三、外角大於任一內對角
根據外角定理

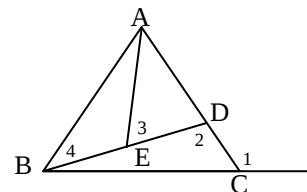
所以，我們可以說：



【練習】1. 如右圖，試說明 $\angle P > \angle A$ 。



2. 如右圖，請比較 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 的大小。



貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：我們從這個單元，從第三單元第三章開始，我們從什麼東西開始上？內角和外角和已經告訴你，三角形的角度的構造、外角和的構造也知道了。接下來進入到 3-2，我們來講什麼？全等性質，那些全等性質也教你怎麼推理了。然後，接下來進入到最後一個單元，整個第三章三角形的介紹就會做結束了。我們這個單元要介紹什麼？就是三角形三個邊，它的邊長有一些很特殊的性質。是不是所有的三個邊，隨便拿三個長度就可以構成一個三角形？在今天我們會找到答案，然後這三個邊會有什麼特殊關係？如果你想做一個三角形，你必須找什麼樣的邊長來做三角形？在今天這個扣條的功能就是這樣。還有，你等一下在使用這個扣條的時候，有一個原則：你的扣條不能去拗它，它只能呈現直線的狀態，因為有的時候明明不可以構成三角形，你硬給它拗一下，就變成三角形了。等一下那個狀態不要出現。我等一下會示範給你看，在找三角形的過程當中，你先告訴我，可不可以看得到扣條上面那個長度？雖然它是小數，看得到嗎？幫我找，你告訴我，紅色那一條長度是多少？
2. 學生：14.4。
3. 老師：14.4，那黃色的呢？
4. 學生：10。
5. 老師：10 公分，再來呢？綠色的。
6. 學生：8.66。
7. 老師：你都看得到，每個都看得到，對不對？所以，等一下我的第一個問題就要拋出來囉！請你從這六根扣條裡面找出三根可以構成三角形的，可以構成

三角形的那三根。那你說，我要寫顏色還是寫長度？我要寫長度，所以你就把那三個長度寫出，但是這樣的組合是不是好多？我要你寫五種就好了。好，現在開始，你可不可以幫我找出五種？那個長度我在這邊寫一下好了，免得你還要去看那個長度，覺得有一點吃力，因為那個長度太小了。我們在旁邊這邊寫一下，來，告訴我紅色，你剛剛看紅色是多少？

8. 學生：14.4。
9. 老師：好，再來黃色。
10. 學生：10。
11. 老師：再來是綠色。
12. 學生：8.66。
13. 老師：8.66，對不對？再來還有什麼？紫色的是 7.07；最後，橙色這個，橘色的？
14. 學生：5 公分。
15. 老師：5，有這五種尺寸。所以，你等一下再找，你如果覺得要看那個長度太吃力，黑板上這五個數據就讓你參考一下。好，現在開始找。有找到的，你就把那個一組一組的答案寫下來。我只要寫五組就好了，五組就可以了，我等一下請有找到的同學上去寫一組。我黑板上也呈現五組就可以了，你可能會跟我不太一樣，那沒有關係，因為這樣的組合非常多，你只要找得到就可以了。好，芳慈，上去寫一組 14.14、8.6、10。好，燕儀，上去寫一組，寫你現在找到的那一個。一下子找好多，對不對？那我要問，嘉峻，你怎麼有辦法一下子找這麼多啊？你是一直扣。我剛剛看他扣，要找一下，你一下子寫了七、八組出來了，是不是？你可不可以告訴大家，你為什麼可以那麼快找得到？
16. 學生：看就知道了。

17. 老師：用看的！你需不需要用扣條？
18. 學生：不需要。
19. 老師：嘉峻好像覺得不需要用扣條嗎？嘉峻，你覺得？
20. 學生：我是想到都會記起來。
21. 老師：你是先看那個就組合，還是說，我只是湊湊看，湊好，然後去寫那個數據，你是用哪一種？
22. 學生：湊的。
23. 老師：你是用湊的。好，那弘傑呢？你一下子也寫好多，弘傑，我好像都沒看到你組合三角形耶！弘傑，我發現你只用看的。我剛剛看到好多同學都是直接用扣的，我示範一下弘傑的動作給你們看，弘傑是這樣，就寫下來了耶！好奇特，對不對？那為什麼有些人就是一定要扣起來，他才看得到那三邊？弘傑，講一下你的心得，為什麼你直接用看的就看到了，為什麼？
24. 學生：不知道。
25. 老師：不知道，想一下你的理由，再給你一分鐘時間。好，那再找邱嶽，邱嶽，找到了嗎？你找到上面那個：14.14、8.66、10，對不對？你有沒有找到下面那個？有。好，那我再找誰？子琪，你上去找一組，你五組也找到了，對不對？好，你上去寫跟你不一樣的。好，上去寫。雅筑呢？雅筑也很快，上去也寫一個。雅筑，你告訴我，你是用組合的還是用看的？用看的。好，又找到一個用看的，等一下你要告訴我你怎麼看。你等一下，那你上來用看的。弘傑，你想到了沒？
26. 學生：還沒。
27. 老師：還沒。有沒有人跟弘傑是一樣的，是用看的？舉手一下，不要客氣。用看的，好，岳臻，你講講看，你怎麼用看的，我給你這一堆數據，你怎麼去

看？那麼快就看了，像剛剛邱嶽覺得用看的有一點困難，她必須要用組合的。來，岳臻，講講看，大聲講出來沒關係。她要先把道具準備好，才能講就是了。芳慈說，不是兩邊和大於第三邊嗎？是這樣的意思。怡萱，你也是覺得這樣嗎？弘傑，你也要解釋這樣嗎？

28. 學生：不知道。

29. 老師：你還是不太知道就對了！今天你放心講話，沒有關係，好不好？想講什麼就講什麼，沒有關係。雅筑，你覺得用看的，一樣跟她覺得是兩邊和大於第三邊，對不對？那你呢？

30. 學生：一樣啊！

31. 老師：一樣。你們剛剛組合的三角形，基本上要構成這樣，來，你看一下，現在我已經呈現四組了（14.14、8.66、10），（7.07、7.07、5），（10、8.66、7.07），（10、8.66、5），這四組有沒有跟你一樣的？至少你們都有找到就是了。好，我問你，我說這樣一個三角形在這裡，我的扣條比較大，要示範給你們看的。他們說，我一下子就可以找到三個，而且他覺得兩邊和大於第三邊，我問你，你的兩邊和大於第三邊是用什麼？算的，對不對？

32. 學生：對啊！

33. 老師：你怎麼算？你怎麼去找到，怎麼知道要找這三根？（14.14、8.66、10）芳慈，你說這三根？你怎麼知道要挑這三根？為什麼不挑別的？你是用 8.66 加 10 的樣子，你的三根就是這樣挑出來的嗎？好像是，又好像不是。好，沒關係，這個等一下我們會討論。怡萱來，你告訴我，如果我要隨便挑三根，你怎麼去挑這三根？

34. 學生：挑小的那兩個邊。

35. 老師：你也是找小的兩個邊去大於第三邊。我再問一下雅筑，一樣嗎？那岳臻呢

？可是對有些同學來講，他沒有這種感覺。我怎麼知道我要挑短的兩邊大於第三邊？瑞玲，你有這種感覺嗎？比較沒有那麼明顯，對不對？好像總是試試看會比較好。好，我問你，我現在手上的三角形怎麼去解釋，為什麼兩邊和大於第三邊？你說，老師，我就這樣，拆開來，把它延長，這兩根加起來的確比第三邊大，對不對？看得出來嗎？那我問你，我如果不動，這好難扣，好，我都不要動，請你直觀地告訴我，為什麼這兩邊加起來會大於它？不要算，我不要你算，我都不告訴你尺寸，都沒有，為什麼這兩個加起來會大於這個？講一下公式，我好像從剛剛到現在都還沒講到公式，對不對？為什麼這兩個加起來會大於這個？很直觀，其實這個答案很簡單，想太多的大概都...。

36. 學生：角度。

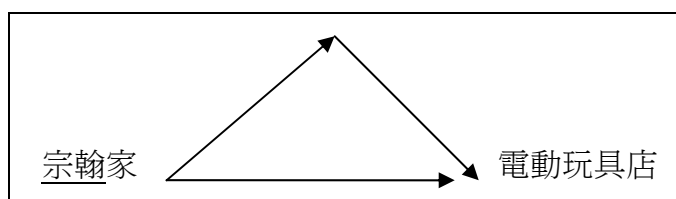
37. 老師：角度，因為它比較大，

還有沒有其他的答案？

我舉一個生活上的例子

，這是宗翰家，這個是

電動玩具店，今天宗翰要去打電動玩具，要趕時間，習慣上，他會走上面這條，還是走下面這條？



38. 學生：下面。

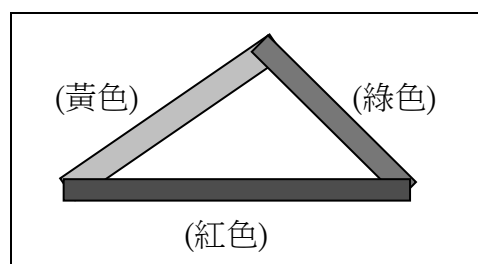
39. 老師：為什麼？你這樣就是繞一圈，其實就很直觀，就是因為那邊繞過去，他可能

就去吃個早餐或是吃個午餐，再來電

動玩具店。或許他說，不要了，我廢寢

忘食，不吃了，我就直接來電動玩具店

，對不對？是不是可以這樣？你已經有

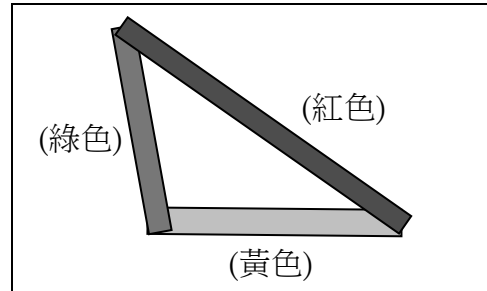
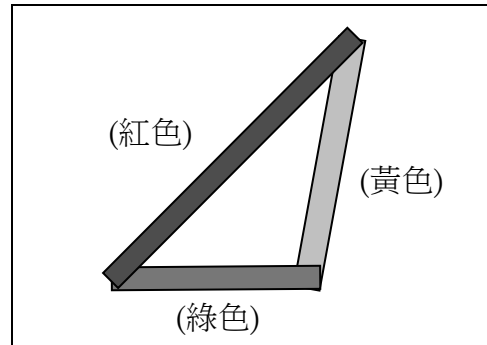


了直觀，這兩個加起來其實就大於它了，其實這種直觀我需不需要算？不需要算，可是三角形一定擺這樣嗎？

40. 學生：不一定。

41. 老師：擺這樣可不可以？

42. 老師：剛剛的上面兩個邊跟現在上面兩個邊一樣嗎？我們剛剛是黃色跟綠色，對不對？現在我轉一下，請問上面兩個是什麼顏色？綠色跟紅色，那這兩個（綠色跟紅色）會不會加起來也大於它（黃色）？



43. 學生：會。

44. 老師：再轉一下，現在變什麼顏色？紅色跟黃色，這兩個加起來也會大於它（綠色），那表示這三個線段都好像這兩個加起來要大於它，再轉一下，這兩個加起來也要大於它，再轉一下，請問，我要檢查幾遍？

45. 學生：三遍。

46. 老師：因為顏色都在變，對不對？我是不是要檢查三遍？所以，如果我說，有一個三角形的三個邊是這樣（10、8.66、5），請問它可不可以構成三角形？我現在反問你，這是你找到的，對不對？現在我如果反問：請問它們是不是三角形的三個邊？你要怎麼辦？照道理，你應該是說，那我們就試試看：10+8.66 請問有沒有大於 5？一看就知道有了。8.66+10 有沒有大於多少？不是，寫錯了，8.66+5 有沒有大於 10？再檢查一遍，還有哪一邊沒檢查？5+10 會大於 8.66，你如果發現每個都可以，好，那它這三個邊就可以構成三角形，沒問題了，這樣懂意思嗎？所以剛剛也許邱嶽，你在找的那三個邊，如

果像弘傑在看的時候，他可能也都是這樣看的。可是你有沒有覺得這樣檢查三遍，而且我現在給你的數字，是不是有點醜？都是小數，是不是數字很醜？你要去心算快不快？心算很好用，心算不太快，可是你看一下我黑板上這三個式子，有一些式子是多餘的，有幾個式子是多餘的，想想看？為什麼我講式子是多餘的？你想想看。

47. 學生：第一個跟第三個。

48. 老師：第一個跟第三個是多餘的，好，岳臻說第一個跟第三個是多餘的，其他的人認同嗎？岳臻說第一個是多餘的，少圻，你知不知道為什麼第一個是多餘的？

49. 學生：因為 10 就絕對大於 5。

50. 老師：好，他看到了。耀杰，你有看到嗎？

51. 學生：有啊！

52. 老師：有，他說你 10 根本連加都不用加，本身就比较 5 大了，還要比嗎？

53. 學生：不用。

54. 老師：不用比了。他還說，剛剛還說第幾個？

55. 學生：第三個。

56. 老師：他說，第三個也是多餘的。弘傑，為什麼第三個是多餘的？

57. 學生：因為 10 大於 8.6。

58. 老師：對啊！10 本身就大於 8.6，那你還要加？根本不用加就大於它了！好，那我現在說，這兩個 $10+8.66>5$ 、 $5+10>8.66$ 是多餘的，你看看我保留的是什麼？8.66 跟 5 其實都比 10 還小，這個 $10+8.66>5$ 其實是多餘的，這個 $5+10>8.66$ 也是多餘的，但是這個 $8.66+5>10$ 呢？這兩個加起來是不是大於它？可能就要檢查了。這個回應到剛剛芳慈跟怡宣，一開始他就說：老師

，我怎麼挑這三根棍子？你記不記得他怎麼挑的？我就說：最小的那兩個，看起來有沒有大於第三個就好了。他就回歸到剛剛那樣去挑。你覺得這樣挑會不會比較快？要不要我給你棍子？假設我給你十根，你要怎麼挑？就可能挑的滿頭大汗了，對不對？好，我再告訴你一個例子，我們把剛剛的這個結論再講一個例子好了，我如果說 8、7、4，我現在要問勁源，它們可不可以構成三角形？可以。如果我要檢查的時候，你覺得照我剛剛說「兩邊和大於第三邊」，都要這樣，這樣也要檢查一下、這樣也要檢查、每個都要檢查一次，對不對？如果要檢查，應該怎麼檢查？你唸式子給我聽。

59. 學生：7 加 4 大於...
60. 老師：7 加 4 怎樣？
61. 學生：大於 8。
62. 老師：大於 8，那還要再檢查哪一次？我是說，如果三次都要檢查，統統寫，再來是哪一個？
63. 學生：4 加 8 大於...
64. 老師：4 加 8 怎樣？
65. 學生：大於 7。
66. 老師：大於 7，還有呢？還有一個，還沒挑完，對不對？
67. 學生：8 加 7 大於 4。
68. 老師：8 加 7 大於多少？
69. 學生：4。
70. 老師：4，好，那你檢查這三遍，你自己再看，哪一個是多餘的？依靜來告訴我，哪一個是多餘的？
71. 學生：第二個 ($4+8>7$)。

72. 老師：第二個，你為什麼覺得第二個是多餘的？它 8 就已經很大了，你不管怎麼加都比 7 大，所以這個其實是多餘的。好，再問元敬，哪一個是多餘的？ $8+7>4$ 是多餘的，為什麼 $8+7>4$ 是多餘的？這不管怎樣都比它大，對不對？8 也大於這個，所以這個也是多餘的。所以，我現在保留的這個（ $7+4>8$ ），跟我剛剛講的那句話有沒有呼應了？最短的兩個邊，如果加起來比這個第三邊大就夠了，我就可以挑出來了，就一定可以構成三角形。這樣聽得懂意思嗎？好，我再舉一個例子，最後一個例子，就要把第一個活動做結束了。我要來問囉！子琪，我問 5、2、3 可不可以構成三角形？
73. 學生：可以。
74. 老師：可以，好，來，我們三個都要檢查。因為後面有聲音，對不對？打暗號給你，沒關係，我們把它檢查那三遍，你把那三遍檢查一遍給我聽。沒關係，你把三個事實列出來，我們再來看看，為什麼你覺得你要更改答案？第一個事實先唸，5 怎樣？
75. 學生：加 2。
76. 老師：加 2。
77. 學生：大於 3。
78. 老師：大於 3，很好啊！還有呢？
79. 學生：5 加 3。
80. 老師：5 加 3。
81. 學生：大於 2。
82. 老師：也大於 2，也很好啊！再來， $3+2=5$ ，有沒有大於？這個就沒大於，那我就用這樣畫 $\boxed{3+2 \nless 5}$ ，可不可以？結果有沒有三個都對？沒有，就是這個（3）跟這個（2）不對了。好，那我把這個事實 $\boxed{3+2 \nless 5}$ 圈起來，關鍵

是不是在這裡？這個（ $5+2>3$ ）也對、這個（ $5+3>2$ ）也對，就是這邊這個

$3+2 \nless 5$ 不對，不成立的時候，它可不可以構成三角形？不行，那我現在要問阿泰，這裡面有沒有根本不用看，馬上一定對的？

83. 學生：第二。

84. 老師：哪一個？

85. 學生：第一個。

86. 老師：第一個，為什麼一定對？子琪，你可以懂他的意思嗎？為什麼？你講給他聽。

87. 學生：5 大於 3。

88. 老師：這個 5 本來就很大，你不管怎麼加，一定都比 3 大，那還需不需要檢查？就不用檢查了，這個理由就知道了。所以，你有沒有發現？下面這個又呼應剛剛那個：如果最短的兩個加起來太小了，可不可以？不行，所以我問你，從你剛剛第一剎那，我給你這個 5、2、3，我說：請問它可不可以構成三角形？你的腦子要想什麼？就先把最短的挑挑看，看加起來有沒有大於它就好了，這樣懂意思了嗎？你聽得懂我講的意思？這樣可以嗎？來，我們做個結論，你剛剛找的這五組答案，找完之後，我說：為什麼它可以構成三角形？基本上，我們從一開始探索的時候，是任意兩邊和都要大於第三邊，這是一開始我們探索出來的結果。因為我的三角形可以擺三個方向，所以，我們先做一個初步的結論是說：任意兩邊和大於第三邊，那個原因的後面請你幫我寫，你就寫上去：為什麼這些三邊長可以構成三角形？是因為任意兩邊和大於第三邊。我們是從這裡出發，然後開始去檢查的。因為三角形可以轉三個方向，所以我要檢查三次才夠，但是我會發現，經過我剛剛檢查三次之後發現，有一些東西其實可以不用檢查的，那個多

餘的，我們就可以把它精簡略掉，然後用最簡潔的。我剛剛在黑板上框起來的就是這個：最短的兩邊和。所以這邊，從這裡我再畫一個箭頭下來，因為經過我們這樣所有的討論之後，其實我只要檢查一遍就好了。我們下面這句話，你知道我要怎麼寫？有沒有誰可以幫我寫的？來，找一個人來，文豪這樣講：隨便兩個邊和大於第三邊，那樣子「和」是這個字，不要寫這個「合」，這個「和」是代表加起來的意思。我們剛剛都檢查三遍，每次要檢查三遍，好麻煩喔！我們檢查一遍就好了，一遍要怎麼說？較小的兩邊和大於第三邊。我們通常長度是講長短，我們把那個「小」改一下吧！就寫較「短」的兩邊和大於第三邊，就好了。較短的兩邊和大於第三邊，這個是我們從這樣整個討論得到的結論。可是，較短的兩邊和，這句話可能還有一點語病！這句話會不會有語病？嘉峻覺得會有，你說說看，為什麼這句話會有語病？萬一三個邊都一樣，有沒有較短的兩邊和？文豪，你有沒有想到，萬一三個邊都一樣的時候，這句話可不可以用？

89. 學生：不可以。

90. 老師：不太好用，怡宣，你告訴我，如果三個邊都一樣，那做什麼檢查？有沒有誰要告訴我，如果三個邊都一樣，那三個邊一樣會是什麼三角形？

91. 學生：正三角形。

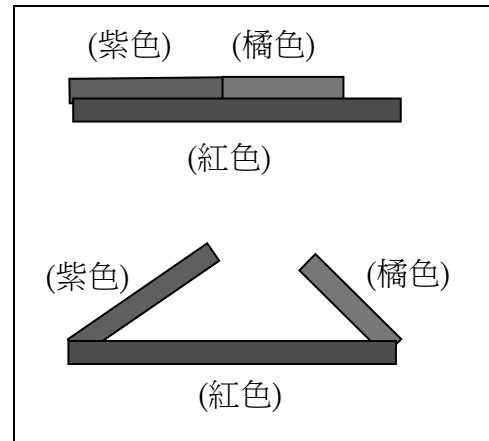
92. 老師：正三角形，要不要檢查？

93. 學生：不用。

94. 老師：根本不用檢查，所以這個其實是適用在那種三個邊都不太一樣大小的那一種，我們不太容易看得出它來，如果給你三個邊一樣，你要不要考慮？根本就不需要去考慮它啊！正三角形那三個邊一定都一樣，都可以構成三角形，所以，基本上我寫的這句話，其實有沒有把正三角形涵蓋進去？沒有！

我把它當做是常識，你們知道就好了。好，你看下面一題，下面一題就會變得很好寫了，請你從裡面隨便挑三組，挑三個長它不可以構成三角形。經過剛剛的討論，你看看現在這樣有沒有比較好寫了？怎樣沒辦法構成三角形？我要請同學告訴我數據，這樣有沒有比較好挑了？不能構成三角形的。好，我要你把不能構成三角形的一個樣子舉出來給我看，好不好？

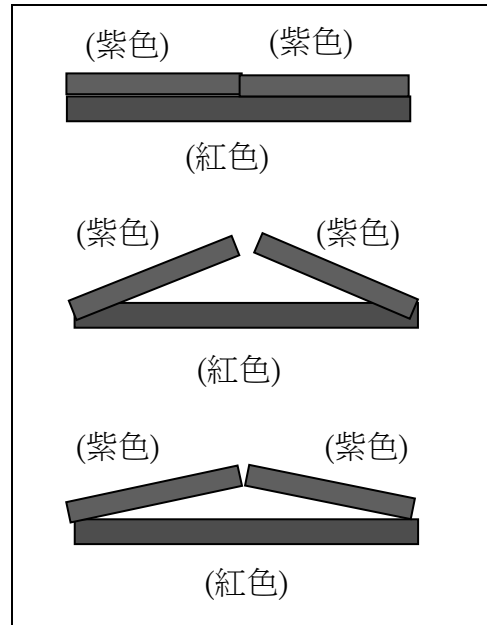
一個樣子，君豪，我要三段不能構成的，你隨便弄一個給我看。我要你們每個人都弄一個。你手上的給我看。來，元敬的這個就是硬拗的，這個，你有沒有看到它已經有點彎了？那個彎了，因為扣條太軟了，基本上你把它打開，其實它會變怎樣？會變這樣，有一點彎彎的，



這個就不行了。這個就是扣條在使用上，你的長度就不對了。好，我問你，你給我看一下，你覺得不能構成三角形的，應該會長什麼樣子？你是舉這樣，那你看我舉的，跟我這樣像不像？這樣可不可以構成三角形？不行，對不對？大概大部分人看到的是這樣，那為什麼這兩個不可以構成三角形？這兩根怎樣？太短了，這兩根就是太短了，就是扣不在一起，你看，我直接下來，還是扣不起來啊！所以這兩根太短了，我問你，你在挑的時候，好不好挑？很好挑，那我請寧由上來寫一組，然後再找佳秀，你要寫跟寧由不一樣的喔！寫寫看，你先等寧由寫完，你再上來寫好了。然後，我要問你，你挑出幾組來？有人說三組，有沒有人說兩組的？有三組是不是？來，好，寧由寫。我幫她寫，大一點好了。來，寧由寫說：8.66、5、14.14，寧由，你可不可以告訴我，你為什麼覺得它不行？它怎樣？

95. 學生：兩個就是 8.66 加 5 大於...，就是小於 14.14。
96. 老師：8.66 加 5 怎樣？
97. 學生：小於 14.14。
98. 老師：是比 14.14 還小，所以它不行，對不對？佳秀來，上來寫一組，你覺得跟它不一樣的。再找一個，俐君好了，你有沒有找到三組？有，很好，那你等他寫的這一組寫完，你接著看跟你不一樣的，就是還沒寫到的那一組寫出來給大家看。好，上來，為什麼會？噢！知道嗎？你多拿一根，你是不是有兩根橘色的？
99. 學生：沒有啊！
100. 老師：那你為什麼會有兩個 5？紫色的是 7、、、、，有沒有看到？紫色是 7.07，她寫兩個 5，沒關係啊！事實上，這個是不是可以構成三角形？
101. 學生：不行。
102. 老師：那你要不要修正？改哪一個？剛剛我們請那個誰，岳臻，你幫他改一個，這裡面哪一個數據不對？⑤、5、14.14 要改成什麼？5 改成 7.07，(7.07、5、14.14) 那俐君，你寫的那個事實上也對啦！只是我們的扣條沒那麼多，還有哪一個 5，這個 (7.07、⑤、14.14)，兩個 5 都改 7.07，(7.07、7.07、14.14) 這樣對吧？有跟我寫在黑板上一樣的舉手，有一樣的舉手。放下來，你看一下黑板上這三組 (8.66、5、14.14)、(7.07、5、14.14)、(7.07、7.07、14.14)，有一組好特別喔！
103. 學生：第三組。
104. 老師：第三組，你們為什麼會突然？我給你暗示，你就知道我在暗示什麼，原來，加起來相等的這個根本就不可能。我問你，加起來相等的扣條會長什麼樣？就是像我這樣(見下圖)，我本來打開是這樣，對不對？我如果真的要

扣，你不能說這樣碰到了，這樣算不算碰到？不是，我的扣條是要以扣得到為準，結果我扣到的時候就剛好是這樣一條線，所以加起來一樣的可不可以？那也不行喔！所以，你會發現比較短的這兩邊加起來沒有大於第三邊的話，其實就不能構成三角形了。所以，這個原因可不可以這樣，我們就把這個理由，你自己這樣寫寫看，我等一下請同學告訴我。我們剛剛怎麼找到這三組的？請你



把原因寫下來。我先不寫喔！請你幫我做結論：為什麼這樣的三個線段，它不可以構成三角形？為什麼？我等一下請同學幫我做結論，剛剛這結論是我幫你下的，現在請你幫我做結論。他也很緊張，好了嗎？我請一個用唸的，好不好？用講的，講給我聽就好了。我們請誰？來，耀杰幫我做結論。

105. 學生：因為它較短的兩邊和沒有大於第三邊。

106. 老師：可不可以？沒有大於？

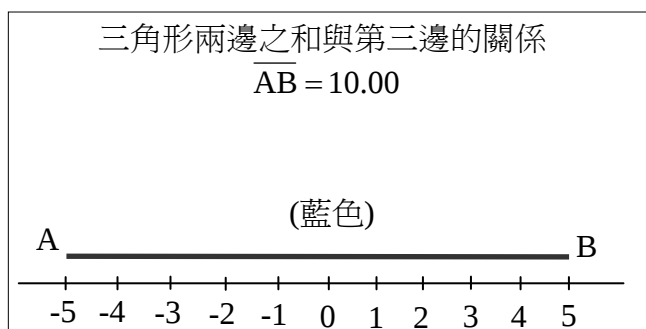
107. 學生：小於。

108. 老師：沒有大於，那等於可以囉！那怡宣講，較短的兩個邊？

109. 學生：小於、等於第三邊。

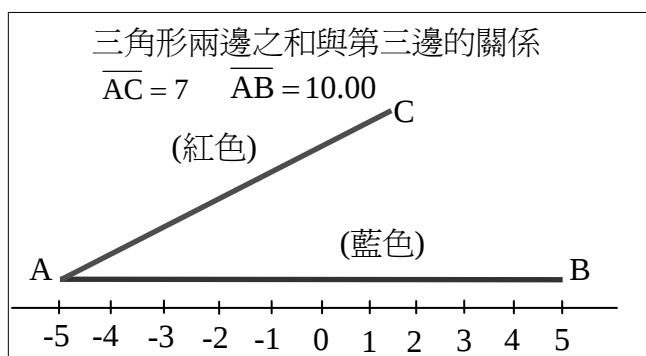
110. 老師：如果小於第三邊，或等於第三邊的話，都不可以。所以，剛剛耀杰你講的沒有大於，其實就少了一點點，所謂沒有大於在邏輯上講，我們在講那個沒有大於，就是小於、等於都可以，所以你們自己修正，較短的兩個邊，

它是小於跟等於第三邊的。好，看黑板，你的扣條可以先放一邊。我給你
看一下我們用電腦呈現的。好，我現在給你一個 $\overline{AB}$ ，請你告訴我它多長？

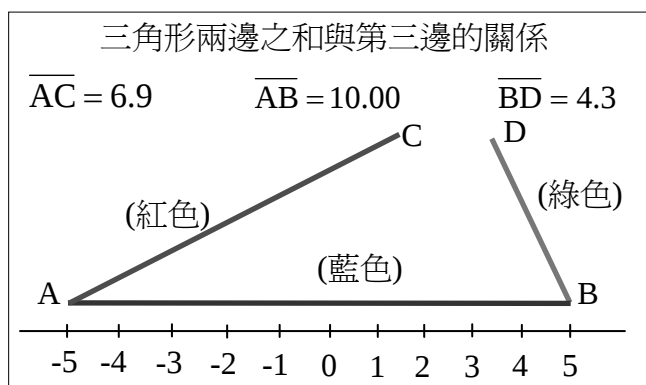


111. 學生：10。

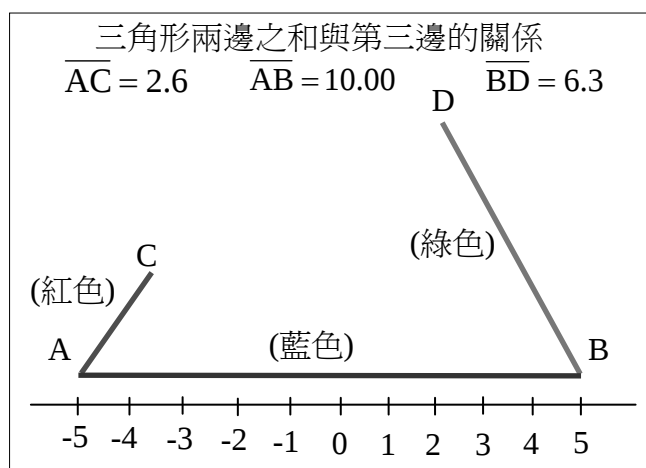
112. 老師：下面有一把尺，你可以看得到，有沒有人看不清楚上面？會反光的有沒有
？可以。好，那我再給你一段 $\overline{AC}$ ，另外一段是多少？7，對不對？



然後，這個 7 就可以這樣動，跟你的扣條是很像的，它還可以改變長度。
然後，我可以拉大、拉小，愛多少就多少，對不對？可以調整長度的。再
來，好，又找到了 $\overline{BD}$ ，



我給你的三個線段，上面都呈現了長度，我現在沒有兜起來，我要請問湘凌，這三個邊可不可以構成三角形？你看這個：6.9、10、4.3 可不可以？因為我就故意不把這兩個兜起來，你要想像，兩個可不可以兜在一起？你覺得可不可以？可以，好，那你告訴我，為什麼它們可以構成三角形？你怎麼判斷？你是看上面那個尺寸，對不對？好，沒關係！上面那個尺寸你怎麼看，然後你覺得它可以構成三角形？ $6.9+4.3$ ，對， $6.9+4.3>10$ ，那我們就真的來畫畫看，這個到這裡剛剛好可以構成三角形，這樣可以了。我再改變一下數據，我再把它拉開，讓它動，然後把它改變數據，我給它弄那麼小，這個給它好大，可不可以構成三角形？



113. 學生：不行。

114. 老師：子慶覺得也不行，對不對？不錯！來，子慶，你告訴我，為什麼它不行？他說 $2.6+6.3$ 怎樣？

115. 學生：小於 10。

116. 老師：小於 10 就不行，太短了，太短就像怎樣？就像我剛剛說的這種，就太短了，就兜不起來了，是不是？很好，你上課好認真。這樣子，其實在這邊就要告訴你了，三角形兩邊和一定大於第三邊，由這個圖就可以呈現了。好，你再來看我的問題三。這個邊討論到這裡，我們現在終於大概知道，隨

便丟三個邊給你，可不可以構成三角形？我們做一點小小的練習再看問題三好了，請你看下面的練習 1，倒數第二個，有個練習，對不對？

【練習】1.下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的邊長？

(1) 4、6、7

(2) 3、4、7

(3) 2、4、7

檢測一下剛剛講的，到底有沒有聽懂我講的意思？來，第(1)題，給你 4、6、7；第(2)題，給你 3、4、7；第(3)題，給你 2、4、7，請你告訴我，哪些可以構成三角形？信賢，你告訴我，哪些可以構成三角形？信賢，你告訴我，第一個可不可以？不行，為什麼？信賢告訴我說：4、6、7 是不行的。信賢，你再考慮一下，4、6、7 可不可以？

117. 學生：可以吧！

118. 老師：又可以吧！你告訴我，我不知道怎麼看那三個邊長最短的是哪兩個？

119. 學生：4 跟 6。

120. 老師：4 跟 6 加起來有沒有大於 7？

121. 學生：有。

122. 老師：有，那可不可以？

123. 學生：可以。

124. 老師：可以。所以，第一個是可以的。好，我們再請誰？乙慶還沒被叫到，對不對？好，乙慶，你告訴我，第二個可不可以？不行，為什麼？ $3+4=7$ ，很好；再來第三個，邱嶽，可不可以？不行，因為怎樣？ $2+4$ 是小於 7 的，所以我們的答案就選哪一個？選第一個就可以了。所以，用剛剛給你的三角形，就判斷了邊長、判斷了準則，你去套用其實都可以用得到。再試一題，第 2 題，

【練習】2. 下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的邊長

(A) 5、6、7 (B) 10、20、30

(C) 4、5、 $\sqrt{11}$ (D) $2a$ 、 $3a$ 、 $4a$ ($a>0$)

我給你的數據有一點變化，把我們全部的根號也放進來了，請你仔細再觀察一下，這三個有哪幾組可以構成三角形？你先做做看，你覺得可以的就打勾。好，品如，告訴我，第幾個可以？第一個可不可以？好了，我們這樣看，第一個可不可以？第一個可以；然後再來，第二個呢？第二個不行，不行的原因是什麼？它等於 30，加起來 30 是不行的；第三個可不可以？第三個，他就說不知道，為什麼會不知道，知道嗎？因為那個 $\sqrt{11}$ 怪怪的， $\sqrt{11}$ 就要稍微想一下，好，我們回頭去想 $\sqrt{11}$ 到底是多少？你說什麼？統統化成根號。好，有人給一些建議了，好，你說，我看看，我剛剛是 3、4、 $\sqrt{11}$ ，對不對？你剛剛給什麼建議？（題目抄錯）4、5、 $\sqrt{11}$ ，好，你給我什麼建議？來，把它們統統平方，看大小。我先問你，照我剛剛講的，最短的兩個邊加起來大於第三邊，對不對？現在同學會有問題，他不知道最短的是哪兩個，4 是一定要挑的，就不知道 $\sqrt{11}$ 要不要挑？現在問題會在這裡，對不對？它們那種 $\sqrt{\quad}$ 就會卡在這裡，但是他給你整數就很好看了，那 $\sqrt{11}$ 怎麼辦？忘記怎麼做了，對不對？開出來，你還記不記得 $\sqrt{11}$ 在誰跟誰之間？

125. 學生：3 跟 4。

126. 老師： $3 \times 3 = 9$ ，是在 3 跟 4 之間，所以它大約是多少？3 點多，所以啦！那可不可以挑了？好，那我問品如可不可以？第一個可不可以？它是 3 點多，到底行還是不行？再想一下，我再給你想一下， $\sqrt{11}$ 是 3 點多。好，那現在問你：最短的兩根是誰？ $\sqrt{11}$ 跟 4，品如有沒有想出來？現在 4、5、 $\sqrt{11}$ ，它（ $\sqrt{11}$ ）3 點多，現在最短的兩根是誰？3 點多跟 4，是不是 $\sqrt{11}$ 跟 4？

那 3 點多跟 4 加起來會不會大於 5？會？不會？3 點多加 4 會不會大於 5？
她看到機器太多，太緊張了。會，3 點多加 4 會大於 5，那可不可以構成三
角形？可以。不要緊張，這是你平常實力可以做得到的，你太緊張了。好
，再來，第三個，可不可以？最小的是 $2a$ 跟 $3a$ ，加起來有沒有大於 $4a$ ？
有。好，那我們要請問嘉峻，這題答案是多少？再講一遍。

127. 學生：BCD。

【練習】2. 下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的邊長

(A) 5、6、7 (B) 10、20、30

(C) 4、5、 $\sqrt{11}$ (D) $2a$ 、 $3a$ 、 $4a$ ($a>0$)

128. 老師：BCD。

129. 學生：A、ACD。

130. 老師：ACD...。

131. 學生：老師太緊張了。

132. 老師：是我太緊張，我大概沒聽到。好，請你準備兩根扣條，我們要進行第三個
最重要、最重要的一個活動。好，那兩根扣條，我上面講義準備的，14.14
跟 8.66 是什麼顏色？紅色跟綠色。好，準備好。準備好了之後，它們是現
在我要構成三角形的兩個邊，我固定好，指定你紅色、綠色，請問你，現
在你手上剩下的顏色中，哪幾支可以讓它構成三角形？

133. 學生：黃色。

134. 老師：黃色，來，試試看，黃色可不可以？橘色呢？

135. 學生：不行。

136. 老師：不行，那紫色呢？

137. 學生：可以。

138. 老師：可以，紫色可以。好，你把這兩個長度寫上去，可以讓 14.14 跟 8.66 構成三角形的只有 7.07 跟誰？
139. 學生：10。
140. 老師：10，只有這兩根。現在我想改變問題，只有這兩根好像太少，我想讓你找多一點。現在我要改變問題，仔細聽好！請問你，以 14.14 跟 8.66 來講，請你把可以讓它構成三角形的所有整數統統寫出來，無限多？好，統統寫，都寫出來。寫寫看，看會不會真的無限多。我再說一次，來，我寫在黑板上，我講完我的問題：我現在有一個邊是 14.14，還有一邊是 8.66，好，現在我要你填第三個邊，只要是整數就好，請你統統填出來，那有幾個？剛剛君豪告訴我有無限多個，沒關係，我讓你寫到晚上。好，開始寫，你把可以的統統寫，你要告訴我有幾個整數的，我只要整數就好了。試試看，你把整數都寫出來，我等一下一定先問君豪，請問你寫出幾個？有沒有無限多個？宗翰用算的，對不對？你告訴我，你怎麼算？減 8.66，然後呢？你可以跟旁邊的討論一下，你們寫的一不一樣多。跟你的旁邊同學討論一下，有沒有寫一樣多的個數？好，你減完之後，然後呢？佳秀也是一個一個寫。好，我問少圻，你怎麼寫這些？就寫就是了，弘傑來告訴我，你好快寫完了，來，你告訴我，你在寫這些數字的時候，你在想什麼？看合不合？就這樣一個一個寫，是嗎？你怎麼寫出那一串東西出來？你上來幫我這一串寫出來給大家看，你現在寫的那一整串，上來寫，寫給大家看。耀杰，你告訴我，你這一串怎麼找到的？
141. 學生：就相加。
142. 老師：相加，寫在那個空格下面，你就整排列出來，沒關係。相加，然後呢？
143. 學生：或是相減。

144. 老師：或是相減。你有想到相加跟相減，對不對？好，那你把你的答案寫出來，把那個 $3 < \sqrt{11} < 4$ 的那個擦掉，你幫我寫那一串，我們來看看你們兩個寫的有沒有一樣。你們幫我對對看，你們跟他寫的一不一樣，跟他寫的有沒有一樣？沒有，你沒有寫 6 嘛！沒關係！我們一樣想一下有沒有 6？有沒有 6 啊？

14.14、8.66、_____

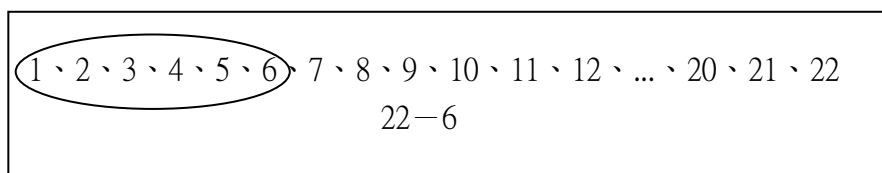
⑥、7、8、9、10、11、12、13、14、15、、、、？

145. 學生：有。
146. 老師：有，寫得還不錯。都寫得不錯，都有找到。你寫多少個？你認為有 23。來，我看一下那個耀杰的，耀杰的有沒有 23 出來？不錯啊！好，剛剛那個阿泰告訴我，他寫了一個「23」，來，「23」這組答案，我又看到一組。不愧是小老師，他根本不寫一個一個，他就寫這樣就好了「6~23」。沒關係，耀杰，你偷擦一個東西，你有一個偷擦掉了。
147. 學生：我...。
148. 老師：你剛剛有寫一個東西。
149. 學生：寫一個 5，對不對？
150. 老師：你剛剛有寫這個「5」。
151. 學生：有啊！
152. 老師：那你為什麼要擦掉？
153. 學生：因為後來看錯了。
154. 老師：後來看錯了。好，那這個打問號，有沒有人跟他一樣寫 5 的？好像沒有。好，那我問阿泰：為什麼 23 會有？大家都沒有 23，為什麼 23 可以？
155. 學生：加錯了。

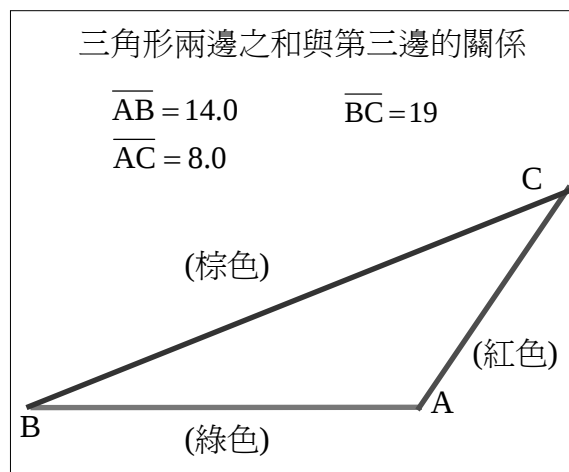
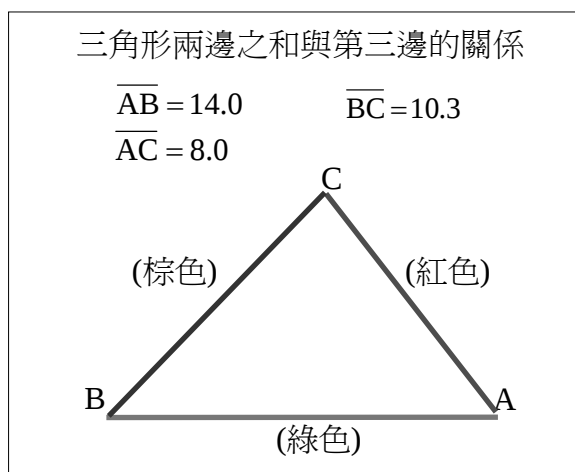
156. 老師：加錯了。好，你告訴我，加錯在哪裡？這個寫 23 為什麼不合？
157. 學生：因為那兩個（ $14.14+8.66$ ）比那個（23）還要小，加起來比那個還要小。
158. 老師：原來是小數加法的問題，是吧！所以我給你的數字太醜了，所以要怪老師給的數字太醜了，讓你加錯了，所以加成 23，是不是？好，那你告訴我，你修正，不到 23，到多少？
159. 學生：22。
160. 老師：22。好，我們就擦掉了。那這三個人的答案，好像就變得一致了，對不對？那我現在要問第一個問題：為什麼你知道從 6 開始？為什麼不從 5？為什麼不從 1、2、3、4、5？為什麼不從 6 開始？，如果從 5 開始的話，我加起來就沒有比 14 大，所以 5 就不要，對不對？然後，最後只到 22，為什麼 23 沒有？猜猜看，好，這樣子太大、太小，所以它總共有幾個？現在我要你不要用數的，不要這樣一個個數，你告訴我，6 到 22 總共有幾個數，不要用數的話呢？
161. 學生：17 個。
162. 老師：17，你怎麼算 17？把 22 減 6 再加 1 就可以了，這樣沒問題嗎？為什麼？對，就是還要問什麼？對，我知道一定有人會數錯，那下次就是拿手指頭、腳趾頭出來數 6 到 22，就是 6、7、8、9、10...。為什麼要 22 減 6 再加 1？始終不知道為什麼，對不對？有沒有人要幫他解釋，為什麼？我就這樣大概寫一下，好，君豪，

1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、...、20、21、22

我上面寫了 22 個數了，那這...我就不一一寫了， $22-6$ 是什麼意思？全部 22 個，把這 6 個統統減掉，這叫做 $22-6$ ，你為什麼要



加 1？我這個（6）要不要？6 到 22，6 要不要？要嘛！那當然加回來，通常有人都會把頭尾相減，但是因為 6 還是要啊，被你減掉，那 1 要不要？這個 1 是加回被你減掉的 6，但是有人會這樣做，他直接怎樣？將 22 怎樣？因為 6 要啊！所以我減 5 就好了，10 幾？17，有人是這樣做。所以，有人會問你幾種？明明就是會，知道那個都寫得出來，問幾種就算錯。所以，這是一個比較小的、問細節的問題。好，那我讓你看黑板上，我現在給你兩個線段，因為剛剛的數字太醜了，你們覺得不容易看，我們現在看 14.0 跟 8.0，這是你剛剛的，紅色、綠色，固定的那兩根。我現在要請問你：我現在要寫 $\overline{BC}$ ，這樣可不可以構成三角形？ $\overline{BC}=10.3$ ，可不可以？事實上可以，對不對？好，那你看我的 $\overline{BC}$ 的變化，這樣可不可以？第三根，可不可以？都可以耶！好大喔！ $\overline{BC}=18、19、20、21$ 都可以，到這裡可不可以構成三角形？（ $\overline{BC}=22$ ）



163. 學生：不可以。

164. 老師：好！那我再回來， $\overline{BC}=19$ ，所以你剛剛從 6 寫到 22，會有這麼多答案也是這樣的原因。好， $\overline{BC}=13、12、11、10、9、8、7、6、5、4$ ，不是 6，好，先到 6 就好，6 可不可以？
165. 學生：可以。
166. 老師：原因：我的數據大概這邊上面有一點...，（電腦呈現的圖形與事實不符）我把它調整一下好了，它的數據，我的這邊小數會有點問題，我把它調整一下，我們下節課再來看這個問題，好不好？你看我的 6，到這裡是 6 了，我剛剛這邊上面，剛剛那是跑錯，它跑得太慢了。（應該是電腦呈現的數據是四捨五入的結果）好，到這裡，有沒有構成三角形？
167. 學生：沒有。
168. 老師：那表示 6 不可以，對不對？好，請問 6.1 可不可以？
169. 學生：可以。
170. 老師：它跑得比較慢，我跟你講，為什麼這邊也是 6？它有小數第二位，但是沒有呈現出來，它事實上是有增加的，對，它是整數的，所以 6.1、6.2，6 行不行？
171. 學生：不行。
172. 老師：還有一個不行的，來，我們再看。
173. 學生：22。
174. 老師：22 也不是，所以在 6 跟 22 之間的都...？
175. 學生：可以。
176. 老師：都可以，如果我說沒有整數限制，請問有多少個？6.1 可不可以？
177. 學生：可以。
178. 老師：6.2？

179. 學生：可以。

180. 老師：6.3？

181. 學生：可以。

182. 老師：7.1？

183. 學生：可以。

184. 老師：7.11？

185. 學生：可以。

186. 老師：那會不會有人問你說：14 跟 8，那可以構成第三邊的，總共有幾個？會不會有人這樣問你？不會，會問你總共有幾個整數？但是不會問你所有的，除非他問你整數有幾個，我們就可以數得出來，如果不是問整數，你光看它這個小數的變化，是不是有很多？但是剛剛給你的是小數 1 位、2 位、3 位、4 位的，都有可能構成三角形，所以等一下下一節課要討論的是，到底什麼樣的東西是可以讓它（第三邊）去構成三角形？我們會有一個範圍，我們要把那個範圍怎樣？找出來，這是下一節課的重點。你們可以去休息一下了，喝個水，上個廁所。對啊，休息一下吧！

【第二節】

187. 老師：剛剛這個，有看到這個，我講的 14 跟 8，對不對？好，我問你：14 跟 8，如果我要你寫，我寫在這裡（在黑板上寫 14、8），我現在說，請問整數，最少是要等於多少？

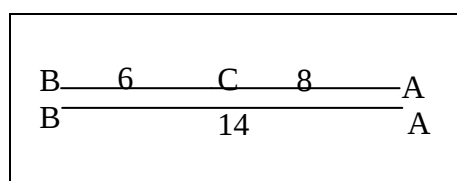
188. 學生：7。

189. 老師：7，那你說，為什麼不是 6？你看一下，我剛剛說什麼樣的東西不行？看一下，這樣 6 的時候就不行了，你說 7，7 再往上就可以了。可是有人問說：「老師，我第一個 7 好難找到，你怎麼知道要找 7？」有的人算的比較慢

