

統一編號

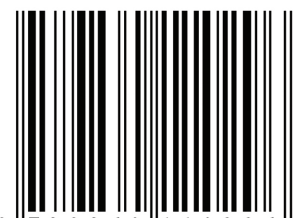
1009602658

國中小數學教材與教學探討
— 因數與倍數篇
國家教育研究院籌備處出版

國中小數學教材與教學探討 — 因數與倍數篇



ISBN 9789860110296



9 789860 110296
96.11.3000
工本費：185元



國家教育研究院籌備處 出版

國中小數學教材與教學探討 - 因數與倍數篇

國家教育研究院籌備處 出版

中華民國九十六年十一月

何主任序

師資培育法自民國八十三年於立法院通過後，有關中小學師資的培育已由原先之師範院校包辦的情況轉變為多元之發展，舉凡國內設有教育學程的大學皆可培育國中、小學師資。目前，師資培育的派典已由過去的行為主義派典，強調教師的外顯行為，轉移到目前的建構主義派典。師資培育者不再視教師為被動的學習者，而開始視教師為主動的建構其教學知識者，其如何學習教學與內在思考之機制為師資培育者所著重的焦點。

近年來教師的專業成長方面的研究主要在於探討教學的知識庫，提供訓練課程以及專業活動中教學複雜度的示例（Reynolds, 1989）。Yinger 及 Hendricks-Lee(1993)認為教師的知識及專家系統通常都和個體的特質有關，同時也與脈絡和情境有互動。他們認為教師的工作知識是根據教師工作的環境以及本身的特質，提出了知識存在於不同的系統—文化、生理、社會、歷史、以及個人，學習教學即涵蓋在這些系統的互動之中。

目前荷蘭 Freudenthal 研究中心（FI）提出反思（reflection）與敘事（narration）、建構（construction）同列為培育數學師資的三大重點。其主張的多元互動學習環境計畫（multiple interactive learning environment, MILE）將小學教學實務的場景錄影帶數位化，並開始運用到師資培育。這個 MILE 的特點是讓師範生透過教學實務來學習教學理論並反思自身的教學觀，以建構自我的教學基礎。此種方式，除了提供一個學習的實務環境之外，同時也提供了教學實務的表徵，以作為師範生建構實務知識的基礎。

本處周筱亭研究員與劉君毅助理研究員自九十一年度起，即開始進行「現實 教學紀錄」對於數學教師專業成長影響之探討研究，以記錄教師們的「教學歷程」為主要的資料蒐集方式，包含以影像資料為主的「教學錄影專輯」、教師於教學前所作的「教學活動設計」以及錄影後所作的「教學後的省思」等三大部分。這個研究的最終目的

在於建置一個適合國民中小學數學教師使用的「現實教學紀錄」資料庫，資料庫中擬包含數學內涵、以及數學為主軸的統整課程教學情境。該研究擬定以國中小數學課程中的九個重要領域為主軸，根據該主軸在國民中小學階段的重點教學內涵，結合學者專家的專業以及國中小教師的實務知識，針對活動設計、數學內涵、班級經營、以及學生認知等向度進行分析與整理，來建置教學情境紀錄，以做為教師實務學習的資源，並從中蒐集參與研習教師的反思及改變資訊。

這套叢書「國中小數學教材與教學探討」是前述資料庫內容的呈現方式之一，九十三年度已出版「長度篇」與「比例篇」，九十四年度出版「時間篇（一）、（二）、（三）」和「小數篇」，九十五年度已出版「幾何篇（一）、（二）、（三）」，和「分數篇（一）、（二）」，本（九十六）年度上半年將出版「整數的乘除篇（一）、（二）」和「因數與倍數篇」。每本書都包含該主軸的各單元「教學活動設計」、「教學活動實錄」和「教學後的省思」，並附上各單元的教學實錄影音光碟。在此同時，研究群已展開進一步計畫，將本系列叢書內容（含文本與影片）與歷年來的研究成果逐步數位化，建置成「國中小數學教師專業成長網」（網址為：<http://math.naer.edu.tw>），期盼以數位學習(e-Learning on Demand)、教師績效支援系統(Electronic Performance Support Systems)的模式，提供教師們更便利、及時、普及與多元的服務。

在這本書付梓之際，僅以此序向各位參與的人士表達誠摯的謝意，由於他們的專心投入與犧牲週末假日的無私奉獻，讓本處能出版、製作這些教學敘事，作為以學校為基地的數學教師成長學習資源。

何福田

於國家教育研究院籌備處

民國九十六年一月

編輯要旨

一、本書為國立教育研究院籌備處預定陸續出版的一系列與國中小數學教材和教學相關的叢書之一，95 年度先出版三本以「幾何」為主題，再出版兩本以「分數」為主題；今（96）年上半年出版的三本中，兩本是以「整數的乘除」為主題，一本是以「因數與倍數」為主題。本書——因數與倍數篇收錄了國小五年級和國中一年級的教學主題單元。

二、出版這類叢書的主要目的在於提供國中小教師欲提升專業能力時，可以參考或共同討論的教學案例。

三、本書分為兩個部分：文本和數位影音光碟(DVD)，前者包括「因數和倍數」主題的各單元活動設計、教學實錄、教學說明和教學者教學後的省思；後者則為各單元的教學實況錄影以及擔任教學的教師於教學後所錄製的教學說明。

四、讀者在觀看影音光碟時，可以對照文本中的教學實錄。

五、本書並未涵蓋國中、小數學教材中所有「因數與倍數」主題的相關題材，係就參與的老師們當時任教的年級與使用的版本，配合原訂的教材和教學進度，選取和「因數與倍數」相關的重要概念，在教授們的指導之下，先設計教學活動，經過反覆的討論與修正，定案後，由本處委外錄製教學實況和教學說明。錄影紀錄皆為自然真實的上課過程，由於採用雙機錄影，影片中呈現的教學實況的畫面已經過剪輯，但音效方面則是教室現場原音重現。

六、由於每位教師的教學風格不同，所教學生的背景、經驗與知識也不盡相同，因而讀者不應將本書的各個案例視為「範例」。

七、本書內容(含文本與影片)未來將逐步數位化，以線上課程方式呈現，建置於本處「國中小數學教師專業成長網」(網址為：<http://math.naer.edu.tw>)，歡迎上網瀏覽最新資訊。

八、本處保留本書及影片內容之著作權及所有權利，讀者若需引用或有任何問題，歡迎逕洽本處。

目次

因數和倍數.....	1
壹、教學活動設計	1
貳、教學實錄	13
參、教學說明	42
肆、教學後的省思	45
公因數和公倍數.....	47
壹、教學活動設計	47
貳、教學實錄	57
參、教學說明	90
肆、教學後的省思	93
因數與公因數.....	95
壹、教學活動設計	95
貳、教學實錄	110
參、教學說明	139
肆、教學後的省思	141
公因數與最大公因數.....	143
壹、教學活動設計	143
貳、教學實錄	154
參、教學說明	175
肆、教學後的省思	177

因數和倍數

壹、教學活動設計

一、教學年級與主題：五年級上學期，因數和倍數

二、教學者：台北市仁愛國小，林宜靜老師

三、教學目標：

1. 認識因數的意義。
2. 了解整除與因數的關係。
3. 認識倍數的意義。
4. 了解因數與倍數的關係。
5. 認識簡單的倍數識別法。

四、活動目標：

【活動一】

1. 給定總數，解決「可能的單位量數值」問題，並記錄解題活動。

【活動二】

2. 透過解餘數是 0 的整數除法問題，認識整除的意義。
3. 認識「因數」的術語。
4. 用除法檢驗一個整數是否為另一個數的因數。
5. 給定總數（100 以內），解決「列出所有可能的因數」問題，並記錄解題活動。