，他說，那我怎麼知道要找 7，而且最大呢？除非你就一個、一個寫，一直寫、一直檢測，邊寫邊檢測。要不然，有 100 個要你寫的時候，你怎麼辦？或是通常你大概也沒那麼多整數，如果我要你寫 3、40 個，或者 1、20 個，像剛剛有人會從 6，我們剛剛是從 6 到 22，對不對？6、7、8，有人是一邊寫、一邊講，那一邊寫、一邊講，要是寫 20 幾個的時候，會不會寫很久？我說，那我怎麼知道，第一個要從 6 開始寫，那第一個怎麼寫？最後一個是多少？我怎麼知道到什麼時候要停下來？有時候人家問我問題說：「請問總共有幾個？」總共有幾個，我是不是頭尾知道就好了？有時候，他覺得我們不需要寫這麼多，反正 20 幾個，一個個寫，覺得太囉嗦了，只要知道總共有幾個就好了，這時候的重點在哪裡？頭尾要不要知道？頭尾知道就好了。現在問題又來了，你怎麼知道第一個要寫 7？你的 7 從哪裡來的？想法從哪裡來的？用減的，像我剛在黑板上呈現的 7 的前面應該是多少？

190. 學生：6。

191. 老師：6，6 就不行，你知道 6 呈現在什麼情況下嗎？這邊是 6，現在 $\overline{BC}$ 這個是 6，你知道 6 怎麼來的？ $\overline{AB}$ 這個是什麼？14， $\overline{AC}$ 這個是多少？8，6 的時候剛剛好到它停（A、B、C 在同一直線上），沒辦法，所以第一個 6 可不可以先找到？先知道 6 不可以，接下來的 7 就可以了，這樣的想法可以接受嗎？



好，我現在要問你，如果當初從 7 開始

。我是先不管後面，就換一題（15、9、_____）再考你，第一個是多少？

用整數去想，又是 7 喔！（數據跟前一題重複）

192. 學生：6。

193. 老師：又是 6，有的又是 6，你要不要換數據？我換數據，要不要？沒關係，還是這個，為什麼又是 7？怎麼知道第一個就可以找到 7？芷華，你告訴我，為什麼我第一個就知道 7 就可以了？15 減掉 9，你把它加 1， $15-9=6$ ，6 的時候，就剛好讓它是平的。我說，要可以構成三角形，整數就往上加，就從 7 開始，現在第一個要找誰？可以找得到了嗎？我現在要問你：「最後一個要找到誰？」，像上面這一題，我從 7 開始找，請問要找到誰？我們看一下，我剛剛的 $\overline{BC}$ ，你看 7、8、9、10，再加，一直再加到哪裡不行？
194. 學生：22。
195. 老師：22 不行， $\overline{BC}$ 可不可以 22？你說我的 $\overline{BC}$ 剛剛一直拉（螢幕上呈現 $\overline{BC}$ 增長），對不對？拉到這麼長，可不可以？不行，為什麼？太長了。我居然長到剛好跟你的兩個加起來是一樣的，所以，22 可不可以？22 不行。那你告訴我最後一個應該要寫多少？
196. 學生：21。
197. 老師：21。所以我說，我從 6 開始先找，6 不行，22 是不行的，中間的 7 跟 21，是不是可以找得到？這樣可以，我發現，每一次我在找的時候，就好像有一個範圍在那裡。我現在寫的是什麼？是整數了，如果人家問你整數的時候，7 到 21，你就可以馬上告訴他，而且幾個就可以算出來。君豪再算一次，21 到 7 有幾個？
198. 學生：21 到 7，15 吧！
199. 老師：他算的對不對？
200. 學生：對啊！
201. 老師：你懷疑喔！7 到 21 有幾個？15 個。現在從這裡，你看得到那個第三個邊的變化。我現在就要出問題問你了，好，我把這個（螢幕）拉上去，我開始

出幾題問你了，我們來換幾個邊（10、17、___），我換數據，不要這個（10），也不要這個了（17），我怎麼老愛 7 呢？18 好了，然後這邊給多少？20 好了，給大一點，20、18，請問，從多少開始一直到多少都可以？好，我開始問人，宗翰，為什麼從 3 開始？你覺得 20-18 是多少？2。2 就是平的那個，對不對？2 開始，2 不行，所以我就從 3 開始，3...一直到多少？

202. 學生：37。

203. 老師：37，為什麼你可以找到 37？你告訴大家。

204. 學生：因為 20 加 18。

205. 老師：20 加 18 就拉到平了，對不對？又太長了，38 就不行了，所以它是在 3 跟 37 之間。我問你，我如果沒有問你整數的話，請問這樣的數有多少個？等一會，不要講喔！我如果沒有說整數的話，請問那樣的數有多少個？想好了沒？我點一個，子琪告訴我。我說，剛剛本來是 3，一直 3、4、5、6、7 到 37，整數的我可以去數出來，對不對？現在我沒有限制條件了，請問這邊總共有多少個？

206. 學生：35。

207. 老師：35 個。她說 35 個，從這個到 37，你 35 怎麼算出來的，告訴我。

208. 學生：就是 37 減 3，對，加 1。

209. 老師：那你的 35 個是不是都是整數？

210. 學生：對啊！

211. 老師：再聽我講一遍，我說現在不要整數。

212. 學生：無限多個。

213. 老師：她剛剛沒有聽到我限制的那個條件。我問你，除了這 35 個之外，還有誰？隨便舉。

214. 學生：34.9。

215. 老師：34.9，還有呢？

216. 學生：33.3。

217. 老師：33 是整數。3.1 可不可以？3.2、4.1、4.2，如果我沒有限制整數的話，是不是就無限多個？可是如果我要問你，無限多個怎麼表示？無限多個寫不完耶！無限多個要怎麼告訴人家？你這個邊可以滿足什麼樣的條件？無限多個你又寫不完，如果寫出整數的話，35 個寫得出來。我如果沒有限制是整數，但是我又知道無限多個，有沒有一個替換的表達方式可以表示無限多個？就寫無限符號（ ∞ ），這樣喔！不是，有沒有人可以告訴我？我問你，有沒有無限大跟無限小？我剛剛說，3 可不可以？2 不行耶！然後說，38 也不行啊！但是在這中間可是有無限多個，我們有學過一個符號可以表達它無限多個，也可以說清楚它的一個範圍，有沒有學過？七年級學過一個符號可以用，哪一個符號可以用？

218. 學生：大於（ $>$ ）。

219. 老師：就是比 2 大的都可以，對不對？剛剛說是 3，比 3 大的，是不是？從 3 開始，那 2 不行。好，這樣，我用圖給你們看比較清楚。等一下我再來告訴你範圍，我用圖表示一下來告訴你們（看螢幕）是比較好一點。你看，我剛剛的圖是這樣：6 不行，6.1 可以，6.2、6 點幾都可以，都可以耶！只有 6 不行，只要比 6 大的都可以，比 6 大的有沒有符號可以用？

220. 學生：大於（ $>$ ）。

221. 老師： >6 ，對不對？好，那你說好，比 6 大的都一直有，比 6 大的，反正整數統統放進去，一直放，一直到多少？22 太大，不行，那不能比 22 大，我們用什麼？小於（ $<$ ），你說，我的符號可以用什麼？如果以現在這個例子來

寫的話，我會告訴你，我的 $\overline{BC}$ 這個邊不能 6，只要比 6 大就可以了，可是
一直拉到 22 不行，所以它在哪裡？6 跟 22 之間，這樣範圍的所有的 $\overline{BC}$ 都
可以怎樣？都可以表示出來了。我今天這一節問題三的目的，就是要去找
到這個範圍，這個範圍就在告訴人家， $\overline{BC}$ 可以有無限多個，可是我寫不
完，你就寫這個 $6 < \overline{BC} < 22$ 告訴人家就好了，用以前學過的符號把它寫出
來就可以了。現在我要考一題。黑板上的，請一個人告訴我，它的範圍是
多少？20、18、x，講義上沒有，但是我直接用我剛剛的這題來考就好了
，這個是 x，第三個邊，請你告訴我 x 的範圍。想好，想清楚一下，什麼
時候不行？只要比它大就可以了，什麼時候不行？比它小就可以了，在這
兩個數之間就是它的範圍。準備好了，來，阿泰，告訴我 x 的範圍是多少？

222. 學生： $38 > x > 2$ 。

223. 老師：我要怎麼寫，38，從這裡寫好了， $38 > x > 2$ ，你都是從這樣唸過來的？不是
這樣唸過去的，也可以啦！ $2 < x < 38$ ，來問一下，雅筑，他寫對了嗎？你跟
他的想法一樣嗎？對了，我現在要試試看，等一下我們可以從題目的練習
檢測出你到底懂不懂。好，我從上一節課講到現在，我想做個總整理。你
看一下問題三下面的那個，第二大題開始：三邊關係，從這裡，我們把早

二、三角形三邊關係

(1) 如圖，若 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三邊長，我們可以得到

_____、_____

_____、_____

也就是說_____

但是，若 $c \geq a$ ， $c \geq b$ ，我們不用每次都檢查三遍，只要檢

查_____。所以我們可以將上述結論改

成_____。

上講的做個整理，我給你一個 $\triangle ABC$ ，你告訴我，如果我當初說：隨便兩個邊加起來要大於第三邊，我要檢查三次，那三個事實你可不可以幫我表示出來？我請一個同學告訴我，那三個事實是什麼？我如果要檢查三遍，那要誰+誰>誰、誰+誰>誰？不要重複寫。好，第一個，元敬告訴我，你第一個檢查什麼？翻過來 13 頁，知道我為什麼要點你嗎？知道，因為你比較帥，對不對？還是扣條比較好玩？好，你告訴我，第二大題的第(1)個 a 、 b 、 c 三個邊，我現在要檢查它可不可以構成三角形。我們那時候是怎麼檢查的？來，第一遍是檢查什麼？請你用文字符號表示給我看。

224. 學生： $a+b$ 是不是大於 c 。

225. 老師：所以第一個空格你是檢查 $a+b$ 有沒有大於 c ，對了。好，乙慶來，後面一個，那第二個你會檢查，我們轉一個方向，誰加誰會大於誰？ $b+c>a$ 。好，那最後一遍要檢查的，依靜，你告訴我，最後一遍是誰？

226. 學生： $a+c>b$ 。

227. 老師： a 加 c 會大於 b ，所以，這個我就是把剛剛的結論要你再寫一遍了：「任意兩邊和會大於第三邊」，請你把它用文字符號的敘述再寫一遍，加深你的概念。「任意兩邊和大於第三邊」等於是把我剛剛講的那個結論再重申一次，給你做個整理。下面那個就是我們剛剛第一節有討論的，有沒有？我要不要檢查三遍，需不需要檢查三遍？

228. 學生：不用。

229. 老師：對，宗翰，我不需要檢查三遍，請你看我現在在講義上的提示：現在 c 比較大， c 算是比較大的，那我以上面那三個試著來講，請問我檢查誰就好了？

230. 學生： $a+b$ 。

231. 老師： $a+b$ 怎樣？大於 c 就好了，對，如果你能很明顯的看得出來 c 是比較大的，所以那個空格，我不用檢查三遍了，只要檢查 $a+b>c$ 就可以了。所以剛剛的那個，就是早上誰跟我講的結論，就是文豪要講的結論：「較短的兩邊和大於第三邊」就夠了。你在檢查三角形三邊長的時候，就這樣去檢查就好了。較短的兩邊，其實上面有寫過，我要你再寫一遍，可以加深你的印象。再來下面這個第(2)個，就是我剛剛一直在討論的，很重要的，你先看，寫看看，我等一下來問你，下面第(2)題：如果有一個 a 、 c ，有一個 b 是它的第三邊，請問第三邊必須具備什麼條件？

(2) 如圖，若 a 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三邊長，則 b 必須具備什麼條件？

講這個的時候，讓我看一下，我再舉個例子讓你去體會這個感覺。我們來請同學回答我問題好了，我給你兩個邊，要你找第三邊。開始來了，看到沒？想好囉！請問它可以填誰？我先讓你寫範圍，假設這是 x ，它會在誰跟誰之間？最小、最小拉平不行，要比拉平再大一點，然後拉到那邊要拉平又不行，要比這邊再小一點。所以，那樣的拉平代表一個加、一個減，剛剛有提過，對不對？好了，準備好囉！我現在要問誰？今天是不是每個都被我點過了？差不多了，對不對？好像都被我點完了，姬恩偉的隔壁再隔壁，來，俐君。

232. 學生： $15 < x$ 。

233. 老師： 15 小於 x 小於多少？

234. 學生： 35 。

235. 老師： 35 ，你的 15 怎麼來的？你們需不需要再看圖一次？（學生認為不用） 15 是它把它拉平，兩個剛好平的，短的是它的什麼？ 15 是這兩個怎樣？相減的，那 35 呢？是把它兩個相加，把它拉到最大，也是拉平的，是把它拉到

最小，也是拉平，就是這兩個，比它（15）大，比它（35）小的都可以。現在我的問題來了，告訴我 b 的範圍，我現在給你的是抽象符號（ a 、 c 、 b ），請你從數字去想那個抽象符號的範圍。自己想，這樣會不會寫？邱嶽，你幫我寫，這邊要寫什麼 $\boxed{\text{_____} < b < \text{_____}}$ ？ $a+c$ （學生回答）。剛剛這個可以（老師手指著剛剛舉的實例）聽得懂嗎？可以，那你要寫 $a+c$ ，對不對？可以，那我要問怡萱這個要寫什麼 $\boxed{\text{_____} < b < a+c}$ ？ $|a-c|$ （學生回答）。為什麼它要加絕對值？想一下告訴我。我剛剛都沒有講絕對值，對不對？可是我們剛剛都直接減，你有沒有發現？我們這裡直接減的原因，是因為我數字給你了，而且大小關係都出來了，所以我就知道大的減小的，現在我有沒有告訴你 a 跟 c 誰大誰小？

236. 學生：沒有。

237. 老師：沒有，所以我們就用兩邊差。好，這個第三邊的，最後我們整理來的一個事實，如果我用中文敘述，你知道我要怎麼去敘述這個事實？這個叫第三邊，第三邊要比誰小，知道嗎？兩邊的和要比誰大？比兩邊的差還要大，這是第三邊的，我們找到第三邊的規則是這樣，是可以產生的。所以我們課本上，前面的重點你看一下。把課本打開來，請你翻到 135 頁課本，為什麼我要經歷這樣的活動？因為課本一開始就告訴你 $a+b>c$ ，把所有的東西都告訴你了，就讓你沒有什麼好奇的感覺，把事實都告訴你，所以你會發現，課本一開始就是開宗明義地告訴你 $a+b>c$ ， $b+c>a$ 的這些東西，但是我覺得也讓你去玩一下扣條，比較會有怎樣？有感覺。你只要看最下面一行，粉紅色的那一句話：三角形的隨便一邊，它會小於什麼？兩邊和，就是這一句「隨便一邊會小於兩邊和」，然後，會比誰大？比兩邊差要大。它的整句話的重點就是在講這個，就是在講這句話的意思。但是它這邊因

3-3 三角形的邊角關係

三角形三邊長的关系

任意三個線段是否一定可以圍成一個三角形？

如圖 3-23， $\triangle ABC$ 為任意三角形，我們用小寫英文字母 a 、 b 、 c 來表示 $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長，因為兩點之間以直線的距離最短，我們可以得到：

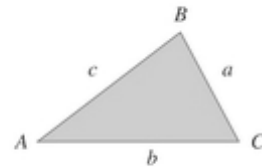


圖 3-23

$$a+b>c \quad \text{①}$$

$$b+c>a \quad \text{②}$$

$$c+a>b \quad \text{③}$$

也就是說，

三角形任意兩邊長的和一定大於第三邊的長。

由①式 $a+b>c$ 可得 $a>c-b$ ，

$$b>c-a。$$

由②式 $b+c>a$ 可得 $b>a-c$ ，

$$c>a-b。$$

由③式 $c+a>b$ 可得 $c>b-a$ ，

$$a>b-c。$$

整理後可得 $a>c-b$ ， $a>b-c$

$$b>c-a$$
， $b>a-c$

$$c>a-b$$
， $c>b-a$

也就是說，

三角形任意兩邊長的差一定小於第三邊的長。

因此我們得到：

三角形任一邊長小於其餘兩邊長的和，大於其餘兩邊長的差。

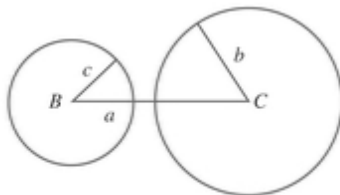
為文字符號敘述的太複雜、太繁複了，我就不去提它，我讓你知道重點在哪裡。好，你看 136 頁，有誰可以告訴我，這三個圖在告訴你什麼？有沒有誰知道，那兩個圓怎樣？你知道它為什麼要畫圓嗎？

136 第3章 · 三角形的基本性質

有三個線段的長度分別為 a 、 b 、 c ，不妨設這三個線段中 $a \geq b \geq c$ ，不等式 $a+b > c$ 與 $a+c > b$ 皆顯然成立，故只須從 $b+c$ 與 a 的大小關係來判斷何時可以形成一個三角形，我們將分別用作圖的方式來討論。

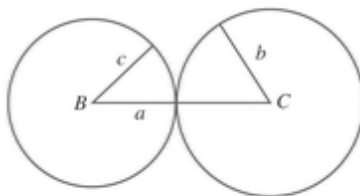
(1) 當 $a > b+c$ 時：

作一線段 $\overline{BC} = a$ ，分別以 B 、 C 兩點為圓心，線段 c 、 b 為半徑畫圓，因為 $a > b+c$ ，所以兩圓不會產生交點，無法與 B 、 C 兩點形成一個三角形。



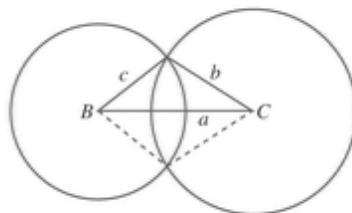
(2) 當 $a = b+c$ 時：

作一線段 $\overline{BC} = a$ ，分別以 B 、 C 兩點為圓心，線段 c 、 b 為半徑畫圓，因為 $a = b+c$ ，所以兩圓的交點在 $\overline{BC}$ 上，無法與 B 、 C 兩點形成一個三角形。



(3) 當 $a < b+c$ 時：

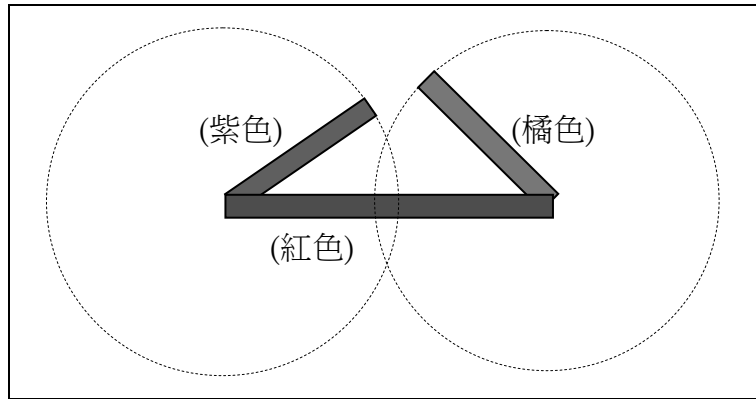
作一線段 $\overline{BC} = a$ ，分別以 B 、 C 兩點為圓心，線段 c 、 b 為半徑畫圓，因為 $a < b+c$ ，所以兩圓會有兩個交點，其中任一個交點與 B 、 C 兩點都可以形成一個三角形。



238. 學生：半徑。

239. 老師：半徑。然後呢？你看你的扣條在轉的時候，剛剛有人把我的扣條拆掉。來，你的扣條這樣嘛，你看我這個扣條在轉，我可以隨便動啊！所以課本上

畫那個圓的意思就是這樣，我可以這樣隨便轉動。其實它需不需要畫到一個圓？它畫到這樣整個圓都畫出來，



會不會畫得有一點誇張？不需要。然後它這邊也畫一個圓，你看最下面為什麼可以構成三角形？因為那兩個圓會有怎樣？會有交點。那第一個圖的那兩個圓【課本 136 頁，圖 (1)】為什麼沒交點？就是那兩根怎樣？太短了，那兩個圓交不到。我這邊還要不要轉一次給你看？這兩個就是這樣，等一下，沒扣好，這個圓畫出來是這樣小小的，這邊的圓畫出來也是這樣小小的，結果兩個圓是沒交集的，所以它畫那個圓的意思，其實就是告訴你：第一，可不可以組成三角形？不行。第二是哪一個？你怎麼兩個圓碰在一起了？兩個圓碰在一起是什麼意思？就是我剛剛講的這個，有沒有？這兩根一樣長，你畫出來的圓就會剛好統統交在這裡，這就是第二個圖【課本 136 頁，圖 (2)】。所以它其實呈現了三種情況給你看：一個小於第三邊、一個等於第三邊、一個是大於第三邊的，所以它們能不能構成三角形，就從這裡看得到。我只是解釋一下課本畫這個圓的意思是什麼。好，你把課本先放一邊，看講義的 3-14，翻過來，開始要做檢測了。剛剛學過的東西，現在從第 3、第 4、第 5，這三題，馬上做練習。等一下我要請同學告訴我答案是什麼。第三題是什麼？三角形的三個邊長是 4、7、還有 a ， a 是整數。好，它現在告訴你： a 是整數，請問 a 有幾個？我問你，數幾個，你們是一個一個開始去寫呢？還是先把剛剛那個範圍想出來，再去數幾個？哪一個

會比較好？還是有人會這樣一個一個去數？

- 3.設一個三角形的三邊長分別是 4 公分、7 公分、a 公分，若 a 是整數，則滿足此條件的 a 共有多少個？
- 4.有三線段，長分別為 $x-2$ 、 $x+2$ 、 $x+6$ ，如果這三線段可以構成一個三角形，請問 x 的範圍如何？
- 5.兩線段的長度分別為 5 公分、11 公分，下列哪一個線段長可以和這兩線段成為一個三角形？
- 6.9 公分、15 公分、20 公分、 $\frac{20}{3}$ 公分

240. 學生：想範圍。

241. 老師：會想範圍，還是有人說：我就從 4 開始，5、6、7，這樣一個個去寫？有沒有人這樣寫的？我看一下你們寫的，寫完了就寫下面一題。我看大部分的人都把範圍寫出來了，我找一個同學上來幫我寫好了，等一下我會做個小測驗，等一下考試一下，看你這邊聽的到底有沒有吸收進去了。你再數一次（君豪），幾個？

242. 學生：七個。

243. 老師：七個。來，君豪，你上來寫你的範圍，告訴大家，那個 a 的範圍是多少？寫給大家看，然後，你的七個是怎麼數出來的？請你告訴大家，沒關係！你告訴大家，你怎麼數的？依靜，你第一個寫幾？七個。來，你的第一題，上來寫給大家看。嘉峻上來寫，你不要看他寫，你寫這邊。有沒有粉筆？沒有是不是？來，這邊有粉筆。好，你可以下來，下來之後看看你寫的跟君豪寫的不一樣在哪裡？我把你的放大，你寫的太小了，來，解釋一下，4 到 12。

244. 學生：對不起，我錯了。

245. 老師：對不起，我錯了。我接受你的道歉，為什麼 12？哪裡不對？你不知道。勁源，你告訴他哪裡不對？
246. 學生：因為 7 加 4 等於 11。
247. 老師：我問勁源，你又回答。好，那嘉峻，你自己講，來。
248. 學生：因為 7 加 4 等於 11。
249. 老師：因為什麼？
250. 學生：7 加 4 等於 11。
251. 老師：因為 7 加 4 等於 11，那你 12 怎麼出現的？我看你很早就寫完了，你 12 怎麼出現的？因為 11 不喜歡，所以就寫了 12？
252. 學生：因為我比較喜歡楊育昇。
253. 老師：因為你喜歡楊育昇，因為楊育昇是 12 號，可是很奇怪，你知道 4 到 12 怎麼會是七個呢？
254. 學生：我也不知道啊！
255. 老師：4 到 12 也不會有七個啊！
256. 學生：12 減 4。
257. 老師：12 減 4，你 4 加 7 加錯了，對不對？再來，12 減 4 也減錯了，你告訴我，你要改什麼？好，我現在問你：我不要寫這個，我們寫我們學過的符號，來，嘉峻，你告訴我 a 的範圍。
258. 學生： a 小於 3。
259. 老師： a 小於...。
260. 學生：3。
261. 老師：小於 3。
262. 學生：小於...。

263. 老師：小於...。
264. 學生：3 小於 a 小於...。
265. 老師：3 小於 a。
266. 學生：小於 7。
267. 老師：好，你再告訴大家一遍，3 怎麼來的？4 減 7？
268. 學生：1。
269. 老師：4 減 1？這邊沒有 1 啊！
270. 學生：7 減 4。
271. 老師：我要不要再給你看一遍那個 7 跟 4？我把它的數據調成 7 跟 4 給你看，好，你再告訴我一遍，3 怎麼來的？
272. 學生：7 減 4。
273. 老師：7 減 4，你再告訴我，11 怎麼來的？
274. 學生：7 加 4。
275. 老師：7 加 4，好，那你告訴我，我的七個可以怎麼算？
276. 學生：七個？
277. 老師：對，七個怎麼算出來的？
278. 學生：11 減 4。
279. 老師：11 減 4。
280. 學生：然後再加一個。
281. 老師：誰減誰？
282. 學生：10 減 4。
283. 老師：10 減 4。
284. 學生：加 1。

285. 老師：加 1，他講的是那個整數 10 減 4 加 1，這樣沒錯了，就是這個，你知道嗎？君豪還是喜歡用一個一個數，君豪，我從剛剛上一節問他那個，有沒有？你記不記得？我剛剛就是問總共有幾個數，誰減誰加 1？你有問我為什麼要加 1，對不對？可是你還是怕怕的，對不對？所以你覺得統統寫出來比較有安全感。你跟他會有一點像的舉手，沒關係，你就承認，無所謂。有沒有人跟他一樣，一個一個寫（有人舉手）。很好，還有沒有誰要一個一個寫的？你覺得就是一個個寫，才可以感覺比較好，其他人都是用數的嗎？其他人都是算的，最小的是 4，最大的是多少？10，然後用 4 跟 10 之間去算，這樣算出來是七個，可是，君豪，你知道剛剛他這樣寫（4、5、6、7、8、9、10、11），君豪，你要特別小心。他寫這樣，他最後這邊又冒出一個 11 來。他無意中會有一些很奇怪的錯誤跑出來，真的要很小心喔！再來，第 4 題，我有沒有給你？跟三個線段長又不太一樣了，這三個都是未知數，我希望它構成三個邊，請問怎麼去找它的範圍？我如果要讓這三個邊構成三角形的三邊長，它具備什麼樣的條件？你要怎麼去檢查？怎麼去列式？有沒有人要給我？

286. 學生： x 大於。

287. 老師： x 怎樣？

288. 學生：大於 6。

289. 老師：你算出來 $x > 6$ ，對不對？你算出來 $x > 6$ 的舉手？這邊有沒有人算出來？你有沒有算出來 $x > 6$ ？沒有，放下來。來，弘傑，你的 $x > 6$ 怎麼算出來的？

290. 學生：就 $x-2$ 加 $x+2$ 。

291. 老師：你把 $x-2$ 怎樣？

292. 學生：加。

293. 老師：加。

294. 學生： $x+2$ 。

295. 老師： $x+2$ 。

296. 學生：大於。

297. 老師：大於。

298. 學生： $x+6$ 。

299. 老師： $x+6$ ，其他剛剛沒有舉手的人，你知不知道弘傑的這個式子在列什麼東西？

好，芳慈，你現在告訴我，你剛剛沒有舉手，對不對？你知道它的式子怎麼來的？兩邊和大於第三邊，對不對？它為什麼要挑這個？那弘傑，你只寫一個式子嗎？還是你寫三個？我不是說要檢查三遍嗎？我問你，要不要檢查三遍？要不要寫三遍？

300. 學生：不用。

301. 老師：不用，那你知不知道，他為什麼挑這樣寫就好？為什麼挑這個寫就可以了？

品如，你告訴我，為什麼他只挑這樣寫？不錯，最短的兩邊怎樣？好，它有沒有告訴你 x 是整數？是正的，這邊 x 也一定要正的，以大小來看， $x-2$ 就比較小， $x+2$ 也是比較小的兩個邊，所以他就選最小的兩個邊大於第三邊，這樣一次就解決完，我需不需要寫三遍？不需要了。然後，由這個不等式，這就是七年級學過解不等式，其實這邊是在移項化簡以前學過的。我找一個人上來解答，幫我把這個解出來。來，元敬幫我解完，解完為什麼這裡是大於 6，幫我解出來。其他解出來的人就去看第五題喔！接下去看第五題，幫我解不等式，等一下我大概小小的測驗一下，好不好？好啦！昨天的那個 29 回，我今天 28 回的前面三題做一個驗收。好， $x>6$ ，來， $2x>12$ 我這邊不講解了，這個部分你們應該比較清楚， $x>6$ 。最後，你看

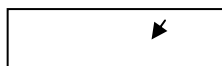
一下這四個邊長，第 5 題(見 P.110)，我給你 5 跟 11，請問下面這四個線段，哪一個可以讓它構成三角形？哪一個是可以的？還是有很多個都可以？我要請乙慶，乙慶，你來告訴我，5 跟 11，現在我要填第三邊，下面有四個選擇讓你選，乙慶，我要請你做一個選擇，你會一個一個去試，你說什麼？6.9 可以，是不是？你是用一個個去試的，對不對？好，再來看 15 可不可以？15 為什麼不行？15 可不可以？想一下，15 又可以了，本來不可以，為什麼會變可以？告訴我。

302. 學生：因為最短的兩個。

303. 老師：最短的兩個加起來。

304. 學生：大於 15。

305. 老師：有比它大，所以 15 又可以了。再來呢？20 可不可以？20 是不行的，再來 $\frac{20}{3}$ 可不可以？你 $\frac{20}{3}$ 稍微化簡一下，可以，是不是？它是多少？大概 6 點多，那為什麼它行？有大於它，那我要問，我如果給你十個答案，就一直試，乙慶，你覺得呢？我如果給你十個選項：下列哪些是可以讓它構成三角形的？我是不是要試十次？就一直試，現在我只給你四個，你一個個試是可以，對不對？依靜，你有聽得懂我問的問題嗎？如果我給你十個，你要怎麼試啊？你還是先把那個範圍找出來，剛剛先找範圍的舉手，剛剛這一題，你有先找範圍的舉手。好，你如果聽懂我問的意思，如果我給你十個，你要這樣一個個試，是不是要試好久？你每一個都要說：最短兩個有沒有大於第三個？最短就這樣，你要檢查幾遍？十遍。所以，如果我不這樣做的話，有沒有一個比較簡單的方法？所以，我剛剛講的那個範圍，你就可以先做了，你可以把它這樣做。好，那我請佳秀告訴我，如果這個



我不知道，假設是 x 好了，你可不可以告訴我， x 的範圍

是多少？

306. 學生：6。

307. 老師：6， $6 < x$ 。

308. 學生：小於 16。

309. 老師：16，現在，乙慶，你再回頭看這個範圍，你把這幾個答案拿來看看，是不是滿足這個範圍就好了？你一看，6.9 可不可以？可以啊！它比 6 大。然後再看 15 可不可以？有啊！在這個範圍裡面啊！然後這個 6 點多，每一個都可以了。所以，剛剛不是用範圍在找的人，如果我給你這樣的選項，你怎麼做比較好？你可以把範圍找出來，然後我們再一個個去檢測，看範圍其實是會比較快的。到這裡，我把考卷發下去，請你拿到你自己的，這是那天我們寫的。

310. 學生：老師，剛剛那第 4 題 $x > 6$ ，它是可以無限大於嗎？

311. 老師：大於 6，你是說哪一個？

312. 學生：剛剛第 4 題。

313. 老師：對，無限大，只要是正的都可以。拿到自己的，好不好？因為上面都有寫名字，等一下，這好像是同一排的，好，拿到自己的，請你寫 28 回的前三題，28 回的前三題就好了。

() 1. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=5$ ，則下列何者不可能是 $\overline{AC}$ 的長？

(A) 3 (B) $\sqrt{35}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $7\sqrt{3}$

2. 若三角形的三邊長分別為 5、12、 x ，則 x 的範圍_____。

3. 若三角形的三邊長分別為 4、9、 $1+2x$ ，則 x 的範圍為_____。

我們好像五分鐘就可以寫完，第一題又碰到根號的問題了，對不對？這個

根號會不會很難看得出來？還是它是很明顯的？我問你，這個第一題跟我剛剛講的這個，我看現在同學下筆下的有點...，第一題跟我剛剛說有四個選項讓你去選，哪一個是不是？你要怎麼想？怎麼想比較好？再一分鐘夠嗎？下面那個第四題是給你當功課，會寫的人就可以...。我等一下就改完了，那第四題帶回家寫吧！第一題的答案都不太一樣，先暗示你們，第一題答案很多人不太一樣，好，第三題又碰到一個問題了，怎麼解不等式？那個不等式有一點忘記了，對不對？儘量把算式寫清楚，我要看到你的算式，我要收回來看，然後不要只有一個答案在那裡，我發現，碰到舊的東西，你們就會開始有一些猶豫不決了。第一個，碰到根號，在這裡做判斷是會有一點困難，還有不等式在這裡要解，你也會碰到一點困難，複習一下其實就好了。我不交換改，我把它當考試，但是請你自己改你自己的就可以了。來，第一題告訴我選哪一個？

314. 學生：D。

315. 老師：寫對的舉手，第 1 題寫 D 的舉手，好，放下來。然後，第 2 題，告訴我，範圍是多少？

316. 學生：17 大於 x 大於 7。

317. 老師：怎麼唸？通常，我們的唸法是這樣，你說什麼？7 小於 x 小於 17，或者寫 17 大於 x 大於 7 ($7 < x < 17$)，可是我習慣唸法是這樣： x 小於 17 大於 7，哪一個唸法比較好？我從中間唸，再唸一次好了： x 小於 17 大於 7。

318. 學生：聽得懂就好了。

319. 老師：聽得懂就好了，是不是？你都是從這邊這樣唸過來，好吧！第 3 題呢？

320. 學生：6 大於 x 大於 2。($2 < x < 6$)

321. 老師：就這樣？給你答案，好，我要問了，這題寫對的舉手，比剛剛少了一些人。

第3題寫對的舉手，又更少了一點點，差不多，1、2、3、4、5、6、7、8、9、10。三分之一，好，你看一下，我剛剛看到你們的第3題，式子列出來，有人就開始傻在那裡了，不知道怎麼去列式，對不對？那個式子會列，還有呢？很多都只列一半，另外一半沒有列出來。我們先從第3題開始講，4、9、 $2x+1$ ，我看到好幾個都是寫這樣就沒了，只寫到這裡（ $2x+1<13$ ），好，邱嶽，你告訴我， $2x+1$ 比 13 小是不是都可以？你的第2題是對的，可是第3題是錯的。好，你也是，子琪，為什麼呢？有這個 x 在這裡是不是干擾？是不是？好，那現在我不要這個「 $2x+1<13$ 」跟那個「 $2x+1$ 」，子琪和邱嶽還有好幾個同學都是同樣的問題，我如果給你 4、9、 a ，來，告訴我， a 的範圍是多少？你會寫 a 的範圍，會喔！ a 小於 13 大於 5（ $5<a<13$ ），其實這個第二題大家都會，對不對？可是你有沒有發現，我現在改什麼而已？我把這個 a 只是把它改得比較複雜，是 $2x+1$ ，那我問你，我將什麼東西換掉就好？是不是換掉 a ，這樣就好了（ $5<2x+1<13$ ）？可是不會解，是不是？剛剛誰啊？勁源就寫到這裡（ $5<2x+1<13$ ）而已，對不對？那要怎麼解？還記不記得怎麼解？還記得等量公理嗎？這裡就是卡在不會解，好，那剛剛只寫一半的人，現在你知道為什麼只寫一半，另外一半要不要寫起來？要啊！這個 $2x+1$ 就是像剛剛我說，那個 a 跟 x 的意思，只是現在它變得複雜，組合起來比較複雜。現在問題來了，請問怎麼解 x 的範圍？對，我們通常都要留 x 下來，先處理旁邊的加減，我們先同減 1，同減 1 會變多少？（ $4<2x<12$ ），再來呢？剩下這個 2 怎麼辦？同除以 2，所以在 2 跟 6 之間，把它訂正一下，這是第3題的，這樣可以嗎？湘凌也是寫到那裡，就是下面那個不等式，所以是不等式不熟，忘記了，這是一個主要的問題。好，再來第2題，第2題錯的比較少，就直接加跟減，對不對？問題在第1題，

第一題這個根號 ($\sqrt{\quad}$)，看起來是不是就很討厭？我給你的是 7 跟 5，給你一串根號的都怎麼辦？開出來，你們現在對這個根號一下子的反應怎樣？沒辦法這麼快，譬如說， $\sqrt{35}$ ，都傻住了， $\sqrt{35}$ 是多少？

322. 學生：5 點多。

323. 老師：35，就馬上想，因為太久沒有這樣去想了，你現在的反應會比較慢， $\sqrt{35}$ 是 5 點多， $6 \times 6 = 36$ 太大，所以 $\sqrt{35}$ 是多少？5 點多，所以，你現在自己寫上去： $\sqrt{35}$ 是 5 點多，可是，問題來了，那 $4\sqrt{3}$ 是多少？

324. 學生： $4\sqrt{3}$ 喔！6.9282032。

325. 老師：君豪，你為什麼可以做那麼快？

326. 學生：因為 $\sqrt{3}$ 等於 1.7320508，所以...。

327. 老師：你背起來啦！你什麼時候背的？我記得我只叫你們背到 1.732，你卻背到 0508。你剛剛偷查表，對不對？

328. 學生：哪裡有表？

329. 老師：有沒有表？沒有，那你怎麼會背得起來？好厲害喔！你有計算機？

330. 學生：我沒有帶計算機。

331. 老師：你也沒帶計算機，好神奇喔！好，那你告訴我， $4\sqrt{3}$ 怎麼辦？我怎麼知道 $4\sqrt{3}$ 有多少？有人說，那我不知道怎麼辦？那就像 $\sqrt{35}$ ，我知道是 5 點多，那 $4\sqrt{3}$ 有人覺得說，我又不知道 $\sqrt{3}$ 是多少，除非你有記住它是 1.7，再來算。有人就說：我們把 4 放進去變成多少？48， $\sqrt{48}$ ，為什麼會變 48，知道嗎？ $4 \times 4 = 16$ 再乘上 3，大概多少？好，就可以寫了，對不對？還有另外一個是多少？

332. 學生： $7\sqrt{3}$ 。

333. 老師： $7\sqrt{3}$ ，可是這樣數字就比較大了，你把它放進去，會變成多少？

334. 學生：147。

335. 老師：147。然後你還要再去算，這樣算，好算嗎？你剛剛是這樣算的舉手。有人是這樣算，你看到 7 比較大，事實上，來，手放下來，我這個 a 的範圍是多少？a 小於 12，大於多少？大於 2。哪一個一定可以選？一定可以選 $\sqrt{35}$ ，這個也很好選， $\sqrt{48}$ 可以選，還有哪一個選項可以選？

336. 學生：3。

337. 老師：3 也可以選，那第 4 個要不要算？

338. 學生：不用。

339. 老師：這就是選擇題的好處了，前面三個都對了，那第四個你根本就不用算了，你可以自己再去驗算，看 $\sqrt{147}$ 一定超出那個範圍了，所以，你在找的時候，有人在處理這個根號，所以這個剛剛同學提供的經驗，你可以把數字放進去，像老師，老師怎麼算？因為我知道它大概是 1.7，我就直接去算了。所以，你如果不知道那個 1.7，直接把它放進去，去找大約值，其實就可以了。我要收回來，看你這三題有沒有訂正完，你先訂正完，下課交給我就可以離開了。把考卷訂正好，下面那一題，等一下我發回去給你當功課就可以了。

參、教學說明

我（莊國彰老師）是一位全程的教學觀察者，也是這次教學的參與課程編訂者，這次的教學，我跟教學者一起參與整個課程的設計。今天整個教學的流程，是由教學者先把整個課程的大綱，在上課之前跟每個學生做一個說明，事後再透過一個操作活動：他們使用的是扣條，一種教具，來操作三角形兩邊長的不等關係。學生從這樣的操作過程中去發現：能夠形成三角形基本的條件，是什麼樣的方式？再經過動態幾何 GSP 的呈現，讓學生加深心理的影像。

那麼，緊跟著再透過一個操作式的活動，去引出給兩個邊長的時候，第三邊要怎麼樣方式的擺設，才可以形成三角形。所以，今天其實整個單元的過程中間，都完全用操作的方式來呈現教學的方法。最後，我們發現，在操作的活動中間，老師經常會忽略總結跟歸納結論。那麼，我們的教學者今天也對這個部分做了一個總結跟歸納，她順便在結束的時候做一個練習，讓學生在整個過程中間，有結束跟評量（或評鑑）。課本原本的教材表現這個單元的方式，是透過直觀的方法，再經過文字的說明，以比較嚴謹的方法去論證。可是我們經常發現這個單元，學生學習時有一些迷思跟一些比較不熟的地方，因此，我們想讓學生從操作中去發現幾何性質，因為我們覺得，操作可以增強學生的心理影像，透過操作的圖像跟我們的結合，就是那個「連結」，學生學習的數學會比較清楚。所以，我們今天在這個單元的教學中，大量的使用「扣條」這個教具讓學生操作，去發現幾何的性質。更棒的是，我們透過 GSP 的展現，因為動態幾何本身的連結，讓學生對那個影像更加地清楚跟清晰。所以，我們這次的教學方式突破了課本的編排方式，想讓學生的幾何學習，透過操作、認知、衝突、了解、辨證來澄清學生的幾何概念。

今天的教學者，我覺得她有一個很棒的特色，她會一直拋問題問學生，從學生的回答中等待、澄清，甚至從學生的想法去發現一些問題，再追問。所以，我覺得拋問題是一個很棒的教學法，不僅抓住了學生的眼睛，也了解學生真正的想法。今天教學者在這個部分的呈現，表現得真的很棒；第二個是，透過動態幾何跟操作活動的連結，讓學生學得的幾何概念，十分的清楚，老師也從學生的問答中發現學生的不足跟缺失，做一些彌補跟補救，所以，我覺得今天的教學者表現得真的很棒、很好。

肆、教學後的省思

在幾何課程裡，「三邊不等式」在老師們的印象中，是一個不好教的單元，若是沒有透過操作，道理說穿了很簡單明瞭，但是學生容易停留在死背「兩邊和大於第三邊」的概念，作題目時也容易弄不清楚為什麼第三邊要小於兩邊和、大於兩邊差。所以這次教學採取有別於課本的編排方式，讓學生透過扣條操作，體驗三角形三邊關係，希望協助中等或中下程度的孩子建立具體的概念。

從學生的練習過程中發現：經過這樣的教學引導，學生鮮少對列式有疑問，反而是對已學過的解不等式及無理數的估算較生疏，複習過後已改善。教學者利用提問的方式引發孩子思考，凝聚孩子的專注力。安排有層次的問題，從中了解不同程度的孩子的學習狀況，盡量安排可能會有迷思的孩子回答問題，藉以更進一步概念澄清；再加上利用電腦 gsp 動畫呈現，希望可以加深孩子的印象。提問過程中，等待孩子回答必須要有耐性，而不要急於告知，這個班的孩子中等程度居多，也許別的老師只要教一節課的內容，而教學者卻足足花了兩節課的時間，因為仍是有學生回答問題時觀念不清楚。

教學者總共教三個班（皆同年級），在作這次教學前已教過兩遍，所以教學時間與流程較為順暢且緊湊，但是三次教學都有修正，也因班級特性不同而有所改變。若是只教一個班，備課功夫更是不可少，因為已沒有第二次可修正教學的對象了。孩子的學習就像一面鏡子，身為教師更要有自省能力，畢竟在教學現場的主角是學生並不是老師。

相似三角形

壹、教學活動設計

一、教學年級：九年級上學期

二、教 學 者：台北縣土城國中 魏姿玟 老師

三、教學目標：

- 1.知道三角形內，平行一邊的直線截另兩邊成比例線段。
- 2.知道三角形中，面積比與底(高)的比的關係。
- 3.能利用平行一邊的直線截另兩邊成比例線段，得出 AAA 相似的性質

四、活動目標：

活動一：利用直接測量法，在三角形與四邊形中觀察平行一邊的直線是否在另兩邊截出成比例線段。

活動二：瞭解三角形中，面積比與底邊比及面積比與高的比的關係。

活動三：演繹證明三角形內，平行一邊的直線截另兩邊成比例線段。

活動四：兩三角形的三內角對應相等，則這兩個三角形相似（AAA 相似）。

活動五：解題活動。

五、教學概要說明：

本單元的教學重點由「平行一邊的直線截另兩邊成比例線段」一以貫之。首先，利用直接測量，讓學生發現「平行一邊的直線截另兩邊成比例線段」的性質；接著，透過此性質，運用題目及演繹法介紹三角形中「面積比與底邊比及面積比與高的比之關係」，此時，再利用演繹法，證明「三角形內，平行一邊的直線截另兩邊成比例線段」；最後，再次透過「平行一邊的直線截另兩邊成比例線段」介紹三角形的 AAA 相似性質。

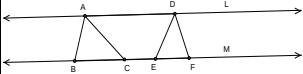
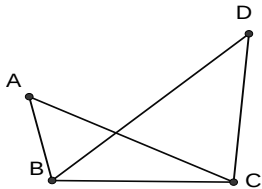
六、教學活動設計：

【第一節】

活動一：利用直接測量法，在三角形與四邊形中觀察平行一邊的直線是否在另兩邊截出成比例線段。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
教師布題	1.畫出等腰三角形及正方形、平行四邊形、等腰梯形，並在圖形上畫出平行底邊的直線，觀察與上、下底平行的直線是否在兩邊截出成比例線段(運用測量)。	運用觀察及測量，學生可以直觀地判斷所截的線段是否成比例，測量時應會有誤差，教師可指導學生取近似值即可。	知道平行線截出成比例線段。
- 教師布題 - 學生操作解題	2.利用測量結果，探討「部分與全部之比」是否等於「截線段與底邊之比」。		知道「部分與全部之比」等於「截線段與底邊之比」。
學生發表	3.請學生上台演示及發表組內操作及討論的成果。 4.此活動可歸結出：只有在三角形中，「部分與全部之比」等於「截線段與底邊之比」。		

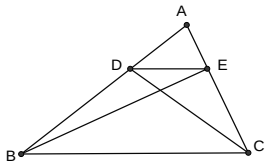
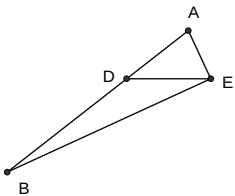
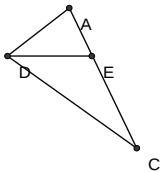
活動二：瞭解三角形中，面積比與底邊比及面積比與高的比的關係。

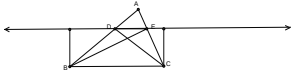
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 教師講解	 1. $L \parallel M$，且 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 的高均為 5，$\overline{BC} = 3$，$\overline{EF} = 1$，則 (1) $\triangle ABC : \triangle DEF = ?$ (2) $\triangle ABC : \triangle DEF$ 面積比是否等於 $\overline{BC} : \overline{EF}$?  2. $\triangle ABC$ 的高為 2，$\triangle DBC$ 的高為 5，且 $\overline{BC} = 7$，則 (1) $\triangle ABC : \triangle DBC = ?$ (2) $\triangle ABC : \triangle DBC$ 面積比是否等於高的比？ 3. 運用演繹證明：(將底和高用文字符號替代) 1. 等高三角形的面積比=底邊比 2. 同底三角形的面積比=高的比	- 運用數字可以看出等高三角形的面積比=底邊比 同底三角形的面積比=高的比 - 運用證明步驟學生較不習慣，需讓學生實際演練。	知道等高三角形的面積比=底邊比，同底三角形的面積比=高的比

【第二節】

利用平行一邊的直線截另兩邊成比例線段，得出 AAA 相似的性質。

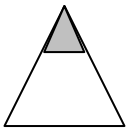
活動三：演繹證明三角形內，平行一邊的直線截另兩邊成比例線段。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
教師布題，學生操作	1. $\triangle ABC$ 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  (1)  將 $\overline{AD}$、$\overline{DB}$ 看成 $\triangle ADE$、$\triangle EDB$ 的底，則 $\triangle ADE$ 面積：$\triangle EDB$ 面積 = $\overline{AD}$：$\overline{DB}$ (2)  將 $\overline{AE}$、$\overline{EC}$ 看成 $\triangle ADE$、$\triangle DEC$ 的底，則 $\triangle ADE$ 面積：	學生對演繹證明接觸不多，對於嚴謹的證明過程不甚熟悉，需多講解幾次。	學生能透過證明過程了解三角形內平行一邊的直線截另兩邊成比例線段。

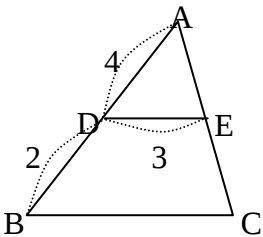
	$\triangle DEC$ 面積 = $\overline{AE} : \overline{EC}$ (3)  將 $\overline{DE}$ 看成 $\triangle EDB$ 、 $\triangle DEC$ 的底，則 $\triangle EDB$ 面積 = $\triangle DEC$ 面積 綜合 (1)(2)(3) 所以 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 2. 逆推 $\overline{AD} : \overline{DB}$ $= \overline{AE} : \overline{EC}$ $\Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$		
--	---	--	--

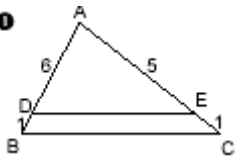
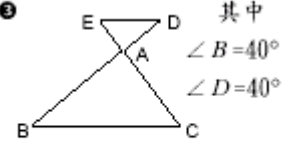
活動四：兩三角形的三內角對應相等，則這兩個三角形相似（AAA 相似）。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
教師布題、教師講解	- 若兩三角形的對應角相等，是否相似？ - 利用兩個三對應角相等，但大小不等的三角形把一個對應角疊合在一起，顯示：角的兩邊疊合時，第三邊相互平行。	- 學生一開始會懷疑為什麼將對應角疊合，第三邊會相互平行；在利用同位角相等的性質說明後，學生應可以了解。 - 學生可以說出三角形相似的條件。	能正確說出三角形相似的條件。

	(以兩個相似三角形圖卡演示)  說明：平行三角形底邊的截線把另二邊截成比例線段，且上半段與全段的比等於截線段與底邊的比。 3.說明： 「若兩個三角形的三個內角對應相等，則這兩個三角形相似。」 ⇒AAA 相似		
--	---	--	--

活動五：解題活動。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
教師布題、學生討論、分組解題	1.如圖，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AD}=4$，$\overline{BD}=2$，$\overline{DE}=3$，求 $\overline{BC}=?$ 		能利用三角形的相似條件來解題。

	2. 下列各小題中， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 是否相似？ ❶  是否相似？理由： _____ ❷  其中 $\angle B = 40^\circ$ $\angle D = 40^\circ$ 是否相似？_____ 理由：		
--	---	--	--

貳、教學實錄

【第一節】

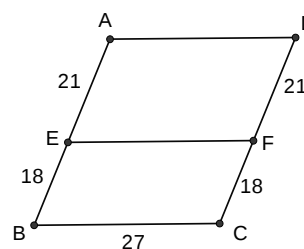
- 老師：我們這節課要上的是相似三角形，我們來這看一下這節課要學的重點。好，等一下，等它慢慢跑，這個電腦跑的有點慢。第一個重點我們要學的是：圖形當中，平行底邊的線是不是會在圖形的兩邊截出成比例的線段？等一下我們會來試試看。第二個重點就是：我們要看面積的比跟底跟高的比有什麼樣的關係？
- 老師：好，這是我們這堂課要學的兩個重點。第一個重點，要請你們動手量一量，我的投影片上面出現的所有線段，都是要請你們拿尺把它量出來的。來，我有準備幾個圖形，現在我這邊總共有五個圖形（教師自己作的三角形、梯形、正方形、長方形、平行四邊形），這五個圖形請每一組派一個人出

來選，看你們那一組喜歡量哪一個圖形。上面我都有標好 A、B、C、D、E、F，這個投影片上面出現的所有線段，都請你們量出它的長度。來，我要先問一下，有沒有哪一組沒帶尺的？每一組派一個人把你們的尺舉出來讓我看一下，好，放下。每一組派一個人過來我這邊挑一下，你們這一組要哪一個圖？還有兩組，來，現在開始測量。你們在測量的時候，還要選一個同學上台來發表，不要忘記了。三角形沒有 ABCD 怎麼辦？來，請把 D 改成 A，我上面不是有 D 嗎？你把 D 改成 A，不是，上面的 D 相當於你們這裏的 A，清楚了。你們討論可以大聲一點沒有關係。

3. 老師：你們量好了嗎？
4. 學生：量好了。
5. 老師：哇，你們動作真迅速！
6. 學生：對啊，因為有兩把尺啊！
7. 老師：所以你們一人量一邊就對了！
8. 學生：對呀！
9. 老師：那麼快就好，你們誰上去？
10. 學生：雅筑。
11. 老師：所以，還是雅筑上去囉！雅筑不會心理壓力很大嗎？
12. 學生：很可怕。
13. 老師：有什麼關係？
14. 學生：她自己講話。
15. 老師：不會呀，你的聲音很清楚。像你平常講話的聲音上去講就可以。你們動作很快，不錯不錯。你們量好了嗎？
16. 學生：量好了。

17. 老師：這麼迅速，來，誰上去？
18. 學生：佩希。
19. 老師：佩希上去，好。佩希，你記得字要寫整齊一點。你們動作都很快。你們呢？誰上去？都量好了嗎？你們都差不多了哦！
20. 老師：一個人一張，這是要對分的，多的給我。這是等一下各組的報告，你們要記得把它記錄下來。來！每個人分，多的要記得給我。
21. 學生：要撕哦？
22. 老師：對，要對半撕，多的再給我就好了。
23. 學生：老師，要不要抄？
24. 老師：不要，直接貼在筆記本上，等一下別組上去報告的時候，要把它記下來。
25. 老師：小數點的話，麻煩四捨五入到整數位。剛剛發下去這個學習單，是等一下每組上來報告的結果，你們要把它寫下來。還沒有好的那一組，麻煩舉手告訴我一下，都好了！好了就沒有聲音了。我要先看有沒有哪一組要先上來？好。你們先上來。記得拿不同顏色的粉筆。
26. 學生：各位同學，大家好。
27. 老師：大聲一點。
28. 學生：我們這一組量出來的是平行四邊形(見圖一)。 $\overline{AE}=21$ ， $\overline{BE}=18$ ， $\overline{DF}=21$ ，

平行四邊形 ABCD 中，



- 1、 $\overline{AE} : \overline{EB}$ 是否等於 $\overline{DF} : \overline{FC}$
 $(7 \cancel{21} : 48 \ 6 \quad 7 \cancel{21} : 48 \ 6)$ 是
- 2、 $\overline{AE} : \overline{AB}$ 是否等於 $\overline{DF} : \overline{DC}$
 $(7 \cancel{21} : 39 \ 13 \quad 7 \cancel{21} : 39 \ 13)$ 是
- 3、 $\overline{AE} : \overline{AB}$ 是否等於 $\overline{EF} : \overline{BC}$
 $(7 \cancel{21} : 39 \ 13 \quad 1 \ 27 : 27 \ 1)$ 否

圖一

$\overline{CF}=18$ 。 $\overline{AE}$ 用 3 來約分，變成 7， $\overline{BE}$ 也用 3 來約分，變成 6， $\overline{DF}$ 、 $\overline{CF}$ 用 3 約分後也是 7、6， $\overline{AE}:\overline{BE}$ 是否等於 $\overline{DF}:\overline{CF}$ ？是。 $\overline{AE}=21$ ， $\overline{AB}=21+18=39$ ，用 3 來約分， $\overline{AE}$ 變成 7， $\overline{AB}$ 變成 13， $\overline{DF}=21$ ， $\overline{DC}=21+18=39$ ，用 3 來約分， $\overline{DF}$ 變成 7， $\overline{DC}$ 變成 13， $\overline{AE}:\overline{AB}$ 是否等於 $\overline{DF}:\overline{DC}$ ？一樣。 $\overline{AE}$ ，一樣是 21， $\overline{AB}=39$ ， $\overline{EF}=27$ ，因為 $\overline{EF}\parallel\overline{BC}$ ，所以 $\overline{BC}$ 也是 27，用 3 來約分， $\overline{AE}$ 變成 7， $\overline{AB}$ 變成 13， $\overline{EF}$ 、 $\overline{BC}$ 剛好一樣，變成 1 比 1， $\overline{AE}:\overline{AB}$ 是否等於 $\overline{EF}:\overline{BC}$ 嗎？沒有一樣，所以答案「否」。

29. 老師：不錯不錯，講的很清楚，有沒有問題？

30. 學生：沒有。

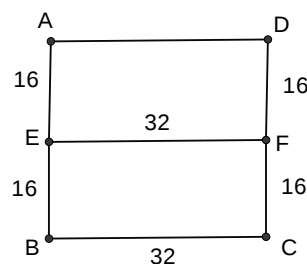
31. 老師：有沒有問題要考她的？沒有，她講的大家都聽的懂喔。好，下一組。

32. 學生：各位同學，大家好。我們這一組是正方形（見圖二）。 $\overline{AE}=16$ ， $\overline{EB}$ 因為是正方形，所以上下一樣，也是 16，所以 $\overline{AE}:\overline{EB}$ 是 16:16，用 16 來約，是 1:1； $\overline{DF}$ 和 $\overline{CF}$ 也都是 16，所以比出來是 16:16，1:1，因為兩邊是一樣，變成「是」。 $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}=32$ ，16:32，被約化成 1:2， $\overline{CD}=\overline{DF}+\overline{CF}=32$ ，這邊也是 16:32。

33. 老師：佩希，慢一點。

34. 學生：約掉等於 1:2，兩邊都是一樣大，這題也是「是」。下面， $\overline{AE}:\overline{AB}$ 也是

正方形 ABCD 中，



- | | |
|---|---|
| 1、 $\overline{AE}:\overline{EB}$ 是否等於 $\overline{DF}:\overline{FC}$ | |
| ($16:16$ $16:16$) | |
| 1:1 1:1 | 是 |
| 2、 $\overline{AE}:\overline{AB}$ 是否等於 $\overline{DF}:\overline{DC}$ | |
| ($16:32$ $16:32$) | |
| 1:2 1:2 | 是 |
| 3、 $\overline{AE}:\overline{AB}$ 是否等於 $\overline{EF}:\overline{BC}$ | |
| $16:32$ $32:32$ | |
| 1:2 1:1 | 否 |

圖二

1:2, 因為 $\overline{EF} = \overline{BC}$, 所以都是 32, $\overline{EF} : \overline{BC} = 1 : 1$, $\overline{AE} : \overline{AB} \neq \overline{EF} : \overline{BC}$, 所以第 3 題算式「否」。

35. 老師：謝謝佩希，我發現有一個狀況，你們常看到的是佩希的臉還是屁股？

36. 學生：屁股。

37. 老師：佩希，你是對我們大家講話喔，不是屁股對我們講話。記得你要臉對著我們，其他上來的同學，要記得臉對著我們，你的屁股不會講話，那是拿來坐的，不是拿來講話的，知道喔！來，下一組。還有哪一組還沒發表過的？來。

38. 學生：各位同學好。我們這一組測量出來的結果。 $\overline{AE} = 20$, $\overline{EB} = 16$, $\overline{DF} = 20$, $\overline{FC} = 16$, $\overline{EF} = 31$, $\overline{BC} = 36$, 然後...

39. 學生：老師，我有問題。

40. 老師：好，來。

41. 學生：請問一下是什麼形？

42. 學生：梯形(見圖三)。

43. 老師：這樣很清楚，後面同學都看的到。

44. 學生： $\overline{AE} = 20$, $\overline{EB} = 16$, 然後 $\overline{DF} : \overline{FC} = 20 : 16$, 約分後是 5 : 4。

45. 老師：我有問題，為什麼是 5 比 4？

46. 學生：因為都用 4 約分的啊。

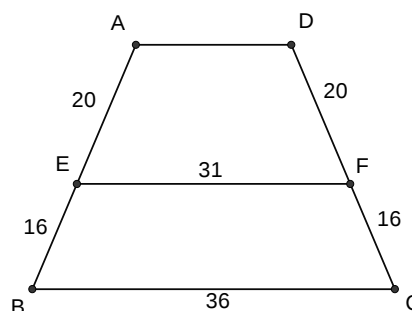
47. 老師：都用幾約分？

48. 學生：都用 4 約分。

49. 老師：用 4 約分，好。

50. 學生：所以是相等。好，第 2 題， $\overline{AE} = 20$, $\overline{AB} = 20 + 16 = 36$, $\overline{DF} = 20$, $\overline{DC} = 20 + 16 = 36$

梯形 ABCD 中，



- | | | | | |
|----|---------------------------------|------|---------------------------------|---|
| 1、 | $\overline{AE} : \overline{EB}$ | 是否等於 | $\overline{DF} : \overline{FC}$ | |
| | 5 20 | | 4 16 | 是 |
| 2、 | $\overline{AE} : \overline{AB}$ | 是否等於 | $\overline{DF} : \overline{DC}$ | |
| | 5 20 | | 4 36 | 是 |
| 3、 | $\overline{AE} : \overline{AB}$ | 是否等於 | $\overline{EF} : \overline{BC}$ | |
| | 5 20 | | 31 36 | 否 |

圖三

，都用 4 來約分，所以 $\overline{AE} : \overline{AB} = 5 : 9$ ， $\overline{DF} : \overline{DC} = 5 : 9$ 。

51. 老師：兩組線段比相等嗎？

52. 學生：相等。

53. 學生：所以寫第 2 題「是」。然後第 3 題， $\overline{AE} = 20$ ， $\overline{AB} = 36$ ， $\overline{EF} = 31$ ， $\overline{BC} = 36$ 。

54. 老師：20 : 36 可以約分嗎？

55. 學生：可以。

56. 學生：用 4 約，5 : 9，這裏 (31 : 36) 不能約分，所以不相等。

57. 老師：都沒有問題哦！等一下，我有。你

先不要擦。來，聞豐，想請問一下

，這裏沒有比耶，你這裏（算式中
各邊長之間，均未寫「：」）沒有
寫比，為什麼可以約分呢？

58. 學生：忘記寫了。

59. 老師：好，其他有沒有什麼問題？

60. 學生：沒有。

61. 老師：好，把它擦掉，擦乾淨一點。

62. 學生：老師，他擦太快了！

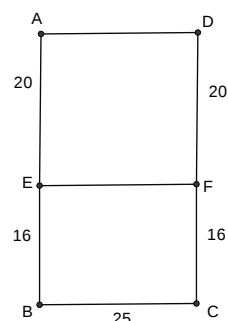
63. 老師：擦太快了哦，有擦掉的記得把它補
上。好，下一組。

64. 學生：各位同學，大家好。

65. 學生：好。

66. 學生：我要介紹的這個四邊形是長方形(

長方形 ABCD 中，



1、 $\overline{AE} : \overline{EB}$ 是否等於 $\overline{DF} : \overline{FC}$

$$\begin{array}{ll} (\overline{20} : \overline{16} & \overline{20} : \overline{16}) - \\ = 5 : 4 & = 5 : 4 \end{array} \quad \text{是}$$

2、 $\overline{AE} : \overline{AB}$ 是否等於 $\overline{DF} : \overline{DC}$

$$\begin{array}{ll} (\overline{20} : \overline{36} & \overline{20} : \overline{36}) - \\ = 5 : 9 & = 5 : 9 \end{array} \quad \text{是}$$

3、 $\overline{AE} : \overline{AB}$ 是否等於 $\overline{EF} : \overline{BC}$

$$\begin{array}{ll} (\overline{20} : \overline{16} & \overline{25} : \overline{25}) - \\ = 5 : 9 & = 1 : 1 \end{array} \quad \text{否}$$

圖四

見圖四)。量出來的 $\overline{AE} = 20$ ， $\overline{EB} = 16$ ， $\overline{DF} = 20$ ， $\overline{FC} = 16$ ，所以第 1 題， $\overline{AE}$

： $\overline{EB}=20:16$ ， $\overline{DF}:\overline{FC}=20:16$ ，用 4 約分，可以變成 $5:4$ 。

67. 學生：所以第 1 題相不相等？
68. 學生：相等。
69. 學生：所以是「是」。再來第 2 題，老師，我有問題，這是什麼？
70. 老師： $\overline{AE}$ ，他不小心擦掉了。
71. 學生： $\overline{AE}=20$ ，比上 $\overline{AB}$ ，20 加 16 是多少？
72. 學生：36。
73. 學生：36，所以 $\overline{AB}=36$ 。 $\overline{DF}=20$ ， $\overline{DF}+\overline{FC}$ 呢？也是 36，所以 $\overline{CD}$ 也是 36，用 4 約分， $\overline{AE}:\overline{AB}=5:9$ ， $\overline{DF}:\overline{DC}=5:9$ ，所以第 2 題相不相等？
74. 學生：相等。
75. 學生：所以是「是」。再來，老師我有問題。
76. 老師：這還是 $\overline{AE}$ ，他不小心擦掉了。
77. 學生：所以 $\overline{AE}:\overline{AB}=20:36$ ， $\overline{EF}:\overline{BC}=25:25$ ，然後 $\overline{AE}:\overline{AB}$ 用 4 約分，變成 $5:9$ ， $\overline{EF}:\overline{BC}$ 用多少約分？
78. 學生：25。
79. 學生：25:25，所以是 1:1，這兩組線段比相不相等？
80. 學生：不相等。
81. 學生：所以是「否」。有沒有問題？
82. 學生：沒有。
83. 學生：謝謝大家。
84. 老師：好了，林浩換你了。來，林浩，等一下你擦完的時候，幫我把 E 補上去。我們歡迎最後一組。

85. 學生：我們量的是三角形。因為我們這一組沒有 D，所以 A 等於 D，我們量出來的 $\overline{AE}=19$ ， $\overline{BE}=19$ (見圖五)。

86. 老師：聽的清楚嗎？

87. 學生：聽不清楚。

88. 學生： $\overline{AF}=22$ ， $\overline{AE}:\overline{BE}=19:19$ ，約分等於 $1:1$ ， $\overline{AF}:\overline{CF}=22:22$ ，約分也是 $1:1$ ，所以 $\overline{AE}:\overline{BE}=1:1=\overline{AF}:\overline{CF}$ 。 $\overline{AE}=19$ ， $\overline{AB}=38$ ， $\overline{AF}=22$ ， $\overline{AC}=44$ ，約分等於 $1:2$ ， $1:2$ 。所以「是」。前面用 19 約，後面用 22 約。

89. 老師：等一下，我有問題，這怎麼約分約成 $1:2$ ？

90. 學生：我已經問了，他都沒有寫。

91. 老師：你話講清楚。

92. 學生： $\overline{AE}:\overline{AB}$ 用 19 約， $\overline{AF}:\overline{AC}$ 用 22 約。

93. 老師：約了之後變成什麼樣子？

94. 學生：就變成 $1:2$ ，這個 $(22:44)$ 也是 $1:2$ ， $\overline{AE}$ 是 19， $\overline{AB}$ 等於 38。

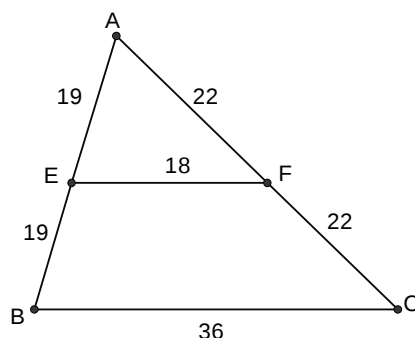
95. 老師：聽的清楚嗎？

96. 學生：聽不清楚。

97. 老師：林浩重講一下好了。

98. 學生： $\overline{AE}$ 是 19 比上 38， $\overline{AE}:\overline{AB}:\overline{EF}$ 是 18。($\overline{AE}:\overline{AB}$ 是 19 比上 38，而 $\overline{EF}$ 是 18)

三角形 ABC 中，



1、 $\overline{AE}:\overline{EB}$ 是否等於 $\overline{AF}:\overline{FC}$
($19:19$ $22:22$) 是

2、 $\overline{AE}:\overline{AB}$ 是否等於 $\overline{AF}:\overline{AC}$
($19:38$ $22:44$)
= $1:2$ = $1:2$ 是

3、 $\overline{AE}:\overline{AB}$ 是否等於 $\overline{EF}:\overline{BC}$
($19:38$ $18:36$) 是

圖五

99. 老師：有沒有覺得他嘴巴好像含著東西？
100. 學生： $\overline{BC}=36$ ， $\overline{EF}:\overline{BC}=18:36$ ， $\overline{AE}:\overline{AB}$ 用19約， $\overline{EF}:\overline{BC}$ 用18約，等於1:2，等於「是」。
101. 老師：等一下，先不要急著擦。
102. 學生： $\overline{EF}$ 是多少？
103. 學生： $\overline{EF}=18$ 。
104. 學生：看不到。
105. 老師：應該把它拉出來寫啊！嗯，好。聽得懂林浩講的嗎？
106. 學生：聽不懂。
107. 老師：聽不懂怎麼不趕快考他一下，趕快問他。
108. 學生：他口齒不清。
109. 老師：什麼，再講一次，他！周杰倫。
110. 學生：他叫周杰倫。
111. 老師：好，我們期待他變成下一個周杰倫，他變成林杰倫好了，好不好？來，擺桌上就好。現在我留時間請你們把手上這個學習單完成之後，看一下是不是總共五個圖形，這五個圖形出來的答案，有些一樣，有些不太一樣，請討論看看，可以討論出好幾個結論喔！你們討論出來的結論，直接寫在學習單上面，等一下我來問問看各組，觀察出來是什麼樣的結論，直接寫在學習單上面。看看你觀察出來，有的是「是」的，有的是「否」的，為什麼？觀察一下，你們可以各組去討論看看。這不能問我，我只能去看看你們討論的狀況。
112. 學生：（行間巡視時，學生問）是否要將三角形切割成一個小三角形及一個梯形？
113. 老師：沒有啊，只是三角形而已呀！

114. 老師：嗨，什麼事？長方形，怎麼樣？
115. 學生：老師，你可不可以把圖卡貼上去？
116. 老師：圖卡貼上去。好，我把圖卡貼上去。怎麼樣？
117. 學生：要看線段。
118. 老師：要看線段，好。
119. 學生：今天沒有值日生？
120. 老師：我忘了找值日生。
121. 學生：18，19。
122. 老師：第一個是什麼形？
123. 學生：第一個正方形。
124. 老師：第一個是正方形。
125. 學生：長方形。
126. 老師：長\方形。
127. 學生：梯形。
128. 老師：梯形。
129. 學生：平行四邊形。
130. 老師：平行四邊形。
131. 學生：三角形。
132. 老師：三角形，好，貼在上面了。沒關係。你們都沒有討論出結論哦！結論可以直接寫在上面，錯了沒有關係。你們沒有看出那個結論，來，你們沒有看出那個結論嗎？
133. 學生：老師，我知道。
134. 老師：沒關係，你可以試試看，來。有一半對了，有一組觀察出來，只有三角形

第三題是「是」，其它的第三題都是「否」。然後，來，現在是下課時間，留這個讓你們討論一下，為什麼只有三角形？等一下，我要請你們觀察一下，不同的圖形當中，它們有哪些共同點？有哪些不一樣的地方？知道喔！利用下課時間我們來討論一下，然後等一下上課的時候就記得回來，好，我們下課。

【第二節】

135. 老師：我剛剛忘了請你們選一下每一組講的比較好的，對不對？來，我們每一組先大家想一下，不能選自己人喔。挑出兩位，這兩組呢？我打算要給他們加分，加在哪裏？加在下一次小考成績上，第一名的那一組，講的最好的那一組，下一次考試，每一個人加 20 分，然後第二名的，下一次考試，每一個人加 10 分，直接加在小考成績上，仔細想哦！不能自己人舉自己人。
136. 學生：為什麼？
137. 老師：這樣不公平啊！不能舉自己人，你要舉別組的，仔細想喔！這一組講的人是誰？
138. 學生：雅筑。
139. 老師：雅筑。這一組講的人是？
140. 學生：佩希。
141. 老師：佩希。這一組講的人是？
142. 學生：聞豐。
143. 老師：聞豐。來，這一組講的人是？
144. 學生：林浩。
145. 老師：林浩。好，來，這一組講的人是？
146. 學生：依柔。

147. 老師：依柔。想一下喔，每個人有兩票，因為我們選兩個人嘛，一人兩票哦，我在上面計票。
148. 老師：從這裏開始順序過去，這裏是第一組、二、三、四、五。好，你覺得第一組的，想清楚，一個人兩票，來，你覺得雅筑這一組講的比較好的舉手。沒有兩票都舉同一個人哦，來，1、2、3、4、5、6、7、8、9...，17 個。再來，你覺得佩希那一組講的不錯的，請舉手。好，不錯。這個友情贊助的，就贊助的阿莎力一點，你不要假裝抓頭，1 個、2 個？1 個，好，來。
149. 學生：你要先賜票一下。
150. 老師：再來，覺得聞豐講的不錯的，1、2、3、4、5、6、7、8、9...，好，請放下，15 票。覺得林浩講的不錯的，哪有自己舉自己的？1、2、3、4，好，請放。覺得依柔講的不錯的請舉手，1、2、3、4、5、6、7、8、9...，16，好，請放。來，看清楚了，可以加 20 分的，雅筑那一組。雅筑，妳要把它記下來，妳們這一組的名單，可以加分的人。再來，很可惜哦！差一點點，我們以多數決，可以加 10 分的是依柔這一組，這可以加 20，然後這個 10 分，等一下大家覺得呢？他如果加 5 分，這樣公平嗎？他們加 5 分呢？但是他們也差一票耶，他們差一票就可以加 20 分了，那這樣怎麼辦？
151. 學生：大家一起加。
152. 老師：大家一起加，就是 25 分，15 分，10 分，你們覺得要每一組都有加分嗎？這樣好了，我們以 5 分為單位，最後一個就加 5 分，然後以此遞增，這樣子好不好？
153. 學生：好。
154. 老師：好喔！妳要把它記下來喔！雅筑要把它記下來，這個加 5 分，這個加 10 分，這個加 15 分，來，這個加 20，25，好，這樣皆大歡喜，可是下次不要

只有給我考蛋哦！不要想說可以加分所以就直接考蛋，好，林浩想表演嗎？

155. 學生：好。

156. 老師：林浩在那邊一直腳抖來抖去，林浩要不要來表演一下，給我們即興娛樂一下，好不好？來，我們回到剛剛的那個學習單了，來！每個人仔細看了，現在要聽我講了，這個學習單上有沒有發現前兩題都是「是」？

在_____形 ABCD(ABC)中，
1、 $\overline{AE} : \overline{EB}$ 是否等於 $\overline{DF} : \overline{FC}$
2、 $\overline{AE} : \overline{AB}$ 是否等於 $\overline{DF} : \overline{DC}$
3、 $\overline{AE} : \overline{AB}$ 是否等於 $\overline{EF} : \overline{BC}$
圖六

157. 學生：對。

158. 老師：仔細觀察，前兩題的題目是不是每一題都一樣？(見圖六)

159. 學生：對。

160. 老師：來，前兩題題目指的，你會發現指的都是兩邊兩側，比如說，第 1 小題問的都是： $\overline{AE} : \overline{EB}$ 有沒有等於 $\overline{DF} : \overline{FC}$ ？是不是都是兩側，而且都是兩側的上比下會不會等於上比下，對不對？好，這五個圖形當中，有沒有發現都是「是」，有嗎？有。好，然後再來，第 2 小題問的是，上比全部會不會等於另外一邊的上比全部，觀察一下題目，是不是？

161. 學生：是。

162. 老師：是嘛！然後再來看一下，這些圖形有什麼樣的性質？我中間畫的這條橫線，它有沒有跟底邊平行？

163. 學生：有。

164. 老師：你們在量的時候，有沒有發現它跟底邊是平行的？

165. 學生：有。

166. 老師：有喔！好，所以，它得出了一個結論，這個結論就是，只要是平行，某一

條線平行底邊的話，它在兩側截出來的線段，會不會成比例？

167. 學生：會。

168. 老師：只要我在圖形當中有一條線跟底邊是平行的，它在兩側截出來的線段，會不會成比例？

169. 學生：會。

170. 老師：而且，上比下會成比例之外，上面比全部是不是也會成比例？好，倒過來問，下面比全部，會不會成比例？

171. 學生：會。

172. 老師：猜一猜，下面比全部會不會成比例？

173. 學生：會。

174. 老師：會呀！上面比全部都成比例，那下面比全部是不是也會成比例？

175. 學生：會。

176. 老師：所以，這個就是我們第一個結論，平行線會截出成比例的線，來，我們看投影片。

177. 老師：這裏，等一下，因為電腦反應不是很靈敏，好，看到了嗎？

178. 學生：沒看到。

179. 老師：有看到了嗎？

180. 學生：有了。

181. 老師：看到了沒？後面的人看的到嗎？來，這一句話，平行線可以截出成比例的線段，這是我們第一個結論，請把它寫下來。這是我們學習單中第一個結論：平行線可以截出成比例的線段。

182. 學生：寫在哪裏？

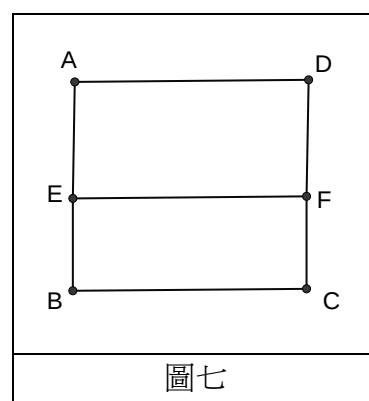
183. 老師：寫在哪裏？寫在學習單空白的地方。你要寫多大都無所謂。

184. 學生：結論是什麼？

185. 老師：結論是什麼？我剛才不是有講了嗎？平行線可以截出成比例的線段。接下來，第二個就是我要提的問題，如果有一條線，確定它在兩側截出成比例的線段，這個成比例的線段，可以是上比下成比例（ $\overline{AE} : \overline{EB}$ ），或者上比全部（ $\overline{AE} : \overline{AB}$ ），可以想像嗎？好，我拿一個圖卡來，這上比下（ $\overline{AE} : \overline{EB}$ ）等於上比下（ $\overline{DF} : \overline{FC}$ ），能不能說這條線跟底邊平行（ $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ）（見圖七）？

186. 學生：可以。

187. 老師：我倒過來講，剛剛是說，已經先畫出平行線，所以，可以知道這兩側是成比例，對不對？倒過來，我先知道兩側成比例，能不能說這二條線平行？可以，對不對？所以第二句話，我不能推斷這一條線跟某一邊平行？可不可以？



188. 學生：可以。

189. 老師：可以，還是不行？

190. 學生：可以。

191. 老師：好，那再請問，如果在三角形裡頭，上面比全部（ $\overline{AE} : \overline{AB}$ ），等於上面比全部（ $\overline{AF} : \overline{AC}$ ），這兩條線有沒有平行（ $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ）？（見 P.136 圖五）

192. 學生：有。

193. 老師：有沒有平行？

194. 學生：有。

195. 老師：所以，如果要判斷這兩條線（ $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ）有沒有平行，可以看它的兩側有沒有截出成比例線段，懂了喔！再請問第三個問題，哪一個圖形裡，兩側線段

的部分比全部，什麼叫部分？部分就是上或是下，上面比全部會等於這個截線段比底邊的，是哪一個圖形？想一想。可以看看學習單，哪一個圖形是上面比全部等於中間的截線段比底邊的，而且回答是「是」的，哪一個圖形？

196. 學生：三角形。

197. 老師：三角形。所以，第三個問題，哪一個圖形當中，可以找出兩側線段的部分比全部等於截線段比底邊？答案是三角形。知道了喔！所以三角形很棒喔！三角形除了上比下($\overline{AE} : \overline{EB}$)等於上比下($\overline{AF} : \overline{FC}$)之外，還有上面比全部($\overline{AF} : \overline{AC}$)等於中間比下面($\overline{EF} : \overline{BC}$)，了解了哦！好，我們來看另外一個，來看等高三角形的面積比，來，這個圖形看的到嗎？最後一排的同學看的到嗎？(見圖八)

198. 學生：看的到。

199. 老師：看的到，來，我隨便問一下，這個是哪一個英文字母？

200. 學生：D。

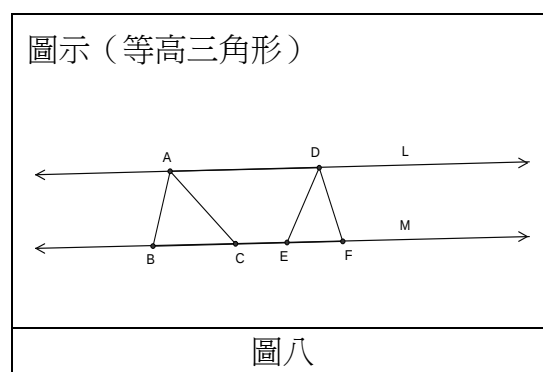
201. 老師：你們眼睛很好，那這個呢？

202. 學生：B。

203. 老師：讚，你們眼睛真好，可以看的到嗎？文重那邊？新文那邊，這個呢？佩菱呢？看的到嗎？看不到。等一下哦！我把它拉大一點，這樣有比較大一些嗎？

204. 學生：有，一些些而已。

205. 老師：因為我怕把字給蓋掉，看的到嗎？後面的同學，眼睛 2.0 哦！他們眼睛真的很好，要我，我也看不到。我們來看看這個題目，現在要看另外一個觀



念了，剛剛已經找出來平行線可以截出成比例的線段。看這個題目，現在請你們把它寫在筆記本上，順便做個計算，來計算一下這兩個小題(見圖九)，反白的地方看的清楚嗎？接著往下抄，要畫圖，這個圖要記得把它畫下來，你的筆記本呢？先把這個題目先寫下來，之前測量結果等一下再補，不會的可以問問四周的同學。來，你們邊寫，耳朵借我，我想問一下，三角形的面積要怎麼算？

206. 學生：底乘高除 2。

207. 老師：很好，你們還記得，底乘高除 2，不要忘記了。這邊我已經給你們底跟高，算算看它們的面積比，不會的馬上舉手，我到你旁邊，直接教你。

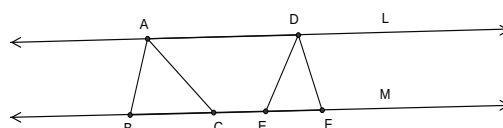
208. 老師：先分別算，第(1)小題分別算 $\triangle ABC$ 跟 $\triangle DEF$ 的面積，看不到嗎？下面的圖要畫，不然會搞不清楚，

第一題第(1)(2)小題

$L \parallel M$ ，且 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 的高均為 5，
 $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{EF} = 1$ ，則

(1) $\triangle ABC : \triangle DEF = ?$

(2) $\triangle ABC : \triangle DEF$ 是否等於 $\overline{BC} : \overline{EF}$?



圖九

$\triangle ABC$ 跟 $\triangle DEF$ 是長什麼樣子？很熱喔！忍耐一下，小題不用空行，直接寫。很熱喔！對不對？我也很熱，因為開了電風扇會有雜音啊，可是開冷氣找不到遙控器。稍微忍一下，修身養性。

209. 老師：你們都算好了？不是只有把題目抄好就好了耶！不會可以問佩希，你們這一組佩希應該蠻厲害的，還有志誠也可以，你們兩個要負責指導大家。你也很厲害，對，你也很厲害，大家都很厲害。看不到嗎？你看不到黑板嗎？需不需要把它調大一點？真的不用嗎？你們算完了嗎？你們這一組資源最多，可以多問一點，這幾個都可以問，好，你們這一組算完了嗎？

210. 學生：要算嗎？
211. 老師：要算啊！不是只有把題目寫完就好了。什麼事？太亮了！辛苦妳了。要分別算 $\triangle ABC$ 的面積和 $\triangle DEF$ 的面積。嗯，厲害！你要負責把李元達教會哦！還有國偉跟陳鍾，交給你了。好了沒？差不多了喔！有小數，直接用小數就好了，什麼事？這是比， $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積。
212. 老師：他算的是對的，不要抄他的，要問問看他，抄沒有用啊！考試又不能抄他的，要學會，會說要做到，你不要只會說別人，然後自己看別人的，抄別人的很高興，好了嗎？應該差不多了，你不要負責抄他的，你是寫自己的還是幫他寫？不要等著抄人家的啊！我一起講，好了嗎？
213. 老師：麻煩後面三位同學，今天你們最辛苦，椅子要一直搬來搬去，這中間是冒號，不是逗號，也就是 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積，這是比，打的不是很清楚，兩條線平行，兩個三角形的高都是 5， $\overline{BC}$ 跟 $\overline{EF}$ 的底不一樣，要算它們的面積，第(1)小題。看的到嗎？ $\triangle ABC$ 面積，你們剛有告訴我，面積等於 $\frac{1}{2}$ (底 $\times$ 高)，對不對？ $\frac{1}{2}$ 先寫好了，那底是多少？
214. 學生：3。
215. 老師：底， $\triangle ABC$ 的底是 $\overline{BC}$ 嘛！底是 3，乘以高多少？
216. 學生：5。
217. 老師：5，所以算出來？
218. 學生：7.5。
219. 老師：7.5 沒錯。再來， $\triangle DEF$ 面積。
220. 老師： $\triangle DEF$ 面積一樣， $\frac{1}{2}$ 底多少？
221. 學生：1。
222. 老師：1 乘以高多少？

223. 學生：5。
224. 老師：5。好，這樣算出來是？2.5。所以， $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積等於幾比幾？
7.5：2.5，可以用多少約分？
225. 學生：2.5。
226. 老師：用 2.5 約，7.5 約了之後剩多少？
227. 學生：3。
228. 老師：3，然後 2.5 約 2.5，變成多少？
229. 學生：1。
230. 老師：3 比 1，算對了的舉手。好，這是第（1）小題，它的面積比是 3：1，沒有寫對的人，請你仔細先看好，不要用抄的，我相信這個不難，先把它看懂，再把它寫下來。看好哦，我發現每個人開始動筆的時候，林浩，等一下當我的值日生幫忙擦黑板，因為林浩忍不住要開始動嘴巴了。等一下就全部擦掉了，不懂可以隨時問同學，或問我都可以，你可以問我：「老師，為什麼要這麼算？」，有沒有問題？沒有喔！林浩，黑板，把那一塊擦掉。我看林浩寫好了嗎？有，林浩寫了。
231. 老師：然後，第（2）小題問， $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積會不會等於 $\overline{BC}$ ： $\overline{EF}$ ？猜看看，猜對就直接加分了，看哪一組會加到 100 分，我喊 1、2、3，要記得手舉快一點哦！1、2、3，來，這邊的比較快。
232. 學生：會。
233. 老師：會，為什麼會？我們剛算出來 3：1，那 $\overline{BC}$ ： $\overline{EF}$ 呢？
234. 學生：因為 $\overline{BC}$ 是 3。
235. 老師： $\overline{BC}$ 是 3。
236. 學生： $\overline{EF}$ 是 1。

237. 老師： $\overline{EF}$ 是 1，所以 $\overline{BC} : \overline{EF}$ 也是 3 : 1。那 3 : 1 會不會等於 3 : 1？

238. 學生：會。

239. 老師：答對了，加 5 分。我們一次以 5 分為單位。有沒有發現，為什麼要出這樣的題目？只要高一樣，面積的比會不會跟它底邊的比是一樣的？再問一次我的問題，二個三角形的高一樣，這兩個三角形的面積會不會等於底邊的比？

240. 學生：會。

241. 老師：所以上面這個標題，等高三角形的面積比是不是等於底邊的比？

242. 學生：對。

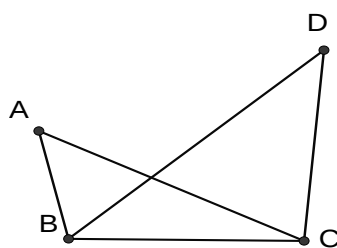
243. 老師：來看下一個題目。下一個題目換成底是一樣的，它的面積比又會變成什麼樣子呢？看不清楚要直接舉手問，中間是冒號，不是逗號。你們三個辛苦了！看你們這樣子翻來翻去一直抄，真的很辛苦，等一下下課來老師香吻加擁抱一個，超讚的！這邊看的到嗎？看的到喔！元達，很熱哦，再忍耐一下，我看你已經大粒汗、小粒汗。（註：第二題的題目內容和圖不符，因為教

第二題

$\triangle ABC$ 的高為 2， $\triangle DEF$ 的高為 5，且 $\overline{BC} = 7$ ，則

(1) $\triangle ABC : \triangle DEF = ?$

(2) $\triangle ABC : \triangle DEF$ 面積比是否等於高的比？



圖十

師作業疏忽，圖上並無 $\triangle DEF$ 只有 $\triangle DBC$ ，但是隨後學生有人提出質疑。）

244. 學生：老師，那是 1 還是 5？

245. 老師：哪一個？7。 $\overline{BC} = 7$ ，我唸一下， $\triangle ABC$ 的高是 2， $\triangle DEF$ 的高是 5， $\overline{BC} = 7$

。第(1)小題要求 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積(見圖十)，一樣的方法算。等一下我請人上來算，算對的，直接加分，整組加十分，看有沒有哪組可以加到一百分，下一次考試不用考都一百分了，多讚！不要蹲著啦，蹲著不好看，這個錄影帶萬一以後給你的兒子、女兒或是孫子、孫女看到的話呢？看到你的阿公、阿嬤竟然是蹲著，這樣子會好看嗎？什麼？

246. 學生：我們會有這個影片嗎？

247. 老師：這個影片，我問問看好了，因為我也希望有一份。有同學提問題了，E 在哪裏？F 在哪裏？ $\triangle ABC$ 的高跟 $\triangle DEF$ ，沒有 E 沒有 F 耶，這邊只有 ABCD。

248. 學生：重疊啊！

249. 老師：怎麼重疊法？

250. 學生： $\overline{BC}$ 等於 $\overline{EF}$ 。

251. 老師： $\overline{BC}$ 等於 $\overline{EF}$ ，是這樣嗎？

252. 學生：對，因為重疊啊。

253. 老師：是嗎？有 ABCD，可是沒有 EF，EF 跑哪裏去了？C 等於 E，B 等於 F，感謝你們，因為我那時候沒有設計的很好，其實沒有打好， $\overline{BC}$ 跟 $\overline{EF}$ 是重疊起來的，也就是說 C 等於 E，B 等於 F。後面第三組的，有沒有聽到我在講什麼？佳桓，我講什麼？你還說你聽到我講的話，我再講一次，下面的 $\overline{BC}$ 相當於 $\overline{EF}$ ，算一下三角形的面積。

254. 學生：不會算怎麼辦？

255. 老師：不會算沒有關係，有沒有算好要上來試試看的？寫對就加十分，寫錯不扣分。算出來了，怎麼不上去試一試？如果她有算錯，下面同學可以負責找碴，你有找碴出來一樣加分，分數就加在你那裏，記得仔細看喔，來，曉微寫的對不對？(見圖十一)

256. 學生：錯。

257. 老師：錯，哪裏錯？

258. 學生：她沒有約分。

259. 老師：哪裏沒有約分？

260. 學生：7 比 17.5。

261. 老師：用多少約？

262. 學生：應該用 3.5 約。

263. 老師：應該用 3.5 約，約了之後變成？你上來寫，用 3.5 約，2：5，對不對？

264. 學生：對。

265. 老師：分數直接加到聞豐那一組。

266. 學生：老師，這樣子不可以哦！

267. 老師：只要你找到碴，分數就直接加到別組。

268. 學生：那我們這一組呢？

269. 老師：就沒有，要約成最簡整數，才看的比較清楚，第(2)小題，跟 $\overline{BC} : \overline{EF}$ 有沒有相等？沒有， $\overline{BC}$ 跟 $\overline{EF}$ 是重疊的，重疊的話就都是 7 比 7，所以答案是「否」。可是，我要口頭問另外一個問題，那 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積，有沒有等於它們兩個高的比？(見圖十)

270. 學生：有。

271. 老師：有，它們兩個高的比，幾比幾？

272. 學生：2 比 5。

273. 老師：2 比 5，沒錯，有一個結論，底相等的三角形，面積比等於高的比。再講一次哦，底相等的三角形，面積比是不是跟高的比是一樣的？再請問，高相等的三角形，它的面積比相當於？

曉微的作法：

(1) $\triangle ABC : \triangle DEF$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 7 : \frac{1}{2} \times 5 \times 7$$

$$= 7 : 17.5$$

(2) $\overline{BC} : \overline{EF} = 7 : 7 = 1 : 1$

$\therefore$ 否

圖十一

274. 學生：底的比。

275. 老師：不錯。等於它底的比，兩個不一樣哦！底相等的面積比就等於高的比，高相等的面積比就等於底的比。來，我們看下一個結論。所以我說，高相等的話，它面積比等於底邊比，對不對？

276. 學生：對。

277. 老師：好，我們現在要厲害一點了，剛

剛是從題目看，我們現在來看它的證明(見圖十二)。我們來看，兩個三角形如果高相等，我假設它的高是 h ，兩個底分別一個叫 a_1 ，一個叫 a_2 ，可以看得到這個 a_1 、 a_2 嗎？後面那一排看的到嗎？看的到喔，第一個三角形的面積是不是相當於 $\frac{1}{2}$ 的底乘以高；第二個三角形面積是不是也等於 $\frac{1}{2}$ 的底乘以高，把兩個比一比之後

兩三角形的高相等，則兩三角形的面積比=底邊比，對不對？

【證明】

$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高相等，設高為 h ， $\triangle ABC$ 的底為 a_1 ， $\triangle DEF$ 的底為 a_2

$$\triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} a_1 h$$

$$\triangle DEF \text{ 的面積} = \frac{1}{2} a_2 h$$

$\triangle ABC$ 的面積： $\triangle DEF$ 的面積

$$= \frac{1}{2} a_1 h : \frac{1}{2} a_2 h$$

$$= a_1 : a_2$$

$$= \text{底邊比}$$

圖十二

，一樣的東西是不是都消掉了？出來剛好就是 a_1 比 a_2 ， $a_1 : a_2$ 就是它的底邊比，就是它的證明過程。記不記得我們二年級學的證明？這就是證明啊！

278. 老師：現在我希望你們把它寫下來，寫在筆記本上，從這裏開始寫，回去把這個證明看熟，下一次上課的時候，我要考一下這個證明，聽清楚了哦，好，寫完才下課。

參、教學說明

各位大家好，我這次的教案設計，是根據翰林版九年級上學期的第四單元，我做的是相似三角形，我想根據以下幾個部分來做教案的說明。

第一個部分是，我的教案設計裏頭的東西會比較多，比我實際上課當中呈現的東西還要再多一些，因為，那時候我本來是打算把整個相似三角形的部分設計完，或者至少是帶到相似性質這個部分，因為我切入的點是從最剛開始切入，也就是從平行線截成比例線段的部分來切入相似三角形的相似性質。但是，在我當初在做教案設計是先從活動當中來切入，因為，如果直接帶性質的話，對小朋友來說，他直接接收到的會是我給他的東西，但我希望他可以從活動當中去發現性質，所以我在設計的時候，在活動的部分留給學生的時間蠻多，蠻多的時間給學生去發現這當中的性質，但是我並沒有實際的跑完整份的教案，所以我的教案設計的東西是比我實際上課還要再多一些。

第二個部分，我想講的是學生的反應，其實，我們班的學生，平常上課的時候比現在真的較活潑，可能有一部分的原因是，我自己當老師的，面對鏡頭可能比較不自然，我跟學生的互動就比較不像平常時候那麼樣的活潑，但是覺得整個流程下來，他們還是蠻能配合我希望他們做的一些事情。學生的反應，我覺得除了面對鏡頭比較不自然之外，其他都還可以，而且他們都還蠻能配合的，像打燈的時候蠻熱的，跟他們講一下，你們就稍微忍耐一下，他們忍耐一下也就過去了，所以我覺得學生的配合度是還不錯的。然後，我希望他們可以學到去發現的東西，他們也能夠配合，所以我覺得學生的反應還在我的預期範圍當中。

第三個部分，就是我的教學活動的整個流程，我教學活動的流程，在學生活動的部分放蠻多的時間，因為我希望他們真的可以從活動當中發現性質，而不是直接學習

我給他的東西，所以在整個兩堂課的錄影當中，有蠻多的時間是留在這個地方，以致於後來在帶演繹證明的时候，我只帶到一個證明，我當初是切到這個演繹證明。我本來也是預估在這兩堂課當中的演繹證明不要帶太多，因為這邊孩子們的程度並不是那麼的好，一堂課當中我帶太多的演繹證明，對他們來說會是蠻大的負擔。所以，這堂課我本來是預估帶兩個演繹證明，後來我這樣上一上，發現學生到後來有一點點的疲態，所以我就想，我就不要延後下課的時間，直接先切到第一個演繹證明就好了。讓他們看完這個演繹證明之後，就交代他們回去要做複習，然後下一次來的時候，再一次強化他們對演繹證明這個部分的概念，因為平常小孩子對數學的數字計算會比較容易上手，對於證明他會蠻陌生的，所以我到最後切的部分，感覺上是好像沒有一個完整的段落，是因為我希望他們可以確實學到東西，而不是只是把進度上完。

以上就是我對整個教學活動這個部分的說明，然後也很謝謝輔導團可以給我這個機會，讓我來做這樣的教學實況錄影，可以讓我花一些時間去思索自己的教案設計，然後自己教學活動的安排，剛好也讓學生有這樣的機會去面對鏡頭；然後他知道他的上課是可以被錄影留下來，讓他有一次這樣的機會，我覺得這樣是真的是蠻好的，所以很謝謝輔導團，也很謝謝傳播公司的大家可以配合，配合著我這樣子上課，真的很謝謝大家。

肆、教學後的省思

這次相似三角形的教學是從測量活動切入，希望學生從操作活動中感覺「平行線截成比例線段」；但實際教學之後發現，其實並不需要留這麼多的時間在操作活動上，國中學生對於操作活動很快就能上手，這引起動機的活動不應占整個教學活動超過 $\frac{1}{3}$ 的時間，這樣會相對擠壓到後面的教學流程。而且在帶入等高三角形及等底三角形的

面積比時，各僅以一個題目為例子是不妥的，應多設計幾種不同的三角形來讓學生進行歸納發現。另外，國中學生對演譯證明較為陌生，在國二下學期才開始接觸證明（三角形全等的證明），教學重點應放在從例題過渡到演繹證明才較妥當。所以整體而言，這次的教學及教學設計還有很大的改善空間。

兩圓的位置關係與公切線

壹、教學活動設計

一、教學年級：九年級上學期

二、教 學 者：台北市瑠公國中 莊國彰 老師

三、教學目標：

- 1.能了解兩圓的位置關係有外離、外切、相交兩點、內切、內離等情況。
- 2.能根據兩圓的位置關係判斷出兩圓的連心線長與兩圓半徑的關係。
- 3.能根據兩圓的連心線長與兩圓半徑的關係判斷出兩圓的位置關係。
- 4.透過活動從兩圓的位置關係延伸至人際關係的互動的探討。
- 5.認識外公切線與內公切線的意義與畫法，並能求公切線長。