【活動三】

6. 透過乘法問題的解題活動，認識「倍數」的術語。
7. 給定一個數，列出其倍數，並用算式記錄。
8. 察覺某數的倍數是無限多個。

【活動四】

9. 把倍數整理成表，並說明表中各數字的意義。
10. 察覺某數為其因數的倍數。

【活動五】

11. 能在百數表上找出 2、3、5 的所有倍數。
12. 透過觀察，能找出 2、3、5 的倍數識別方法。

五、教學概要說明：

本教學活動的主要目標是讓學生認識因數與倍數的名詞、意義及其求法。因數和倍數及其關係，在數學上是由「除法原理」去判斷兩整數相除，其餘數是否為零而定。在國小數學課程中，所提及的「整數」是指正整數或零而言；但是在此階段討論因、倍數問題時不宜包含 0，因為 0 相當抽象，因此討論範圍只限於正整數。由因數概念為基礎，可以繼續討論一個正整數是否為「質數」或「合數」的性質，或進行兩個正整數之公因數的探討；相對的，倍數概念可以導入兩個正整數之公倍數續作探討。本教學活動則主要聚焦於因數與倍數的意義及其求法。

為使教學內容貼近學童生活經驗，本教學活動的布題均以「運動會」為主題。活動一是在倍的情境中，給定總數，要求學童解決可能的單位量數值問題，希望學童可以在各種問題情境中，都能掌握「總量可以由哪些單位量組成」的意義；透過本活動，可以幫助學童經驗數概念的乘法性結構，並察覺單位量及單位數是成對出現的。活動二開始嘗試在數的情境中，引入「因數」的意義。透過矩陣排列問題，限制學童用除法算式記錄分法，再透過「整除」的概念，引入因數的意義。活動三透過某數的整數倍的乘積，介紹「倍數」的意義；再讓學童列出該數其它的倍數，並經由討論，使學童知道某數的倍數有無限多個。活動四則經由乘法問題的解題活動，將倍數整理成表；並透過討論，讓學童察覺某數為其因數的倍數。活動五利用百數表讓學童分別找出在 100 以內 2、3、5 的所有倍數；透過觀察與討論，認識 2、3、5 的倍數識別方法，並研究不同規則所形成的圖案，以激發學童學習數學的興趣。

六、教學活動設計：

【活動一】認識因數的意義

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
教師布題 ⊙16個鈴鐺成串的串法	1. 運動會即將舉行，五年級小朋友決定要以鈴鐺作為進場時的裝扮。每個小朋友有 16 個鈴鐺，要把它串成一串一串的， 每一串的鈴鐺個數要一樣多，而且剛好用完 ，每一串可以有幾個鈴鐺？想想看，可以怎麼分？把你的作法記下來。	- 將全班學生分成小組，進行小組合作解題。 - 若學生對解題產生困難，教師可提供花片或小積木，使學生透過分花片或小積木的活動幫助解題。 - 本問題的重點在於：「每一串可以有幾個鈴鐺？」	明白題意並進行解題。
學生操作解題並發表	2. 說說看，你是怎麼分的？	- 學生說明解題過程。 - 學生可能的記法： (1) 1 個 1 串，可穿成 16 串。 2 個 1 串，可穿成 8 串。 4 個 1 串，可穿成 4 串。 8 個 1 串，可穿成 2 串。 16 個 1 串，可穿成 1 串。 (2) $16 \div 1 = 16$ $16 \div 2 = 8$ $16 \div 4 = 4$ $16 \div 8 = 2$ $16 \div 16 = 1$ (3) $1 \times 16 = 16$ $2 \times 8 = 16$ $4 \times 4 = 16$ $8 \times 2 = 16$ $16 \times 1 = 16$ (4) 其它。	- 會說明解題過程。 - 能討論及判斷發表者的作法是否合理。

- 教師針對學生發表內容，再次提問 ◎一串可以有3個鈴鐺嗎？	3. 一串可以有3個鈴鐺嗎？為什麼？	- 學生用乘法算式、除法算式或其他方法記錄自己的作法，教師皆應予肯定。 - 討論學生的解題過程，可包含以下： - 鈴鐺的總數是16個嗎？ - 每一串的鈴鐺個數都一樣多嗎？每一串有幾個？ - 總共分成幾串？ - 全部分完了嗎？ - 學生說明其想法。 - 學生可能的說法： - 不可以。因為一串有3個，兩串有6個，五串有15個，第六串就只有1個了。 - 其它。 - 若學生回答「可以」，其理由為：一串有3個，可分成五串，剩下1個。教師宜用題目的限制提示學生，必須要將鈴鐺分完，不能剩下。若其理由為：分數（或小數）個鈴鐺合起來便有16個，教師宜提示學生，鈴鐺無法切開使用，所以要用整數回答。	能說「不可以」，並說明理由。
---	---------------------------	---	--

- 教師針對學生發表內容，再次提問 ◎單位量和單位數是成對出現的	4. 從各小組的紀錄中，你發現什麼？	- 學生說明其想法。 - 學生可能的說法： (1) $1 \times 16 = 16$; $16 \times 1 = 16$ $2 \times 8 = 16$; $8 \times 2 = 16$ 都是成對出現的。 (2) $16 \div 1 = 16$; $16 \div 16 = 1$ $16 \div 2 = 8$; $16 \div 8 = 2$ 都是成對出現的。 (3) 其它。 - 若沒有學生提出「成對出現」的說法，教師宜引導學生。	
---	--------------------	--	--

【活動二】了解整除與因數的關係

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
- 教師布題，並限制學生以除法算式記錄作法 ◎27個小朋友排成長方形隊伍的排法	1. 運動會進場時需要一個旗手、舉牌手和喊口令的班長，所以排成長方形隊伍的人數是 27 人。每一排的人數要一樣多，而且要把全部 27 個人排完，一排可以分到幾個小朋友？想想看，可以怎麼分？把你的做法用 有除號的算式 記下來。	- 學生進行小組合作解題。 - 若學生對解題產生困難，教師可提供花片或小積木，使學生透過分花片或小積木的活動幫助解題。	- 明白題意並進行解題。 - 會用有除號的算式記錄自己的做法。
學生操作解題並發表	2. 說說看，你是怎麼記的？	- 學生說明解題過程。 - 學生可能的記法： (1) $27 \div 1 = 27$ $27 \div 3 = 9$ $27 \div 9 = 3$ $27 \div 27 = 1$ (2) 其它。	- 會說明解題過程。 - 能討論及判斷發表者的作法是否合理。

- 針對學生的發表內容，再次提問 ⊙3個一排的排法 - 說明「整除」的意義 - 針對上述討論內容，再次提問 ⊙27可以被9整除嗎？ - 讓學生認識「因數」的術語	3. 想想看，3 個人排成一排時，可以剛好分完嗎？可以排成幾排？剩下幾人？用除法算式記記看。 4. 像這樣，27 除以 3，剛好分完，沒有剩下，餘數是 0；而且 27 和 3 都是整數時，我們就說 27 可以被 3 整除。 5. 想想看，9 個人一排時，可以剛好分完嗎？27 可以被 9 整除嗎？為什麼？ 6. 當 27 可以被 9 整除，而且 27 和 9 都是整數時，我們就說：9 是 27 的「因數」。	- 若學生無法用除法算式記錄，教師宜加以澄清，例如： (1) 有多少個小朋友要排隊？ (2) 一排有幾個小朋友？ (3) 一共排成幾排？ (4) 用有除號的算式怎麼記？ - 學生回答並記錄：$27 \div 3 = 9 \cdots 0$ - 教師宜強調：「能不能分完？」以及「剩下幾人？」 「整除」是指兩整數相除其餘數是 0。 - 學生回答 27 可以被 9 整除，並記錄：$27 \div 9 = 3 \cdots 0$ - 透過討論讓學生明白：27 可以被 9 整除，而且 27 和 9 都是整數，$27 \div 9 = 3 \cdots 0$，所以 9 就是 27 的因數。 - 希望學生會用能不能整	- 會回答可以剛好分完，可排成 9 排，剩下 0 人。 - 明白「整除」的意義。 - 會回答「剛好可以分完」，和「27 可以被 9 整除」並說明作法。 - 明白「因數」的意義。
---	--	--	---