四、活動目標：

【第一節】

活動一：能透過複習點與圓以及直線與圓的位置關係來探討兩圓的位置關係。

活動二：能透過操作活動探討兩圓的位置，了解連心線長與兩圓半徑長的關係；反之，亦然；並用不等式表示它們的關係。

活動三：能由兩圓的連心線長以及兩圓的半徑長判斷出兩圓的位置關係。

【第二節】

活動四：能透過操作兩圓的位置關係探討人際關係的禮節。

活動五：能由圓的切線了解兩圓的公切線的意義與分類(內公切線與外公切線)。

活動六：能了解兩圓的位置關係與公切線的數量關係。

活動七：能了解兩圓公切線的畫法與長度的求法。

五、教學概要說明：

協助學生透過已學習的點與圓及線與圓位置關係之判斷模式，讓學生能畫出兩圓的位置關係，再延伸教材的廣度，與人際關係結合，使學生跨出自我為中心的範疇，讓學生上臺透過兩圓位置關係的移動，比照對應呈現的情況，再透過師生對話學習人際關係與自我表達能力。

本單元教材地位如下表：

已習教材	本單元教材	未習教材
1. 了解圓的基本要件：圓心、半徑、直徑、弦、扇形、弓形、弧、弧長、弧度。 2. 知道由點與圓的位置關係可以判斷出點與圓心的距離，並能透過點與圓心的距離判斷出點與圓的位置關係。 3. 知道直線與圓的位置關係可以判斷出圓心與直線的距離，並能透過直線與圓心的距離與半徑長的比較可判斷出直線為切線或割線或與圓不相交。 4. 知道並能運用平面上兩點的距離公式。 5. 能了解不等式的意義與運用。	1. 能了解兩圓的位置關係有外離、外切、相交兩點、內切、內離等情況。 2. 能利用點與圓以及線與圓位置關係，判斷出兩圓心的距離與兩半徑的關係，並能利用兩圓的連心線長與兩半徑的關係判斷出兩圓的位置關係。 3. 能使用不等式的數學算式表示兩圓的位置關係。 4. 延伸兩圓的位置關係至人際關係的互動。 5. 認識外公切線與內公切線的意義與畫法，並能做公切線長的計算。	1. 高中的圓錐曲線：圓的平面方程式、球的方程式。 2. 過圓上一點的切線方程式，及過圓外一點的切線方程式。 3. 過球上一點的切線方程式，及過球外一點的切線方程式。

點、線、圓教材需要的節數約 6 節，其中點與圓的關係需要 1 節，線與圓的關係需 3 節，兩圓的位置關係需 2 節。由於拍攝的節數只有 2 節，因此將教學重點放在兩圓的位置關係。

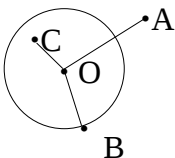
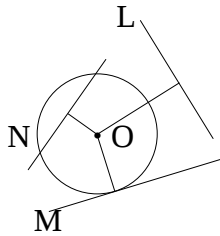
六、教學活動設計：

時間：2 節課

教學準備：三個呼拉圈（2 大 1 小）、一條繩子、圖卡(圖示點與點名稱)、磁鐵條、磁鐵、圓形紙張。

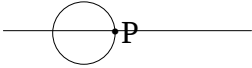
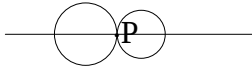
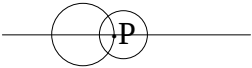
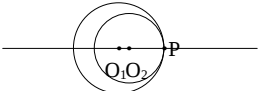
【第一節】

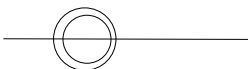
教學重點：兩圓的位置關係

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
複習點與圓的位置關係。 	(複習)點與圓的位置關係有哪些？並了解這些點與圓心的距離與半徑的關係。 - 能用不等式等數學算式表示點與圓的位置關係。	教師使用問答方式進行教學，請同學上台圖示，並複習以前的概念。正反敘述都進行。可讓學生說明。請學生圖示在自己的學習單上。	學生能由點與圓的位置關係判斷出點與圓心的距離；反之，由點與圓心的距離判斷出點與圓的位置關係。
複習直線與圓的位置關係。 	(複習)直線與圓的位置關係有哪些？並了解這些直線與圓心的距離(以 d 表示)與半徑的關係。 - 用不等式等數學算式表示直線與圓的位置關係。	教師可使用問答方式進行教學，請同學說明；並複習以前的概念。正反敘述都進行。請學生圖示在自己的學習單上。	能由直線與圓的位置關係判斷出圓心與直線的距離；由直線與圓心的距離判斷出直線與圓的位置關係。
大小兩圓的位置關係：外離、外切、相交兩點、內切、內離。	- 學生上台圖示兩圓的位置關係。 - 大小不同的兩圓位置關係有哪些？	學生上台在黑板上圖示大小不同的兩圓位置關係有哪些情形？	- 能畫出兩圓的位置關係。 - 認識位置關係名稱：外離、外切、

• 兩圓的位置關係 vs. 連心線長與兩圓半徑的關係。	• 依據學生畫出的圖形依<u>相交的點數</u>做分類。 • 從分類中介紹兩圓位置關係的名稱。 • 學生上台動態移動位置顯示兩圓的位置。 4.介紹連心線長。 • 認識連心線長。 • 介紹通過圓心的直線與圓的交點就是圓的最前端的點。 • 動態移動顯示兩圓的位置關係，觀察連心線長與半徑的關係。並使用不等式的數學符號與算式表示兩圓的位置關係。	• 經整理後請學生圖示在自己的學習單上。 • 請兩位學生上台，各自拿一個呼拉圈(1大1小)，將自己視為圓心；移動兩人的位置，顯示兩圓的位置關係。 • 教師：觀察兩圓的位置關係，當兩圓心的距離慢慢接近，它們的位置關係產生什麼變化？ • 教師：兩圓圓心的距離是甚麼？ • 教師發一條繩子給學生，再請學生拉緊，並要求繩子分別通過兩圓圓心，介紹這時繩子的長度就是兩圓圓心間的距離。而兩圓圓心間的距離就是連心線長。	相交兩點、內切、內離等情形。 • 能體驗了解兩圓的位置關係由外而內的順序分別是：外離、外切、相交兩點、內切、內離等。 • 知道連心線長的意義。 • 瞭解兩圓的位置關係： (1)若兩圓外離，則連心線長大於半徑的和；反之，亦然。 (2)若兩圓外切，則連心線長等於半徑的和；反之，亦然。 (3)若兩圓相交兩點，則連心線長小於半徑的和，大於半徑的差；反之，亦然。 (4)若兩圓內切，則連心線長等於半徑的差；反之，亦
---	--	--	--

		然。 (5)若兩圓內離，則連心線長小於半徑的差；反之，亦然。 •請學生從兩圓的外離位置漸漸向內移動，固定一端的同學，另一端的同學逐漸向對方接近，並要求全班同學觀察它們的位置關係與連心線長的變化以及半徑長的關係。 (1)當兩圓為外離時，兩圓的連心線長大於兩半徑和。 (2)相反的，當兩圓的連心線長大於兩半徑和時，兩圓是外離。 (3)將上述關係使用數學式子表示：若兩圓外離時，則 $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2。$ (4)相反的，若兩圓滿足 $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$，則	
--	--	--	--

		兩圓外離。 •請學生觀察圓與連心線如下圖所示，P 點是圓與直線的交點且位於最前端。  (1)兩圓移動到外切時，兩圓只交於 P 這一點。  此時， $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2。$ (2)相反的，當兩圓 $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$，則兩圓外切。 •從<u>外切</u>再更靠近，一直到<u>內切</u>為止，這之間兩圓都相交兩點；因此連心線長在兩者之間都是相交兩點。  •由於兩圓相交一點，就是<u>內切</u>。  (1)若兩圓<u>內切</u>，則	
--	--	--	--

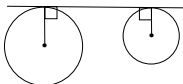
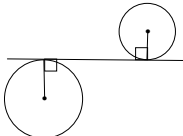
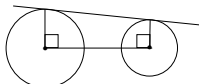
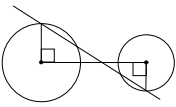
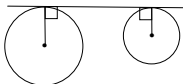
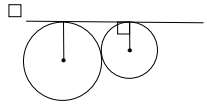
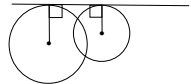
		$\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$。 (2)<u>反之</u>，若 $\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$，則兩 <u>圓內切</u>。 (3)因此，若兩圓相交 兩點時，則連心線 長介於兩者 $r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ (4)相反的，當兩圓 $r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ ，則兩圓相交兩 點。 • 從內切再更靠近， 就是<u>內離</u>，則兩圓 沒有相交。  (1)若兩圓<u>內離</u>，則 $\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$。 (2)反之，若 $\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$，則兩 <u>圓內離</u>。 (3)特別當 $\overline{O_1O_2} = 0$ ，圓心重合，稱為 同心圓。	
--	--	--	--

•大小相等的兩圓其位置關係有哪些？	5.大小相等的兩圓，那麼情況如何？和半徑不等的兩圓比較，不同點在哪裡？	•請學生上台拿出兩個一樣大的呼拉圈與童軍繩做移動，讓學生了解相等的兩圓其實只是一個特例。 •與大小不同的兩圓相比較，最大的差別是：等圓的兩圓不會出現內切與內離，並且出現重合。	•能了解等圓的兩圓其位置關係有：外離、外切、相交兩點、重合。
•由兩圓的位置，判斷出兩圓的連心線長與兩半徑長的關係。並可由兩圓的連心線長與兩半徑長的關係，判斷出兩圓的位置。	6.給兩圓的位置，求兩圓的連心線長與半徑長的關係；給兩圓的連心線長與半徑長的關係，求兩圓的位置。	•已知兩圓的半徑長為5、3，如果兩圓關係為：外離、外切、相交兩點、內切、內離、同心圓等，則連心線長為何？ •已知兩圓的半徑長為8、6，當給定連心線長=18、14、10、6、2、1、0時，則兩圓的位置關係為何？ •已知兩圓的半徑長分別為3和4，且圓心分別為(1，-3)與(-1，1)，則兩圓的位置關係為何？	•能由兩圓的位置關係，判斷出兩圓的連心線長與兩半徑長的關係；能由兩圓的連心線長與兩半徑長的關係，判斷出兩圓的位置關係。 •熟練兩點距離公式，知道根號的意義與估算值的範圍。

【第二節】

教學重點：延續兩圓的位置關係與兩圓的公切線

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
兩圓位置關係與人際關係的連結。	1.請學生上台演示兩圓的位置關係，並請同學發表人際間相處的方式與態度。	- 教師：如果我們把兩圓的位置關係與人和人間的相處做對照，那麼： (1)兩圓外離代表兩個人這時候的關係是甚麼？ (2)兩圓外切代表兩個人這時候的關係是甚麼？ (3)兩圓相交兩點代表兩個人這時候的關係是甚麼？ (4)兩圓內切代表兩個人這時候的關係是甚麼？ (5)兩圓內離代表兩個人這時候的關係是甚麼？	透過兩圓的位置關係製造的師生對話，讓學生表達人際關係應有的禮節與態度。
複習圓的切線。	2. <u>問答式</u> 複習圓的切線。	教師問：圓的切線是什麼意義？切點是什麼？一條直線必須具備什麼條件才能稱為是圓的切線？	能了解切線的意義：與圓只相交一點的直線；且經過圓上的一點與過此點的半徑垂直的直線稱為該圓的切線。 切線與圓的交點稱為切點。

• 兩圓的公切線。	3.兩圓公切線的意義。	• 教師問：什麼是兩圓的公切線？一條直線必須具備什麼條件才能稱為是兩圓的公切線？   • 教師問：下面圖形的直線是否是兩圓的公切線？為什麼？  	• 能了解公切線的意義：一條直線同時是兩圓的切線，稱為兩圓的公切線。公切線必須同時垂直圓的切點與圓心的連線。
• 內公切線與外公切線。	4.認識內公切線與外公切線。	• 教師利用前面主要問題與活動 2 所畫兩圓的公切線分類藉此認識內外公切線。   	• 知道兩圓位於公切線的同側稱為外公切線。 • 知道兩圓位於公切線的異側稱為內公切線。

• 兩圓的位置關係與內外公切線的總數。 • 外(內)公切線長。	5. 整理兩圓的位置關係與內外公切線的總數。 6. 了解公切線長的意義。 能計算公切線長。 做課本隨堂練習 P.88 與 P.89。	• 教師製作學習單讓學生填寫資料。 • 教師給一個外公切線的圖形，給定連心線長=13 與兩半徑長為 8、3，求外公切線長。 • 教師給一個內公切線的圖形，給定連心線長=25 與兩半徑長為 10、5，求內公切線長。	• 能了解兩圓的位置關係與內外公切線的總數。 • 能求出外公切線的長。 • 能求出內公切線的長。 • 能熟練勾股定理。
--	--	---	--

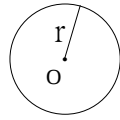
• 生活應用 • 自我評量	7.生活中與兩圓的位置關係與公切線的應用。以課本第 121 頁數學萬花筒公切線的生活實例介紹為主。 8.透過課本的 2-1 自我評量，讓學生做練習。	• 透過實例(影像或圖片)讓學生瞭解生活中數學的應用。 • 讓學生做課本第 94 頁第 6、7、8 題的自我評量。 指定習作為回家功課。	• 能欣賞數學與生活的連結。
--	--	--	--

附錄、學習單

兩圓的位置關係與公切線 學習單

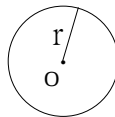
_____ 班 座號：_____ 姓名：_____

1.(1)你認為點與圓的位置關係有哪些？請將位置關係圖畫在右邊的圖上。

(2)承上，將這些不同位置的點與圓心連成線段，並與半徑 r 比較，將結果填入下表。

點與圓的位置關係	點與圓心 O 的距離與圓半徑 r 的比較

2.(1)你認為直線與圓的位置關係有哪些？請將位置關係圖畫在下面的圖上。

(2)承上，將圓心對不同位置的直線畫垂直線段，並與半徑 r 比較，將結果填入下表。

直線與圓的位置關係	直線與圓心 O 的距離（以 d 表示）與圓半徑 r 的比較

3.(1)你認為大小不同的兩圓位置關係有哪些？請將位置關係圖畫在下邊的空格上。

(2)承上，畫出不同位置的兩圓的連心線長，並與兩圓的半徑長比較，將結果填入下表。

兩圓的位置關係	連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 與兩圓半徑 r_1 與 r_2 的比較

4.(1)你認為大小相同的兩圓位置關係有哪些？請將位置關係圖畫在下邊的空格上。

(2)畫出連心線長，與兩圓的半徑長(都為 r)比較，並將結果填載入下表。

兩圓的位置關係	連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 與兩圓半徑(都為 r)的比較

5.(1)由兩圓的位置，判斷出兩圓的連心線長與兩半徑長的關係。

已知兩圓的半徑長分別為 5 和 3	
兩圓的位置關係	連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 與兩圓半徑 r_1 與 r_2 的比較
外離	
外切	
相交兩點	
內切	
內離	
同心圓	

(2)給兩圓的連心線長與半徑長，求兩圓的位置關係。

已知兩圓的半徑長分別為 8 和 6，請依據下表的提示寫出兩圓的位置關係：

連心線長	18	14	10	2	1	0
位置關係						

(3)已知兩圓的半徑長分別為 3 和 4，且圓心分別為(1, -3)與(-1, 1)，則連心線長為何？
且兩圓的位置關係為何？

6.如果把兩圓的位置關係和人與人間的相處做對照：

- (1)當兩圓外離時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？
- (2)當兩圓外切時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？
- (3)當兩圓相交兩點時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？
- (4)當兩圓內切時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？
- (5)當兩圓內離時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？

第二節 兩圓的公切線與生活應用

____班 座號：____ 姓名：____

1.(1)圓的切線的意義：_____。

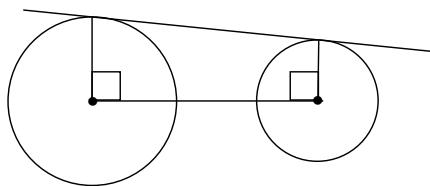
(2)一條直線必須具備什麼條件才能稱為是圓的切線？如下圖所示：

2.(1)兩圓的公切線的意義：_____。

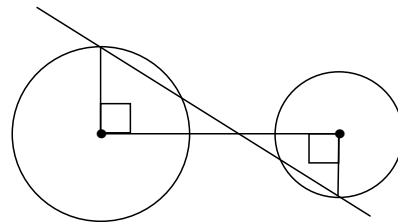
(2)一條直線必須具備什麼條件才能稱為是兩圓的公切線？如下圖所示：

3.下面圖形的直線是否是兩圓的公切線？為什麼？

(1)



(2)



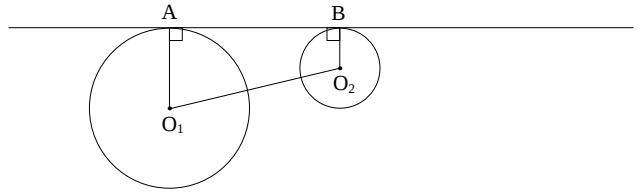
4.內公切線的意義：_____。

外公切線的意義：_____。

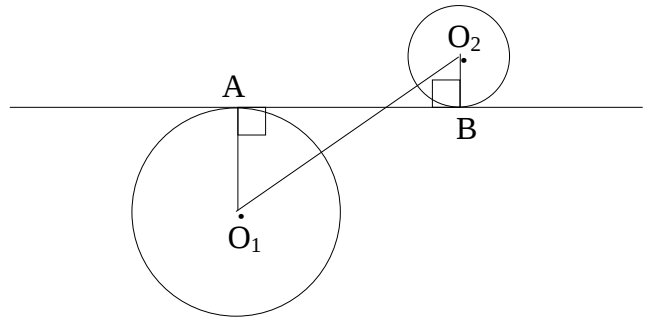
5.請將兩圓的位置關係與內外公切線的數量填入下表中：

兩圓的位置關係	外公切線的數量	內公切線的數量
外離		
外切		
相交兩點		
內切		
內離		

6.(1)已知 $\overline{O_1O_2}=13$ ，直線 L 切圓於 A、B 兩點；且 $\overline{O_1A}=8$ ， $\overline{O_2B}=3$ ；如下圖所示，求 $\overline{AB}=?$

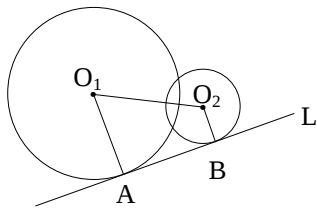


(2)已知直線 L 與兩圓分別切於 A、B 兩點，已知 $\overline{O_1A}=10$ ， $\overline{O_2B}=5$ ， $\overline{O_1O_2}=25$ ，如下圖所示，試求 $\overline{AB}=?$

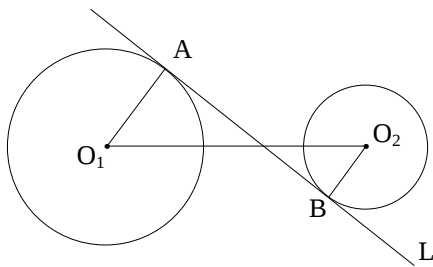


練習：

(1)如下圖所示，直線 L 切圓於 A、B 兩點，已知 $\overline{O_1A}=5$ ， $\overline{O_2B}=3$ ， $\overline{AB}=6$ ；求 $\overline{O_1O_2}$ 。



(2)如下圖所示，直線 L 切圓於 A、B 兩點，已知 $\overline{O_1A}=5$ ， $\overline{O_2B}=3$ ， $\overline{AB}=10$ ；求 $\overline{O_1O_2}$ 。



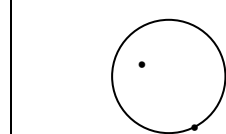
7.生活中與兩圓的位置關係與公切線的應用。

貳、教學實錄

【第一節】

1. 學生：起立。
2. 老師：好。
3. 學生：立正，敬禮。
4. 學生：老師好。
5. 老師：好，同學早，請坐下。今天的課程要延續前面的單元，我們要上兩圓的位置關係。首先，老師要先發給同學學習單，我們先做一個瀏覽，逸翔幫老師發。都好了嗎？先把學習單放在旁邊，那麼，首先我們要做一個複習，我們先複習的是，昨天單元裡面我們上過點跟圓的位置關係，老師在黑板上呈現一個圓，我想請問同學：還記不記得，點跟圓的位置關係有哪些種類？還記得嗎？有沒有誰自願幫老師一個忙，上來把點，點在上方，老師目前在黑板上面放了好幾個磁鐵，圓形磁鐵，有沒有誰自願幫老師上台點出圓跟點的位置關係？有沒有自願的？好，國祥，請上台，我們今天有自願者，老師會給予獎勵，我們給予一個精美的小禮物，所以請你多舉手。好，點跟圓呢？我們請國祥拿不同顏色的圓圈，好，我們請國祥回座，目前我們發現國祥把點放在圓的上方，從圖形中可以發現這個點，我們稱點在哪邊？在圓內，那這個點呢？在圓上，這個點呢？(見圖一)
6. 學生：圓外。
7. 老師：對，在圓外，所以，請同學把你的學習單上方的圓第 1 部分(見 P.167 學習單)，一樣仿造上次學過的方式，把點，點在這個圓的上面，我們把這些點給予名稱的標示，我目前把點在圓外的點稱它為 A，我們統一名稱為 A 點

國祥放的位置：



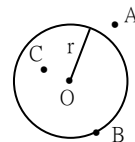
圖一

；目前點在圓上的點，我們稱它為 B 好了，我們稱它為 B 點；那第三個點在圓內的點，我就畫這旁邊，我們發現圓內任何位置都可以，我們點在這邊稱 C 點(見圖二)。好，目前點跟圓的位置有上面這三種關係，那麼，還記不記得點跟圓的關係的基本原則是什麼東西？是連接點跟圓心的距離，對不對？所以我們請同學拿出你的直尺或者三角板把點跟圓心

的距離連成線段，請同學把這三個點，把它和圓心，我把圓心當成是一個 O 好了，O 是圓心，你把這三個點跟圓心分別連成線段，所以 $\overline{OA}$ 是一個線段長，相同的， $\overline{OB}$ 也是一個線段長，還有 $\overline{OC}$ 也是一個線段長。好，我們發現了點跟圓的位置，這三段長度我們重新拿來跟半徑長比較，問同學：A 點在圓外的時候，還記不記得？它跟圓心的距離跟半徑是什麼關係？比半徑怎麼樣？還要大；點在圓上呢？跟半徑一樣？一樣長；點在圓內呢？比半徑要小，所以我們請同學在我們下方的地方，分別在我們的學習單上，你把 A、B、C 三點，我們有三種位置，第一種是 A 點，A 點在哪邊？在圓的外面，對不對？我們稱為圓外，請同學在學習單上 1.(2)把 A 點的位置是圓外的關係先寫上，並且把那個點跟圓心的距離與半徑長比較(見圖三)，兩者之間的關係是什麼？O 點到圓心的距離，我們可以寫到線段的名稱，怎麼寫？對，把它寫成什麼東西？把它寫成 $\overline{OA}$ ，對不對？跟半徑長的 r 比較，把半徑當成 r，當成 r，中間有什麼關係？它會大於？還是小於？還是等於？會大於。那麼，相同的，我們

學習單：

1.(1)你認為點與圓的位置關係有哪些？請將位置關係圖畫在右邊的圖上。



圖二

學習單：

1.(2)承上，將這些不同位置的點與圓心連成線段，並與半徑 r 比較，將結果填入下表。

點與圓的位置關係	點與圓心 O 的距離與圓半徑 r 的比較

圖三

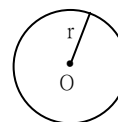
可以發現第二個答案是 B 點，剛剛 A 點在圓外的時候， $\overline{OA}$ 距離會大於半徑。那 B 點呢？請同學寫寫看，你仿照我們前面的方式，這是我們基本的複習，我們了解，判斷點跟圓的位置，可以從點跟圓心的連接線段所形成的距離，跟半徑長可以比較出它的關係。所以，相同的，B 點一樣請同學書寫，B 點在圓的哪邊？怎麼稱呼它？記得昨天上課的時候，我們還說它是什麼？圓什麼？在圓環上，我們說圓環呢！一般講「圓上」就好了，不講圓環，那麼 B 點在圓上的時候， $\overline{OB}$ 的距離呢？怎麼寫？剛剛講過等於半徑。第三個 C 點，C 點在圓的地方是圓內，這個時候 $\overline{OC}$ 距離是什麼關係？它會小於半徑，這是我們上次跟同學講過的關係。老師要問個問題，同學還記不記得，如果我今天給一個圓形，中心點是圓心，如果那個點叫 D 點，跟圓心的距離，先假設半徑長度為 5，如果 D 點跟圓心的距離為 7，問同學：D 點在哪邊？在圓的哪邊？圓外，很好。如果我今天給一個 E，它跟圓心的距離等於 3 公分，那 E 點在哪邊？

8. 學生：圓內。

9. 老師：在圓內，所以從那個點跟圓心的距離可以判斷點的位置。好，這是上次的複習，接下去看，直線跟圓是什麼關係？(見圖四)直線，老師就把這個圓一樣放中間，請同學看黑板上這個圓，上次講過，判斷直線跟圓的位置有哪些關係？假定目前這個是我們的圓，把磁鐵條當做是直線的話，有沒有自願的？請柏均上台，好，你幫我拿出這三根線，你認為它跟圓有什麼關係？剛剛國祥有上台主動問答，老師要給他一份獎品，好，你抽一個。我們請柏均，你能不能解釋一下，你認為你畫的這個呈現它是什麼關係啊？(見圖五)

學習單：

2.(1)你認為直線與圓的位置關係有哪些？請將位置關係圖畫在下面的圖上。



圖四

10. 柏均：沒有交點。
11. 老師：沒有交點。
12. 柏均：然後這交一點，這交兩點。
13. 老師：交兩點，是不是？好，我們請柏均回座。對不對？

掌聲鼓勵一下。老師問同學問題喔！你覺得這樣的

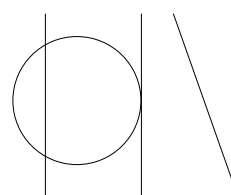
位置放在右邊，跟放在上方，跟放在左邊，跟放在下方的位置有沒有一樣？不是有左、右、上、下嗎？有沒有一樣？為什麼一樣？它都跟圓怎麼樣？沒有交點。所以我們發現，不管你放在哪邊都一樣，跟圓沒有相交。這個呢？交一點，對不對？這個是交幾點？交兩點，我們請同學在你的學習

單上，再把這三條線畫上去(見圖六)，一個是跟圓沒有相交的線，這是跟圓相交一點的線，跟第三個，圓交兩點的線把它畫上去，老師就把它拿下來分別畫三根直線，第一條跟圓不相交，另外是有一線跟圓交兩點，還有一個是跟圓交一點的線。目前我們把圓跟直線的關係就分成有相交跟沒相交兩類，相交又分成交一點跟交兩點，所以，我們就把這樣的關係給予名稱：把跟圓沒有相交的線，我們稱

為 L 線；跟圓交一點，我們稱為是 M 線；跟圓相交兩點的線，我們稱為是 N 線，我們給這三條直線一個名稱叫 L、M、N (見圖七)。還記不記得，判斷直線跟圓的關係可以用什麼方法去判斷它

？用圓心與直線的距離，請同學拿出直尺或三角板，分別從圓心對這三條

柏均的畫法：



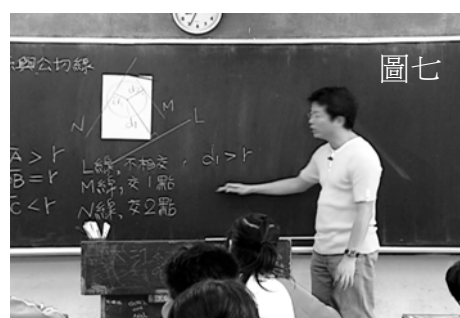
圖五

學習單：

2.(2)承上，將圓心對不同位置的直線畫垂直線段，並與半徑 r 比較，將結果填入下表。

直線與圓的位置關係	直線與圓心 O 的距離 (以 d 表示) 與圓半徑 r 的比較

圖六



圖七

直線畫出三個垂直線段。請同學把它畫上去，用你的直尺或三角板，分別從圓心對這三根直線畫垂直線段，跟圓交一點的線段也是一樣作垂直；第三條 N 線也是一樣，從圓心到直線畫垂直線段，這三條線段長與半徑長作比較，有什麼關係？學習單上 L 線跟圓是什麼關係？我們稱為不相交，L 線跟圓不相交，「位置關係」有 L 線跟圓不相交；M 線呢？M 線跟圓有相交並且交幾點？跟圓相交，交一點；第三條是 N 線，N 線跟圓交幾點？對，交兩點，N 線跟圓交兩點；我們把這三條線段跟半徑長來比較，只要直線在圓的外面，這個距離會怎麼樣？會大於什麼？會大於半徑，可是我們發現這線段名稱怎麼寫？一般稱這個距離用第一個名稱簡稱，有三條線段，區別一下，把前面的距離稱為 d_1 ，d 旁邊寫 1，第一個距離 d_1 ；把圓心到 M 線的距離簡稱為 d_2 ，第三，把圓心到第三條直線的距離我們叫什麼？叫 d_3 ，那麼我們仿造前面的方式，剛剛講過的，只要 L 線跟圓不相交，這個距離跟半徑比較，有什麼關係？這個 d_1 怎麼樣？ d_1 會怎麼樣？要大於誰？對，大於半徑，大於 r 。好，同理，把旁邊第二個跟第三個自己填寫，當 M 線跟圓交於一點，它這個線段跟半徑會怎麼樣？等於半徑。第三就會小於半徑。我們稱直線與圓交於一點，還記不記得稱為什麼點？對，叫切點，這個線稱為什麼線？

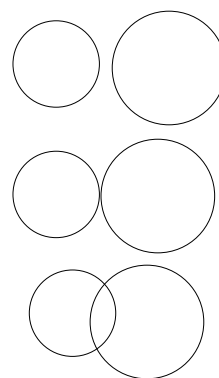
14. 學生：切線。
15. 老師：那這個 N 線呢？
16. 學生：割線。
17. 老師：對，所以旁邊請同學 L 線不用寫，M 線旁邊加括號，請在它旁邊寫切線，在圓上稱切線，第三根線旁邊名稱加括號，這個叫做割線。好，上面是我們在昨天跟前天上課的內容，有這麼一些，同學經過複習之後，今天正式

來看，單元主題是兩圓的位置關係，從前面線跟圓的關係的經驗，你認為兩圓的關係有哪些？剛剛柏均有拿獎品嗎？還沒，好，看看柏均示範的感覺，有沒有誰要自願的？你認為兩個圓的位置有什麼關係？有沒有誰要上來幫老師畫畫看的？兩個圓形，我們給一個是大跟小兩圓，兩個圓形的位置有哪些？先請同學畫畫看，翻開你的學習單畫畫看，你認為兩個圓形一大、一小，兩個圓大小不一樣，它們的位置有哪些關係(見圖八)？能不能仿照我們前面的經驗，點跟圓，還有線跟圓的關係有哪些？目前兩圓會有哪些關係？好，圓形不用真的拿圓規畫得那麼精準，你可以用你的手稍微畫一下圓，要把全部的關係都畫上喔！不是畫一個而已喔，所以你的圓不要畫太大。好，利用這個畫的過程之間，有沒有誰要自願？有沒有誰要幫老師上來畫給全班看看？有沒有自願的？有沒有？我看國祥拼命舉手，要不要讓同學看看，有沒有？好啦，請我們班上的帥哥上來，你上來畫兩個圓，它們的位置有什麼樣的關係？你認為想像中有哪些？把全部情況都畫下來。把你們的學習單也畫畫看，你認為兩個圓形，它們的位置有哪些不同的關係？我剛剛強調過，線跟圓的位置，當直線在圓外的時候，它在左邊、右邊、上方跟下方都一樣，它跟圓沒有相交，可以用什麼方式來判斷它們的關係？好，我們請傳捷先回座，你認為傳捷目前畫的關係有沒有完全都有了，或者有少幾個東西？有沒有少？(見圖九)

學習單：
3.(1)你認為大小不同的兩圓位置關係有哪些？請將位置關係圖畫在下邊的空格上。

圖八

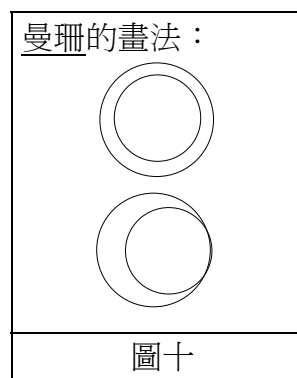
傳捷的畫法：



圖九

18. 學生：有。

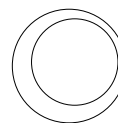
19. 老師：有沒有誰要自願幫傳捷補足他的東西？有沒有自願的？剛剛有好幾個點頭，有沒有自願的？有沒有女同學願意上來畫看看？沒有喔！那我就點人了，剛剛看點頭最用力的是曼珊，來，曼珊請上來，你幫傳捷一下，你認為目前他所畫的位置夠不夠完整？不完整要加什麼東西？好，請曼珊上來畫一下，給傳捷一份禮物，你抽一個。好，兩個圓形的位置，目前除了黑板上呈現之外，還有哪些關係？我剛剛講的是一大一小。其實要畫圓，要畫真的很圓不容易；以前有一個歐洲人叫喬治托夫可以單手畫圓，單手畫圓畫的很圓喔！他被教宗評選為一個很棒的畫家，覺得驚為天人，沒有人可以用單手，沒有用圓規畫那麼圓的，所以單手畫圓要畫的很圓不容易。好了嗎？還需要再補充什麼東西嗎？好，請曼珊幫個忙，你幫我把那個圓心點出來。傳捷上來一下，點一下圓心，把你剛剛畫的位置的圓心標出來一下(見圖十)。
- 好，請同學檢核一下，你畫的兩圓關係跟我們黑板呈現的有沒有不一樣？有些有多了一些的東西，傳捷，你再把圓心點粗一點點，太細看不到喔！跟我們曼珊很類似，可以用力畫上去，好，傳捷請回座。曼珊來，給你一份禮物。目前請同學重新檢查一下，你所畫的圖形跟黑板上同學畫的有沒有不一樣？有沒有誰還要再增加？看喔！目前第一個同學是畫這樣的關係、跟這樣的關係、跟這樣的關係(見圖九)，第二個曼珊是畫這樣的關係跟這樣的關係，有沒有誰跟他們不一樣的？還多了，有沒有？跟他們不一樣的，有多的東西，有多一個的，有沒有？有想出多一個，我們給兩個獎品，有沒有？還有嗎？還有喔！有沒有想出來？除了目前黑板上畫這樣，這樣的，你畫了沒？或這樣的感覺，還有嗎？還有，有沒有誰有想出來



？有沒有？還有喔，耶！怎麼會還有呢？真的還有。有沒有誰有看出來的

？俊傑有沒有？俊傑，好，要不要上來畫看看(見圖十一)？剛剛俊傑對我露出很曖昧的微笑。你認為還有的請舉手，好，請放下，有的人覺得還有，他畫的這個部分跟旁邊的曼珊有沒有不一樣？這樣跟這

俊傑的畫法：

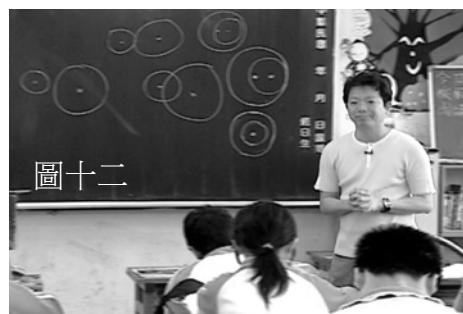


圖十一

樣有沒有不一樣？其實他有點特例啦！這個地方是圓心會重疊（曼珊的）

，對不對？那上方呢？圓心沒有重疊，圓心重疊是跟它完全相同的，它應該是特例。好了，你畫的部分有 6 項喔

！你有畫出 6 項的請舉個手，6 項的（見圖十二）。好，畫出 5 項的請舉個手，5 項的。有畫出 4 項的請舉個手，4 項的。3 項的，2 項的，1 項的。好啦！



圖十二

我們把位置關係畫完之後，接下來要請同學來看，我們前面是不是講過直

線跟圓的關係可以分成相交一點、相交兩點，跟沒有相交。那麼，能不能把這些位置關係做分類

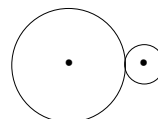
？你認為哪些是沒有相交？是不是這個？還有呢？哪邊？這個嗎？這邊跟這邊都是沒有相交

。相交又分成相交一點嗎？有沒有？哪些是相交一點？是不是這個，對不對？還有哪一個？這個

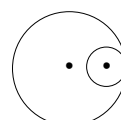
跟這個？那相交兩點呢？哪一個？中間嗎？我們發現把這些位置關係給予命名，前面講過直線

跟圓相交一點，我們稱相切，交點稱為切點，也稱為相切；可是，它是在外面相切，我們名稱怎

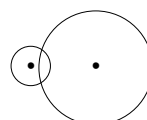
外切：



內切：

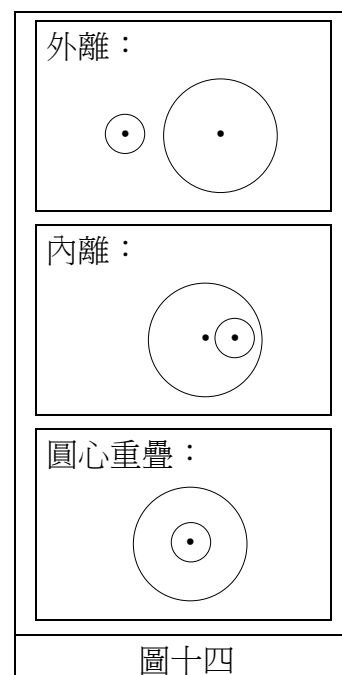


相交二點：



圖十三

麼說？叫外什麼？叫外切(見圖十三)；裡面相切叫內切。請同學拿出你的原子筆，旁邊寫上名稱，這個地方寫外切，旁邊請寫外切，旁邊這個呢？請寫內切，那麼中間呢？我們稱為相交兩點，對不對？怎麼稱呼它？有沒有簡稱？相交兩點有沒有辦法濃縮簡稱？好像很難去簡稱，相交二，相交，又不對，因為相交又可能相交一點，我們稱為相交幾點？對，相交兩點；好，第三種是跟圓沒有相交，沒有相交我們分為兩圓是外面沒有相交、分開的，跟裡面分開的；分開我們簡稱分離，所以我們稱為什麼？這邊，外離，就把這名稱叫外離；把這邊稱為內離，對不對？好，請同學把這個名稱都寫上去，可是呢？告訴我這個東西怎麼說？它也稱為內離，可是很特別，它本身圓心重疊，我們簡稱它是一個什麼？(見圖十四)



20. 學生：同心圓。
21. 老師：同心圓，最明顯在這邊的時候，跟黑板這邊的圖形很像，它也是屬於內離的情況，可是很特別，這個，本身簡稱它為同心圓，沒錯，圓心重疊，圓心相同，同心圓。好，把位置關係講完之後，請同學上來示範一下。老師今天帶了兩個東西，比如說，它是一個方向盤，它是一個呼啦圈，那麼，我把它叫小圓，告訴我中間黑點是什麼東西？
22. 學生：圓心。
23. 老師：圓心，它連結到圓上兩邊的距離會相等，稱它整根叫什麼？直徑，好，中間是圓心，小圓。那麼，旁邊再找一個大圓，發現大圓本身呢？中心點是什麼東西？

24. 學生：圓心。
25. 老師：這個呢？
26. 學生：直徑。
27. 老師：這個呢？
28. 學生：直徑。
29. 老師：對，兩條直徑的交點我們叫圓心，好，請兩個同學示範一下，有沒有自願的？請非常可愛的阿貴小朋友上來，阿貴；再請一個，請鴻鈺上來，來，阿貴，你挑一個圓，你要挑大或小，好，大圓；鴻鈺請上台挑個小圓，請同學把自己當做是圓心的操作者，好圓，所以，你要這麼舉，你要這麼舉，待會兒，你舉的時候，不要這樣舉，因為不是斷頭台，只是呼啦圈！你把圓的圓心朝自己的位置，也一起到講台，我們操作一下，你把剛剛的位置關係做演示，好，開始，這樣叫什麼？目前，你把剛剛的兩圓關係從外離，相交兩點，內切，來，看做的動作示範一下，目前的關係是什麼？
30. 學生：外離。
31. 老師：外離，然後，再來呢？這樣稱為什麼？外切，再來呢？這樣呢？交於兩點，再來呢？怎麼樣？
32. 學生：內切。
33. 老師：內切，再來呢？內離。再來呢？這邊是什麼東西？圓心相同，對不對？同心圓，所以它們的位置可以慢慢拉近。好，再重新回去兩邊，再拉回來。好，觀察剛剛的感覺，你認為影響兩個圓的位置關鍵點在哪？這邊是今天上課的重點喔，影響兩個圓的位置關係在哪？關鍵點。好，再示範一次，外離，然後呢？外切。再來，相交兩點，對不對？再來，內切，對不對？再來，內離。好，再拉回來。請同學觀察一下，你認為目前同學過程示範

，影響兩個位置的關鍵點在哪邊？這兩個圓的距離，一般講兩圓距離很抽象，不適合，要講兩個圓心的距離，圓心喔！好，因為鴻鈺的圓比較小，所以我們請他單手抓圓，這一隻手抓這個繩子，抓好喔！再來，因為阿貴的圓比較大，請放桌上，因為單手要抓，不好抓，你放桌上，好，一樣，你抓住這個繩子，你的手心朝中間，朝圓心的位置，抓好就好了，好，我們請鴻鈺拉緊一點，讓半徑在這個繩子的線上，好，下來一點，下來一點點，不要那麼高，拉緊，我們剛剛講過，影響兩個圓的位置關鍵點在兩個圓心的距離。看好！從這邊的地方，我們假定這個圓叫 O_2 好了，旁邊叫 O_1 好了， O_1 是大圓，你抓圓心的位置，兩個圓心中間的線段，這個距離稱為連心線長，好，開始，請阿貴的圓不要動，我們請鴻鈺的圓慢慢向你的左邊移動，開始移，在移的過程間，請你慢慢往下抓，一直保持圓心都在連心線上，好，再慢慢移，再慢慢移，再慢慢移，再慢慢移，好，老師幫幫你，抓好喔！好，圓的半徑一直與連心線重疊，有沒有發現？抓中間就好了，不用抓繩子，好，再慢慢移，阿貴已經撐很久了，對不對？我們再拉回來，重新拉回來，因為我們第一次操作，這個圓不太好抓，我們讓這個半徑跟這個圓心線重疊，好，目前我們剛剛講過，影響兩個圓的位置，跟中間的圓心的距離有很大的影響，兩圓心的距離越接近，兩圓關係越密切，對不對？越密切！目前位置到這邊，好，手會不會酸？把呼啦圈放下來，我們請同學接下去要做一件事情，把你剛剛畫的兩個圓？有沒有，兩邊的圓，有大與小，沒關係，把左邊的圓統一叫 O_1 ，請阿貴回座，鴻鈺請回座。把你剛剛畫的兩個圓標示名稱，一個是圓心左邊寫 O_1 ，右邊請寫 O_2 ，老師示範一下，因為我們班的同學統一把大圓放右邊，把左圓寫 O_1 ，右圓寫 O_2 ，每一種位置關係的名稱標示上去，相同的，把左邊圓心寫 O_1

，旁邊寫 O_2 ，每一種位置關係統統寫上圓心的名稱，特別注意一下，當兩圓在裡面的時候，要分清楚誰是 O_1 ，不要看錯， O_1 是在裡面， O_2 在這邊，一樣， O_1 是小圓， O_2 是大圓，好，一一的连接，請同學一一的连接，把圓心間的距離一一的连接，通常在數學名稱上，兩個圓心的距離可以稱呼為連心線長，統一把這個連心線長用 O_1O_2 上方加一橫，叫線段，用這個名稱稱為連心線長，好了嗎？透過剛剛阿貴跟鴻鈺的操作，當兩圓外離的時候，連心線長跟半徑長作比較會怎樣？當兩圓是外離的時候，連心線的長度跟半徑左邊叫 r_1 ，右邊呢？稱為什麼？叫 r_2 ，連心線長跟半徑的關係會怎樣？連心線長比半徑之間的關係會怎麼樣？（見圖十六）所以，我們從這邊可以發現，當兩圓是外離的時候，連心

學習單：

3.(2)承上，畫出不同位置的兩圓的連心線長，並與兩圓的半徑長比較，將結果填入下表。

兩圓的位置關係	連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 與兩圓半徑 r_1 與 r_2 的比較

圖十五

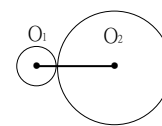
線的長度超過半徑加半徑，所以，會不會填學習單 3. (2) 上第一格(見圖十五)？當兩圓是外離的時候，請你填第一格，外離的時候會不會寫？連心線長怎麼寫？ $\overline{O_1O_2}$ 的距離會怎麼樣？根據前面的



圖十六

的經驗，當兩圓是外離，位置關係是外離，連心線長剛剛講過，我們寫 $\overline{O_1O_2}$ ，它跟半徑什麼關係？跟半徑的和，左邊叫 r_1 ，旁邊稱 r_2 ，跟半徑相加 (r_1+r_2) 之間什麼關係？會怎麼樣？會大於。我們要請同

圖示：



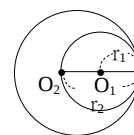
圖十七

學再看一次，那兩圓這樣的時候會怎麼樣？老師要請一個同學幫老師，老

師要請我們班的謝易文，謝易文，你上來一下，我請小老師曾奕翔上來一下，我們請易文到前面來，好，你把這個圓抓好囉，我們再請邦睿幫老師拿上來一下。請同學再看一次我們的示範，好，易文再退一點點，再空個距離出來，好，我們請邦睿跟奕翔兩個人把通過圓心的直線，通過圓心，可以嗎？好，目前這個東西是通過圓時會是直線，好，請問同學，目前這個線跟圓交幾點？兩點，對不對？左邊一個，右邊一個，那麼這個點是在右邊，感覺上，這個圓上的點有很多，好，目前圓上的點，哪一個點在圓的最右邊？在圓的最右邊？這個嗎？還是這個？右邊？這邊，可以相信這個事實的請舉手，目前這個點是在圓的位置最右邊，有問題嗎？成偉有沒有問題？最右邊，你覺得在圓的最左邊是哪個點？好，那麼，當我把這個圓慢慢的移動，是不是這點一直在最前面，那麼相對的，好，我們請易文把這個圓向右邊拉過去一點，請同學把連心線通過它，它是第二個圓形，我讓兩圓心的連線通過這個藍色線，根據前面的經驗，目前這個圓的最左邊的點是什麼點？這個，也是這個嗎？還是這個？這個。好，當兩圓跟著把中間的線拉緊的時候，拉緊喔，扣緊就好了，通過我們的直徑，好，當我把這個圓慢慢向右邊移動的時候，向左移動告訴我，這個地方最近靠近哪一邊？是不是這個點，對不對？所以，當兩圓相交一點，交在什麼地方？就交在最中間的這個最前哨，可以相信這個事實的請舉個手，好，請放下。所以，從這邊可以發現，當兩圓相交一點，那個交點就會在它們的連心線的上方，不會在這邊，也不會在這邊，剛好那個交點在正前方這裡，所以我們請奕翔、邦睿先放著，好，請回座，我們謝謝你，先把圓放下來。所以，你看，老師目前看這個關係，這個點是在上方，對嗎？還是在下方？不對，應該在哪裡？在線上。所以，當兩圓外離的時候，連心線長會

怎麼樣？剛剛講過的。那外切呢？連心線長等於半徑怎麼樣？相加。第一個寫什麼？寫外切，兩圓外切的時候，連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 會等於半徑相加，我們稱為兩圓外切；因為那個點剛好在線上的意思。好了，我們接下來看第三個，剛剛的兩個圓形從最遠的地方慢慢靠近，先碰到什麼？外切，再往前呢？是不是相交兩點，對不對？再往前呢？到什麼時候為止？這個稱呼它為什麼？內切。所以，我們直接先看內切，這時候連心線長會怎麼樣(見圖十八)？內切的時候連心線長會怎麼樣？看喔！這邊距離是一個大半徑，對不對？大半徑；那這個距離呢？這個距離是小半徑。我說過，當兩個圓慢慢靠近的時候，最前方稱為交點，當往前慢慢靠近到了這一邊，兩個圓形剛好是交一點，對不對？交點是這邊，這個地方稱為小半徑 (r_1)，這邊稱大半徑 (r_2)，連心線長是什麼關係？請同學在內切的地方把這個線延伸，把旁邊的紅色線延伸，把紅色線先延伸，把它拉長一點，找一下 O_1 是這裡，對不對？ O_1 是圓心，這個距離我們稱為什麼？

內切圖示：



圖十八

半徑，寫為 r_1 ，相同的， O_2 也是圓心，那它是圓上點，因此這個距離是 r_2 什麼， r_2 嘛！這邊寫 r_2 喔！所以，當兩圓是內切，連心線長怎麼寫？這個距離是 r_2 ，旁邊是 r_1 ，那中間這段呢？ $r_2 - r_1$ ，所以我們可以發現，當兩圓是內切的時候，我們先往下跳一格，中間那格先不寫，相交兩點先空著，我們直接先寫內切的時候，兩圓的連心線長怎麼寫？寫 $\overline{O_1O_2}$ ，相交兩點先保留，先往下寫內切；內切的連心線長怎麼寫？等於什麼？剛剛講過了，誰減誰？ $r_2 - r_1$ ，連心線長為兩個半徑相減，我們稱為內切，好了嗎？那麼，想想看，兩個圓形從外離到內切，慢慢靠近，到達相交兩點，有沒有發現，連心線長慢慢靠近，對不對？連心線長慢慢靠近，一直到這樣，稱為內切