- 針對上述討論內容，再次提問 ○1個一排的排法 - 如果可以被某一整數整除，某整數便是該整數的因數 - 針對上述討論內容，再次提問 ○2個一排的排法 - 如果不能被某一整數整除，某整數便不是該整數的因數 - 繼續找出長方形隊伍的其他排法 - 找出可以將27整除的整數	7. 那麼，1個人一排時，可以剛好分完嗎？可以排成幾排？ 8. 1是27的因數嗎？ 9. 想想看，2個人一排時，可以剛好分完嗎？剩下幾人？為什麼？ 10. 2是27的因數嗎？說說看你的想法？ 11. 還有幾個一排時，也可以剛好分完？ 12. 找找看，27可以被哪些整數整除？	除，來判斷一個整數是否為另一個整數的因數。 - 學生回答並記錄：$27 \div 1 = 27$。 - 學生回答： 1是27的因數。 透過討論讓學生明白，27可以被1整除，所以1也是27的因數。 - 學生回答並記錄：$27 \div 2 = 13 \cdots 1$ - 學生回答： 2不是27的因數。 透過討論讓學生明白，27不能被2整除，所以2不是27的因數。 - 全班討論找出其它可以剛好分完的分法。 - 學生找出所有可以將27整除的整數並回答。 教師宜再次提醒學生：	- 會回答剛好可以分完，可以分成27排。 - 會回答1是27的因數。 - 會回答「不能剛好分完」，並說明作法。 - 會回答2不是27的因數，並說明想法。 - 會回答還有27個一排時可以剛好分完。 - 會回答27可以被1、3、9、27整除。
---	---	---	--

• 找出27的所有因數	13. 想想看，27 的因數有哪些？	「整除」是指兩整數相除後餘數是 0。 • 學生找出 27 的所有因數並回答。 • 教師可提醒學生：用一整數「能不能整除」另一整數，來判斷該數是否為其因數。	• 會回答27的因數有1、3、9、27。
• 教師重新布題： ○找出24的因數	14. 找找看，24 的因數全部有哪些？說說看，你是怎麼知道的？	• 教師宜再次提醒學生：「因數」是指一個整數能不能被另一個整數整除，來判斷其關係。	• 會回答24的因數有1、2、3、4、6、8、12、24。
第一節結束			

【活動三】認識倍數的意義

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 教師布題 ○解決幾的幾倍之問題	1. 運動會舉行投籃比賽。 <u>小靜</u> 投進 6 分， <u>小志</u> 得分是 <u>小靜</u> 的 3 倍， <u>小志</u> 得多少分？ <u>小新</u> 的得分是 <u>小靜</u> 的 4 倍， <u>小新</u> 得多少分？想想看，把你的想法記下來。	• 學生進行小組合作解題。	• 明白題意並進行解題。
• 學生操作解題並發表	2. 說說看，你是怎麼想的？	• 學生可能的想法和記法： 6 的 3 倍是 18， 記做 $6 \times 3 = 18$。 6 的 4 倍是 24， 記做 $6 \times 4 = 24$。	• 會回答<u>小志</u>投進 18 分，<u>小新</u>投進 24 分。

- 透過幾的幾倍，說明「倍數」的意義 - 教師針對上述討論內容。再次提問 ⊙ 24 是 6 的倍數嗎？ - 教師提問： ⊙ 找出 6 的其他倍數 - 學生解題並發表 - 教師針對討論內容，再次提問 ⊙ 6 是不是自己的倍數 - 教師針對討論內容，再次提問。	3. 6 的 3 倍是 18，而且 6、3 和 18 都是整數，所以我們說 18 是 6 的倍數。 4. 6 的 4 倍是 24，24 是 6 的倍數嗎？ 5. 找找看，6 的倍數還有哪些？再找出幾個。 6. 說說看，你找出哪些 6 的倍數？ 7. 說說看，6 是不是 6 的倍數？ 8. 想一想，6 的倍數有多少個？	- 教師宜強調當 6 的 3 倍是 18，18 是 6 的倍數時，6、3 和 18 都是「整數」。 - 學生發表想法。 - 學生進行解題。 - 學生可能的記法： $6 \times 5 = 30$ $6 \times 6 = 36$ $6 \times 7 = 42$ $\vdots$ - 本活動的倍數以自然數為限，並不包含 0。 - 學生發表想法。 - 學生回答：6 是 6 的倍數。 - 透過討論讓學生明白，6 的 1 倍是 6，所以 6 也是 6 的倍數。 - 學生發表想法。 - 透過討論讓學生知道 6 的倍數有無限多個。	- 認識「倍數」的術語。 - 知道 18 是 6 的倍數。 - 知道 24 是 6 的倍數。 - 明白題意並進行解題。 - 會找出數個 6 的倍數。如：30、36、42… …。 - 知道 6 是 6 的倍數。 - 知道 6 的倍數多的數不完。
---	--	--	--

◎6的倍數有多少個？		教師可說明「無限多」的意義。好比從 1 開始數，每次加 1，是「1、2、3、4、5……」，這些數是「數也數不完」的。	
------------	--	--	--

【活動四】了解因數與倍數的關係

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
- 教師布題 ◎把倍數整理成表 - 學生解題並發表。	1. 5 人成 1 組參加趣味競賽，2 組、3 組、4 組…時各有多少人？在表中記記看。	- 學生發表想法。 - 學生可能的記法：1 組有 5 人，2 組有 10 人，3 組有 15 人，4 組有 20 人…。	- 明白題意並進行解題。 - 會回答人數是多少。
- 學生發表 ◎表中各數字的意義	2. 說說看，表中各個數字所代表的意義是什麼？	- 學生發表想法。 - 學生可能的說法：「組數」欄中的數字代表共有幾組，「人數」欄中代表總共有多少人參加趣味競賽。	知道表中各數字的意義。
- 教師提問 ◎找出表中 5 的倍數	3. 從表中找出哪幾個數是 5 的倍數？說說看，你怎麼找的？	- 學生發表想法。 - 學生可能的說法：5、10、15、20、25、30、35 是 5 的倍數。因為：5 的 1 倍是 5，5 的 2 倍是 10…。 - 教師宜再次強調 5 也是 5 的倍數。	- 能說出 5、10、15、20、25、30、35 是 5 的倍數。 - 能說出自己的想法。
- 教師提問 ◎找出 5 是表中哪些數	4. 說說看，在表中，5 是哪幾個數的因數？你怎麼知道的？	- 學生發表想法。 - 學生可能的說法：5 是 5、10、15、20、25、	能說出 5 是 5、10、15、20、25、30、35 的

的因數 • 教師提問： ⊙ 察覺因數和倍數的關係 • 學生解題並發表 ⊙ 發現：5 是 10 的因數，10 是 5 的倍數。 5 是 20 的因數，20 也是 5 的倍數嗎？	5. 你發現什麼？ 6. 我們發現，5 是 10 的因數，10 也是 5 的倍數。5 是 20 的因數，那麼 20 也是 5 的倍數嗎？想想看。	30、35 的因數。 因為：5、10、15、20、25、30、35 可以被 5 整除。 • 學生發表想法。 • 學生可能的說法： 某數是其因數的倍數； 某數是其倍數的因數。 • 學生可能的想法： $5 \times 4 = 20$，20 是 5 的 4 倍，所以 20 也是 5 的倍數。	因數。 • 能說出自己的想法。 • 能說出自己的想法。 • 會回答 20 也是 5 的倍數。
--	--	--	---

【活動五】認識簡單的倍數識別法

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 在百數表上找出所有 2 的倍數 • 學生操作解題並發表 • 2 的倍數識別法	1. 請你在百數表上找出所有 2 的倍數，並用色筆把這些數字塗上顏色。 2. 說說看，2 的倍數有哪些？ 3. 說說看，你發現什麼？	• 學生進行解題。 • 教師將學生完成之百數表揭示於黑板上 • 請學生發表 • 學生可能的想法： (1) 在百數表上，2 的倍數都排列在直線上。	• 明白題意並進行解題。 • 能在百數表上找出 2、4、6、8……100，並塗上顏色。 • 能說出自己的想法 • 能找出 2 的倍