，所以，連心線長只要怎麼樣？它超過原本的半徑相減，往後拉，超過原本半徑相減，往後拉，拉到這邊的時候，剛好跟半徑相加相等的時候，我們稱為外切；到達這邊的時候，叫做內切，連心線長是半徑相減，再拉出來叫相交兩點。好，告訴我，可不可以從這邊的關係發現兩圓相交兩點？連心線長是什麼範圍？它會小於誰？大於誰？好，試試看，兩圓相交兩點時，連心線長會小於誰？大於誰？比誰小？比半徑相加要小，比誰大？比半徑相減，剛剛題目上， r_2 減誰？ r_1 ，所以，我們可以發現，當兩圓相交兩點的時候，連心線長是把兩個半徑相加、相減的關係，好，內切再往內移動，變成什麼？叫做什麼？內離，內切後會變內離，連心線長會怎麼樣？內離，連心線長會怎麼樣？等於半徑相減嗎？還是小於？當兩圓內切的時候，連心線長是半徑相減，再往內移動，變化都屬於內離，對不對？所以，連心線長比半徑的差小，到重疊稱為同心圓，一樣都屬於內離情況，所以，會不會寫範圍？好，請同學寫一下範圍，內離的時候，兩圓連心線長會小於半徑相減。最後，同心圓，有同心圓嗎？我們就這五個而已，同心圓是特例喔，同心圓連心線長多少？對，等於 0，好，我們把兩圓位置關係講到這邊，下一節課將要做一些示範，做一些例題的練習。

【第二節】

34. 學生：敬禮。
35. 學生：老師好。
36. 老師：同學好，請坐。今天繼續第二節課的單元，在上一節課已經講了兩圓的位置關係，從兩個圓心的距離，叫「連心線長」，可以判斷兩個圓的位置關係；相反的，也可以從兩圓的位置來估測它的連心線長是多少。所以，我們請同學將學習單翻過背面來，前面已講過兩個圓是不等圓的時候的位置關係

，那麼，我們先請同學練習一下，先看學習單的第 5 題(見圖十九)，已知兩圓形半徑長分別是 5 和 3，看第 5 題第 (1) 小題，當兩圓是外離的時候，連心線長會怎麼樣？大於多少？好，請你寫大於什麼？ $5+3$ ，求總和，對，大於 8，好，你把答案填上去。當兩圓是外切呢？連心線長會怎麼樣？

37. 老師：好了嗎？我看看你答的如何，當兩圓是外離的時候，半徑長是 5 跟 3，連心線長會怎麼樣？外離，剛剛是不是講過，外離的時候，寫 $\overline{O_1O_2}$ 喔！旁邊寫 $\overline{O_1O_2}$ ，連心線長，你旁邊寫一個名稱叫 $\overline{O_1O_2}$ 。

38. 老師：外切的時候，連心線長會等於 8，當兩圓是相交兩點呢？連心線長會怎麼樣？相交兩點喔，我們先看內切，當兩圓內切，連心線長怎麼樣？等於什麼？內切連心線長會怎麼樣？不錯，同學大部分都寫正確，連心線長會等於什麼？好，講出來等於什麼？大聲點，等於什麼？等於 2；當兩圓是相交兩點呢？連心線長是什麼範圍？比 2 要怎麼樣？比 2 要小，還是大？比 2 大，比誰要小？比 8 小，所以，在 8 跟 2 之間，我們就寫 $\overline{O_1O_2}$ 小於 8 大於 2，我們請一位同學幫我寫，找一個人，請江成偉，成偉，上來，幫我寫範圍，我們來看看成偉熟不熟悉，連心線長的範圍會不會寫不等式。拿出你的粉筆，字請寫大一點，在 8 跟 2 之間怎麼寫範圍？還不錯，我們給成偉掌聲鼓勵一下，好，按照慣例，老師要給他一份精美小禮物，好，抽一個。算式中間的關係是不等號，在 2 跟 8 中間，小於 8 大於 2 ($2 < \overline{O_1O_2} < 8$)，能不能這樣寫？可以嗎？這樣寫哪邊不合理？凱文，這麼寫哪邊不合理？

39. 學生：現在 $\overline{O_1O_2}$ 是要小於 8。

學習單：

5.(1)由兩圓的位置，判斷出兩圓的連心線長與兩半徑長的關係。

已知兩圓的半徑長分別為 5 和 3	
兩圓的位置關係	連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 與兩圓半徑 r_1 與 r_2 的比較
外離	
外切	
相交兩點	
內切	
內離	
同心圓	

圖十九

40. 老師：小於 8，這變成大於 8，不一樣，所以，這麼寫是不合理的。好，相交兩點寫看看，內切連心線等於 2；好，兩圓內離的時候，連心線長會怎麼樣？它會小於什麼？小於 2，能不能填小於 2 就好了，它有沒有什麼下限？能不能小於 2？可能等於 0.8，-3，-4，可以嗎？兩圓心距離能不能負數？不行，必須有下限，要大於什麼？大於或者也可以填等於 0，能不能等於 0？等於 0 算不算內離？算喔！所以要填 ≥ 0 ，大於或等於 0，所以，下一題，當兩圓內離的時候，連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 小於什麼？小於 2，旁邊要寫大於，讀成大於或等於 0，所以，內離關係旁邊加符號 ($0 \leq \overline{O_1O_2} < 2$)，唸成「0 小於或等於連心線長小於 2」，好，同心圓怎麼寫？對，等於 0 就好了。緊跟著，接下來找特例，當兩圓半徑相等，請同學來示範一下，剛剛都找男生，接下去找女同學，我們請江宜蓁幫老師一個忙，再請一個班上的嘉玲，請到黑板上來。來，宜蓁請上來一下，老師給兩個呼啦圈，好，嘉玲請上台，兩個圓的大小都相等，拿好，人站在圓的後面，這樣也可以，兩圓為等圓時，它們的位置關係有哪些種類？示範一下吧！開始，好，你動一下好了，然後呢？什麼情況？再來呢？好，可以了，請回座。請同學想像一下，在我們的學習單上，請你畫兩個圓的位置關係可能有哪些種類？請一位同學上來幫老師用圖示方式畫黑板，有沒有自願的？好，阿貴，再畫兩個圓形的位置，在上方的第 4 題的地方，圖示兩個圓(見圖二十)，半徑都相等的圓稱為等圓，它的位置有哪些關係？阿貴畫的很圓喔！畫在我們學習單上的第 4 題，你認為這個關係跟我們原本的兩個大小不等的圓，有沒有不一樣？哪些地方有差別？有沒有不一樣？你認為有幾種關係？好，完成之後並且點出圓心，注意喔！

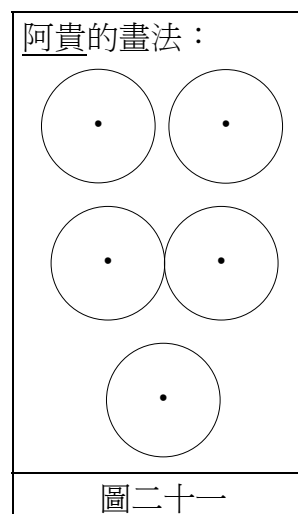
學習單：

4.(1)你認為大小相同的兩圓位置關係有哪些？請將位置關係圖畫在下邊的空格上。

圖二十

兩個圓一樣大喔，不是一大一小，兩個圓形在位置上有哪些呈現的關係？

好，阿貴畫好後請回座，能不能請問阿貴畫的關係有哪幾種類？到黑板前講一下，第一個呈現是兩個圓的什麼關係？(見圖二十一)



41. 阿貴：外離。

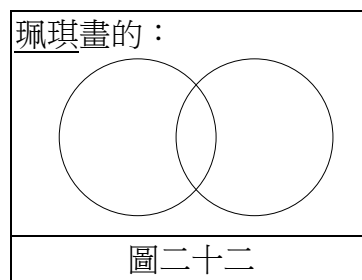
42. 老師：外離，是不是？

43. 阿貴：外切，同心圓。

44. 老師：外切，同心圓，那，第二個圓不見了，在哪邊？

45. 阿貴：兩個重疊。

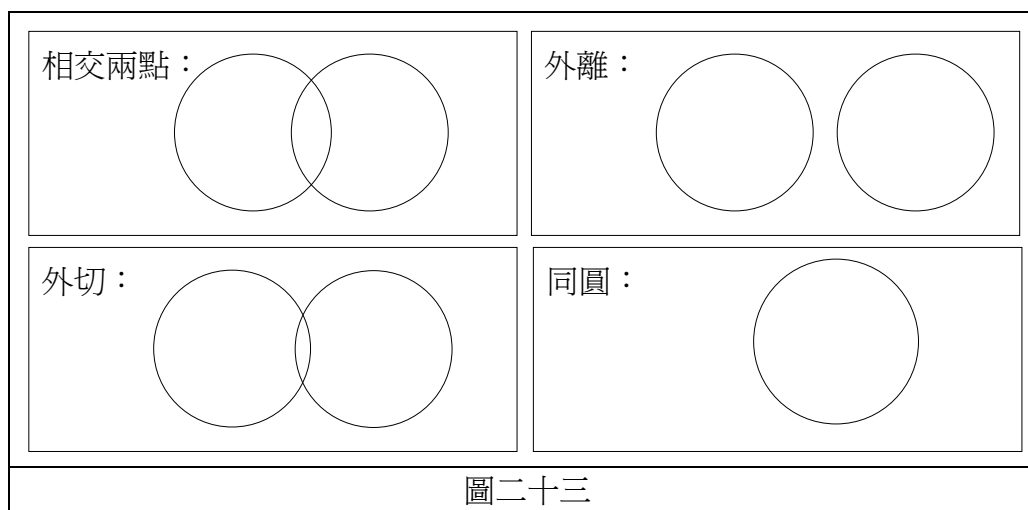
46. 老師：重疊，好，請阿貴回座，給阿貴掌聲鼓勵一下，太小聲了。看這邊，你覺得你畫的東西完成了沒？要不要補充？剛剛有人搖頭，要不要補充？好，珮琪，阿貴畫的內容有沒有不夠的地方？這是屬於什麼情況？(見圖二十二)



47. 珮琪：交於兩點。

48. 老師：交於兩點，請珮琪回座，給她掌聲鼓勵一下，好，請坐。目前與你畫的位置關係有不不一樣嗎？有沒有誰需要再補充的？已經完全都跟它相同的請舉個手，完全都相同的，好，請放下。我把位置做個命名，這樣（見圖二十二）稱為什麼？交於兩點，可以寫相交兩點，一樣，請同學把名稱寫在旁邊。中間呢（見圖二十三）？怎麼說？兩圓怎麼樣？我們稱為什麼？外什麼？外離。第三個，這裡是外什麼（見圖二十三）？外切。這個呢（見圖二十三）？中間的圓能不能稱同心圓？有沒有更貼切的名稱？同心圓可能有不一樣，可能有大小的區別，那這個怎麼說？同圓重合、兩圓重合，接受

嗎？兩圓重合。好，兩圓重合。有沒有發現目前兩個圓的位置關係，好像跟大小兩圓的結果有一些不一樣！哪邊有區別？在這裡沒有而那裡有？內什麼？內切有沒有？內切這邊有沒有？這邊有沒有內切？還有哪一邊沒有？



49. 學生：內離。
50. 老師：內離沒有，可是，在哪邊的關係就有？什麼東西有？
51. 學生：外離。
52. 老師：有啊，那邊也有啊！兩圓大小不一樣。
53. 學生：重合。
54. 老師：重合，是不是在兩個圓半徑不相同的時候，不會重合？因為只要半徑相同，且兩個圓的圓心位置相同，它們就重合了，好，請同學把連心線連起來，並且在下方填位置關係(見圖二十四)。第一個，把連心線連接之後，兩圓位置關係從最遠的地方稱為外離，當兩圓是外離，連心線長會與半徑有什麼關係？ $\overline{O_1O_2}$ 會大於什麼？大於半徑相加，對不對？大於

學習單：

4.(2)畫出連心線長，與兩圓的半徑長(都為 r)比較，並將結果填載入下表。

兩圓的位置關係	連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 與兩圓半徑(都是 r)的比較

圖二十四

$r+r$ ，可以簡記為什麼？兩個 r 相加我們簡記為 $2r$ ，所以，兩圓位置關係是外離的時候，連心線長大於 $2r$ 。老師有填錯，兩圓半徑都相等，不要再分成 r_1 跟 r_2 了，半徑都相等，通通簡記為 r ，所以，連心線長大於什麼？ $2r$ 。

再來，兩圓外切，請填「外切」，連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 會等於什麼？等於 $2r$ ；當兩圓是相交兩點的時候，連心線長會小於 $2r$ ，對不對？大於誰？大於 0 ，對不對？大於或等於 0 ，大於 0 ，它不會等於 0 ，等於 0 就重疊，重疊的圓相交幾點？兩圓重疊，相交無限多點，能不能稱相交兩點？當兩圓是同心圓，這兩圓重疊，連心線長 $\overline{O_1O_2}$ 等於 0 ，練習一下，請看第

5 題的第 (2) 小題(見圖二十五)，當兩個圓的半徑長是 8 跟 6，根據連心線長來判斷位置，兩圓半徑長分別是 8 跟 6，第 1 題，連心線長 18，兩圓是什麼位置？什麼關係？

55. 學生：外離。

56. 老師：外離。當兩圓連心線長為 14，位置關係是什麼？外切。當兩圓連心線長為 10 呢？對，相交於兩點。兩圓連心線長 2 呢？會是什麼關係？對，內切。

1 呢？對，內離。0 呢？對，同心圓。寫好了，對不對？延伸題（見圖二十六，學習單 5.(3)），假定給兩個圓心坐標分別是 $(1, -3)$ ，以及 $(-1, 1)$ ；給兩個圓半徑是 3 跟 4，從這兩個圓心的間隔距離，判斷兩圓位置是什麼關係？還記不記得兩點的距離公式，記得嗎？有沒有印象？老師請同學來算這一題，

目前給圓心的點坐標，要判斷兩個圓的位置關係，圓心一個是 $(1, -3)$ ，還

學習單：

5.(2)給兩圓的連心線長與半徑長，求兩圓的位置關係。已知兩圓的半徑長分別為 8 和 6，請依據下表的提示寫出兩圓的位置關係：

連心線長	18	14	10	2	1	0
位置關係						

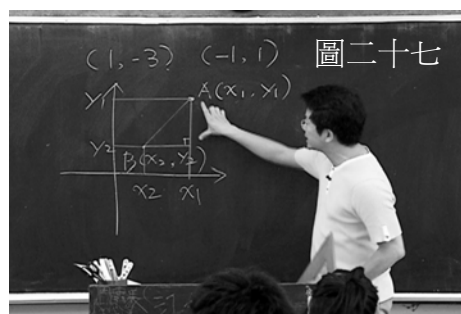
圖二十五

學習單：

5.(3)已知兩圓的半徑長分別為 3 和 4，且圓心分別為 $(1, -3)$ 與 $(-1, 1)$ ，則連心線長為何？且兩圓的位置關係為何？

圖二十六

有一個是 $(-1, 1)$ ，那麼，從圓心的點坐標可以求出連心線長，根據半徑長為 3 跟 4，請同學算算看兩點的距離是多少？還記不記得公式？同學，請你們算一下兩點距離，還記得公式嗎？還記得請舉手，好，請放下。兩點的距離再複習一遍，假設一個點是 A 點，這是 B 點，A 點 (x_1, y_1) ，B 點 (x_2, y_2) ；A 跟 B 在平面坐標軸上可以連成一條線段（見圖二十七），好，這是一條線段，那麼，我們透過把點做一個延伸，根據點的坐標，這個點對的是誰？這邊， x_1 怎麼對？ y_1 。相同的，把這個點做垂線，這是 x_2 ，旁邊是 y_2 ，我們利用直角三角形的方式，直角三角形的勾股定理，記得嗎？這個邊長跟這個邊長的關係要求出斜邊，我們請問栩彤，這個邊長跟它會怎麼樣？



57. 學生：相等。
58. 老師：相等，那這個邊長怎麼算？旁邊是 y_1 ，這個是 y_2 ，這距離怎麼算？ $y_1 - y_2$ 還是 $y_2 - y_1$ ，對， $y_1 - y_2$ ，兩個 y 值相減；那這個距離呢？請問映寧，這個距離怎麼算？ $x_2 - x_1$ ，還是 $x_1 - x_2$ ？
59. 學生： $x_1 - x_2$ 。
60. 老師： $x_1 - x_2$ 是不是？這個距離是 $x_1 - x_2$ ，從這邊可以發現，根據一個直角三角形的勾股定理，邊長等於這兩邊的平方相加開根號，因此 $\overline{AB}$ 等於 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，請同學利用兩點的距離公式把它算出來，好了沒？請問同學，你認為兩圓半徑長 3 跟 4，兩圓位置是什麼關係？是外切？還是外離？還是相交兩點？國祥你說，告訴我，連心線長多少？剛剛算的， $2\sqrt{5}$ 是不是？怎麼估算 $2\sqrt{5}$ ？把 2 弄進去根號裡面變成根號多少？ $\sqrt{20}$ ，這個

數大概在什麼之間？大於哪一個整數？大於 4，對，它在 4 跟 5 之間，它會大於 4 小於 5，大約是 4 點多，在 4 跟 5 之間，連心線長是 4 點多，比 3+4 更小，比 4-3 更怎麼樣？更大。所以，兩圓位置是什麼關係？對，相交兩點，兩圓位置關係就講到這邊告一段落。接下去給一個想像的空間，仔細看老師這邊，我們發現：在生活中，每一個人都可以當做自己的圓心，伸出自己的手為半徑，半徑有多長呢？因人而異，我可以想像伸出很長的半徑，畫成一個圓形，人與人的接觸就有很深的學問，老師舉個例子：老師前天從我家開著我那部小車，從家到學校，途中經過福德國小，可以發現很多的小朋友從對面的街走過來學校裡面，發現有一位愛心媽媽在旁邊指揮交通，照顧學生走過馬路，我發現每一個小朋友包括小六、小五的學生，沒有跟這個愛心媽媽有任何的交集，可是，那天老師剛好車停下來，愛心媽媽協助指揮交通，看見一位小二的學生走過來，背著書包且個子很嬌小，走過來之後，就對著這個愛心媽媽鞠躬，90 度喔，說謝謝您！你知道嗎？那個愛心媽媽馬上就露出一個非常甜美的笑容，相信，那天對她而言，是一件很開心的事情！我們平常跟人之間存在交流，當別人幫我們做事情，都覺得理所當然，可是，這位愛心媽媽有義務要做志工嗎？大部分的學生經過她，沒有交集，可是，這位小朋友做的動作，那種感覺，跟愛心媽媽產生了交流。我們請謝易文與奕翔再上來一次，好，請同學來到黑板前，每一個人把自己當圓心，你可以伸出很長的手跟別人接觸，好，我們會示範，外離，好，分開一點，同班同學相處，即便是同性也可以相處，好，兩位同學，請把自己想成是圓心，目前是外離(見圖二十八)，把它想像成人際關係是什麼關係？疏遠

學習單：

6.如果把兩圓的位置關係和人與人間的相處做對照：
(1)當兩圓外離時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？

圖二十八

？什麼情況下你跟對方會很疏遠？完全不認識？可是，即使是認識的人也會疏遠！請問姿穎，說說看，你認為班上的同學中，你會喜歡跟什麼人接觸、交往？哪些情況？我們請同學示範一下，來碰一下，當兩圓產生了接觸，可能是一個很大的撞擊！（見圖二十九）也可能是一個很輕微的碰觸！就像那個小學生跟那位愛心媽媽敬個禮而已，那種感覺是一種很好的感覺，好溫馨，姿穎說看看，你認為在班上，你會想跟哪些人交往？為什麼呢？

61. 學生：比較友善的人。

62. 老師：比較怎麼樣？大聲一點。

63. 學生：友善。

64. 老師：友善的人，你是不是也是跟姿穎一樣有相同感覺，跟友善的人交往。一個人，兇神惡煞、刺龍刺鳳，你會想跟他在一起嗎？好像就不會！所以在人際關係上最先的接觸點就很重要，剛剛姿穎說她會想跟友善的人接觸，請兩位同學再更靠近一點往內移動

學習單：

6.如果把兩圓的位置關係和人與人間的相處做對照：
(2)當兩圓外切時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？

圖二十九

，目前兩圓是什麼關係？相交兩點（見圖三十）。再更靠近一點，這樣的空間雖然交兩點，它有一個交集，這個交集代表什麼意思？若你跟對方接觸之後，你跟他的交集，從原本的認識開始，可能當面跟他說：我想跟你交朋友啊！一直到整個相交兩點時，中間的交集越來越大！交集大比較好，還是交集小比較好？有沒有不一樣？請問栩彤，說看看，你跟人相處的時候，如果這個人你真的很欣賞，想跟他做朋友，你會想要交集碰到一下就好呢？還是會碰很多點？

學習單：

6.如果把兩圓的位置關係和人與人間的相處做對照：
(3)當兩圓相交兩點時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？

圖三十

65. 學生：交集多一點。

66. 老師：那你會跟他產生什麼交集？哪些部分你會欣賞他？
67. 學生：個性吧！
68. 老師：個性要投緣。
69. 學生：興趣啊！
70. 老師：興趣要類似，還有呢？個性投緣也就是談的來、有默契，是不是？所以默契點越多，感覺越好，對不對？請問我們班的悅琪，你認為跟同學間相處的時候，你跟同學認識之後，什麼樣的想法讓你會想進一步的認識跟對方交朋友？
71. 學生：很自然吧。
72. 老師：很自然的，必須具備什麼特質，讓你會繼續想跟他交往，或是跟他學習？
73. 學生：相同的興趣。
74. 老師：相同的興趣，興趣是去殺人放火？
75. 學生：不一樣！
76. 老師：不一樣嘛！必須跟你的處境很類似，你喜歡聽音樂，你喜歡做一些運動，你喜歡看書、喜歡打打擊樂，興趣一樣就會在一起交往；有沒有誰完全興趣不一樣的，而且完全是沒有默契的，仍舊想跟他交往的，有沒有？沒有嘛！可以發現，有交集的時候就是這樣子。再往內靠近到內切，這時候內切是什麼意思？跟同學間相處的感覺，內切代表是什麼？凱文說看看，大聲一點喔！（見圖三十一）
77. 學生：就算熟。
78. 老師：很熟的朋友，多熟？
79. 學生：七分熟。

學習單：
6.如果把兩圓的位置關係和人與人間的相處做對照：
(4)當兩圓內切時，代表兩個人這時候的關係是甚麼？

圖三十一

80. 老師：七分熟，還沒煮熟！很熟的朋友，這樣的感覺是什麼意思？可以互相談心，一般同學在一起會談心嗎？好像比較保留，所以，可以談心，可以更深入，已經很熟了，對不對？好，我們請問柏均，你認為，當兩人的關係就像是兩圓內切的時候，你覺得這樣是什麼關係？
81. 學生：很熟的朋友啊！
82. 老師：很熟的朋友，多熟？
83. 學生：熟到...。
84. 老師：熟到怎麼樣？到什麼地步？熟到什麼地步？
85. 學生：熟到爛掉。
86. 老師：可以穿同一件內褲，很熟、很熟，對不對？很熟的朋友，班上有沒有跟你很熟的朋友，像哪一些？
87. 學生：曾逸翔啊！
88. 老師：可以穿同一件內褲，對不對？還有呢？除了曾逸翔外，還有誰？
89. 學生：可以一起分享。
90. 老師：可以一起分享，你的好朋友都在上方，你認同剛剛柏均的想法嗎？他把你當成好朋友，你把他當什麼？一樣嗎？好，其實老師想說，在這樣的關係裡面有點大圓包小圓，我們「包」的感覺有沒有很特別？包本身有包涵、包容，容忍很熟的朋友。當他跟你講一些不是好聽的話，你會包容他嗎？還是立刻反駁他或攻擊他或傷害他，會不會？會不會這樣子？其實在這樣的情況之下，可以包容一個小缺點，甚至你可以做一個轉變，跟他相處都很好。好，請益文跟逸翔回座。這樣的關係，老師先從這邊講，下次有機會再做補充。接下去請同學看學習單的第三張（第二節 兩圓的公切線與生活應用），公切線。（見圖三十二）

學習單 第二節 兩圓的公切線與生活應用

1.(1)圓的切線的意

義：

(2) 一條直線必須具備什麼條件才能稱為是圓的切線？如下圖所示：

2.(1)兩圓的公切線的意

義：

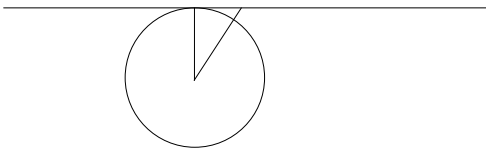
(2) 一條直線必須具備什麼條件才能稱為是兩圓的公切線？如下圖所示：

圖三十二

91. 學生：沒有人有第三張。

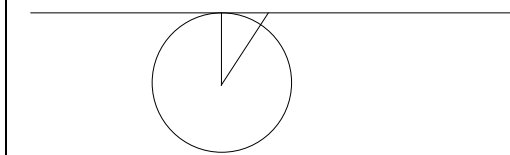
92. 老師：老師發，請逸翔幫老師發；接下去講公切線，好了沒？我們接下去講公切線。首先，先複習什麼叫做切線？切線的意義是，一條直線必須具備什麼條件才稱為圓的切線？好，我們先問同學什麼叫切線？上回講圓跟直線的關係有三種，跟圓交兩點的線稱為什麼線？交於一點的線？請問一條直線需具備什麼條件才稱為切線？好，你看，在這邊畫個點可以嗎？畫個點，好，請同學在學習單上點個點，在學習單上一條直線的上方點個點。好，老師畫條垂直線段，好了沒？好，先畫一條直線，上方任取一點，畫垂直線段，好，有沒有帶圓規？拿出圓規，把這端點當圓心，用這個距離當半徑，請畫出圓形，在直線上方找個點，由那個點向下畫垂直距離，長度適當，那麼，用下方的端點當圓心，原本的長度當半徑畫圓形，目前畫這個線跟圓交幾點？一點嗎？可不可能出現第二個點？這點算不算是跟圓相交的交點，算不算？不算，為什麼不算？有沒有誰要再上來解釋一下，上次請誰來解釋？柏均嗎

柏均的畫法：



圖三十三

柏均的畫法：



圖三十三

？來，柏均再上來講一次，老師目前在黑板上方畫一個點，紅色的點，為什麼那個點不能稱是跟圓的交點，為什麼？

93. 柏均：因為連接圓心之後。

94. 老師：好，上來比一下，紅色點同學不用畫，我們請柏均說明一下。

95. 柏均：連起來就會變成一個直角三角形，然後直角三角形這條線就是斜邊，斜邊會是三角形中最長的一條線，然後...。(見圖三十三)

96. 老師：斜邊是直角三角形中最長邊，是不是？然後呢？

97. 柏均：對啊，然後這一點到圓心的距離是半徑，它比它少，就會大於半徑...。

98. 老師：因為距離大於半徑，所以點在圓外，掌聲鼓勵一下。所以可以發現直線上的點，只有這點跟圓有接觸，其餘的每個點通通在旁邊，都跟中間這個邊形成很多個直角三角形，對不對？在直角三角形，斜邊是最長邊，都超過這個邊長，這個邊長是半徑，旁邊的點都在圓外，只有中間的點在圓上，所以，稱為什麼線？叫切線！把切線的圖形的畫法畫上去！這個地方的點可以畫很多線段，可以畫很多切線，所以切線本身都這麼畫的。請問同學，假定先給圓，再給圓上的點，圓心是 O，圓上的點稱為 A 點，請問同學，經過 A 點畫切線要怎麼畫？能不能隨便畫？憑感覺畫？可不可以？怎麼畫？我們請曜維來幫老師畫一下，經過 A 點的切線可以怎麼畫？要不要三角板？把大概的方式呈現一下，A 點是圓上的點，O 是圓心，要不要說說看，為什麼這麼畫就是切線？告訴老師，先畫出切線？還是先畫出半徑？先畫出直線呢？或先畫半徑？再畫一次，先後有沒有不一樣？先畫半徑，然後呢？這條線跟那個半徑有什麼關係？好，垂直，順序要弄正確！同學請回座。這個線稱為是圓的什麼線？叫切線，點在圓上可以畫一條切線，好，點在圓內能不能做切線？可不可能辦的到？為什麼不可以？畫上去變

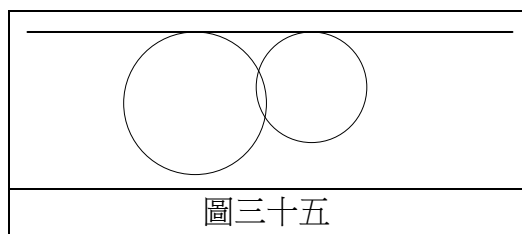
成什麼線？經過點，什麼線？割線，對不對？點在圓外能不能畫切線？有
沒有可能畫到切線，經過這個點的直線要畫切線可不可能？可不可能？有
幾個情況？

99. 學生：兩個。

100. 老師：下次教同學怎麼畫圓外的點對圓作切線，可以畫幾
條？對，兩條。我們看，剛剛講切線，緊跟著什麼
叫公切線？公切線是兩個圓共同的切線，請同學在
這邊畫一個，黑板上呈現一條直線，好，剛剛在線
上找個點，畫一個線段，畫個圓形，它稱為切線，
那兩圓的公切線呢？就找到兩個點，可以嗎？找兩
個點，在學習單上的第二個地方，我們寫 3 號，3
的地方，請你畫左方的直線，請你點兩個點，在左

學習單： 2.(1)兩圓的公切線的 意義：_____。 (2)一條直線必須具 備什麼條件才能 稱為是兩圓的公 切線？如下圖所 示： _____ _____
圖三十四

邊的第 2 題的第 (2) 的地方(見圖三十四)，在左方的直線點兩個點，好，
分別對這兩個點仿照前面的方式畫兩個圓，讓中間這條線都是切線。好，
仿照前面的方式，先找出垂直線段，距離一樣，畫垂線，先大約估計一下
畫垂線，這邊也畫垂線，請你把圓畫出來，找出兩個圓心，注意！讓這兩
個圓的半徑大小稍微不一樣，半徑大小不一樣，好，請你畫兩個圓。老師
發現有人畫在直線的上方，有人是畫在下方，都可以，兩圓的半徑大小不
相同，好了沒？好，剛剛有人這麼畫，不需要，有人這麼畫，你懂我意思
嗎？這麼畫，有人是這麼畫，把圓畫在下方都可以，所以，不要跟老師一
樣這麼畫，這麼畫就沒有意義，是
不是？可以畫在上方的半徑，或者
是下方的半徑。好，老師統一畫下



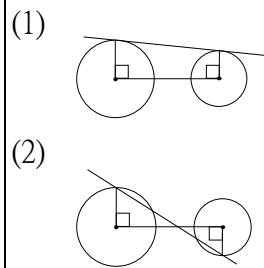
圖三十五

方(見圖三十五)，好了嗎？剛剛繞一下，有人這麼畫，有人這樣子畫，我們在旁邊呈現：好，第一件事，先請同學在第一個地方畫出兩個圓形，把最下方的點當圓心，找出兩個圓形，目前最上方的這個線，老師把顏色加深，最上方這個線，它同是兩個圓的切線，我們稱為共同的切線，簡稱為公切線。好，把公切線的圖形畫好，這條公切線本身的點有兩個點，通通稱為切點，這兩點跟圓心的線段就是半徑，跟切線有什麼關係？垂直，好了嗎？把公切線完成之後，請同學看看這邊的圖形

(見圖三十六)，老師要請同學看一下，這樣的圖形能不能稱公切線？好，這條線是不是公切線？是不是？為什麼不是公切線？哪一邊沒有垂直？我們請阿貴畫一下，哪個地方沒有垂直？目前黃色的線跟兩個圓的關係能不能稱為公切線？為什麼會沒有垂直？憑感覺是不是？覺得這四邊形是什麼四邊形？猜猜看？長方形？梯形？平行四邊形？梯形？好，梯

學習單：

3. 下面圖形的直線是否是兩圓的公切線？為什麼？



圖三十六

形，阿貴請回座，阿貴覺得這個形狀是梯形，這個角不會是直角，好，假定這個角是直角，那第四個角幾度？如果第三個角也是直角的話，第四個角幾度？

101. 學生：90 度。

102. 老師：那變成什麼形？長方形？梯形？所以，不是直角，所以不是切線，不是公切線，我們先到這邊，下次再把這邊的單元往下補充，好，班長下課。

103. 學生：起立。

參、教學說明

國彰：非常感謝周主任給我這個機會擔任這次教學的演示，雖然本身教書的生涯已經歷經了 21 年，可是，面對這樣的一個挑戰，本身十分的高興也願意去接受，因為教學本身是一種模式，經常在長遠的時間之間被運行，可是，我認為，自己不斷的挑戰自己，勇於接受任何一個考驗，對自己的教書的生涯跟動力可以源源不絕。這次我拍的單元是「兩圓的位置關係與公切線」，因為兩圓的位置關係跟公切線單元不是很困難，可是，我認為可以把這樣的題材讓學生學習。從一個前置經驗開始，慢慢的延伸出數學模式的開發，比如說，從點跟圓的關係，到線跟圓的關係，到兩圓的關係，就是一種模式，從相交的交點感覺也是如此，所以，我想協助學生來建立模型，讓學生了解，數學是可以有脈絡可尋的。這次的教學演示，我有嘗試著把學生間的人際關係做連結，平常在校園中，數學是學生很不喜歡的課程，可是，如果老師平常的教學跟孩子們產生良性的互動，對於孩子的學習也是有無形的幫助，所以這次有嘗試突破，利用兩圓的關係，讓孩子來談起兩個人的相處應該怎麼去因應進退，所以，這次的突破是想把這個部分做個試驗，畢竟本身不是一個很專業的輔導老師，因此，也擔心這樣一個教材，在呈現中會出現孩子們天馬行空或扯離話題或偏離主題的情況，可是當初預估，如果只想到最壞的情況，這個時候就都不能做了！因此，我勇於嘗試這個挑戰，在這次的教學中，我希望孩子可以跟老師對話，我今天的教學原本也想預估，以前在教數學的時候，老師會習慣講公式，讓學生直接從公式中間去套算法，原本設計是希望在講兩圓公切線長的時候，公切線的引出會很自然，然後讓孩子可以學習公式，就這麼簡單！不是強記跟死背的。可是，今天的教學時間沒有掌控的很理想，所以這個部分沒有達成！很可惜！

可是，今天的布題上，設計是讓學生從位置關係去建立數學模型，這個部分今

天有做的比較好，事實上，教學是一直在不斷的成長跟刺激，今天很高興有一些老師來參與我的教學演示，所以待會兒我也必須利用這個時間跟我的同事來談話，討論看的感覺，並且分享心得。接下來我想談我的教學的現況，在教學現場，當初預估的時間跟現實的情況產生了落差，這個情況是當初沒有料到的，在某些安排上，可以拉長，比如說在處理兩個圓的位置關係的時候，有特別要求學生把圓心、連心線長跟半徑的關係畫上去，這是需要且必要的，可是，原本的時間預估沒那麼多，因此那邊有延長了一些時間，老師也說我後面的時間處理的沒有很完整，這是我要自我修正的地方。另外，孩子們的表現也不是那麼的熱烈，也許是攝影機在旁邊操作的關係，還有這個班級的孩子們也是比較沉了一些。可是，今天在講到兩個圓的位置關係，談到兩個人的人際關係上，孩子們的表現出乎我意料之外的好，其實我對於這個單元的延伸教材比較不熟悉，第一次用這方式上課，孩子們的反應還不錯，尤其是兩個人在相遇的時候接觸，從認識到有默契，然後互相了解對方、有興趣、有交集，這一部分，我覺得還算滿意。另外，在處理學生上台畫兩個圓的時候，我認為孩子們的表現也不錯，比如說，當兩個圓畫在黑板上方的時候，有些地方是不夠完整的；我請孩子上台來補足，孩子們的表現滿好的，我從孩子們的認知發現他們不足，之後再補足，到最後問為什麼，這個歷程覺得還滿滿意的。

最後，我將在下面的時間跟我同事來對談，剛剛從觀察者對我的教學有哪些地方可以再做改進？哪些地方可以值得去再學習的？志超老師是我們學校的同事，在剛剛的教學過程中，當一位觀察者，今天想透過訪談來談一些教學的內涵，請問志超老師，你認為剛剛的教學的過程中，你的心得跟感覺是什麼？

志超：國彰老師在我們學校的教學經驗非常的豐富，嚴格來講，一般的學生對數學其

實興趣並不高，所以，有時候在上數學的時候，如何去吸引學生的注意力或者能夠讓他更有興趣來上數學，這是我們的一個目標。國彰老師在這一節課中，利用了呼啦圈這些東西，讓學生能夠有一個實際的物件去看，我覺得這是一個創新而且很實際，可以讓學生有具體的事物引起他們的興趣，學生的專注力跟參與力會有顯著的提高，這在教學上具有相當不錯的效果，我們教學也是力求要創新。

國彰：好，謝謝志超老師，我今天在教學中間有特別用呼啦圈來引出兩圓跟圓心線長跟半徑的關係，您認為在這樣的操作之下，學生對於這樣的一個教學，他的連心線長跟半徑的關係跟兩圓位置有沒有更清楚？

志超：對，當然會有實際的幫助，因為有一個實際的東西在這裡，學生可以從這兩個呼啦圈之間接近，然後甚至我們還特別拉出一個連心線，他可以觀察到實際的連接線的時候，它們怎樣？跟半徑跟連心線的長度，他其實可以感覺出來是有縮短的關係，可以讓學生有一個實際的感覺出來，真的有個圓越接近，連心線是越短的，這樣他可以很明確的去感受到這兩個之間變化的情形，我覺得這很不錯。

國彰：所以，你覺得在這個部分有達到我們預期的功效。最後，我想說畢竟教學必須要再成長，您看過我們這樣的教學歷程，就你本身的感覺，我們需要再改進的地方是哪些？

志超：或許我有幾點想法，第一個就是說，是不是這個班或許因為好像有攝影機的壓力存在，學生感覺起來是比較放不開的，所以感覺學生不太敢表達自己的想法，

問問題也不敢直接回答，都是要老師點名，這樣子，可能就是因為是一種外在壓力的關係，不然的話，其實這種活動學生會比較有興趣；第二點的話，就是呼啦圈這個東西，這個呼啦圈好像是兩個圓的構想不錯，可是似乎太大了，所以學生在操作上會有一點困擾，其實我覺得這個呼啦圈可以用一個比較小的，可能在操作實驗上會比較方便，然後這個連心線的話，因為那個連心線就是一整條藍色的線，也許我們可以做適當的記號，比如說，在某個距離擺上一個很明顯的色帶或怎樣，把它區分成有個單位長出來，然後這樣在接近的過程中，學生會發現他可以感覺出來，能夠更明確感覺它的距離真的是縮短了，甚至是指導它是幾個單位產生，可能會讓學生更能夠有實際的了解，我們可以算出來，拉大，你說本來是一個單位長，這個時候是三個單位長，這樣的話，可能學生更能夠接受。

國彰：好，的確我們在教學中，如果教學有一個現象，讓平常每天的教學，讓操作且有感覺的模式一直進行的話，相信孩子們的學習會更加的活潑跟活化，所以，我今天的收穫，將在以後的教學繼續嘗試往這個方向來走，讓學生反應更加的熱烈。第一，今天的呼啦圈有夠大，因此學生在操作上的確產生一些支撐點的問題，產生一點小問題，所以我的教具使用必須再做修正，教具的使用應該考量孩子的能力，呼啦圈小一點會更好，好，謝謝志超老師。

志超：謝謝國彰老師。

肆、教學後的省思

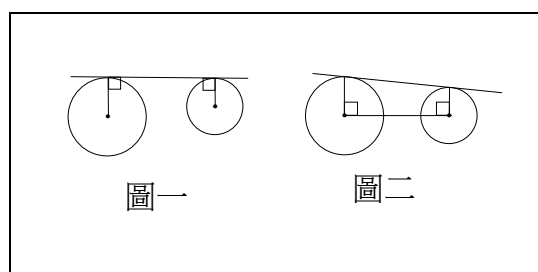
嘗試新的挑戰能帶給自己能量與動力！不要讓「教學」教到最後只剩下「分數」。是否可以讓數學學習的過程中增加師生互動，在數學概念的發展中，主動連結到學生

的兩性教育與人際關係，提供學生對事情的看法能採取正向的思考！

兩圓的位置關係使用資訊融入教學效果亦佳，但是使用呼拉圈等器材，希望讓學生有感覺的觸動，體會連心線長與兩圓的位置關係！再借助學生個人的生活體驗，試著帶動學生討論兩性教育的話題，這樣的嘗試也是一項試驗。

第二節課的時間掌握不好，原因是對於問題的發問與掌握能力較弱！如果能夠與輔導教師尋求支援，更能精準掌握時間。因此導致公切線長的部分沒有上完。

兩圓公切線的畫法，以往皆是先出現兩圓，再畫公切線；本單元的教學是先出現公切線，再畫出兩圓。採取這種方式可以讓學生更能了解圖一的關係；而不是圖二的關係。



圓心角與圓周角

壹、教學活動設計

一、教學年級：九年級上學期

二、教 學 者：台北縣光榮國中 吳孟佳 老師

三、教學目標：認識並應用圓心角與圓周角的各種性質。

四、活動目標：

- 1.透過命名活動對圓與各種直線所形成角間的關係進行了解。
- 2.透過教具操作複習之前學過的幾何量：弧、弦、扇形；介紹圓心角及弧的度數定義方式並引入弧長與扇形面積計算的公式。
- 3.介紹圓周角與所對弧度數關係並討論分類的各種狀況。
- 4.能利用「圓周角度數為所對弧度數的一半」解題與作圖。

五、教學概要說明：

本單元主要仍以講述法為主，學生上台發表解題紀錄為輔，配合學習單並使用康軒出版社所提供圓心角教具進行教學，讓學生清楚所學習的內容及進度；教師將學生分組以兼顧檢驗大部分同學之思考方式和及時的個別指導。

課程的設計及安排如下：

第一節課：先讓學生上台發表自己的猜想並引導學生把自己所畫的角分類，利用頂點在圓內、圓上、圓外進行命名的活動；接著複習二年級曾介紹的關於圓的各種幾何量。下課前要讓學生熟練完全平方和公式的運算。

第二節課：運用學習單，讓學生熟練上一堂課所教的內容，同時檢驗學生在概念上是否正確。在運算上正確的使用時機。

六、教學活動設計：

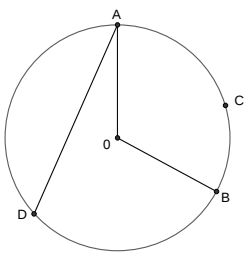
【第一節】

活動一：透過命名活動對圓與各種直線所形成角間的關係進行了解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 依角的頂點與圓的位置關係作命名	1.發下印 6 個圓的學習單，請學生畫出各種符合「角的兩邊與圓都有交點」的角。	• 上課前確認同學都有帶尺並讓學生分組坐好，可讓學生先自行畫，約兩分鐘後再開放同組討論。	• 能畫出「角的兩邊與圓都有交點」的角。
	2.各組輪流上台畫。	• 教師可在黑板上先畫好 10 個圓，以備同學發表。 • 學生可能把同樣是圓周角只因角度大小不同而分成不同組，此時可以並列。 • 也可能有些類型一直沒有人畫出來。	
	3.請根據以下提示將黑板上圖形分組： 因為角有一個頂點和兩個邊（直線），點與圓有哪三種關係？直線與圓相交的情況有哪些？	• 分類標準： 頂點在圓內、圓上、圓外。	• 能說出直線與圓相交的情況。
	4.前面的作法以頂點在圓內、圓周上、圓外位置來分類。是否還有其他分類法？	• 頂點與圓的關係只有圓內、圓周上、圓外三類。	• 能確定頂點的位置可分為三類。

	5.進行命名活動：依角的頂點與圓的位置關係作命名。	• 依據角的頂點位置作簡單分類，引出圓外角、圓內角、圓心角、圓周角、弦切角的命名。	
--	---------------------------	---	--

活動二：介紹圓心角及弧的度數定義方式並引入弧長與扇形面積計算的公式

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 複習活動	6.複習優弧、劣弧、弦、扇形的定義：配合教具一使用。   7.請將優弧、劣弧、弦、扇形填入下列空格中： $\overline{AD}$：_____ $\widehat{AD}$、$\widehat{AC}$、$\widehat{BC}$：_____ $\widehat{ADB}$：_____ 弧可以加減 $\widehat{ADB}$=_____+_____ $\widehat{ADB}$=_____ - _____	• $\widehat{ACB}$ 是劣弧，$\widehat{ADB}$ 是優弧，當題目沒有特別註明時，$\widehat{AB}$ 指的是劣弧，$\overline{AD}$ 是弦，由 $\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\widehat{AB}$ 圍成的面是扇形。 • $\angle AOB$ 的頂點在圓心，稱為圓心角；$\widehat{AB}$ 是圓心角 $\angle AOB$ 所對的弧，$\widehat{AB}$ 有兩種意義：弧度的度數，弧的長度。	• 能說出優弧、劣弧、弦、扇形。 • 能了解弧長與弧的度數代表的意義。 • 能回答 $\overline{AD}$：弦 $\widehat{AD}$、$\widehat{AC}$、$\widehat{BC}$：劣弧 $\widehat{ADB}$：優弧 弧可以加減 $\widehat{ADB} = \widehat{AD} + \widehat{DB}$ $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} - \widehat{BC}$

	$\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\widehat{AB}$ 所圍成形狀：_____ 8.複習圓的相關公式： 圓周長=_____、 圓面積=_____。 9.計算弧的度數與長度： • $\angle AOB$ 展開 120° 所對圓弧 $\widehat{AB}$ 度數即為 120° $\widehat{AB}$ 度數 = $\angle AOB =$ $\widehat{AB}$ 長度 = 扇形 AOB 面積 = 所以我們可以歸納出：		$\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\widehat{AB}$ 所圍成形狀：扇形 • 能瞭解圓周長與圓面積公式。 圓周長 = 直徑 $\times$ 圓周率。 圓面積 = 半徑 $\times$ 半徑 $\times$ 圓周率。 • $\angle AOB$ 展開 120° 所對圓弧 $\widehat{AB}$ 度數即為 120°。 • 能運用圓周公式與圓面積公式計算扇形面積。 $\widehat{AB}$ 度數 = $\angle AOB = 120^\circ$ $\widehat{AB}$ 長度 = $10 \times \frac{120}{360} = \frac{10}{3} \text{ cm}$ 扇形 AOB 面積 $= 10 \times 10 \times \frac{120}{360}$ $= \frac{10}{3} \pi \text{ cm}^2$ • 提醒同學將半徑用 r 代入列式。 • 能列出弧長與扇形面積公式：
--	--	--	---

	弧長是周長的部 分，隨圓心角（x 度）而改變 弧長=_____ 扇形是圓面積的部 分，隨圓心角（x 度）而改變 扇形面積=_____		弧長=$2\pi r \frac{x^{\circ}}{360}$ 扇形面積=$\pi r^2 \times \frac{x^{\circ}}{360}$
--	--	--	---

【第二節】

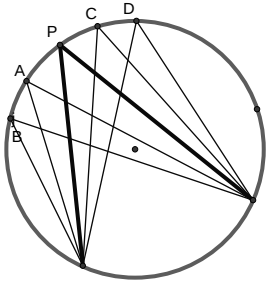
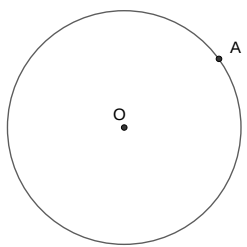
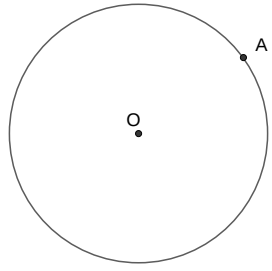
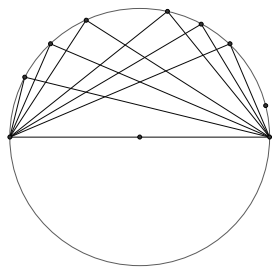
活動三：介紹圓周角與所對弧度數關係並討論分類的各種狀況。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 介紹圓周角與所對弧的度數關係	10. 頂點在圓周的圓周角也有對弧，角越大時所對的弧也跟著越大。他們之間有什麼關係呢？ 11. 發下第三張學習單。 為了討論圓周角與所對圓弧之間有何關係，我們先將圓周角分成三類： (1) 第一類：兩弦其中有一弦是直徑。	• 引導學生觀察當弧越大時，它所對的角就跟著越大。 • 為了有利於推導圓周角與所對圓弧度數之間有何關係，由教師主動提供如何將圓周角分成三類的方法。	• 能覺察角越大時所對的弧也跟著越大。 • 能瞭解圓周角以通過頂點的直徑為界線只有這三類。

	(2)第二類：兩弦在直徑不同側 (3)第三類：兩弦在直徑同側 哪一類比較容易 透過弧長看出度 數？ 請推導 第一類：兩弦其中有一弦是直徑時，圓周角$\angle QPA$與所對弧$\widehat{AQ}$之間的關係	- 第一類 - 提示學生，圖中$\widehat{APQ}$為等腰三角形中$\angle 1 = \angle 2$而且圓心角$\angle 3$的度數等於所對$\widehat{AQ}$的	- 能觀察出第二、三類是第一類的組合型態。 - 由等腰三角形兩底角相等和外角定理得到。 $\angle QPA = \angle 2 = \frac{1}{2}$
--	---	--	---

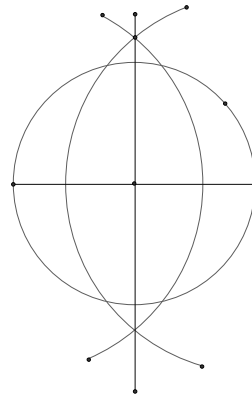
	第二類：兩弦在直徑不同側時，圓周角$\angle APB$與所對弧$\widehat{AQB}$之間的關係 第三類：兩弦在直徑同側時，圓周角$\angle APB$與所對弧$\widehat{AB}$之間的關係 • 由以上三類的討論，我們可以得到圓周角與所對弧的關係為何？	度數。 • 第二類的圓周角是由兩個第一類的圓周角相加而成。 • 第三類的圓周角是由兩個第一類的圓周角相減而成。 • 引導學生觀察三類型的圓周角都和所對弧有共同的關係。	$\angle 3 = \frac{1}{2} \widehat{AQ}$ • 能覺察是由第一類的圓周角相減得到並推導出： $\begin{aligned} \angle APB &= \angle 1 + \angle 2 \\ &= \frac{1}{2} \angle 3 + \frac{1}{2} \angle 4 \\ &= \frac{1}{2} \widehat{AQ} + \frac{1}{2} \widehat{BQ} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{AB} \end{aligned}$ • 能覺察是由第一類的圓周角相減得到並推導出： $\begin{aligned} \angle APB &= \angle APQ - \angle BPQ \\ &= \frac{1}{2} \angle AOQ - \frac{1}{2} \angle BOQ \\ &= \frac{1}{2} \widehat{AQ} - \frac{1}{2} \widehat{BQ} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{AB} \end{aligned}$ • 圓周角度數為所對弧度數的一半。
--	--	--	---

活動四：能利用「圓周角度數為所對弧度數的一半」解題與作圖。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
利用圓周角性質進行解題與作圖	12.已知$\angle p=45^\circ$度，利用「圓周角度數為所對弧度數的一半」求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$的度數。 	因為$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$都是圓周角並且對同弧，所以他們和圓周角$\angle p$角度相同。	能算出$\angle p=45^\circ = \angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ 
	13.利用這個圓(提供圓心與圓上一點A)和沒有任何刻度直尺，畫出以A為頂點的直角。 	適時提供半圓弧所對到的圓周角都是直角的提示。 	- 能畫出一條不通過A的直徑，交圓於B、C兩點，連接$\angle BAC$即為所求。 - 根據「圓周角度數為所對弧度數的一半」可得到$\angle BAC=90^\circ$
	14.只給三角板如何找出圓心？(工匠的曲尺)	利用三角版中的直角畫出90度的圓周角，連接角的兩邊與圓的交點就	能運用上一個活動的經驗逆推回來，由九十度的圓周角畫出直徑。

是一條直徑。再重複一次做出另一條直徑，即可交出圓心。

- 學生可能會利用中垂線作圖。



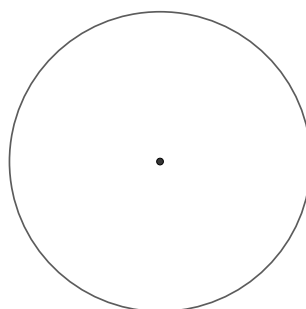
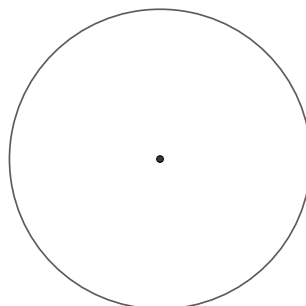
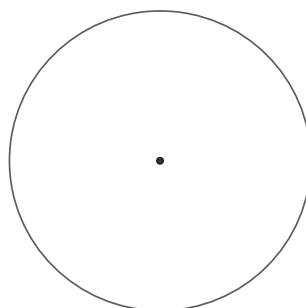
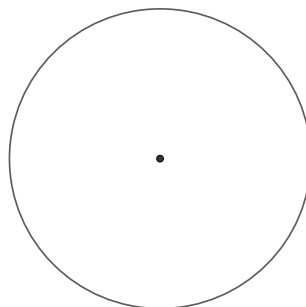
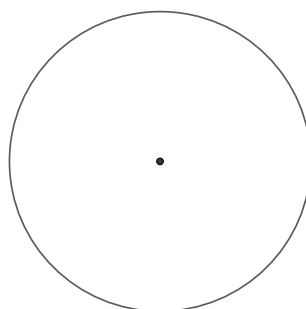
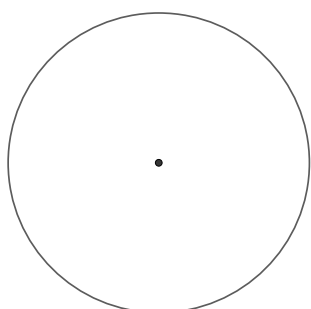
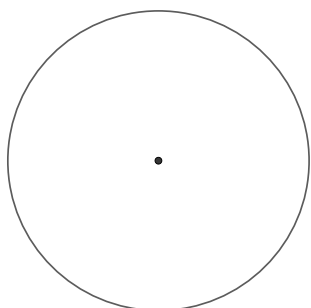
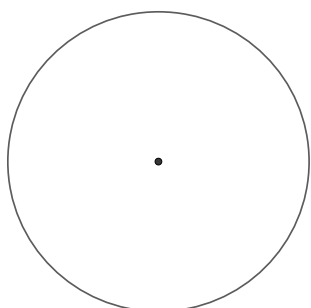
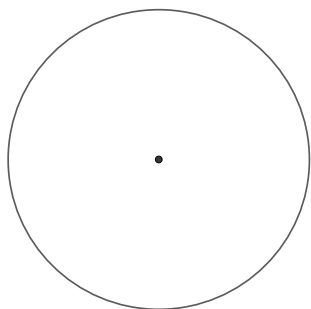
這是之前尺規作圖的經驗不妨更進一步提問：「如果手邊剛好沒有圓規呢？」

附錄、學習單

教學附件 902 2-2

姓名

一、畫出各種符合「角的兩邊與圓有都有交點」的角。盡可能的變化不同類型。



經過討論我們歸納出這些分類方式

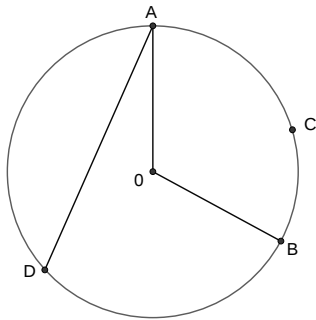
1. _____

2. _____

3. _____

二、

1.複習圓的相關名詞：優弧、劣弧、弦、扇形



$\overline{AD}$: _____

$\widehat{AD}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$: _____

$\widehat{ADB}$: _____

弧可以加減

$\widehat{ADB}$ = _____ + _____

$\widehat{ADB}$ = _____ - _____

$\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\widehat{AB}$ 所圍成形狀 : _____

2.複習圓的相關公式：

圓周長=_____、圓面積=_____

三、圓弧和圓心角

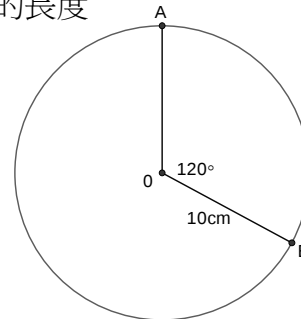
$\angle AOB$ 的頂點在圓心，稱為圓心角

$\widehat{AB}$ 是圓心角 $\angle AOB$ 所對的弧，

$\widehat{AB}$ 還有二種意義：

弧的度數

弧的長度



1. $\angle AOB$ 展開 120° 所對圓弧 $\widehat{AB}$ 度數即為 120°

$\widehat{AB}$ 度數 = $\angle$ _____ = _____

$\widehat{AB}$ 長度 = _____ = _____ π cm

扇形 AOB 面積 = _____ = _____ π cm²

所以我們可以歸納出：

弧長是周長的部份，隨圓心角 (x 度)

而改變

弧長 = _____

扇形是圓面積的部份，隨圓心角 (x

度) 而改變

扇形面積 = _____

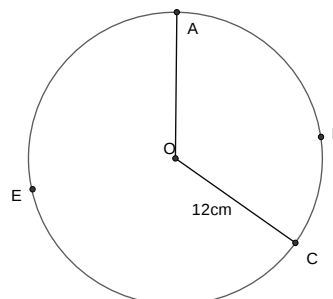
2.測量出 $\angle AOB$ = _____

$\widehat{ADC}$ 是 _____ $^\circ$, _____ cm

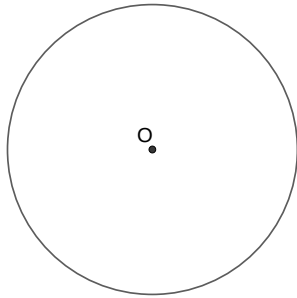
$\widehat{AEC}$ 是 _____ $^\circ$, _____ cm

扇形 AOB 周長 _____ cm

面積 _____

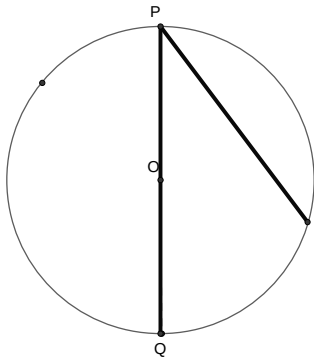


3. 已知圓 O 畫出圓上 A、B 兩點將圓分成優、劣兩弧，若兩弧的度數比為 5:3，試著用量角器畫出來，並算劣弧長度。



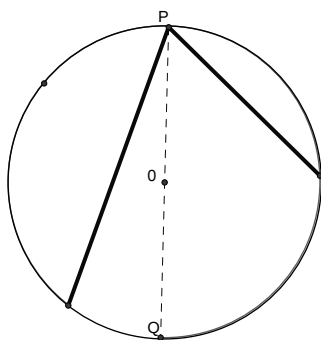
四、為了討論圓周角與所對圓弧之間有何關係，我們先將圓周角分成三類：哪一類比較容易透過弧長看出度數

第一類：兩弦其中有一弦是直徑

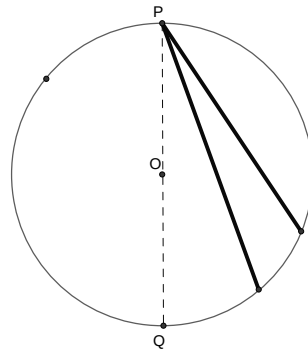


$\angle P =$

第二類：兩弦在直徑不同側



第三類：兩弦在直徑同側



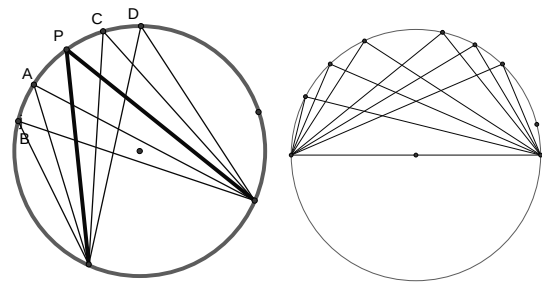
$\angle P =$

所以我們可以得到三種討論歸納後的規則：

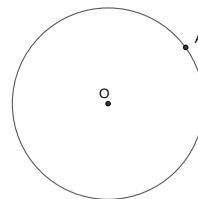
利用這個規則我們來想想下面的問題

1. $\angle p = 45^\circ$

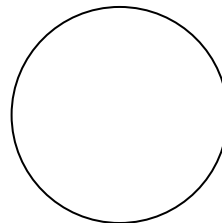
$\angle A =$ $\angle B =$ $\angle C =$ $\angle D =$



2. 利用這個圓和沒有任何刻度直尺畫出以 A 為頂點的直角

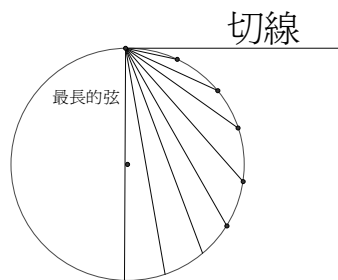


3. 只給三角板如何找出圓心?

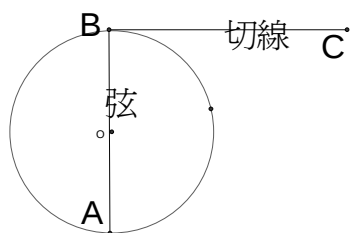


五、

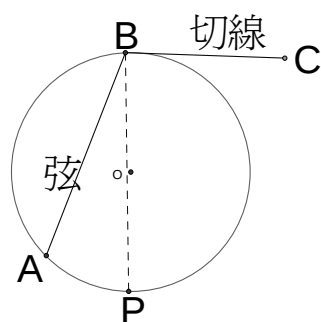
弦切角也和弧度有關嗎？和哪個弧有關呢？
我們來看看下面這個圖：



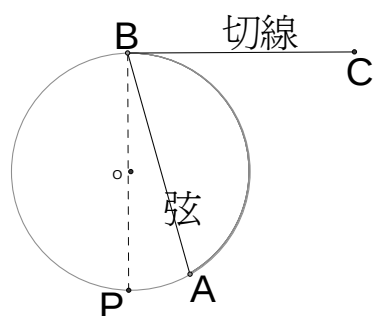
先看這種弦通過圓心的特殊狀況：



弦切角 $\angle ABC = 90^\circ =$ _____
這種呢？



弦切角 $\angle ABC =$ _____

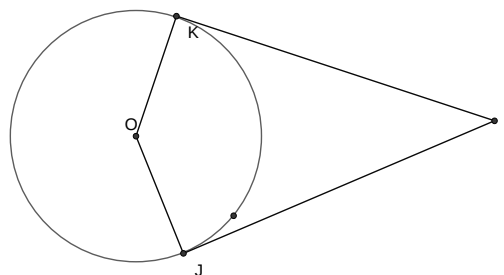


弦切角 $\angle ABC =$ _____

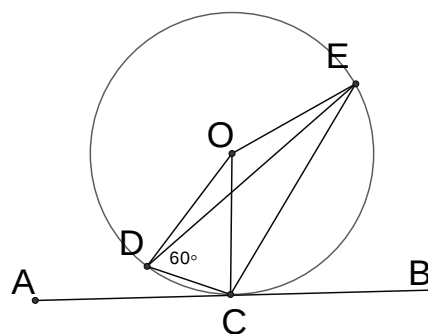
所以我們可以得到三種討論歸納後的規則：

弦切角的應用：

1. 過圓外一點可以做出兩條切線這兩條切線段一樣長嗎？



2. $\angle OCB = 90^\circ$ 度



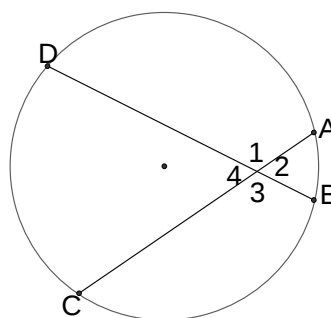
$\angle EOC =$ _____

$\angle ECB =$ _____

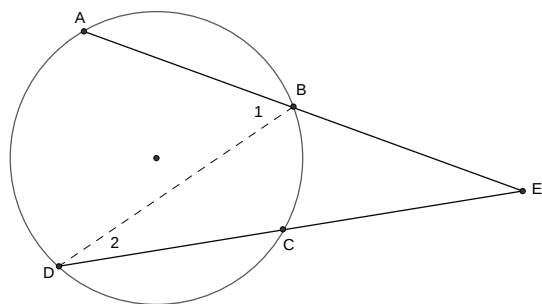
$\angle ECO =$ _____

六、圓內角和圓外角：

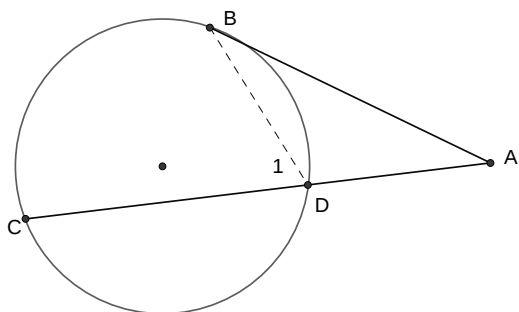
圓內角



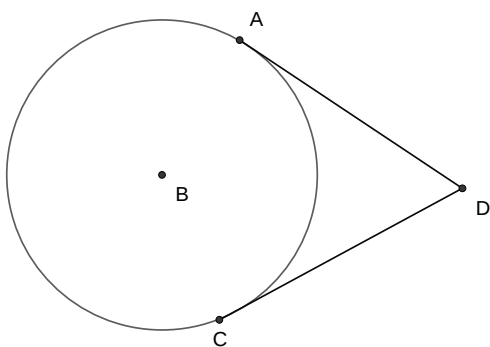
圓外角



當圓外角的一邊是切線時：



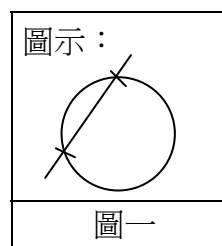
當圓外角的兩邊都是切線時：



貳、教學實錄

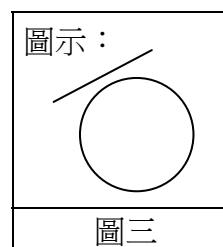
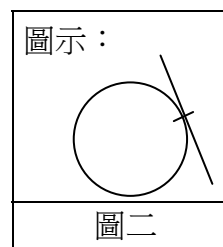
【第一節】

1. 老師：預備。
2. 學生：老師好。
3. 老師：好，各位同學請坐，大家好。現在請發講義的同學到前面來，我們這節課要上的部分是一個新的單元，是 2-2，2-2 的講義，現在請張彥邦跟陳建中幫我們發下去。那 2-2 要上什麼呢？老師先賣個關子，我們先不講這裡面要上什麼，我們先請各位同學做一個活動，這個活動是這樣子的：黑板上面有非常多個圓，這些圓等一下請同學上來畫，有拿到講義的看講義，沒拿到的等一下慢慢傳，我們要請你畫出各種符合的圓條件，條件是什麼呢？這條件是要畫角，要放角上去，什麼是「角」？就是我們數學裡面有兩個邊、有一個頂點的東西，叫角，對不對？這個角，小學就學過了，我們現在把角放在圓上面，看看會發生什麼事情。所以，我們來看看，舉個例子來看，各位同學，你知道上一個章節我們討論過點跟圓的關係有幾種？
4. 學生：三種。
5. 老師：哪三種？有「圓外」、「圓上」、還有「圓內」。線跟圓的關係好像也有三種，哪三種？糟糕了，線會跟圓有三種狀況喔！有沒有人記得？我們請曾江士文上來幫我們寫一下，好不好？謝謝。請幫我們畫一下，就畫在這上面，畫線，儘可能的畫不一樣的，我們現在在複習 2-1。對啊！畫的很好，然後呢？你這算是幾個交點？
6. 學生：兩個(見圖一)。
7. 老師：好，算兩個交點，這個算幾個交點？(見圖二)



8. 學生：一個。

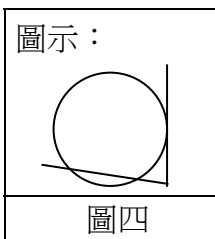
9. 老師：看不到的，舉手我看一下，你看不到他畫的東西的有沒有？好，曾江土文要 show 一下，然後呢？很好，這個是什麼的？沒有交點(見圖三)。好，謝謝曾江土文。非常好，各位同學，這是複習，我們有討論了點，有討論了線。角是什麼的組合？角有什麼組合？兩個邊，還有一個什麼？頂點。所以它有牽涉到兩種幾何量。一個是點，還有一種是什麼？兩個邊的線，對不對？現在我有一個條件，你們複述一次引號內容，預備。



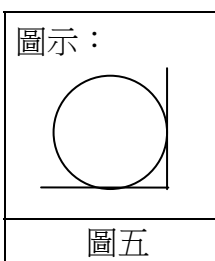
10. 學生：角的兩邊與圓都有交點。

11. 老師：好，「角的兩邊跟圓都有交點」，現在請各位同學開始畫，試試看，儘可能畫不同，儘你可能的畫不一樣，好不好？我們有 9 個圓，我們請 1、2、3、4、5、6、7、8、9 個同學上來畫。好，因為這個曾江土文畫過了，8 位同學請上來，剛好 12345678，你不用管別人畫什麼，你想到了，你畫就好了，然後等一下我們來分類看看，你不用看別人畫什麼啦！儘量自己畫。等一下沒有上台的同學要畫哪裡？畫自己的講義。他們好像心有靈犀，好多都同一類的。我們現在來看一下，回座位後你們繼續畫，試試看，儘可能的多，儘可能的變化，發揮你的創造力，你喜歡畫多少種你就畫多少種。我們稍微等一下同學，黑板上面，有沒有人畫和黑板上不一樣的？你覺得你畫的跟黑板上不一樣，有沒有，請舉手一下。很好，那我幫你再多畫幾個圓，等一下讓你上來表演。有嗎？還有不同類的？那我再多畫幾個圓。你們其他人儘量再想，還有人可以畫出跟黑板上不一樣的嗎(見圖四和圖五)？我是說：「我的跟別人的不一樣！」，你要上來秀一下的。我剛剛看

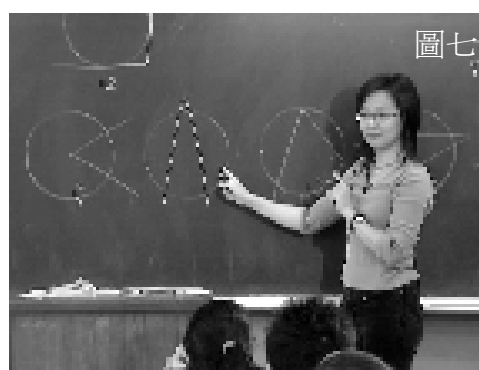
到余佳豪跟班長，來，兩位同學請上台，我們節省時間，有點高？我畫的跟人家不一樣。都可以。你覺得你的跟別人的不一樣(見圖，老師手指的線)，喔，滿酷的，你的這條是什麼線？



12. 老師：一個交點，你的是一個交點的，所以你覺得跟別人的不一樣，或者呢？負責人，你有沒有辦法畫出跟他們都不一樣的？有沒有想法？我們負責人都有一些奇怪的想法，你有沒有辦法？ok 嗎？應該是不 ok，但是試試看啦，你覺得



你這個跟別人的都不一樣，還有人嗎？如果沒有的話，我就把這個圓擦掉了。林君哲，好，請，沒關係，頂多就是畫不出來再回座位而已，也不會怎麼樣。對不起，我們釐清一下，這兩條是什麼線？切線。我們來歸納一下，我編號這樣比較容易討論，這是 1 號，2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12(見圖六和圖七)，我們班的同學好厲害，都畫出各種不一樣的怪怪的圖，你們覺得有沒有誰的跟別人的感覺上一樣？我們剛剛學過，點是一個很重要的分類的看法，我們如果用點，剛剛一開始就要畫在圓外、圓上跟圓內，如果以頂點在圓外、圓上跟圓內來分類的時候，哪一些頂點在外面的？請你告訴我？來，照順序，1 是嗎？1 在裡面，2 不是、3、4、5 不是、6，這個是 6。



13. 學生：8。

14. 老師：8 也是。

15. 學生：11。

16. 老師：11、12 都是，11、12 都在外面，感覺上 11、12 都在外面。
。那圓上的呢？頂點在圓上面的，1、2、3、4 都不是，
它們都在內部，5 也在內部。

17. 學生：7、9。(見圖八)

18. 老師：這個很特殊，這個頂點在圓上，7，那個 9 也很特殊，那個 9 也在圓上，這個是誰畫的？這個是班長畫的。班長，我們釐清一下，好不好？你這條是割線，這條是？

19. 學生：切線。

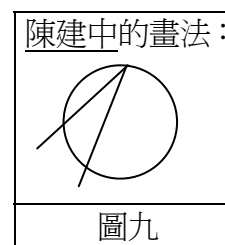
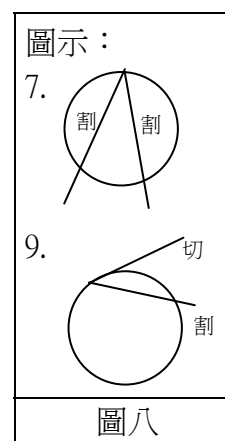
20. 老師：班長這條好特別喔，班長這條是切線，這條是割線，我們特別寫一下，7 跟 9 都在圓上，可是又有點不太像，我們依分類標準，點在圓上來講，7 跟 9 勉強放在同一個，但是他們的特質真的很不一樣，為什麼呢？這兩條是什麼線？這兩條都是割線，但是第 9 那一題呢？一割、一切對不對？所以，依分類標準在圓上來講，它們兩個分在同一類，可是它們還是有點不一樣，我們等一下來給它區分一下，但是那是下一個階段。接下來圓內，點在圓的內部有哪些？

21. 學生：1、2、3、4、5、6。

22. 老師：還有一個。

23. 學生：10。

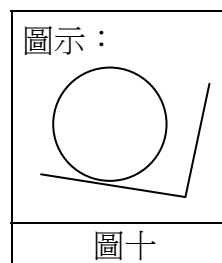
24. 老師：非常好，各位同學，你都畫完了嗎？都畫完了。同學，如果有一個人，他這樣畫，我看到陳建中這樣畫(見圖九)，



陳建中的跟這個 7 要不要算同一類？算不算同一類？

25. 學生：算。

26. 老師：應該算啦！因為我們看頂點，對不對？頂點也在圓上，所以這是同一類啊！這個可以大家都接受啦，如果陳建中的也算同一類，有沒有人還有別的？還有嗎？有喔！好，來，我們負責人還有，還有嗎？我幫你再畫一個圓，你還有，請上台，這麼帥！來，開始，我們剛剛 12 個都寫上去了嘛，謝謝。各位同學，你們覺得他這個算不算？(見圖十)



27. 學生：不算。

28. 老師：我們再唸一邊引號內的字。

29. 學生：「角的兩邊與圓都有交點。」

30. 老師：你們覺得他這個算不算？

31. 學生：不算。

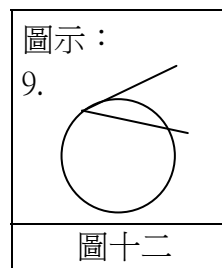
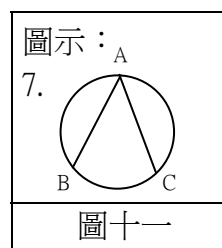
32. 老師：不算的原因是什麼？

33. 學生：它有一個邊不相交。

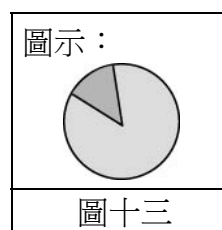
34. 老師：它有一個邊怎麼樣？不相交。所以，以我這個題目的設定來講，兩個邊頂多就是一個是切線，另一個是什麼？割線，是沒有那個不相交的。所以，這個不要算，好不好？我們就這 12 個來分的話，其實都被我們用頂點來分類為外、上、內，把它分完了，分成三個大區塊，這樣可以接受嗎？我們這個章節就是要來討論這些事情，那裡面是有一些規則可循的。發講義的請到上面來，我們再發第二張講義。值日生請擦黑板。等一下，先不要擦好了，我們討論完再擦。好，都拿到了，各位同學請唸一下第一行的字。

35. 學生：經過討論，我們歸納出這些分類方式。(見 P.215 學習單)

36. 老師：我們分出哪幾種？
37. 學生：圓外，圓上，圓內。
38. 老師：你們覺得我們可以怎麼樣來稱呼它們比較適當呢？有一些角，頂點在外面的，我們就叫做什麼？
39. 學生：圓外角。
40. 老師：有一些角的頂點在圓內的，我們就叫它什麼？
41. 學生：圓內角。
42. 老師：有人開始講出其它更適合的名字，對不對？這個圓上好像很特別，這個等一下來。啊！這個圓在內部的呢？就叫圓內角，感覺上圓外跟圓內好像都比較確定，我們先寫下來，第一行請你寫什麼？「圓外角」。我們覺得這樣還滿順的。這個就叫做什麼？第二個我們叫「圓內角」。圓外跟圓內我們就大致抵定，就確定它們是這樣叫。但是，就是有一些感覺上特別奇怪的，我們來看一下它，7 號(見圖十一)和 9 號(見圖十二)，這兩個都在圓上，可是叫「圓上角」總是覺得不夠精準，對不對？不夠精準，7 該叫什麼？跟 9 又要有一點區分。
43. 學生：圓周。
44. 老師：這個在圓周上，然後兩邊，我們複習一下這個概念，好不好？如果這個沒有突出來，有沒有人記得這個 $\overline{AB}$ 叫做什麼？在圓裡面我們以前好像學過，這個叫做什麼？講過啊！你彈吉他的時候，兩邊把它拉緊的時候，你可以撥得出聲音，那個是什麼？弦，對不對？線段兩邊都固定在圓上的線，7 這二個都是弦，可是 9 那個一條是弦，一條是切線，這兩個叫同樣的名字總是讓人覺得不太服氣，對不對？所以這個要叫什麼角呢？一般來說，我



們是叫它做圓周角，請寫在第三個，圓周角的頂點在圓上，那這個 9 號也是頂點在圓上，可是我們不太想要叫它圓周角，因為它一邊是弦，一邊不是弦，這個實在太特殊了，對不對？一個是弦、一個是切線的這種角有沒有什麼方法來叫？就叫它「弦切角」，你覺得這樣順不順？「弦切角」，這樣可以嗎？好像有一點勉強，可是多唸幾遍就可以了，請你寫下來，我們這個章節的名稱就叫做圓心角、圓周角跟弦切角。你會說：老師，我們剛剛命名裡面沒有圓心角這個東西，我們這個章節怎麼一開始就是圓心角呢？怪怪的，圓心角其實是這裡面一個特殊的狀況。我們現在要來開始講這件事情，請各位同學看到這個教具(見圖十三)，這個教具是一個圓上面有四個顏色，四個顏色，這個就是圓心，這個長度都是半徑，對，那我們先看一下第一個狀況，我們把事情化簡一下，就只有兩個顏色的時候，你看這一個藍色的區塊，隨著我的旋轉，中間這一個部分的角度感覺上怎麼樣，越來越？



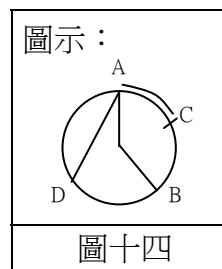
45. 學生：小。
46. 老師：對，這個越來越大，這個角我們剛剛黑板上好像也有畫過，對不對？它是頂點在圓的內邊，而且它很特殊喔，它不是亂點，對不對？它是在一個很特殊的點上面，在什麼點上？
47. 學生：圓心。
48. 老師：這種角是我們等一下要發展的東西的基礎，這種是最基本概念。那要複習一下裡面的名稱，請看到第二大題，有哪四個名稱？我要來複習，預備，起。
49. 學生：優弧、劣弧、弦、扇形。
50. 老師：好，現在請你把它填到格子裡面，請你完成第 1 題所有的格子，組長寫好

之後，拿來老師批改，可能有些忘記了，我們稍微問一下好了，問誰？玟卉，請問優弧跟劣弧有什麼差別？給你一個提示，優弧跟劣弧有什麼差別？這一個應該叫什麼(教師撥動圓心角的教具，示範優弧和劣弧)？這個叫做什麼？優弧，因為這個很大，對不對？這個感覺上就很可憐，那這樣子呢？這個時候還是誰佔優勢？紅色的這個圓弧比較佔優勢，所以關鍵是幾度？

51. 玟卉： 180° 。

52. 老師：好，謝謝，答得很好，所以關鍵是 180° ，對不對？比 180° 大的我們叫什麼？優弧，只要比 180° 小的就叫什麼？劣弧。這是相對來說的，這樣子你們填得出來嗎？試試看，先把這邊填上去。好，五位組長請到前面集合，寫好了嗎？只要寫第 1 題，到「 $\overline{AO}$ ， $\overline{BO}$ ， $\widehat{AB}$ 所圍成形狀」就可以了，同學好像有一點點忘記什麼是弧了，我們等一下再來加強一下。弧還可以加減耶！弧可以加減，就是你這樣彎彎的一樣，或者再連一段或是再縮一段都可以用相加、相減來表達，加減你不會寫沒關係，等一下老師用講解的。好，再 5 秒鐘，老師統一講解可以嗎？請各位同學稍微看一下黑板，我這裡畫的跟你們一模一樣的圖(見圖十四)，好像組長們的狀況是： $\overline{AD}$ 這個應該是填哪一個？這個是直的，對不對？直的這個叫做什麼？弦，直的線段這個叫弦，再來這三個($\widehat{AD}$ 、 $\widehat{AC}$ 、 $\widehat{BC}$)其實老師沒有寫的很精準，有的同學可能會搞不太清楚老師在說什麼，那我用著色的，如果你真的也不太會，你也可以用著色，其實這個指的是什麼？指的是這個這樣子的，這樣子的點有無限多個，密密麻麻的排起來，然後彎彎的這一些構成黃色的這個彎彎的曲線，它是圓的一部分，他用這二個點，卡擦剪下來這一段，而不是中間這一段喔，搞清楚喔！這個是不一樣的兩件事情，我是指上面這

一些點，通通合起來這一些構成的東西，還有我再換一個顏色， $\widehat{AC}$ 是不是這一段，這兩個弧你用目測法就會發現它有沒有超過 180° ？無論是黃色的，或是紅色的或是 $\widehat{BC}$ 這個有沒有超過 180° ？都沒有，這三個都是優弧，還是劣弧啊？



53. 學生：劣弧。

54. 老師：劣弧。老師好像少了一個格子，是不是？還有一個 $\widehat{ADB}$ ， $\widehat{ADB}$ 就是什麼？我們複習一下之前的觀念， $\widehat{ADB}$ 是不是從這裡開始走，走了這麼遠，它超過 180° 了，超過一半了，對不對？超過一半，所以它是什麼？它佔優勢，這是我們之前學簡單的圖形的時候有用過的概念，所以它是優弧。老師上面這裡寫的這個是比較新的概念，加減，弧可以拿來加，也可以拿來減喔！對，我可以把它原本就只有這一段，再把它接上去就更長了，這等一下要用到，所以老師先稍微複習一下， $\widehat{ADB}$ 是不是長這麼多？它是哪兩個加在一起？ $\widehat{AD}$ 加 $\widehat{DB}$ ，請寫上去， $\widehat{AD} + \widehat{DB}$ ，當然你可以有其它的寫法，只是這裡我們提供一種記錄方式，這沒有標準答案啦！ $\widehat{ADB}$ 可能是誰減誰呢？你可能可以怎麼寫？ $\widehat{ADC}$ 減這個 $(\widehat{BC})$ ，對不對？這個不要， $\widehat{ADC}$ 減誰？這個把它去掉就剩下這一個。

55. 老師：老師提供一種減法，就是我讓它超過再轉回來。再說一次，這個基本上是這樣子，然後有點超過，我現在 $\widehat{ADB}$ 是不是比較多，然後再怎樣？減的過程就是怎麼樣？旋轉回來的過程，這樣可以嗎？好，所以它可以加也可以減。

56. 老師：接下來呢？這三個 $(\overline{AO}, \overline{BO}, \widehat{AB})$ 圍成的形狀請你用斜線著色，這個是什麼？什麼形狀呢？接下來我們複習面積公式，圓周長是什麼呢？圓周長就是這些統統加起來，圓周長的公式是什麼？多少？

57. 學生：直徑 $\times \pi$ 。

58. 老師：那我們就寫 $r\pi$ ？ $2r\pi$ ？感覺上 $2r\pi$ 比較有意思，因為 $2r$ 就是二個什麼？半徑，這樣就是直徑乘以 π ，這是第一格的答案，第二格的答案是什麼？半徑 $\times$ 半徑 $\times \pi$ ，同學，我們有一直複習的半徑 $\times$ 半徑 $\times \pi$ ，這等一下要用到。好，接下來，我們要開始新的部分，圓弧和圓心角，有沒有看到講義的右半部，這個我們剛剛第一句話有解釋過， $\angle AOB$ 的頂點在圓心，這種角我們就叫什麼？

59. 學生：圓心角。

60. 老師：圓心角三個字圈起來，專有名詞，只有頂點在圓心的我們叫圓心角，那這個 $\widehat{AB}$ ，彎彎的這個叫 $\widehat{AB}$ ，請著色， $\widehat{AB}$ ，有沒有，你下面有一個圓請著色，你現在著色過去的這一個過程是不是圓的一部分？這個就是一個弧，它是哪一個角所對的弧？是不是就這一個圓心角所對的這個弧？我想知道這個弧幾度，我要怎麼做？我好像需要一點工具吧！這是什麼？量角器，對不對？量角器上面分的最細最細的格子幾格？360 格，我們這裡分的，我這個量角器跟你們外面買的不一樣，我這量角器的是幾度的？

61. 學生：360°。

62. 老師：你們外面買的都是？

63. 學生：180°。

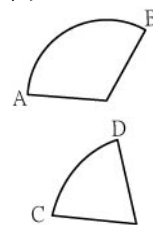
64. 老師：一半嘛！我這是兩片粘在一起，為了教學使用，我要量 AOB 這個角的時候，小學有教過量角器的使用方式，我們稍微再複習一下，關鍵是圓心要對在哪裡？頂點，這個圓心要對在角的頂點，好，對準喔！壓下去，然後，隨便看嗎？不行喔！我先轉，非常重要，先找 0，到這裡，我要讀這格子累積了幾格？我看到的是 120，所以這個小格子累積幾格？120 格代表什麼

意思呢？這個代表中間這個是幾度？20 度，如果我把這一個也當做量角器一樣分，分 360 份的時候它也是幾格？120 格，我剛剛這裡 120 度，是我量出來的，對不對？那我也是用切的，請問會有幾格？360 格的時候，它會有幾格？

65. 學生：120 格。

66. 老師：請你寫上去，120 格，要寫格喔，那個格其實就是什麼？對到那個圓心的地方剛好 120° ，可不可以了解？所以，原來弧都有什麼？都有度數耶！度數怎麼決定？它的度數就看它有幾格，對不對？它的格子數就是跟這個圓心角會剛剛好怎樣？一樣。我現在考一個腦筋急轉彎的問題，我們請張楷益同學來回答好了，講義上面沒有喔！很困難喔！非常、非常困難，因為我是用圓規畫的，所以這兩個都是圓的一部分，對不對？張楷益同學，請問 $\widehat{AB}$ 比較大還是 $\widehat{CD}$ 比較大？(見圖十五)

圖示：



圖十五

67. 學生： $\widehat{AB}$ 。

68. 老師： $\widehat{AB}$ 比較大，為什麼你會這樣子說呢？

69. 學生：它的角度比較大。

70. 老師：它的角度比較大，你所謂的角度，我沒有看到角耶，可不可以請你來畫一下，謝謝。他有說角，可是我沒看到角啊！其實老師剛剛是問「度數」，老師剛剛在問的是度數喔，他很厲害，好，謝謝。很清楚喔！他的概念非常清楚，你看，這一個雖然看起來比較短，對不對？雖然這個看起來比較長，對不對？在長度上面的確這個是比較長，這個比較短，但是在度數上面，我們剛剛說這個弧的度數是怎麼決定的？看它佔幾個格子，對不對？我們來量量看就知道了，這樣對上去，這樣量，哇！它好多度，它幾度，看

一下，150 度。這裡有 150 個小格子，那它呢？固定，然後量一下這是 0，喔！這個 85 個小格子，因為這裡 85 度，所以它有 85 個小格子，可見這個是幾度？這個是 150 度，所以這個上面的格子數，我們以平分的 360 度來說，這上面的小格子有幾格？150 格，而這個有幾格？85 格，所以度數來講的話，這個度數比這個度數怎樣？小。這樣可以了解嗎？現在請同學朗讀第二行，預備，起！（見 P.215 學習單三、圓弧和圓心角）

71. 學生： $\widehat{AB}$ 是圓心角 $\angle AOB$ 所對的弧。
72. 老師：好，第三行繼續下去。
73. 學生： $\widehat{AB}$ 還有二種意義：弧的度數、弧的長度。
74. 老師：好，所以當我們記錄 $\widehat{AB}$ 的時候，其實是有兩個意義的，第一個意義是「度數」，要看題目怎麼講，有時候是指「長度」，有時候是指「度數」。現在請你填接下來第一題的格子（請見 P.215 學習單的三之 1.）。試試看啦！會寫的寫，總共填 6 個格子， $\widehat{AB}$ 的度數、 $\widehat{AB}$ 的長度，還有扇形 AOB 的面積，請你填這六個格子就好了。中間那個 $\widehat{AB}$ 長度，請你先列式，然後再計算出答案，試試看，同學先想想看，老師把黑板稍微處理一下，好像跟我剛剛複習的公式會有點關係喔！有沒有注意到半徑有多長？10 公分喔！ $\widehat{AB}$ 的度數等於幾度呢？ $\widehat{AB}$ 的度數等於幾度，它是 120 格啊，就是多少？120 度。我前面有個格子，有沒有看到？題目寫 $\angle$ ____ 你不會以為寫 120 度在這格裡？這不太符合文法吧！這個要寫什麼？ $\angle AOB$ ，它的度數就跟那一個角的度數怎樣？相等。好， $\angle AOB$ 的度數會相等就是圓心角的度數會相等，都是 120 度，所以，以後我們這樣寫好不好？我們就直接寫什麼？120° 在這個弧上，以後計算的時候會常常使用到弧的度數，無論到了圓周角，到了弦切角都會用到，所以我們以後就有一個默契，直接把度數記錄在那

個圖形上，它從此之後就有度數了。好，接下來我們介紹長度，這個長其實是圓周的一部分，對不對？這個面積其實是圓面積的一部分，雖然我們要先來算一下圓周跟圓面積，我們剛剛有複習公式，圓周長多少呢？直徑 $\times \pi$ ， 20π ，這樣子一定不是我們的答案，對不對？這樣太多了，我們要把它切、再切，切成幾份？
(見圖十六)

$\widehat{AB} \text{ 長度} = 20\pi \times \frac{120}{360}$ $= \frac{20\pi}{3}$
圖十六

75. 學生：3 份。
76. 老師：360 份，裡面再幾份？
77. 學生：120。
78. 老師：因為整個圓是幾度？360，對不對？我們把它切成 360 格，然後，現在佔幾格？120 格，這樣子好像應該就是指它的格子，它有佔 120 格，所以它有這麼長，這個是中間那個格子要請你寫的($\widehat{AB}$ 長度=____)，我們接下來後面那個格子要請你運算的(=____ π cm)，然後面積呢？等一下，這個好像要算，這 $\frac{1}{3}$ 的意思， $\frac{20}{3}\pi$ 。面積當然就是圓的一部分，它的概念跟剛剛那個一樣，原千茹，請問圓面積多少？圓面積，不太知道，好，沒關係。我們請下一位，余佳豪，可能要站起來，圓面積，也不太知道，那就賀雅涵。
79. 學生： 100π 。
80. 老師： 100π 怎麼來的？
81. 學生：半徑 $\times$ 半徑 $\times \pi$ 。
82. 老師：所以你們兩個人忘記公式了嘛！公式在哪裡？公式在左邊啊，左邊就有公式，剛剛我們複習了，對不對？半徑是 10， 10×10 就是， 100π 就是答案，等於什麼呢？我們要把這個圓面積怎麼樣？切成幾份？360 份，然後它佔幾份呢？120 份，所以， $\frac{100\pi}{3}$ ，單位是平方公分。所以，我們可以歸納出

弧長是圓周的一部分，我現在唸的是框框裡面的，它會隨著圓心角度數而改變，圓心角變大，它就變大，所以我們寫一下弧長的公式，就是從這個來的，知不知道寫在哪裡？有一個格子有沒有看到？我們歸納一下這個公式，用我們剛剛圓面積的那些代號來寫，我們圓面積的代號用什麼？我們剛剛這個是圓周，那圓面積呢？ $r^2\pi$ 對不對？現在都不是這個，後面都要加一點東西，加什麼？把它怎樣？切 360 份，然後，題目是不是說 x 度，那 x 就是 360 裡面的 x 個， x 寫在哪裡？這兩個就是它的公式，我們把它歸納下來，這樣可以嗎？第 2 題我們當做回家功課，因為這裡要測量出 $\angle AOC$ ，請改一下(講義上為 $\angle AOB$)， $\angle AOC$ 等於幾度，上面寫 $\angle AOB$ 請你改成 $\angle AOC$ ，這一題是作業，你就可以量得出來 $\widehat{ADC}$ 幾度，然後多長， $\widehat{AEC}$ 幾度、多長，然後扇形的周長跟面積。我提示一下，圈起來，我們這裡有一點點小奸詐，扇形的周長要小心喔！你要圍成一個扇形不能只有弧，這個是扇形，以這題來說，扇形的周長要怎麼辦？你不可以只有弧，要記得加什麼？還要加半徑，還有這個半徑，知不知道老師在說什麼？我裡面是不是有一個格子說扇形的周長，請你怎麼樣？這個($\widehat{AC}$)要寫，然後呢？這個(半徑)要加上，這樣才圍的起來嘛，有時候同學會算的很高興，算完這個弧就忘記寫這兩個半徑，半徑要先加上，好，那我們這節課先上到這邊，班長。

$$\text{弧度} = 2r\pi \times \frac{x}{360}$$

$$\text{扇形} = r^2\pi \times \frac{x}{360}$$

圖十七

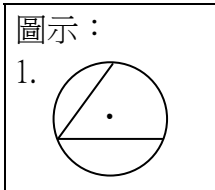
83. 學生：起來，立正，敬禮。

84. 學生：謝謝老師。

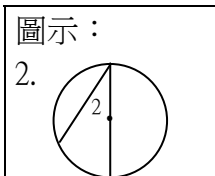
【第二節】

85. 老師：請值日生擦黑板，我們這節課會請比較多的同學上台，我們從第三頁開始

，剛剛那個題目我們就當回家功課，然後左上角這個第 3 題也是回家功課。我們這節課直接從第四大題這個題目開始(P.216 學習單)，在開始前面這個新的討論單元的時候，我們先回想一下剛剛那堂課，有講到頂點在圓周上的角，兩邊都是什麼？弦。這種角就是我們接下來要來討論的主題，我們剛剛講的都是圓心角的狀況，這節課我們要來講圓周角的一些性質，剛剛我們已經說了，每一個弧有沒有度數？有，都有度數，每個弧都有度數，這些弧跟角，我們已經釐清了什麼？釐清了圓心角跟弧有關係，那圓周角呢？圓周角跟弧會不會也有一些關係呢？負責人，請你上來幫我們畫三種不一樣的圓心角，好不好？圓周角，有的角怎樣？很大。有的角怎樣？小。請你幫我們畫幾種，你畫一個好了。好，班長畫一個，然後副班長畫一個。三位同學請上台，其他同學你們就看接下來的文字，稍微讀一下。你們三個人討論一下，圓周角，班長，我們要圓周角。好，班長畫了一個，好，謝謝。哇！這三個些關係呢？負責人，請你上來幫我們畫三種不一樣的圓心角，好不好？圓周角，有的角怎樣？很大。有的角怎樣？小。請你幫我們畫幾種，你畫一個好了。好，班長畫一個，然後副班長畫一個。三位同學請上台，其他同學你們就看接下來的文字，稍微讀一下。你們三個人討論一下，圓周角，班長，我們要圓周角。好，班長畫了一個，好，謝謝。哇！這三個圓周角，有的大一點，有的小一點，圓心都在，老師把圓心標出來，1、2、3(見圖十八、十九、二十)，你們覺得以圓心來看，這三個誰跟誰比較像？以圓心來看，1 跟 3，你們會不會覺得 1 跟 3 滿像的，為什麼你們覺得 1 跟 3 很像？張嘉雯你講



圖十八



圖十九



圖二十

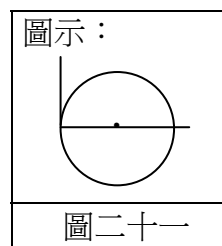
一下，請起立，1 跟 3 為什麼很像？它們好像應該算同一類，為什麼？

86. 嘉雯：因為它們沒有經過圓心。

87. 老師：它們沒有經過圓心，謝謝，張嘉雯的意思說，這兩個 1、3 沒有通過圓心，就是弦沒有通過，這個 2 是有通過的，這條好像叫什麼？

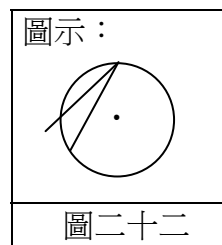
88. 學生：直徑。

89. 老師：這條叫直徑，啊！這兩個，所以我們把 1 擦掉，算不算同一類？我們擦負責人的，負責人，你有沒有辦法再畫出不一樣的，不能跟他們兩個一樣，這個應該是不通過圓心而且它跨在兩邊，把圓心包在裡面，對不對？負責人，你有沒有辦法再變出一個，還變得出來嗎？我們要圓周角，負責人，還有沒有其它的可能？



90. 學生：有。

91. 老師：還有喔！2 是通過，3 是把它包著，還有沒有其他的可能？好，謝謝。同學，這個是圓周角嗎？這是弦切角(見圖二十一)，不是。還有沒有其他同學想得到，一個東西你可以把它包著，圓心可以把它放在這個角的內部，還有這樣子，還有沒有其他的？班長還有嗎？好，喔！謝謝。這個是什麼呀？這個是什麼樣呢？這樣子有什麼不一樣？有不一樣，感覺上有點不一樣，可是哪裡不一樣呢？角度變小，還有沒有？



92. 學生：沒有包圓心。(見圖二十二)

93. 老師：沒有包圓心，對不對？所以我們現在可以發現，有一個是通過圓心的，有沒有可能兩條都通過圓心，兩條都通過圓心不就是 0 度嗎？那個不能算，我們要有度數，講來講去好像就這三個，就是以直徑來當標準，一個是通過直徑的，然後一個是什麼？跨在兩邊的。然後一個是什麼？在同一邊的