- 在百數表上找出所有 3 的倍數 - 學生操作解題並發表 3 的倍數識別法 - 在百數表上找出所有 5 的倍數 - 學生操作解題並發表	4. 請你在百數表上找出所有 3 的倍數，並用色筆把這些數字塗上顏色。 5. 說說看，3 的倍數有哪些？ 6. 說說看，你發現什麼？ 7. 請你在百數表上找出所有 5 的倍數，並用色筆把這些數字塗上顏色。 8. 說說看，5 的倍數有哪些？	(2)2 的倍數其個位數是 2、4、6、8、0。 (3)2 的倍數都是偶數。 (4)其它 - 偶數是指能被 2 整除的數。若學生不明白偶數的意義，教師宜提出說明。 - 學生進行解題。 - 教師將學生完成之百數表揭示於黑板上 - 請學生發表 - 學生可能的想法： (1)在百數表上，3 的倍數形成斜線狀的圖案。 (2)3 的倍數其各位數的和也會是 3 的倍數。(例：99 是 3 的倍數。$9+9=18$；18 是 3 的倍數) (3)其它。 - 學生進行解題。 - 教師將事先準備之百數表以投影機揭示於銀幕	數識別法 - 明白題意並進行解題。 - 能在百數表上找出 3、6、9、12……99，並塗上顏色。 - 能說出自己的想法 - 能找出 3 的倍數識別法 - 明白題意並進行解題。 - 能在百數表上找出 5、10、
--	--	--	--

• 5 的倍數識別法 • 教師總結	9. 說說看，你發現什麼？ 10. 好神奇！不同數字的倍數會在百數表上排列出不同的圖案。你可以再試試看其它的數（例如 9），看看是否會有其他的結果？並試著找出其他數的倍數識別法！	上。 • 請學生發表 • 學生可能的想法： (1) 在百數表上，5 的倍數分別排列在兩條直線上。 (2) 5 的倍數其個位數字是 5 或 0。 (3) 其它。	15、……100，並塗上顏色。 • 能說出自己的想法 • 能找出 5 的倍數識別法
第二節結束			

貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：小朋友早安。
2. 學生：老師早。
3. 老師：今天宜靜老師有一點煩惱，想請你們幫我想個辦法。我們運動會的時候，運動員要進場，對不對？我們五年級決定要用一種東西來做打扮，就是這個東西，鈴鐺。然後呢，我們裝扮的方法是把它串成一串一串的，那現在每個小朋友會分到 16 顆鈴鐺，要把它串成一串一串的，作為我們運動員進

場時候的裝飾。但是它有規則喲，每一串的個數要一樣多，而且 16 個鈴鐺都要把它用完，請問你可以怎麼分？有哪幾種分法？現在我想請一個小朋友來幫我說說看，這個問題是什麼意思？可不可以再幫我說一次？恆睿，謝謝。

4. 學生：每個小朋友都有 16 個鈴鐺，然後呢，我們要把它串成一串一串，每一串都一樣，而且全部要用完，一串會有幾個鈴鐺？
5. 老師：一串會有幾個鈴鐺？老師有沒有問一串會有幾個鈴鐺？
6. 學生：有。
7. 老師：好，而且鈴鐺要一樣多，還有，16 個鈴鐺都要用完。現在各組桌上都有小白積木，對不對？如果你不知道怎麼做，可以把小白積木假裝是鈴鐺做做看。你把你的想法、討論過程、還有最後的結果記錄在白板上，開始。

(8-16 為教師引導學生討論的過程)

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none">8. 老師：不一定要排，想想要怎麼開始。一共有 16 個鈴鐺…9. 學生：先抓 16 個出來。10. 老師：先抓 16 個出來，然後呢？11. 學生：6、8、10、16，這樣剛好。12. 老師：然後呢？好，多的把它收起來。13. 學生：2、4、6、8、10、12、14、16。14. 老師：好，多的收起來。<u>瀚穎</u>來這邊幫忙。一組一份就可以了。好，開始想想看，這 16 個鈴鐺要怎麼串？老師沒有規定要串成幾串，但是一定要用完，而且每串的個數要一樣多。如果 16 串的話，一串是幾個鈴鐺？15. 學生：一個。16. 老師：一串是 1 個。好，謝謝。這是一種串法了，有沒有別的做法？然後繼續討論，就是這樣。 |
|--|