。這樣可以了解嗎？所以，我們現在看一下講義(見 P.216 學習單的四)：為了討論圓周角與所對圓弧之間有什麼關係，我們先將圓周角分成三類，哪一類比較容易透過弧長看出角度？現在有一個關鍵，就是我們想要知道這個圓周角的度數怎麼算，就是 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 怎麼算？好像張得越開，什麼東西會越大？

94. 學生：角度。

95. 老師：角度會越大，對，還有沒有？這個弧會越怎麼樣？

96. 學生：越大。

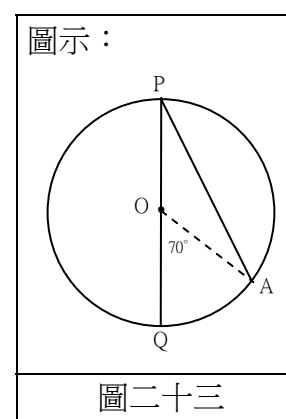
97. 老師：我這三個圓的半徑都一樣，好像張的越開，弧會越大，對不對？因為小的話，對到的弧就越小，所以，好像跟弧有一點關係，可是到底怎麼看它們的關係又要有一點解析。所以，現在請你幫我一個忙，我們的第一類是不是有一個弧，這個 $\overline{PQ}$ 是不是把它切一半，對不對？我們有三類，就是黑板上面的這三類，第一類通過什麼？圓心，是直徑(見圖二十三)，好，這條直徑我們叫 $\overline{PQ}$ ，這幫我寫上 A，好不好？如果我本來就知道這個弧是 70 度，請寫在弧上，我們剛剛講了弧有度數，我先給你 70 度，因為同學好像沒有準備量角器，所以我們直接講這是 70 度，那這個應該是幾度？

98. 學生：40。

99. 老師：有人猜 40，有人猜 35，你為什麼要猜 35？

100. 學生：乘以 $\frac{1}{2}$ 。

101. 老師：乘以 $\frac{1}{2}$ 。就是除以 2，真的會剛剛好是一半嗎？有沒有理由？沒有講理由的喔！林君哲，你知道理由嗎？不知道理由。那我們來提示一下，跟圓心角有一點關係，這裡 70 度其實是哪一個角度 70 度？圓心角 70



度，是不是？是。有沒有人可以說這個圈圈幾度？剛剛有人猜 35，有沒有人可以解釋一下，林君哲可以講了沒？還是不行。有沒有人要試試看，剛剛那節課第一個回答的是誰？好，沒問題啦，我提示一下那裡有一個等腰三角形喔，好，開始，你知道了，好，我們請曾江士文試試看，我要算 $\angle P$ ，這樣可以抓兩把糖果，你要不要說一下？

102. 學生：因為 $\overline{AO}$ 是半徑， $\overline{PO}$ 也是半徑，所以它們是等腰，所以角度相同。

103. 老師：聽的懂的舉手，那很多人還不懂，怎麼辦？

104. 學生：這個是圓心角，對不對？這個 70 度，然後這個是 180 度，所以這個是 110 度。(見圖二十四)

105. 老師：等一下，我猜張彥邦什麼都沒看到，你要不要再想個辦法？對。

106. 學生：有沒有看到？(側過身)

107. 老師：謝謝，很厲害， $(180-110)\div 2=35^\circ$ 我把它擦掉。我在猜，剛剛一定有人不知道他在說什麼，我們就請他旁邊的再講一次好了。張楷益再講一次，這個圖非常非常重要。請，你可以跟他不一樣，就是要講不一樣的方法，你可以啊，不然跟他一樣也可以，都可以。

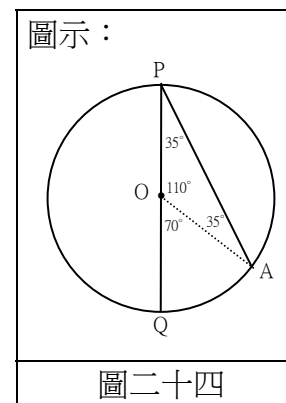
108. 學生：不會講。

109. 老師：真的嗎？不太會講，那你知道 35 嗎？

110. 學生：應該知道吧！

111. 老師：是有道理的知道嗎？沒關係，你站在那邊等一下，余佳豪可以嗎？可以，來，請試試看。張楷益，你站那邊就會看得很清楚，剛剛曾江士文講的時候可能還太遠，試試看。

112. 學生：內角和 180，其實那個是等腰三角形，然後 180 減 70 是 110。



113. 老師：同學，這裡可以嗎？好，110 這樣可以，然後呢？

114. 學生： $180-110=70$ ，除以 2 是 35，這個是 35。

115. 老師：很好啊！好像還有別的講法，張楷益，還有啦！老師講好了，還是別人有別的講法？我們有沒有學過外角定理？

116. 學生：有。

117. 老師：有，如果 $\angle AOQ$ 當做三角形的外角(見圖二十五)，那

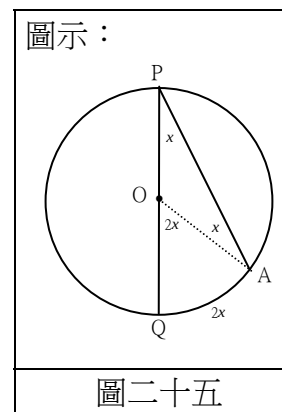
這 $\angle P$ 、 $\angle A$ 是不是內對角，這兩個內對角我們都寫 x 好了，現在請你寫上 x 在你們的講義上，謝謝張楷益，等一下還有機會。根據剛剛這兩位同學上來講，等腰三角形這兩個角是一樣的，這個很確定了，外角等於兩個內對角怎麼樣？

118. 學生：相加。

119. 老師：所以這個位置我們可以寫什麼？ $2x$ ，對不對？這個圓心角的度數好像又跟這個弧怎樣？一樣，對不對？所以，我們發現它們之間有個關係，就是這個圓周角 $\angle P$ ，我們是不是 x ，這個是 x ，這個弧剛剛好會是幾度(見圖二十六)？2 倍，只要這個是多少度，這個就是它的 2 倍，所以我們知道這個是 $\widehat{AQ}$ ，是不是 $2x$ 度怎麼樣？除以 ...？

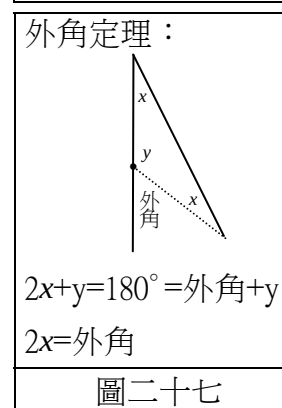
120. 學生：2。

121. 老師：因為這個幾度？ $2x$ ，對不對？這兩個加起來是不是等於這一個？是。根據外角定理(見圖二十七)，因為這個是 y ，這三個($x+x+y$)加起來是 180，這兩個(y +外角)加起來也是 180。這個外角加這個 y 也等於 180，所



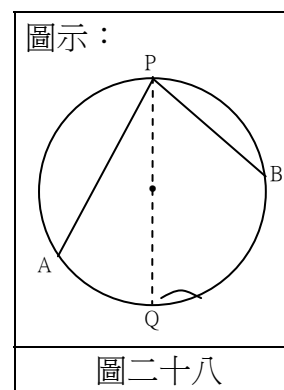
$$\angle P = x = \frac{2x}{2} = \frac{\widehat{AQ}}{2}$$

圖二十六



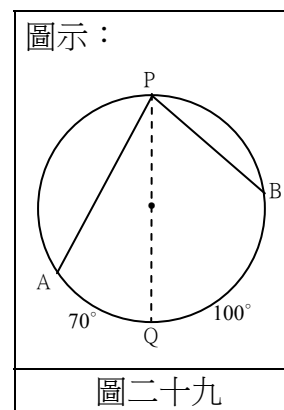
以我們知道這個 y 跟 y 消掉，外角是不是就等於這個 $2x$ ？好，所以我們知道 AQ 除以 2 的話，就會回來這個 x ，所以我們可以確定一件事情就是，最基本的這種形狀是這麼來的。

122. 老師：接下來我們看第二類，第二類就是包住的這一類(見圖二十八)，剛剛副班長畫的這一種，上面還是老師有幫你們用虛線畫出 $\overline{PQ}$ ，角度比較大，是畫這樣，對不對？這裡請你幫我再寫一次，好不好？ $\widehat{AB}$ ，這一次啊，我們的圓周角被分成左邊跟右邊，分成左邊



跟右邊，這種跟那種不一樣啦，這種我在講義上是寫 $\angle P$ ，請你寫 $\angle APB$ ，因為現在是有 A 有 B 了， $\angle APB$ ，就是我上面寫的 $\angle P$ ，這個 $\angle APB$ ，它應該跟誰有關係，感覺上跟這一個($\widehat{AQ}$)和哪一個($\widehat{BQ}$)？就是這個 $\widehat{AQB}$ ？

123. 老師：這樣整個會有關係，對不對？我們編一個數字，請同學上來講一下，好不好？如果 $\widehat{AQ}$ 是 70 度， $\widehat{BQ}$ 是 100 度，那請問這個答案是多少(見圖二十九)？你們可以先寫一下，給你們 30 秒想想看，根據剛剛的結論，你可以猜得到。

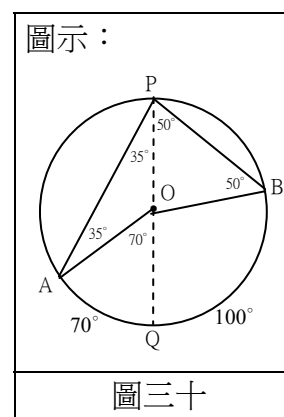


124. 學生：85°。

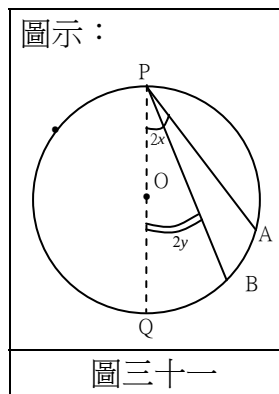
125. 老師：負責人說 85°，林君哲可以了嗎？這次可以啦！好，來，林君哲，請。請問怎麼寫，你算幾度？

126. 學生：85°。

127. 老師：你也是跟負責人一樣，好，這次請林君哲講，謝謝，等一下，先讓同學看一下，同學，看他做了什麼事？畫半徑，然後呢？(見圖三十)



128. 學生：因為...，所以就算出來。
129. 老師：謝謝，讓同學看一下，有看到他寫什麼嗎？有，好。
130. 學生：然後 70 除以 2 等於 35° ，聽的懂嗎？
131. 老師：你有聽到他說什麼嗎？沒有，再說一次，大聲一點。
132. 學生：從頭嗎？
133. 老師：不是，那個 50 怎麼來的。
134. 學生：就是 100 除以 2，然後 70...，聽得到嗎？
135. 老師：同學可以嗎？把 100 怎樣？除以 2，為什麼除以 2？因為是讓這兩個一樣，是不是？這兩個是不是相同的？所以這個 50，這個也 50，這樣分，因為這裡是不是一個等腰三角形？這裡也一個等腰三角形(見圖三十)。他講的蠻好的，你們看得懂這個字嗎？我重寫啦！這個 50，這個是 35，為什麼會剛好一半？因為這裡也藏了一個一樣的角，這兩個內對角相加是不是這個外角？所以，第二種情況其實是第一種情況什麼？做幾次？兩次，把這兩次怎樣？加起來，所以結局是什麼呢？結果這個 85° 啊，好像一開始的時候我們就可以怎麼樣？這整個是幾度？170，我就把這整個怎樣？加起來然後除以 2，不是就好了嗎？我把它寫成證明的樣子，我們把它記錄成文字的型式來推廣：我們如果這個是 x 跟 y ，試試看，這是 x 加 y ，它分成左邊跟右邊，我們剛剛說過了，這個度數跟這個度數是不是兩倍的關係？在這裡證明過，兩倍的關係，所以這個請你寫上來， $2x$ ，這個呢？ $2y$ ，對不對？ $2x$ 跟 $2y$ ，這個 $2x$ 其實就是誰？哪一個弧？ $\widehat{AQ}$ ， $2y$ 其實就是哪一個弧？ $\widehat{BQ}$ ， $\widehat{AQ}$ 跟 $\widehat{BQ}$ 可不可以相加？連起來變成什麼弧？ $\widehat{AB}$ 啊！ $\widehat{AQ}$ 加 $\widehat{BQ}$ 不就是 $\widehat{AB}$ ，所以它其實就



是 $\widehat{AB}$ 的一半，我們為什麼要把它推成這樣子的狀況呢？原因就是因為情況二跟這個 $\widehat{AQB}$ 很像，這個就是這個角($\angle APB$)所對的對弧，這個圓周角所對的對弧的一半喔，這個是它對面的弧。我們來看最後一種(見圖三十一)，最後一種也是 PQ，角的兩邊只不過是在 PQ 直徑的同側，對不對？然後這是 A 跟 B，這次我們就不要編數字了，這次我們直接用文字來寫寫看，這個是 x，這個是 y，這個是 x，這次就請負責人， $\angle APB$ ，請，同學寫寫看，我們這次試試看能不能用文字把它推出來，跟第二個證明會很像，好，負責人請，能寫多少步就寫多少步，我們等一下接力，等一下再請其他同學接著寫，等一下負責人寫不出來，我們請陳冠燊好不好？好，陳冠燊寫不出，我們請粘育誠，下一棒接力，負責人寫得真好，他寫什麼？

136. 學生：x-y。

137. 老師：他寫了什麼？x-y，你都不留給陳冠燊喔！真是的。他又寫成 $\frac{2x-2y}{2}$ ，對不對？然後，請說明，請負責人說明一下。

138. 學生：就算出 $\angle APB$ 的角度嘛，所以要 x 減掉 y，所以要看 x 整個是 $\widehat{AQ}$ ，然後...在這裡。

139. 老師：你們聽得懂嗎？聽不太懂耶！負責人要不要把它標一下，例如 2x 是什麼？標在圖上，2x 在哪裡？好，謝謝。我把它補充到這個圖上來，好不好？這個 $\widehat{AQ}$ 在哪裡？是不是這一個拖這一個，2x，這個 2y 呢？寫到這裡嘛，因為是這一個黃黃的這個對面，2y，所以弧和弧可以減，對不對？這個大一點的 $\widehat{AQ}$ 減掉這一個 $\widehat{BQ}$ ，剩哪一個？剩 $\widehat{AB}$ ，對不對？所以我們負責人一開始寫，他是跳這個，但是對同學來說可能需要一些細部的講解，所以 $\widehat{AB}$ 我們今天真正要求的是這個黃色的圈圈的地方，所以其實也是它的什麼？對弧，它對面的那個弧，所以這個也是對弧，對不對？所以同學請唸下面

那句話。

140. 學生：所以我們可以得到三種討論歸納後的規則：_____。(見 P.216 學習單)
141. 老師：你覺得這句話可以寫什麼？你看，這三種把所有的圓周角通通都講完了，對不對？沒有圓周角是這三種之外，那它們的結論都一樣，都是什麼？對弧怎麼樣？度數，然後呢？除以 2，一半，是不是都是這個觀念？三個都是，都有這個，對不對？所以你這一行可以怎麼寫呢？陳冠昇，趕快留給陳冠昇，其他同學自己寫寫看，圓周角等於什麼？寫好的同學請繼續寫下面 1、2、3 題，試著看一下題目。陳冠昇，你上來寫一下。
142. 學生：不會。
143. 老師：你不會寫，你至少要寫「圓周角=」吧，圓周角等於，粘育誠，接力，你也不會？圓周角等於，謝謝。因為我們這三個都是圓周角，這個圓周角等於什麼？第三種狀況圓周角還是等於什麼？它們可以用一句話就講完，都是圓周角，然後等於什麼東西？要不要試試看？粘育誠可以嗎？你想的其實就是答案，這三個都有同樣的性質都是什麼？都是一半，對不對？都是誰的一半？就是那個角度的對面那個彎彎的弧怎樣？除以 2。好，這樣可以嗎？你就來寫國字就好了，就把它寫上去就好了，其他同學稍微看一下，值日生幫我們擦黑板，然後粘育誠把「圓周角=」完成，值日生，請擦黑板，擦到這三個圓擦完。對，圓周角所對的那個弧，度數除以 2，沒關係，你就寫度數除以 2，其實它的度數是怎麼樣？1 半的意思，好，接下來同學這句話(圓周角=對弧÷2)我們要留著，這句話太重要，等一下都要用這句話，所以一定要讓同學留下來，所以先把它留著。我們看第 1 題(見圖三十二)，第 1 題有四個格子， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ ， $\angle D$ ，請你看一下，你要使用

剛剛這樣的過程歸納出來的結論，無論是類型 1、類型 2、類型 3，結論都一樣，你只要記最後的結論就好了，都是什麼？全班唸一次。

144. 學生：「圓周角等於對弧除以 2」。

145. 老師：對弧的意思是對的弧的度數除以 2，度數除以 2，來，再唸一次。

146. 學生：圓周角等於對弧除以 2。

147. 老師：馬上就要用到，請問，題目給的是哪一個角？ 45° ，

然後又要問四個，那四個又歪歪斜斜的，不同的位置，請問一下你寫完了嗎？好像很難，賀雅涵，請你上來解一下，都跟對弧除以 2 有關係喔！來，公式請你寫好，寫出來，再想一想。寫的很好啊，這個 $\angle P$ 是什麼角？ $\angle P$ 的頂點在哪裡？

148. 學生：圓周上。

149. 老師：圓周上，所以 $\angle P$ 是什麼角？「圓周角」，我們聽一下賀雅涵怎麼說，好不好？各位同學，筆放下。

150. 學生：圓周角等於對弧除以 2，然後 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 都是 45° 。

151. 老師：再大聲一點說一次，你說的很好，再大聲一點說一次。

152. 學生：這裡是圓周角，因為它那邊除以 2，這邊要乘以 2。

153. 老師：請寫到圖上，同學，題目問什麼？A 幾度、B 幾度、C 幾度，幾度呢？ 45° ，都是 45° 嗎？為什麼？

154. 學生：因為剛好都一樣。

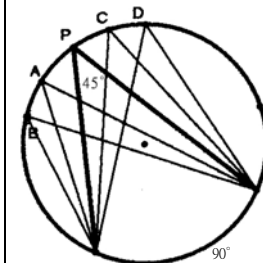
155. 老師：它們都對到什麼？同一個弧，對不對？它們都對到同一個弧，所以答案呢？ $\angle A=45^\circ$ ， $\angle B=45^\circ$ ， $\angle C=45^\circ$ ，通通都是 45° ，都那麼剛好，我們曾江士

利用這個規則我們來想想下面的問題

1. $\angle p=45^\circ$ 度

$\angle A=$ $\angle B=$

$\angle C=$ $\angle D=$

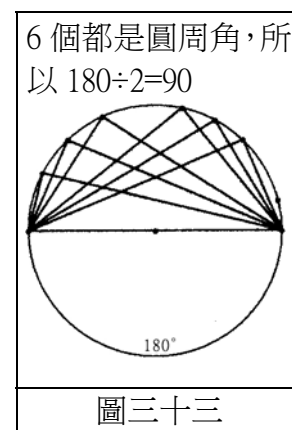


圖三十二

文寫 22.5° ，他做了什麼事？他把 45 又除以 2 了，你們覺得曾江士文的答案對，還是這邊的答案對？曾江士文，請回。這裡有一個逆方向的運作，很多同學會想成 45 除以 2，為什麼？因為公式裡有一個除以 2，所以同學會想用 45 除以 2，不只是曾江士文會這樣寫喔！這個 45° 是什麼角？圓周角。所以你要看公式的時候，45 要寫在哪裡？圓周角這邊，然後，對弧不知道，除以 2，誰除以 2， 45° ？ 90° 啊，對不對？ 90° 除以 2 才是 45° ，所以我可以知道這個是多少？90，知道是 90 之後呢？我就可以知道 1、2、3、4，它們統統都對到這個弧，所以那四個命運怎麼樣？都一樣，因為它們四個都是圓周角，都對到同一個弧，所以，那個弧是幾度？

156. 學生： 90° 。

157. 老師：所以 90° 除以 2，又回來圓周角是幾度？ 45° 。所以請在下面寫上一句話「對同弧的角相等」，我們會發現一件事情，只要對同一個弧，它們的角怎麼樣？這些圓周角度就會相等。好，右邊又有一個圖，這個圖你看到幾個圓周角(見圖三十三)？6 個圓周角，請問那 6 個圓周角幾度？我們請同學上來解釋，剛剛有人沒有上來或沒有解釋完的，我們請那一些同學，好不好？張楷益，下一位張彥邦，要解釋一下這 6 個角幾度？



158. 學生：它的對弧是 180° ，然後...

159. 老師： 180° ，弧在哪裡？在下面彎彎的地方。

160. 學生：這個會是圓周角，就把它除以 2，180 除以 2 是 90，所以它的圓周角就是 90° 。

161. 老師：所以 6 個角的角度怎麼樣？通通都一樣。 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、3、4、5、6 請你編上

號碼，它們都怎樣？都對到同一個弧，這個弧，張楷益說是 180° ，為什麼剛好 180，因為這是一條直徑，是平角 180° ，謝謝。第 2 題，「利用這個圓和沒有任何刻度的尺畫出以 A 為頂點的直角」，和第 3 題「只給三角板如何找出圓心？」(見 P.216 學習單右下方)，請同學分組討論，請到組長那邊集合，值日生請擦黑板，因為班長是值日生，所以我們請張彥邦幫忙擦一下，好不好？擦的時候，公式不要擦，我們等一下要請同學上來操作三角板。

162. 老師：還需要時間的組，請舉手，請放下，你們需要直角三角板嗎？

163. 學生：需要，一人一半，快點。太快了吧！你在幹麼啦，沒有圓心不能畫直徑。

164. 老師：會跟剛剛的 1、2、3、4、5、6 等於 90° 有關係。

165. 學生：有。

166. 老師：對，1、2、3、4、5、6 那個題目有關係唷！

167. 學生：...我不要了...把三角板直接放這裡，這裡不就會變...
然後這裡對到。

168. 老師：好，請回座位。

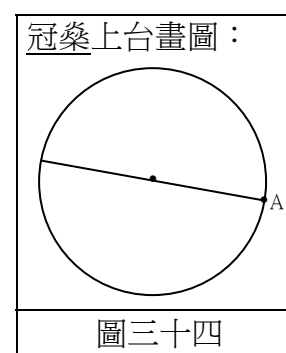
169. 學生：這個是 180，所以，沒關係啦！算了。

170. 老師：陳冠燊可以了嗎？你剛剛沒有回答出來，這題可不可以？可以嗎？沒關係，就是可以啊！他教的你會，就是你的啊，好，開始，我們這題的題目同學一起唸一次。

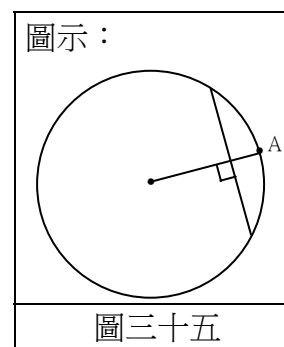
171. 學生：利用這個圓和沒有任何刻度直尺畫出以 A 為頂點的直角。

172. 老師：我覺得教室已經很冷了，不要再更冷，好不好？這是直角嗎？我們題目是要畫出什麼？

173. 學生：直角。



174. 老師：這個是以 A 為頂點的直角嗎？(見圖三十四)這裡有任何角度嗎？好像沒有，還有沒有其他組有其它的答案？反正一組回答一題嘛，你們那組如果先回答過了就 ok 了，這個怎麼畫？有沒有組有想出來？陳志豪今天都沒有點到，來，陳志豪，要以 A 為頂點的直角。(見圖三十五)

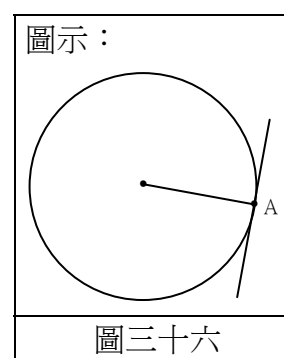


175. 學生：所以 A 是直角。

176. 老師：對，A 是直角，你們組長是哪一位？組長上來好了，因為下課鐘已經響了，我們讓組長來講一下。

177. 學生：A 要直角。

178. 老師：還有其它組有別的做法的嗎？有沒有其它組有別的做法？吳志鴻，這題給你畫，看來這組沒有答出來，吳志鴻，你要畫嗎？有沒有同學有做出來？曾江士文，



來，你今天可以抓三把糖果，試試看，謝謝(見圖三十六)。這樣子好像需要用到圓規喔，他的那個做法是需要用到圓規的，提示這個圖，這個圖是提示，好像目前為止都沒有人使用這個圖的提示，這個圖的提示關鍵字是什麼？就是 180 這裡是什麼？一直角，我現在要做的事情就是這是圓心，這是 A，我就要這個是直角，所以要畫出什麼？

179. 學生：直徑。

180. 老師：這樣就是幾度？180，然後呢？這個一定幾度？一定 90° ，同學做了其他任何的嚐試其實都有意義，我們只是提供一個想法，這樣說不定就會很快的解出來，我們這一節就上到這邊，班長。

181. 學生：起立，立正，敬禮。

182. 學生：謝謝老師。

參、教學說明

今天拍的這個單元是圓心角、圓周角和弦切角，我設計的教案的部分只進行到圓心角和圓周角的部分。前面一開始的時候，我有讓學生做一個活動：「畫出角的兩邊和圓都有交點」，設計這個活動是為了要讓學生熟悉頂點和邊跟這個圓之間的變化關係。第一他可以複習 2-1 前面所學到的點跟直線和圓的所有的關係，在這個過程裡面，我們會發現學生有一些重複，或者是類別分類上的狀況，都是我們需要他去熟悉這些角度的變化。這個過程後來覺得非常有意義，因為在學生操弄這些幾何量的時候，他可以熟悉角度的變化，這些東西在他的生活裡面可能不太多，我們利用這樣的暖身果然就達到這樣的效果，而且在命名的程序裡面，學生就會發現這些東西的來源是有原因的，而不是硬記下來，這是我們設計這個活動的很重要的一個目標和考量。

接下來把名稱都確定之後，我們開始討論這些幾何量的關係，例如圓心角跟弧就有很直接的關係，包括弧的度數怎麼訂出來的，這時候配合了一個 360° 量角器的教具，讓學生可以清楚的察覺到每一段弧的度數都是 1 度、1 度的格子所累積出來的，那個東西一但具體化，學生就很容易把它擴張到其他的概念，這個部分一定要慢一點、細一點去讓學生習慣，因為接下來所有討論的東西就會以這個當做基礎，然後抽象化，所以在準備教案的過程裡面，一開始我沒有很自覺到這部分這麼重要，但是經過修改之後就發現這個部分其實是很重要的一個基礎，這部分若是模糊的，或是單純用記憶而沒有真實的體驗的話，學生會很容易流於背公式或者是用死記的方法。所以，我花了一整節課的時間處理學生在角度到弧的度數中間有直接對應的關係這個部分，覺得學生在這部分表現的很好，包括我後來有出的題目，他們都理解長度跟角度有不同的呈現的關鍵，這個是圓心角的部分。第二節課，我們就從圓周角開始，圓周角其實是在剛剛圓心角的圓弧的度數的概念上面再建構上去，這裡會使用到外角定理，會使用

到等腰三角形的兩底角相等這一些之前學過的東西，我在處理上面沒有事先複習，所以有些孩子有一點轉不過來，這個部分在以後能夠做的時候，應該先複習一下外角定理，這個部分因為要讓孩子多畫一些圓周角去歸納它：其實可以為了證明或說明方便而分成三種類型，要確定這個三類都數完，這件事情對孩子來說其實不是很容易，我也是儘量讓他們觀察是不是就只有這三種類型，學生通常比較難畫出來的是這一種(兩弦在直徑同側的圓周角)，這種圓周角沒有把圓心包在裡面，是經過提示之後學生才出的來的。這種狀況也在我們討論之列，帶的時候，我們把第一類做的比較細、比較慢，反覆的讓學生去發現圓周角跟所對弧出現倍數的關係，這個部分刻意放慢的原因是因為它是整件事情的後面兩類的基礎，後面兩類都要用到這一個，我發現學生上台的時候，其實要把這些邏輯的觀念講的很順並不是那麼的容易，這也是我的教學可能要讓學生多練習的部分。最後提到的是應用的題目，因為可能學生剛學過這個概念，要做出做圖的第 2 題「畫出以 A 為頂點的直角」，很難抓到這一個概念，即使提示都在前面已經呈現了，他們可能還很難把它聯想在一起，原因是取的頂點在側邊，且不是在上面，也許我們下一次再做類似的教學活動設計的時候，可以把這個 A 點往上挪，讓學生容易的和這個圖形聯想在一起，就可能比較達得到我們預期的目標，或者是讓孩子發現「旋轉之後它的幾何量還是同樣的」，可以應用同樣的概念，「圓周角是所對弧度數一半」這樣的概念來解決，可見得孩子在證明完之後，要到可以使用這樣子的關係需要一個熟練的過程，可能一開始的時候我們要多一些這種角度度數操弄的經驗，才弄得出來做圖的部分，這是我的心得。在這個教案的準備過程裡面，我自己也發現很多的基本觀念最基本的一個元素，必須要讓孩子有準確的認知和重複的體驗，它是我設計的活動裡面學到很關鍵的一個收穫，因為孩子在要達到更上層的塔的時候，他需要的這一層基礎，絕對不是我們用很強硬的方式塞進他的大腦的，也是自己覺得基礎教育很重要的部分，我的心得到此，謝謝！

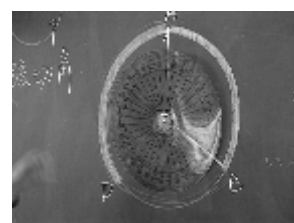
肆、教學後的省思

本次的教學單元為圓心角與圓周角，課程時間為兩節課（共九十分鐘），中間並有十五分鐘的休息時間。教學單元預計分五個活動進行，先由學生的繪圖猜想來暖場，想讓學生對這些角的名稱有較深刻與貼近的親切感，並且觀察到這些角的特徵以作為延伸到量化計算角度的前置經驗。

1.命名活動中，因為上一堂課已經有請同學們回家準備，所以原本設計時以為弦切角學生會畫不出來，很意外的是所有的角都沒有漏掉，學生能想到的向度是不容小覷的。



2.圓心角教具使用上，因為教材編排中，圓的計算已經是兩個學期前的課程，安排了康軒出版社提供的圓心角教具，讓同學觀察圓心角與所對弧的關係，加強對扇形面積和周長計算的熟悉度。但是很意外的是拖了太長的時間，反而產生喧賓奪主效應，



導致後面原本要進行的「只給三角板如何找出圓心？」活動沒有收尾。在時間掌控上應該可以更精簡一些，複習活動毋須著墨這麼深。

3.在複習時，有兩位學生完全背不出圓周公式和圓面積公式，這件事對我的影響是蠻大的，也讓我在拍攝完花了很多時間去思考：一個已經受了八年數學教育的孩子，他在形式運思上已經成熟了（因為代數部分也都進展到一元二次方程式的程度），為何小學六年級就該熟悉的圓周公式與圓面積公式，反而這麼的陌生又遙遠？於是燃起了我的好奇心，開始蒐集小學生是如何學習圓的概念。回到教學現場和這個班的學生討論：「小學時，圓周長與圓面積公式是怎麼來的？」，學生們似乎一致的答案都是：「背下來的」、「老師說的」（信數學老師者得永生？校園新宗教—數學教育）或許是時間太久了，孩子只記得被反覆要求計算的經驗而遺忘了最原始的推論過

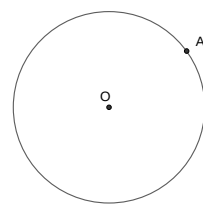
程；還是當初他們所遇到的小學老師並沒有給他建構過這兩個困擾人類許久的經典問題，只是硬生生地要他們吞下「文化的結晶」--數學公式？我不想漠視這個問題，因為我知道這一個現象應該是常態，在面對將來一屆又一屆的學生時，我應該有所準備。因為自己對國小的教材並不熟悉，其實一開始也不知道該怎麼跟學生切入，幸好，前輩們留下了許多的現場教學實錄教案，網路上也有豐富的教學資源，包括將圓切割的動畫程式，對我都產生莫大的幫助，讓我發展出一套銜接小學經驗討論圓的教案。如果我只是怪學生程度差，「怎麼到了國三還不會背圓面積公式？」，我就永遠沒有積極開發教材的動力。教學實錄的過程，無疑是一劑刺激我正視教學現場問題的特效藥，因為在反覆校稿的過程中，自己被放在高倍數顯微鏡下分析，於是連續的互動可以被切割、可以被重複播放，留下了反省和檢討的空間、也增加了進一步對話的可能。

4.針對學生下課前的活動「利用這個圓和沒有任何刻度的直尺畫出以 A 為頂點的直角」，學生們集體陷入了解題的困境很長的時間。事後檢討與改進：

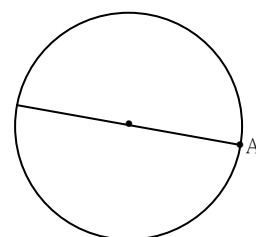
(1)因為我在黑板上將 A 點畫在 O 點右下方，於是學生就接受暗示，將 A、O 連接並延長成直徑，他們開始絞盡腦汁想怎樣過 A 點做圓的切線。學生並沒有走上我原本預期的路線（畫一條不通過 A 的直徑），接下來上台的學生也都跳脫不出做切線的想法。在這個時間點上我應該立即處理，並明確地指出「此路不通」。

(2)在一開始布題時就說清楚是要畫出「以 A 為頂點的圓周角而角度剛好是九十度」，讓學生能順利地從前半節課推導的公式「圓周角度數為所對弧度數的一半」以及上一題的經驗（對

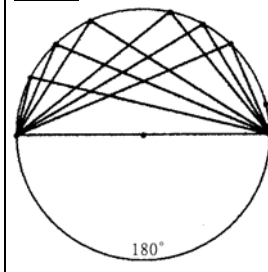
圖示：



冠榮上台畫圖：



冠榮上台畫圖：



到同弧的圓周角度數相等）延伸到這一題來（畫出預期中的輔助線--不通過 A 的直徑）。

轉眼間，這班孩子已經是高二的學生了，真的很感謝他們留給我的一切，也感恩團隊裡老師和同事們的提攜，我將帶著這些豐富的收穫，迎向更寬廣的將來。也希望這篇零零落落的教案能發揮野人獻曝的剩餘價值，為數學教育貢獻棉薄之力。

外心

壹、教學活動設計

一、教學年級：九年級下學期

二、教 學 者：台北縣二重國中 李美姿 老師

三、教學目標：能了解外心的意義與作法，並熟練外心性質的應用。

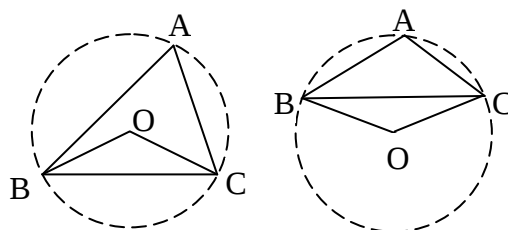
四、活動目標：

【活動一】

1. 利用摺紙的方式，找出三角形的外心。
2. 能了解三角形的外心至三頂點等距。
3. 能利用圓心角、圓周角與所對弧的關係，了解三角形外心的位置：
 - (1) 銳角三角形：△內部
 - (2) 直角三角形：斜邊中點
 - (3) 鈍角三角形：△外部

【活動二】

1. 能利用外心至三頂點等距的性質，求相關線段長。
2. 能利用圓心角、圓周角與所對弧的關係，找出外心與頂點連線的夾角和頂角的關係：
 - (1) $\angle A$ 為銳角時， $\angle BOC = 2\angle A$
 - (2) $\angle A$ 為鈍角時， $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$
3. 能利用外心與頂點連線的夾角和頂角的關係，求相關角度。



五、教學概要說明：

本教學活動以摺紙的方式，讓學生從實體了解外心的存在。了解外心的作法

後，利用動動腦的問題，讓學生將外心與三角形的外接圓做個連結，使學生了解外接圓的做法即找出三邊中垂線的交點，此交點即為外接圓的圓心，再以此交點至任一點的距離為半徑，即可畫出三角形的外接圓。

有了外接圓與圓心後，先對此圖形做命名活動，使學生了解『外心』一詞的由來。將來遇到外心相關問題時，能回想起外心的幾何意義即『外接圓的圓心』，再利用此做為性質的推導。

不同類型的三角形，其外心的位置也會有所不同，在摺紙活動中，學生即可發現此現象，但其中的緣由仍需透過幾何證明的方式讓學生了解。證明過程一開始先由學生自己討論思考；若學生無法解決時，老師再適時從旁協助，畫出三角形的外接圓，並提醒圓周角與其所對弧的關係，以此來了解外心位置的變化。

最後對於外心與頂點連線的角度問題，只要將三角形的外接圓畫出，並提示圓周角與其所對弧的關係，大部分學生對於此類型的題目就能迎刃而解了。

六、教學活動設計：

【活動一】

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 了解銳角三角形外心的意義與作法	1.複習中垂線、角平分線、中線的性質。	• 當學生不能說明時，老師應畫圖引導學生掌握性質證明的要點。 1.中垂線性質：線上任一點到線段兩端點等距。 2.角平分線性質：線上任一點到角的兩邊等距。 3.中線性質：線上任	• 學生能夠說明三線的性質。

• 命名活動 • 了解直角、鈍角三角形外心的意義與作法	2.利用摺紙活動摺出銳角三角形的三中垂線，並將結果記錄下來。 3.請學生說明銳角三角形三中垂線交點的性質。 4.給任意三點，做通過此三點的圓。 5.『外接圓』、『內接三角形』、『外心』的命名活動。 6.利用摺紙活動摺出直角、鈍角三角形的三中垂線，記錄結果。 7.依三角形的類型，探討並證明外心的位置。	一點與三角形另兩端點連接所圍成的兩三角形面積相等。 • 學生無法說明時，教師要提示中垂線的性質。 • 學生無法做出時，教師可引導學生認識此三點可視為某三角形的三頂點。 • 直角所對弧為 180°，因此斜邊即為直徑，所以圓心在斜邊中點，圓心即為	• 能發現三中垂線交於一點。 • 能說明三中垂線的交點到三角形的三頂點等距。 • 學生會做出通過給定三點的圓。 • 能知道外接圓的圓心為外心。 • 能發現鈍角三角形三中垂線於三角形外交於一點；直角三角形三中垂線於斜邊上交於一點。 • 能了解不同類型的三角形，其外心位置也不同。
---	--	---	--

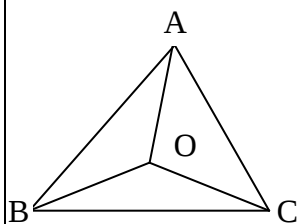
		外心。 • 畫出鈍角三角形的外接圓，鈍角大於 90° ，因此所對弧大於 180° ，因此圓心在三角形外部。 • 畫出銳角三角形的外接圓，銳角三角形的三個角均小於 90° ，因此任一角所對的弧均小於 180° ，所以圓心與頂角在其所對弦的同一側，因此圓心在三角形內部。	
	8.對直角、鈍角三角形三中垂線交點的性質提出說明。	• 提示中垂線的性質。	• 能說明三中垂線的交點到三角形的三頂點等距。

【活動二】

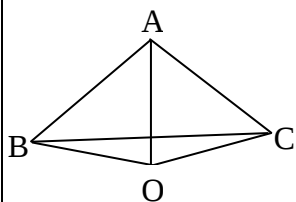
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 外心性質的應用	1.歸納外心的性質及其位置與三角形類型的關係。 2.外心至三頂點等距性質應用。 (1)已知 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，	• 提示外心至三頂點等距。	• (1)銳角三角形： $\triangle$ 內部 (2)直角三角形：斜邊中點 (3)鈍角三角形： $\triangle$ 外部 (1) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 9$

$\overline{OA}=3$ ，求

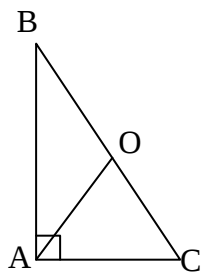
$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$ 。



(2) O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{OA}=5$ ，求 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$ 。



(3) O 為直角 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{OA}=\frac{13}{2}$ ，求 $\overline{BC}$ 。

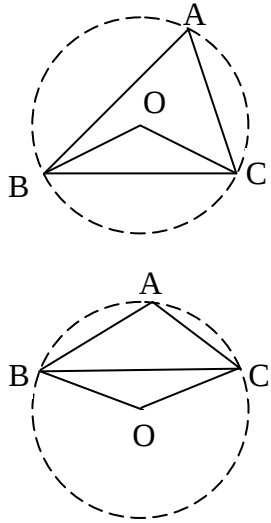
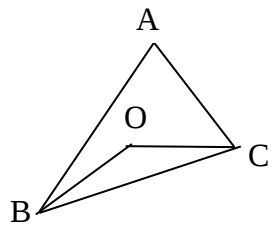


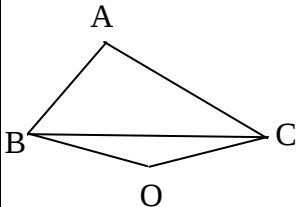
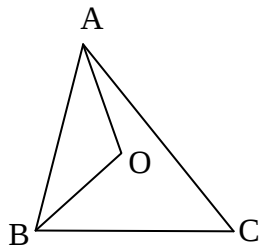
• 提示外心至三頂點等距。

(2) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=15$

• 提示外心至三頂點等距。

(3) $\overline{BC}=13$

	3.討論外心與頂點連線的夾角和頂角的關係。  4.外心角度性質應用 (1) O 為$\triangle ABC$的外心，$\angle BAC=67^\circ$，$\angle ABC=79^\circ$，求$\angle BOC$的度數。 	• 尋找圓心角和圓周角與其所對弧的關係。 • 提示畫出外接圓，利用圓心角、圓周角與其所對弧的關係找出相關角度。	• (1)$\angle A$ 為銳角時，$\angle BOC=2\angle A$ (2)$\angle A$ 為鈍角時，$\angle BOC=360^\circ-2\angle A$ (1)$\angle BOC=134^\circ$
--	--	---	--

	(2) O 為 $\triangle ABC$ 的外心，$\angle BCA=37^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，求 $\angle BOC$ 的度數。  (3) O 為 $\triangle ABC$ 的外心，$\angle BAO=40^\circ$，求 $\angle AOB$ 與 $\angle C$ 的度數。 		(2) $\angle BOC=134^\circ$ (3) $\angle AOB=100^\circ$ $\angle C=50^\circ$
	5.動動腦：失落的一弧 你能幫弧 AB 找出它失落的另一部分，使它成為完整的圓嗎？ 	• 先點三點，求出兩弦中垂線的交點。 • 能找出此弧的圓心。	

附錄、學習單

學習單(一)

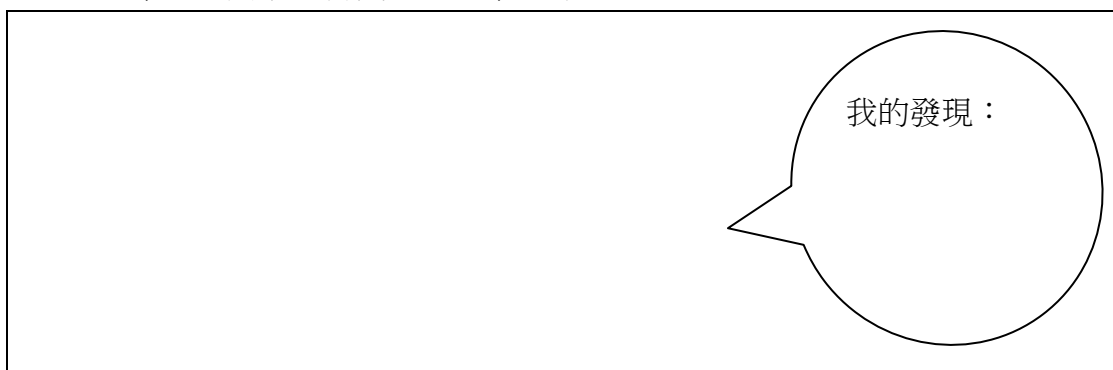
____班____號_____

一、直線性質

- 1.中垂線：
- 2.角平分線：
- 3.中線：

二、試試看：

利用手中的三角形，折出三邊的中垂線，並將結果畫在下方



觀察結果：

- 1.三中垂線是否有共同的交點？有_____個
- 2.交點的位置在三角形的_____部
- 3.交點到三頂點是否等距？
到三邊是否等距？

三、動動腦：

你能畫出通過以下三點的圓嗎？

• A

B•

• C

四、名詞介紹：

- 1.三角形在圓的內部，所以稱三角形為圓的_____
- 2.圓在三角形的外部，所以稱圓為三角形的_____
- 3.我想將中垂線的交點命名為
因為：
- 4.中垂線的交點在數學上的命名為_____

五、試試看：

利用手中的三角形，折出三邊的中垂線，並將結果畫在下方

直角三角形

我的發現：

鈍角三角形

我的發現：

觀察結果：

1.交點的位置在(1)直角三角形_____

(2)鈍角三角形_____

2.交點的性質：

六、回顧：

若 $\angle A$ 為直角
 則 $\angle A$ 所對的弧為_____
 $\rightarrow \overline{BC}$ 為圓的_____
 $\rightarrow$ 圓心會在_____

七、說說看：

不同的三角形，交點的位置為何會不同？

學習單(二)

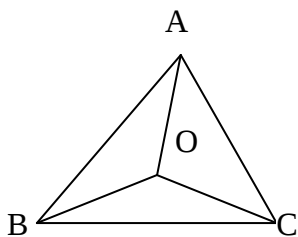
____班____號_____

一、重點整理：

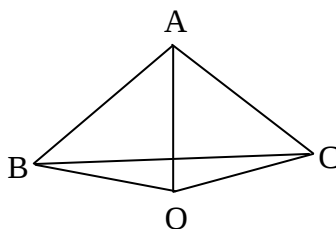
1. 外心是三角形的_____的交點，
所以外心到三角形的_____等距。
2. 外心的命名是因為它是_____的圓心。
3. 外心的位置：
 - (1) 銳角三角形：_____
 - (2) 直角三角形：_____
 - (3) 鈍角三角形：_____

二、利用上面所學到的性質，你能解決以下的題目嗎？

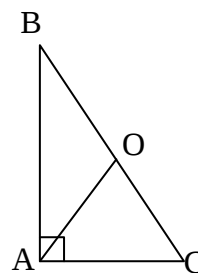
1. 如圖(一)，O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{OA}=3$ ，求 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} =$
2. 如圖(二)，O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{OA}=5$ ，求 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} =$
3. 如圖(三)，O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{OA} = \frac{13}{2}$ ，求 $\overline{BC} =$



圖(一)



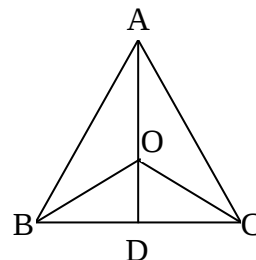
圖(二)



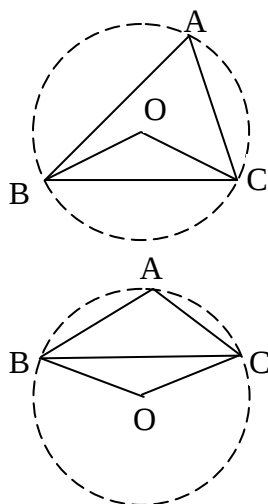
圖(三)

4. $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 6$ ，試求 $\triangle ABC$ 外接圓的面積。

5. 如圖，O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{OA} = 5$ ， $\overline{BC} = 8$ ，求 $\triangle ABC$ 的周長。



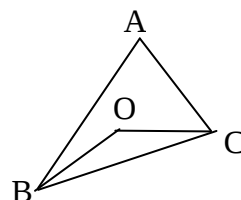
三、若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，你能找出 $\angle BOC$ 與 $\angle A$ 的關係嗎？



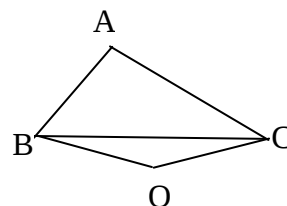
若 $\angle A$ 為銳角，
則 $\angle BOC =$

若 $\angle A$ 為鈍角，
則 $\angle BOC =$

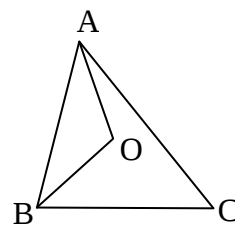
1. 如圖， O 為 $\triangle ABC$ 的外心， $\angle BAC = 67^\circ$ ， $\angle ABC = 79^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度數。



2. 如圖， O 為 $\triangle ABC$ 的外心， $\angle BCA = 37^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度數。

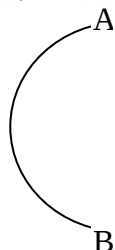


3. 如圖， O 為 $\triangle ABC$ 的外心， $\angle BAO = 40^\circ$ ，求 $\angle AOB$ 與 $\angle C$ 的度數。



四、動動腦：失落的一弧

你能幫弧 AB 找出它失落的另一半，使它成為完整的圓嗎？



貳、教學實錄

【第一節】

1. 學生：敬禮。
2. 學生：老師好。
3. 老師：好，坐下。
4. 老師：各位同學，我們今天上課之前，先幫同學複習一下，我們在上一個單元學過三種線。還記不記得哪三種線？
5. 學生：中垂線。
6. 老師：中垂線，還有呢？角平分線，還有？中線。同學還記不記得？這三種線各有什麼樣的性質？中垂線的性質？
7. 學生：到兩點等距。
8. 老師：中垂線上面的任一點會到兩點等距。角平分線上的任一點會到兩邊等距。中線的性質咧？平分三角形的面積。請同學把這些性質寫在我們的學習單上面，直線的性質這裡。都有拿到了，要記得寫上班級、姓名、座號。把中垂線、角平分線還有中線這三種線的性質，寫在我們的學習單上面(見 P.258 學習單(一))。寫好的同學，請拿出你的習作來，我們在習作的最後面這裡，有三個不同顏色的三角形，請同學把這三個三角形都剪下來。哎！有人用撕的喔，用撕的會不會比較快？差不多喔？感覺好像用撕的比較快，可是用撕的會不會比較醜？我們先看綠色的那個三角形，綠色三角形還沒剪好的舉手，好放下。先剪綠色的。另外兩個三角形我們等一下才會用到，先剪綠色的的那一個。如果你三個三角形都已經剪好了，麻煩你幫隔壁的同學一起剪一下，速度會比較快。同學如果是用刀片要小心喔，因為之前在別班有同學用刀片去割，結果不小心把自己的手割傷了，所以你如

果是用刀片的同學，請你要小心。綠色三角形有沒有人還沒剪好的？都好了。那我們就先把綠色這三角形先拿起來，請同學看一下前面，我們現在要對綠色這個三角形的三邊，折出它的中垂線，請問：要怎麼樣折中垂線？比方說，我如果要折這一個邊的中垂線，我要把它平分，而且要跟它垂直，那個要怎麼折？找個人上來示範好不好？有沒有人要自願？折中垂線，沒有，那我們就抽籤了，來 21 號。好，來，謝長紘，你要不要示範一下怎麼折中垂線？來，到前面來，快點！折中垂線。這個比較大，折這個後面的同學才看得到。好，打開來讓同學看一下，就是這樣，你可不可以再示範另外一邊的中垂線？舉起來讓大家看一下，這樣有沒有問題？沒問題，請同學把三邊的中垂線都折出來，謝謝謝長紘。把三邊的中垂線都折出來，折好之後再用筆把它描上去，把三條線都描上來。描好之後，我們來看學習單的二。試試看(見 P.258 學習單(一))，你折完之後呢？折出三邊的中垂線，把這個結果畫在這個框框裡面。畫在學習單的框框裡面，然後旁邊還有一個講話的符號，有沒有？那裡攤開來，你發現了什麼事情？可以跟旁邊的同學一起討論一下。你們發現的事情不一樣？或者他發現了什麼你沒發現的？三條中垂線，把它折出來之後發現了什麼事情？

9. 老師：發現了什麼事？
10. 學生：交於一點。
11. 老師：什麼東西交於一點？
12. 學生：三條中垂線。
13. 老師：三條中垂線交於一點。三條交於一點，只有一個交點嗎？這麼巧啊！真的嗎？好，老師用尺規作圖在黑板上畫。畫出三條中垂線。真的交於一點耶，好神奇喔！除了發現這個事情之外，還有沒有發現什麼事？除了三條中垂

線會交於一點，有沒有人還覺得還有其他奇怪的事情？你覺得有趣的地方？都沒有，那我們就寫這個就好了。另外我們看一下學習單上「觀察結果」的地方。第一點，它說「三中垂線有幾個交點？」

14. 學生：一個。

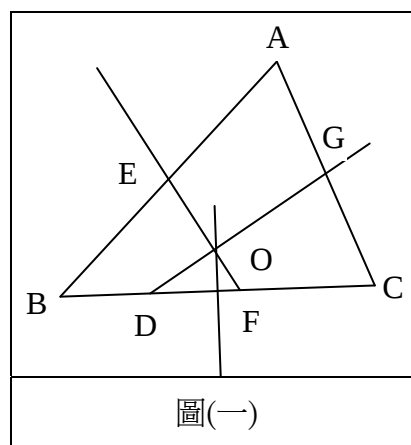
15. 老師：一個，很奇怪對不對？三條線竟然只有一個交點。這是為什麼呢？等一下我們來看看為什麼？三中垂線有一個交點。好，再來第二個，「交點的位置在哪裡？」，「三角形的內部」，寫上去。交點的位置在三角形的內部。那你覺得這個交點可能有什麼樣的性質呢？「有什麼樣的性質？」我們就回過頭來回顧一下，我們折的是什麼線？中垂線。對，我們回顧一下中垂線的性質是什麼？線上的任一點會怎樣？到兩端點等距。所以這個交點可能會有什麼性質？這個交點在這條中垂線上，對不對？對，我們把它標上英文字母。這個交點，它是在 $\overline{BC}$ 的中垂線上，所以它怎麼樣？

16. 學生：到 B 到 C 等距。

17. 老師：中垂線的性質是什麼？（見圖(一)）到兩端點等距，所以這個點會到 B、C 等距。因為它是這一條中垂線上的點。所以它到 B，還有到 C 兩點會等距。所以把它到 B 點還有到 C 點的距離畫出來，到 B 點的距離以及到 C 點的距離這兩段會等長。再來，又因為它也是在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，所以它會怎麼樣？到 A、B 兩點等距。所以這兩段也會一樣長，所以我們就發現，這一個點它有什麼樣的性質？

18. 學生：到三個點都會等距。

19. 老師：到三個點都會等距，這是我們發現的第一個性質，到三頂點等距。同學，還有沒有覺得



它還有什麼樣的性質？（一陣沉默）好，怎麼樣？鍾萬泰要講一下嗎？

20. 萬泰：喔！老師。
21. 老師：站起來、站起來。
22. 萬泰：就是裡面那個點到 A 點、跟 B 點、跟 C 點的距離都一樣。
23. 老師：好，謝謝，坐下。這是我們剛說的嘛！好，沒關係。他呢，把我們剛剛的那個重複一遍，代表他剛剛有很專心在上課，對不對？好，還有沒有什麼樣的事情？假設這是 O 點嘛，對不對？所以我們就可以得到什麼事？ $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 。這樣還有沒有？還有沒有其他性質？怎麼樣？不知道？呂宗憲你要講講看嗎？來，站起來、站起來。
24. 宗憲：看起來很像啦，那個就是平分，那交點設為 P。
25. 老師：這個交點設為 P，這個交點喔？
26. 宗憲：嗯！
27. 老師：O 不好要改 P，是不是？好。
28. 宗憲：啊！都可以、都可以。
29. 老師：都可以，要不要改？
30. 宗憲：不用改、不用改。
31. 老師：沒關係，你喜歡什麼我們就改什麼。
32. 宗憲：沒關係，O 就好。
33. 老師：O 就好。
34. 宗憲：然後左邊的那個三角形跟右邊那個三角形…。
35. 老師：跟右邊三角形？
36. 宗憲：相等。
37. 老師：相等？什麼東西相等？

38. 宗憲：面積。
39. 老師：面積相等，好。 $\triangle AOB$ 的面積跟三角形...。
40. 宗憲：呃，不是啦！
41. 老師：啊？
42. 宗憲：小那個，上面的沒有，上面那四邊形沒有啊！
43. 老師：上面的四邊形？你上來指一下好了，我們聽不懂你講哪裡，來來來。
44. 宗憲：就這一個四邊形的面積啊！
45. 老師：四邊形？
46. 宗憲：這一個、這一個、這一個、這一個啊。
47. 老師：喔！這一個喔？這個四邊形的面積，跟這個四邊形的面積，這兩個四邊形的面積看起來好像相等，是不是？謝謝，那我們把它標上去好了，這個 CDEFG。同學有沒有看到兩個四邊形？這一個四邊形(BDOE)跟這一個四邊形(CGOF)，剛剛呂宗憲說這兩個四邊形的面積看起來好像有相等(見圖(一))。同學，你們折出來的這四邊形面積有沒有相等？看看你們折的，看起來有沒有相等？
48. 學生：有相等。
49. 老師：好像也有？是不是？那我們也把它寫下來好了，我們那個講義學習單上面有沒有？交點可能的性質那邊，我們剛剛寫了「到三頂點等距」，對不對？現在再加一點，「這兩個面積相等」。我們現在只是說可能的性質，沒有說一定。所以我們都把所有可能的寫上去。還有沒有？還有沒有覺得還有什麼其他的性質？有沒有？那現在我們給同學兩分鐘的時間來談論，剛剛我們說的那兩個性質，是不是都完全正確？你可以跟旁邊的同學談論一下。我們剛剛講了兩個性質，對不對？第一個是什麼？到三頂點等距；第二個

是什麼？兩個四邊形面積相等。來，同學討論一下，這兩個性質是不是都對？怎麼樣？你說哪一個？直角三角，喔！你們指的不是這個三角形。另外在別的題目折別的三角形的時候。那就不一定會一樣了，是不是？啊？畫畫看？會不會這樣子？

50. 學生：我怎麼會知道呢？

51. 老師：想啊！好像不會？為什麼？你自己說的自己都覺得不會喔？真的不會？不是等腰三角形，所以怎麼樣？

52. 學生：不見得相等。

53. 老師：喔！不是等腰就不見得會相等，那意思就是說，如果等腰就會？那它不是等腰所以不見得相等？伯儒，覺得會不會？

54. 伯儒：不會。

55. 老師：為什麼不會？就是不會？要講理由啊！那個等腰三角形就是你說的喔？等一下要不要講講看？有沒有人要說說看，你覺得它會不會相等？我們先看第一個性質好了，第一個性質，我們說它可能到三頂點等距，對不對？這個性質覺得它是對的，請舉手。覺得它不對的，請舉手。大家都覺得對，為什麼？中垂線性質？都寫在黑板上了，對不對？好，所以第一個一定對。第二個咧？這兩個四邊形的面積會不會相等？覺得會相等的請舉手。覺得不會相等的請舉手。放下，宗憲，沒有人支持你，怎麼辦？不會的，剛剛很多人舉手喔，有沒有人要說說看為什麼你覺得不會？沒有啊？剛剛那個林伯儒，來講講看為什麼你覺得這兩個四邊形面積不會相等？

56. 伯儒：就是它們不是等腰三角形。

57. 老師：不是等腰三角形，然後呢？

58. 伯儒：所以邊長不一樣。

59. 老師：邊長不見得會一樣，所以？
60. 伯儒：所以面積也不會一樣。
61. 老師：所以面積也不見得會相等。這樣有沒有問題，好，坐下。請問這個理由可以說服各位同學嗎？
62. 學生：可以。
63. 老師：你覺得可以接受的請舉手。好，放下。呂宗憲自己也被說服啦？所以呢？這兩個四邊形的面積不一定會相等。所以，我們剛剛講的兩個性質，其中只有第一個性質是正確的，也就是說什麼？這個交點會怎麼樣？第一個性質，我們剛說的第一個性質是什麼？到三頂點會等距。這樣有沒有問題？接下來請同學看底下的動動腦，「請你畫出通過這三個點的圓。」(見 P.258 學習單(一))這跟剛剛的有什麼關係？什麼叫做通過這三個點？就是你畫出的那個圓，那些點要剛剛好在圓上，不可以跑到圓的裡面，也不可以跑到圓的外面，要剛剛好在圓上，那個圓要怎麼畫咧？怎麼畫？好。來來來，圓規在那邊。我們再找一個同學上來畫。有沒有人也要上來畫的？現在已經有一個了，再找一個，還有沒有人要自願上來的？沒有？那我們抽籤，抽籤比較刺激，6 號(李振榮)。等一下，你等暄慈畫完再上來。結果我就是要找那個圓心，圓心必須要到三個頂點的距離都要一樣。喔！又要表演特技了，是不是？小心一點！你的方法跟剛剛陳暄慈的方法不一樣？不一樣？好像一樣，一樣就不用。有沒有人用不一樣的方法？謝謝。那這樣子就好。那個線畫出來，然後圓也差不多會出來了。你今天是搞破壞的嗎？圓也畫出來了，反正只剩最後一個步驟了，圓畫出來，還滿準的，謝謝！我們來看一下這兩位同學畫了什麼東西。第一個，陳暄慈他畫了什麼線？幾條？

64. 學生：兩條。
65. 老師：兩條中垂線，然後呢？
66. 學生：交一點。
67. 老師：之後以這個點當作圓心，然後什麼當半徑？暄慈你用什麼當半徑？O 到哪裡的距離當半徑？O 到 B 的距離當半徑。那我可不可以用 O 到 A 的距離？
68. 學生：可以。
69. 老師：或者是 O 到 C 的距離？
70. 學生：可以。
71. 老師：為什麼？因為 O 點到三點的距離都一樣，你選哪一段都可以。再來，爺爺(李振榮)的方法咧？
72. 學生：一樣。
73. 老師：也是畫兩條中垂線，然後交點當圓心，到三點的距離當半徑畫圓，但是老師發現有人用不一樣的方法，而且其實大部分同學畫的方法跟他們都不一樣，第一個，大部分同學都是先做什麼？
74. 學生：三角形。
75. 老師：沒錯！都是先把三個點連起來，你是這樣做的先舉手。對吧，好，放下。你們怎麼說你們都跟他一樣？明明不一樣，都先把三角形連起來，但剛剛陳暄慈沒有連三角形可不可以做？
76. 學生：可以。
77. 老師：還是可以，對不對？再來，第二個老師的發現不同的是，有人畫兩條中垂線、有人畫三條中垂線，請問兩條可以嗎？
78. 學生：可以。
79. 老師：三條可以嗎？

80. 學生：可以。
81. 老師：那為什麼要畫兩條，為什麼不要畫三條？
82. 學生：省時間。
83. 老師：等一下！先問一下，為什麼畫兩條就可以？
84. 學生：因為交於一點。
85. 老師：這個問題就回到剛剛了，我們剛剛在折的時候有沒有發現？三條剛好會交於一點，對不對？所以你如果已經找到交點了，你還需不需要再畫第三條？不用了。為什麼？因為第三條也會怎麼樣？也會通過這個點，所以不需要再畫，只要幾條就夠了？兩條。那現在要問同學為什麼第三條一定會通過這個點？這個留待下一節課，等一下下課時間同學想一想，為什麼第三條也會通過這個交點？接下來我們再來看一下，手上還有另外兩個三角形，對不對？把另外兩個三角形的中垂線也統統把它折起來，然後跟剛剛一樣把中垂線描出來。另外兩個三角形，同學看一下，其實這兩個三角形不太一樣。紫色的那個是什麼三角形？紫色是什麼三角形？等腰三角形嗎？是等腰嗎？兩邊有一樣長嗎？不一樣？它不是等腰，那它是什麼三角形？李慧茹，你說什麼？鈍角三角形，是不是鈍角三角形？
86. 學生：是。
87. 老師：那你們要不要猜猜橘色這個是什麼三角形？直角三角形。跟我們剛剛折的三角形不太一樣。折好之後一樣把你折的結果畫在學習單的第五大題(見P.259 學習單(一)五.)那邊，試試看喔！還有兩個大格子，對不對？你就把兩個三角形畫在這兩個大格子裡面，然後把你折出來的情況也畫上去，然後看看你發現了什麼事？好像其實已經有同學發現了，對不對？好，來，那我們先看一下，同學如果還沒畫完的，你們等一下自己補了，那我們來看

這個，最後折出來的結果發現什麼事？沒關係，我們把這個做完再下課。

折完之後，鈍角三角形會發生什麼事？

88. 學生：交點在外面。

89. 老師：其實光看這個三角形，有沒有看到交點？

90. 學生：沒有。

91. 老師：沒有交點，對不對？你們光看折出來這個三角形，這上面都沒有交點。如果我們是把它畫在圖上的話，我們其實可以把這三條延長，老師看到有很多同學都自動把它延長了，延長之後我們會發現，也是交於一點。那直角三角形呢？我把它三條中垂線畫出來，結果也有交點，可是交點的位置跟剛剛的好像不太一樣，我們剛剛交點的位置在哪裡？在三角形的裡面，現在這個直角三角形的交點是在直角三角形的邊上，對不對？那這個鈍角三角形的交點是在三角形的外面。請同學等一下下課的時候，自己把學習單上的觀察結果把它填上去，等一下我們上課的時候再接下來繼續。

【第二節】

92. 老師：好，來！剛剛發下去的先收起來，我們還是把第一張先拿出來，我們剛才第一張，有一個部分漏掉了，第四大題名詞介紹這裡(見 P.258 四.名詞介紹)，我們稍微介紹幾個名詞。首先先看一下黑板這個圖。這個圓，因為我們畫出來的這個圓，剛好接在這個 $\triangle ABC$ 的外面，所以我們就把這個圓叫做是三角形的外接圓。同學把它寫上去。外接圓。這個三角形在裡面，所以我們猜猜看它應該叫什麼？幾個人講講看，你猜猜要叫什麼？三角形要叫什麼？17 號。

93. 學生：內接三角形。

94. 老師：大聲一點！

95. 學生：內接三角形。
96. 老師：內接三角形。合不合理？
97. 學生：合理。
98. 老師：呵，自己說自己合理。好！內接三角形。那還有一個，對不對？這個中垂線的交點，同學猜猜，你覺得它叫什麼比較好？
99. 學生：外心！
100. 老師：有人說叫「外心」。外星人不好嗎？喔！內心。有人說內心，有人說什麼？
101. 學生：中心。
102. 老師：啊！中心？好，中心、外心、內心都有人了，內、中、外都有了。
103. 學生：留心（流星）！
104. 老師：留心（流星）？為什麼要叫留心（流星）？留在裡面的心，那也是留在外面的心啊，是不是？所以叫留心。好，還有沒有？
105. 學生：慧星！
106. 老師：好，來！把你自己想要給它取下來的名字，你也把它寫上去。有一個第三題那邊啊，你想要把它取叫什麼名字都可以。隨便你寫，你要講原因，等一下我們再說數學上是叫它做什麼。剛剛有人說外心、有人說內心、有人說中心、有人說留心，看看哪個名字比較適當。這學習單等一下上完課我們要收回來的喔！剛剛講那麼多種，同學講了那麼多名詞，我們到底要叫什麼心呢？其實數學上的名詞都是有來源、有原因的！這一個交點，因為它剛好是這個圓的圓心，這個是什麼圓？外接圓，它是外接圓的圓心，所以我們就取頭取尾，外接圓的圓心，那我們就是取第一個字跟最後一個字就變什麼？
107. 學生：外心。

108. 老師：外心，對。所以數學上是叫它「外心」。那你想要叫它什麼心？剛剛有同學說內心，講內心的人有沒有人要說一下為什麼叫內心？猜猜看，是不是因為它在裡面呢？如果因為它在裡面所以叫它內心，這樣子合不合理？有人搖頭耶，為什麼？又不是都是在裡面，對不對？也有可能跑到外面，也有可能在邊邊，所以它不一定是在裡面，所以叫它內心不太好。好，這樣子名詞的部分還有沒有什麼問題？「留心」的那個，請等一下稍加解釋一下，為什麼叫做留心？我們剛剛發現了，這個交點的位置有很多，有的在裡面，像這個是在外面，這個是在邊邊。同學要不要想一想，為什麼有時候在裡面？有時候在外面？有時候在中間？給同學三分鐘的時間，跟旁邊的同學討論一下，你覺得為什麼，怎麼會那麼複雜？什麼時候在裡面？什麼時候在外面？什麼時候在邊邊？為什麼會在邊邊？為什麼會在外面？有沒有人要說說看？

109. 學生：王偉任知道。

110. 老師：王偉任，來。

111. 學生：他不想出來啦！

112. 老師：你說說看，你覺得？

113. 偉任：三角形性質不一樣。

114. 老師：性質不一樣，什麼樣的性質不一樣？

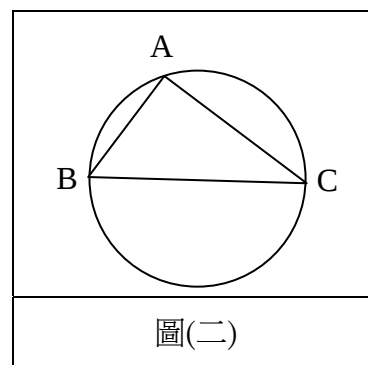
115. 偉任：就直角、鈍角。

116. 老師：直角、鈍角跟銳角，因為不一樣，所以它的位置就會不一樣，好，坐下。我們確實發現了，角度不同的話，它的位置就會不同。但是，是因為這樣子嗎？如果是的話，那又為什麼？為什麼因為角度不一樣，它的位置就會不一樣？

117. 學生：呂宗憲有意見。

118. 老師：呂宗憲又有意見了。呂宗憲，站起來。

119. 宗憲：就直角三角形的話，它三邊的話，就可能有一邊，呃，怎麼講？就是三角形的話，這樣的話，可能就有一邊短的跟一邊最長的兩端。



120. 老師：你要不要上來指一下？（見圖(二)）

121. 宗憲：長度會不一樣啊！

122. 老師：你要不要上來指？因為你這樣講，我們聽不太懂！

123. 宗憲：就因為直角三角形嘛，因為這邊直角，所以這一段($\overline{AB}$)是三角形最短的一邊，這一段是三角形最長($\overline{AC}$)的一邊

124. 學生：嗯！？啊！那是最長的啊，那是最長邊吶！

125. 宗憲：那這邊到這邊($\overline{AB}$)最短嘛，那這邊到這邊($\overline{AC}$)距離跟這邊到這邊($\overline{BC}$)的距離都會不一樣。

126. 學生：啊！？

127. 老師：同學們對這句話，有沒有什麼想法？

128. 學生：呃！？

129. 老師：聽得懂嗎？聽不懂！再重複一遍，因為我也聽不太懂！

130. 學生：就這邊跟這邊的距離不一樣，所以一邊比較短一邊比較長，就這樣。所以呢？這樣的話，它們三條線中這個交點嘛，那這邊到這邊的距離跟這邊到這邊的距離會不一樣。

131. 老師：所以呢？為什麼它的位置會在邊邊？

132. 學生：這一段不一樣啊。這一段不一樣啊！啊這一個是在邊邊。

133. 老師：嗯，對！那為什麼它會在邊邊？你不是要上來講這件事情的嗎？

134. 學生：不是要講這三個不一樣的嗎？
135. 老師：對，好，謝謝！好，講得很清楚，但是我們聽得很模糊。還有沒有同學講解一下，你覺得為什麼它會在邊邊？好，那個爺爺(李振榮)也有意見，是不是？你要講講看嗎？為什麼它在邊邊？
136. 振榮：兩頭畫圓，它($\angle A$)是直角的話，這裡對的 $\widehat{BC}$ 就是 180 度，180 度的話，就表示說這裡($\overline{BC}$)就是它的直徑，直徑的話，它的圓心一定會在這裡斜邊中點上面。然後鈍角的話，因為鈍角大於 90 度，它($\angle A$)這裡對的 $\widehat{BC}$ 一定大於 180 度，所以它一定會遠離圓心，所以圓心一定會在外面。然後這一個銳角的話，因為它($\angle A$)這裡銳角的話，這裡($\widehat{BC}$)小於 180 度，所以它($\overline{BC}$)會比直徑還要再下面一點，所以圓心一定會在裡面。
137. 老師：來！同學掌聲一下！聽懂的舉手！好，放下。聽懂的同學，你們要不要上來解釋？再重複一遍。郭嘉雯來，郭嘉雯，剛剛說你聽懂了，那你上來再解釋一遍。
138. 嘉雯：他說直角三角形這個直角對這個弧($\widehat{BC}$)會等於它(90 度)的兩倍，所以它就是它的圓心。然後鈍角三角形的話，這個弧($\widehat{BC}$)會比半圓大，所以圓心會在它的外面。然後 $\angle A$ 對的弧是這個弧，所以就是等於說，它在這裡等於圓心的裡面的一點。
139. 老師：嗯！好！其實它就是用到哪一個原理？用到什麼觀念？圓周角跟它所對的弧的關係，對不對？因為這個圓周角如果是直角的話，它對的這個弧就會是幾度？180，其實就是整個圓的一半，就是半圓。如果這是半圓的話，這條線($\overline{BC}$)就會是什麼？直徑，所以圓心一定會在直徑上面，因為直徑一定是通過圓心。直徑除了會通過圓心之外，圓心還會在直徑的哪裡？
140. 學生：中間。

141. 老師：對，所以，為什麼直角三角形的外心會在邊邊？因為這一條會是直徑，所以這一條($\overline{BC}$)會是外接圓的直徑，圓心一定會在直徑上，而且不只在直徑上，還會在直徑的哪裡？
142. 學生：中間。
143. 老師：中間，也就是說三角形的外心，它的位置會是在這一條的中間，那這一條是直角三角形的什麼邊？
144. 學生：斜邊。
145. 老師：斜邊，所以直角三角形的外心會在斜邊的中點，這樣有沒有問題？沒有問題！這就是為什麼它角度不同的話，它的位置就會不同。李振榮講的很清楚。那我們學習單底下第六點(見 P.259 學習單)「回顧」那邊，其實就是剛剛李振榮講的東西，只是圖可能要請同學自己畫上去，「回顧」那裡請同學把這個圖畫上去。然後旁邊的空格要填什麼呢？我們先給同學一分鐘把那個圖畫完。那空格要填什麼呢？來，我們開始抽籤回答。第一，若 $\angle A$ 為直角，則 $\angle A$ 所對的弧為？空格要填什麼？11 號(許智堯)。
146. 智堯： 180° 。
147. 老師： 180° 。再來， $\overline{BC}$ 就會是圓的什麼？ $\overline{BC}$ ，你如果把 $\overline{BC}$ 連起來的話， $\overline{BC}$ 就會是圓的什麼？29 號(邱淑婷)。
148. 淑婷：直徑。
149. 老師：直徑。ok，好！最後，所以圓心會在哪裡呢？7 號(林伯儒)。
150. 伯儒：直徑上。
151. 老師：直徑上，不止是直徑上喔！
152. 學生：中間。
153. 老師：對，直徑的中間，也就是 $\overline{BC}$ 的中點， $\overline{BC}$ 中點。好。所以為什麼三角形中

垂線的交點位置會不同，同學們就應該了解了，好！還有沒有問題？沒問題。我們剛剛第一個三角形有討論外心的性質。請問另外這兩個三角形的外心有沒有什麼性質？剛剛我們說那個鈍角三角形的性質是什麼？找個人複述一遍，剛剛我們說這個三角形它的外心有什麼性質？3號(吳宇軒)。有什麼性質？大聲一點。

154. 宇軒：到三邊等距。

155. 老師：到三邊等距？是不是到三邊等距？哎，到底是到什麼？

156. 學生：三點。

157. 老師：三點，是到這 A、B、C 三個點等距，為什麼會到這三個點等距？你看喔，你如果把這個圓心和這三個點連起來，這三個線段都是這個圓的什麼？半徑，所以這三個會一樣長。請問這兩個三角形的外心有沒有什麼性質？有沒有這個性質？

158. 學生：有！

159. 老師：有，確定嗎？

160. 學生：確定。

161. 老師：什麼性質？

162. 學生：到三點等距。

163. 老師：再問一遍，再抽一個人上來問，18 號(楊博丞)。什麼性質？站起來！果然還要再想一想。你要不要求救？你要 CALL IN 還是要 CALL OUT？啊？你要 CALL OUT，你要 CALL 誰？

164. 博丞：楊育昇。

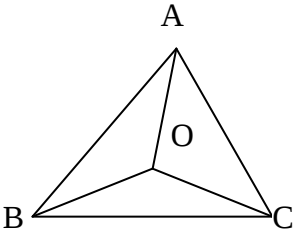
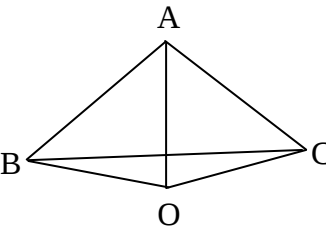
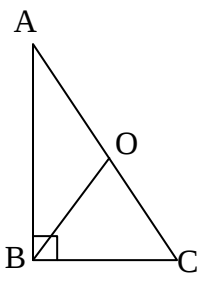
165. 老師：你要 CALL 楊育昇？好，來！楊育昇求救。

166. 育昇：到三點等距。

167. 老師：到三點等距，等一下喔！CALL OUT 完，最後誰要回答問題？參賽者要回答，來，參賽者再一次，站起來、站起來。是什麼？性質是什麼？你不是已經 CALL OUT 了嗎？剛剛求救的人幫你跟你講了，你還忘記？
168. 博丞：我沒聽到！
169. 老師：完蛋了！要不要再 CALL 一次？好，來，再 CALL 一次，快點。
170. 博丞：楊育昇。
171. 老師：他又 CALL 你啦！好，來，請回答！
172. 育昇：到三點等距。
173. 老師：到什麼？
174. 博丞：到三點等距。
175. 老師：到三點等距。好，來！請問現在這個點有沒有到三點等距？
176. 學生：有！
177. 老師：有。為什麼？也都是半徑，那請問這個圓心有沒有到三點等距？
178. 學生：有！
179. 老師：也有！因為也都是這個圓的半徑，這樣有沒有問題？所以不管是哪一種三角形，銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形，它的外心到三頂點都會怎麼樣？等距。好，那我們來看第二張學習單(見 P.260 學習單(二))。把剛剛上一節課還有這一節課講的重點整理。第一個，外心是三角形什麼線的交點？
180. 學生：中垂線。
181. 老師：好，來！再抽籤！外心是什麼線交點？19 號(葉俊宏)！
182. 俊宏：中垂線。
183. 老師：啊！什麼？

184. 俊宏：中垂線。
185. 老師：喔！中垂線。不好意思，老師耳朵不好，所以要大聲一點。再來，所以外心到三角形的什麼等距？10 號(曹峻華)。
186. 峻華：三個頂點。
187. 老師：三頂點等距。再來，外心的命名是因為它是什麼的圓心？26 號(林佩陵)。是什麼圓的圓心？
188. 佩陵：外接圓。
189. 老師：外接圓。再來，那外心的位置不太一樣，銳角、直角、鈍角三種的位置都不一樣，請問銳角三角形外心的位置在哪裡？還有 0 號喔？喔，沒有！40 號(黎慧音)。大聲一點！
190. 慧音：三角形內。
191. 老師：三角形內。好，銳角三角形在三角形內。直角三角形呢？34 號(郭嘉雯)。
192. 嘉雯：斜邊上。
193. 老師：斜邊，不止是斜邊上，而且在哪裡？斜邊的哪裡？中點，斜邊中點。我們寫仔細一點，斜邊中點。再來，鈍角三角形的外心在哪裡？25 號(李慧茹)。
194. 慧茹：三角形的外面。
195. 老師：三角形的外面。好，這是我們這個到目前為止所學到的東西。有沒有什麼問題？
196. 學生：沒有！
197. 老師：沒有喔！做一些練習題，不能只是學過就算了喔，所以現在底下這三個題目，請同學看看你會不會做(見下頁，圖(三).(四).(五))？同學，對不起！第 3 題的題目改一下！把那個 $\overline{BC}$ 改成 $\overline{AC}$ 。這題除了要求 $\overline{AC}$ 之外，請同學還要求 $\overline{OB}$ 。這三題有沒有人自願上來做？第 1 題？有沒有？好，卉珍。

第 2 題？好，鍾萬泰。第 3 題？好，許智堯。來，第 1 題！出來講解一下吧。

1.如圖(三)，O 為$\triangle ABC$ 的外心，若$\overline{OA}=3$，求$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=$	 圖(三)
2.如圖(四)，O 為$\triangle ABC$ 的外心，若$\overline{OA}=5$，求$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=$	 圖(四)
3.如圖(五)，O 為$\triangle ABC$ 的外心，若$\overline{OA}=\frac{13}{2}$，求$\overline{AC}=$	 圖(五)

198. 卉珍：因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ ，所以三邊各是 3，所以三個加起來等於 9。

199. 老師：ok，有沒有問題？沒有問題喔。再來，第 2 題。

200. 萬泰：因為 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，所以 O 到 A、B、C 三點等距，所以 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ ，所以 $5\times 3=15$ 。

201. 老師：謝謝。再來，最後一題！

202. 智堯：因為這個 O 是這個三角形的外心，所以 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ ，所以 $\overline{AC}$ 就是兩個

$\overline{OA}$ ，所以 $\frac{13}{2} \times 2 = 13$ 。然後 $\overline{OA} = \overline{OB}$ ，所以 $\overline{OB} = \frac{13}{2}$ 。

203. 老師：好，有沒有問題？沒有喔。這些題目都是非常基本題目，只要你能夠知道外心的性質，其實這種題目很快就能把它解決了。好，接下來底下還有兩題，請同學回去做。我們現在看右邊這一頁第三大題(見 P.261 三.)的部分，那個題目呢？有幾個同學後面的講義可能印得不清楚，來，請同學自己把它補上去！若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，你能找出 $\angle BOC$ 與 $\angle A$ 的關係嗎？(見圖(六)) 好，來，同學想一想，如果 O 是外心， $\angle BOC$ 跟 $\angle A$ 會有什麼關係？來，有沒有人要說說看？ $\angle BOC$ 跟 $\angle A$ 有什麼關係？有兩個圖，一個是銳角、一個是鈍角。同學有沒有人要講，隨便講哪一個都可以。好，楊育昇！

204. 育昇：因為 $\angle A$ 是這個外接圓的圓周角，所以它如果這樣子 $\widehat{BC}$...

205. 老師：等一下！轉一下吧。

206. 育昇：它的這個 $\widehat{BC}$ 是 $\angle A$ 的兩倍，又因為 $\angle BOC$ 是圓心角，所以 $\angle BOC$ 是 $\widehat{BC}$ 的度數，所以說 $\angle BOC$ 的度數就是 $\angle A$ 的兩倍，懂嗎？

207. 老師：懂嗎？楊育昇在問了！怎麼沒有人回答？懂嗎？

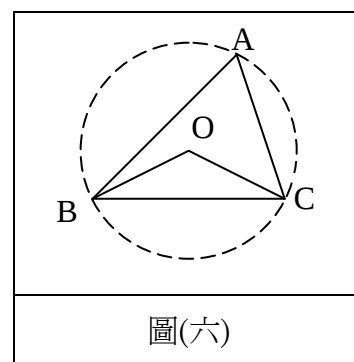
208. 學生：懂！

209. 老師：好！用寫的。好！來，寫了之後要不要再講一下？

210. 育昇：啊！

211. 老師：要不要再講一下？

212. 學生：就是可以說 $\angle BAC$ 是圓周角，就是等於 $\frac{1}{2}$ 的 $\widehat{BC}$ ，那個是前幾頁寫的，然後 $\angle BOC$ 是圓心角，所以說，它等於那個它所對的弧，等於 $\widehat{BC}$ 。因為 $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{BC}$ ， $\angle BOC = \widehat{BC}$ ，所以說 $\angle A = \angle BOC$ 的 $\frac{1}{2}$ 倍， $\angle BOC = \angle A$ 的 2 倍。



圖(六)

213. 老師：好！同學們對楊育昇的說法有沒有問題？

214. 學生：沒有！

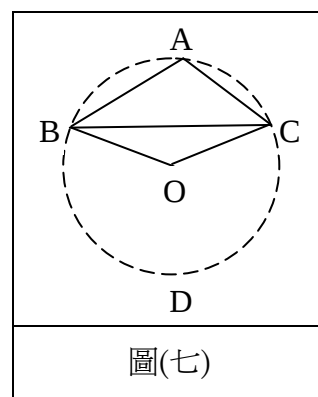
215. 老師：都沒有問題？所以最後的結論到底是怎樣？好，來！請楊育昇下去，我們抽一位來問，我們最後的結論到底是怎樣？ $\angle BOC$ 跟 $\angle A$ 到底有什麼關係？4 號(呂宗憲)。 $\angle BOC$ 到底跟 $\angle A$ 有什麼關係？

216. 宗憲： $\angle BOC$ 為 $\angle A$ 的兩倍。

217. 老師： $\angle BOC$ 就是 $\angle A$ 的兩倍，好！坐下。有沒有問題？沒有問題喔！理由就是因為這樣。銳角三角形是這樣，如果是鈍角怎麼辦？它會不會是 $\angle A$ 的兩倍？（見圖(七)）

218. 學生：不會！

219. 老師：嗯！有人已經說不會，為什麼？有沒有人要上來講講看？黃存逸要不要？不要啊？鍾萬泰要不要？好，來，鍾萬泰來講講看！那個鈍角的情況呢？好，寫一下。右邊那個圖可以擦掉。



220. 萬泰：呃！一開始我們知道 $\widehat{BC}$ ，這個優弧會等於 $\angle BAC$ 的兩倍。又 $\angle BOC$ 是這個圓的圓周角，然後它所對的弧為 $\widehat{BAC}$ ，所以我們知道 $\widehat{BAC}$ 會是這個圓減掉 $\widehat{BC}$ ，然後我們一開始知道 $\widehat{BC} = 2\angle BAC$ ，所以 $\widehat{BC}$ 可以用 $2\angle BAC$ 代替，所以 $\widehat{BAC} = 360^\circ - 2\angle BAC$ 。

221. 老師：同學有沒有問題？

222. 育昇：有！

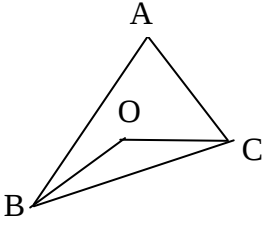
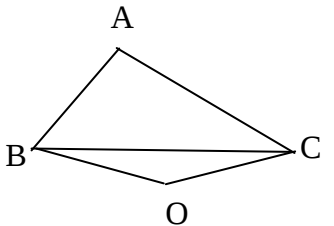
223. 老師：有？

224. 育昇：它的那個 $\widehat{BC}$ 是哪個 $\widehat{BC}$ ？

225. 萬泰：就是這個啊！

226. 育昇：為什麼不能是上面的弧？
227. 老師：怎麼辦！？怎麼辦！？
228. 萬泰：老師這邊可不可以加一個 D？
229. 老師：好！你想要就加吧！好！
230. 奕嘉： $\angle BOC$ 是什麼角？
231. 萬泰：啊？ $\angle BOC$ ！？
232. 學生： $\angle BOC$ 是圓周角喔？圓心啦！
233. 老師：喔！好、好！等一下！還沒完！還有沒有問題？有沒有其他問題？都沒有了喔？好！ok，好！謝謝！那最後的結論到底是什麼？ $\angle BOC$ 跟這個 $\angle A$ 到底有什麼關係？這個角跟這個角有什麼關係？
234. 老師：哇！講了半天，不曉得！請問最後 $\angle BOC$ 跟 $\angle A$ 到底有什麼關係？黃存逸 要不要說說看？ $\angle BOC$ 最後跟 $\angle A$ 有什麼關係？好，再想！好啦，老師幫你解圍好了。因為這個圓心角對著就是這個弧，對不對？所以圓心角的角度跟這個弧的一樣，那剛剛我們講啦！這個弧其實就等於 $360^\circ - 2\angle BAC$ ，對不對？這個就等於 $\angle BOC$ 啊！對不對？這個弧就等於 $\angle BOC$ ，所以這個弧 $= 360^\circ - 2\angle BAC$ ，所以這個角($\angle BOC$)也會 $= 360^\circ - 2\angle BAC$ ，這樣有沒有問題？再重複一遍喔！首先第一個，因為這個($\angle BOC$)是圓心角，所以它的角度跟這個($\widehat{BAC}$)一樣；再來因為這個弧($\widehat{BDC}$)就是這個圓周角($\angle BAC$)對的弧，所以這個弧($\widehat{BDC}$)是這個角($\angle BAC$)的兩倍，所以這個弧($\widehat{BAC}$)是 $360^\circ - 2\angle BAC$ ，所以就等於 $360^\circ - 2\angle BAC$ ，所以最後的結論， $\angle BOC$ 到底等於什麼東西咧？找個人上來寫啦！好，有沒有人要自願？結論寫出來！許芳慈！來、來、來！你的字比較漂亮，來幫我們解圍吧！把最後結論寫出來，到底 $\angle BOC$ 等於什麼東西？好！謝謝。這樣有沒有問題？所以同學，我們

把它寫上去，如果是銳角的時候， $\angle BAC$ 是 $2\angle A$ ；如果是鈍角的時候， $\angle BOC$ 是 $360^\circ - 2\angle BAC$ ， $\angle BAC$ 就是 $\angle A$ 。好，那我們再做完兩題就下課。第六題還有第七題，同學把這兩個題目看一下。好，用這個方法來算就可以了！有沒有要上來寫這兩題？第 1 題，12 號(陳奕嘉)。第 2 題，李振榮。這個 O，不用寫理由，就直接把計算過程寫出來。好，來！講解一下。第一題！

1.如圖，O 為 $\triangle ABC$ 的外心， $\angle BAC=67^\circ$ ， $\angle ABC=79^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度數。	 圖(八)
2.如圖，O 為 $\triangle ABC$ 的外心， $\angle BCA=37^\circ$ ， $\angle ABC=30^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度數。	 圖(九)

235. 奕嘉：因為 $\triangle ABC$ 為銳角的關係，所以銳角的公式是 $2\angle A = \angle BOC$ 的角度，所以說 $\angle A$ 就是 $67^\circ \times 2 = 134^\circ$ 。所以 $\angle BOC = 134^\circ$ 。(見圖八)
236. 老師：好，謝謝！再來，第 2 題。
237. 振榮：我在這邊先求出 $\angle BAC$ ，求出來是 113° ，因為 $\triangle ABC$ 是鈍角 $\triangle$ ，所以要用 $360^\circ - 2\angle BAC = 360^\circ - 2 \times 113^\circ = 360^\circ - 226^\circ = 134^\circ$ 。(見圖九)
238. 老師：好，謝謝！有沒有問題？其實方法不止一種喔！同學回去之後想想，還有沒有其他的方法可以做。剩下的題目就是今天的回家作業，等一下把第一張收上來，第二張是今天的回家作業，我們今天就上到這裡，下課。班長！

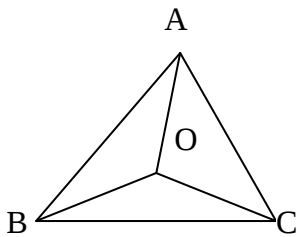
239. 學生：起立、立正、敬禮！

240. 學生：謝謝老師！

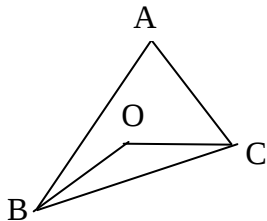
參、教學說明

今天的教學單元是三角形的外心，學生是九年級。他們之前已經學過中垂線的性質，還有圓心角、圓周角與其所對弧的關係。我們今天的教學目標就是要先讓他們了解外心的性質，然後學會它的應用。我們的流程，第一個是先複習有關中垂線的性質，接下來再利用折三角形方式，折出三角形的三條中垂線，然後再看看發生什麼樣情況，看學生們能夠找到什麼樣的發現。折完紙之後，接下來再把它畫在平面圖形上面，也就是說讓學生先有折的實際經驗，有個具體可以看的東西之後，再把它畫在平面圖形上。等找到一些性質之後，接下來我們會丟一個題目：畫通過三個點的圓。之前在跟教授討論的時候，有關這個題目到底是要先講完一些性質之後，再來布這個題目，還是直接就把這個題目先丟給同學，然後接下來再來討論一些性質呢？經過充份跟教授們激烈討論的結果，發現其實光給三個點讓學生討論是比較難的東西，所以最後還是決定先從三角形下手，最後再把這個題目丟出來，學生們有了之前三角形的經驗之後，這個題目對他們來說就會比較簡單。所以最後是先從三角形著手，講完之後再來講通過三點的圓要怎麼畫。一開始折三角形的時候是只有折銳角三角形，最後又折了兩種三角形，一個是直角、一個是鈍角，在折這兩種三角形的時候，同學們就會發現其實交點的位置不一樣，所以接下來我們就是要討論外心的位置，還要同學去想為什麼外心的位置會有這麼多不同的地方。第一節課就是從討論外心的性質開始，然後到這邊結束。

有了第一節課討論出來的性質之後，第二節課就是應用。舉個例子：

(如圖) O 是 $\triangle ABC$ 的外心, $\overline{OA} = 3$, 求 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ 是多少?	
--	--

另外一個例子：

(如圖) 一樣是 $\triangle ABC$, O 一樣是它的外心, 給 $\angle A$ 還有 $\angle B$ 的度數, 算出 $\angle BOC$ 的角度是多少?	
--	---

這個是我們在第二節課的應用。

上課時, 第一節課有位學生上台做圖, 畫圓時並不是用圓規畫, 而是拿繩子在黑板上畫圓, 其實他們在國小的時候有這個經驗, 就是說, 如果他們要在大操場畫一個圓的時候, 因為操場很大沒辦法用圓規畫, 所以他們會用繩子來當作輔助工具, 其實這個學生會有這樣的做法, 應該是他之前有這樣子先備經驗, 所以, 今天在上台的時候他可以利用這個繩子的方式來畫圓。不過我們在上課的時候也沒有刻意指責他說這樣子的方法不好, 因為這也是一種解題的策略, 只是最後還是希望學生在回到紙面上作圖的時候, 儘量能夠以圓規來作圖。

我們在上課的時候, 是允許學生遇到不會的問題的時候可以去求助於其他同學。所以在第二堂課發現有同學回答的時候不會, 我們就讓他用 CALL OUT 的方式求救, 只是說那個同學到後來因為他不太注意聽, CALL OUT 之後自己專心度不夠, 所以還是不了解, 後來還是再給他一次機會, 總算把這個題目解決了。最後, 我在講解完之

後，會問學生懂不懂。懂的話，會再請另外一位同學再上來複述一遍，這是在檢驗學生到底是不是真的聽懂了。因為大部分老師在上課的時候，可能都會只是問一下說：「懂不懂啊？」懂了！就帶過去了。而我會再請一位同學上來複述一遍，這樣子比較能夠確保同學們真的懂這些知識。

肆、教學後的省思

本次的教學單元是外心，教學時間為兩節課（九十分鐘），中間休息十分鐘。外心在國三的課程中，學生容易與內心、重心混淆。所以在設計此單元時，先複習三種線：中垂線、角平分線、中線的性質，希望藉由這三種不同的性質，能讓學生更清楚分辨三心在三角形中不同的地位。接著請學生用摺紙的方式找出三角形的外心，這樣的做法是為了讓學生有視覺上的經驗，知道三角形的三條中垂線會交於一點，然後再說明為什麼會交於一點。不過在這個部分的流程處理上，我是讓學生在課堂剪三角形，因此多花了許多時間。建議老師如果要以此方法進行教學時，可請學生回去剪好再帶來學校，以節省課堂的時間。另外在上完課之後發覺忘了說明三角形的三中垂線會交於一點，這點還需要在下一節課補充。

外心常見的問題就是位置、距離與角度，因此接下來的教學特別針對這三個部分對學生進行說明。外心會由於三角形內角角度的不同，而有不同的位置。不過大部分的學生都不知道為什麼，因此特地讓學生自己去思考為什麼會有這樣的情形。因為怕學生想不出原因，所以我事先在黑板上畫出一個圓，裡面再畫一個直角，藉此提示學生與上個單元中的圓周角有關。本次錄影的班級由於程度較一致，而且平常上課時討論的氣氛佳，因此讓學生自行討論，並讓他們自行發現問題，除了讓老師與學生之間有互動外，學生與學生之間也有互動。

而距離部分，由於中垂線上任一點至兩端點等距的性質，所以很快就可以知道外心到三角形三頂點距離相等，不過學生還是得藉由練習，才會更加熟悉。

關於角度的部分，只要學生能將圓心角、圓周角與所對弧的角度關係清楚表示出來，對於公式的引導方面就比較容易。只是學生還不太習慣自己完整的組織思考過程、導出公式，所以老師也可以使用分段的方式，讓學生自己發現公式。在進行此方面的教學時，因為有兩種情況需要討論，所以必須畫出兩個圖：銳角三角形與鈍角三角形。不過當時沒有考慮到配置的問題，應該在圖旁邊預留書寫的空間，所以在黑板上的位置顯得有點擠。另外有些學生對於這方面的問題，雖然已經知道原理，不過對於公式的應用仍不熟悉，老師可以提示學生將外接圓畫出來，再藉由圓心角、圓周角與所對弧的角度關係求出答案。

最後由於時間的關係，並沒有把學習單全部完成，所以時間的掌控上還有待加強。

國家圖書館出版品預行編目資料

國中小數學教材與教學探討.幾何篇 / 陳春男等作；周筱亭, 劉君毅主編.
--初版. -- 臺北縣三峽鎮：國家教育研究院籌備處, 民 98.08- 冊；公分

ISBN 978-986-01-9182-0 (第 4 冊：平裝附數位影音光碟)

1.數學教育 2.教學活動設計 3.中小學教育

523.32

98011987

國中小數學教材與教學探討---幾何篇（四）

主 編：周筱亭 劉君毅

教學指導：朱建正 謝 堅 鍾 靜 周筱亭

作 者：陳春男 賴梅葵 魏姿玟 莊國彰 吳孟佳 李美姿

發 行 人：陳伯璋

發行機關：國家教育研究院籌備處

地 址：台北縣三峽鎮三樹路二號

電 話：(02) 8671-1111 轉 教學資源中心

網 址：<http://www.naer.edu.tw>

出版年月：中華民國 98 年 8 月

版 次：初版

電子出版品說明：本書籍影片同時登載於「國中小數學教師專業成長網」

網址為：<http://math.naer.edu.tw>

定 價：新台幣 290 元

印 刷 者：

地 址：

電 話：

展 示 處：政府出版品展售門市

地址及電話：

1.五南文化廣場：台中市中區柳川東街 32 號 3 樓 TEL：(04) 2221-0237

網址：<http://www.wunan.com.tw>

2.國家書店松江門市：台北市松江路 209 號 1 樓 TEL：(02) 2518-0207

網址：<http://www.govbooks.com.tw>

GPN：1009801763

ISBN：978-986-01-9182-0

國家教育研究院籌備處保留本書籍附件影片資料之著作權及所有權利。