17. 老師：好，大家請看黑板。現在我們按照順序一組、一組上台。我們請第一組。
小朋友要仔細聽喲。
18. 學生：一共有 16 個鈴鐺，16 個串成 16 串的話，每串就是有 1 顆鈴鐺，假如把它串成 4 個一串的話，可以串成 4 串；8 個一串的話有 2 串，16 個一串的話有 1 串，2 個一串的話有 8 串。謝謝。
- 1 個一串有 16 串
4 個一串有 4 串
8 個一串有 2 串
16 個一串有 1 串
2 個一串有 8 串
(第一組)
19. 老師：好，有沒有人有問題要問第一組？對她的做法有沒有疑問？或者是想要問她們的？來，政隆。
20. 學生：為什麼不按照順序？
21. 老師：哦，第一組，你們為什麼不按照順序寫？
22. 學生：因為最後才想起來。
23. 老師：因為他們最後突然才想起來，2 個 1 串也可以。所以他們沒有按照順序想，有沒有回答你的問題？
24. 學生：有。
25. 老師：好，謝謝。哦！承翰，你還要問。
26. 學生：1 個 1 串，有 16 串是什麼意思呀？
27. 學生：1 個鈴鐺串在一條線裡可以串成一串，因為有 16 個鈴鐺，所以可以串成 16 串。
28. 老師：承翰，你明白了嗎？一串只串一個，可不可以這樣串？
29. 學生：可以。
30. 老師：有沒有用完？
31. 學生：有。
32. 老師：每一串的個數有沒有一樣多？
33. 學生：有。

34. 老師：有，所以能不能這樣串？

35. 學生：可以。

36. 老師：可以，現在歡迎第二組，請上台。怡平，你們的白板在這裡。

37. 學生：16 個鈴鐺串成一串，一串裡有 16 個；16 個鈴鐺串成兩串，一串裡有 8 個；16 個鈴鐺串成 4 串，一串裡有 4 個；16 個鈴鐺串成 8 串，一串裡有 2 個；16 個鈴鐺串成 16 串，一串裡有 1 個。謝謝大家。

$16 \div 1 = 16$
 $16 \div 2 = 8$
 $16 \div 4 = 4$
 $16 \div 8 = 2$
 $16 \div 16 = 1$
第二組-薰衣草組

38. 老師：有沒有人要問第二組問題？好，第三組。

39. 學生：如果 16 個鈴鐺串成一串的話，每串有 16 個，然後串成一串；如果每 8 個鈴鐺串成一串的話，可以串 2 串；如果 16 個鈴鐺每 4 個串成一串的話，可以串 4 串；然後 16 個鈴鐺每 2 個串成一串的話，可以串 8 串；如果 16 個鈴鐺每 1 個串成一串的話，可以串 16 串。

$16 \div 16 = (1)$
 $16 \div 8 = (2)$
 $16 \div 4 = (4)$
 $16 \div 2 = (8)$
 $16 \div 1 = (16)$
第三組-音樂組

40. 老師：有沒有人有問題？我發現一件很有趣的事情。柏柏，你先回座位。你們看一下，薰衣草組和音樂組這兩組的算式一樣嗎？一不一樣？

41. 學生：一樣。

42. 老師：一樣，但是它們代表的意義不一樣。我們想一下，剛才薰衣草組說，他們這個「1」是什麼？薰衣草組，你們的「1」是什麼？

$16 \div 1 = 16$

43. 學生：1 串。

44. 老師：一串喔！柏柏，你們這個「1」是什麼？

$16 \div 1 = 16$

45. 學生：1 個。

46. 老師：不一樣耶！這個「1」是什麼？

$16 \div 1 = 16$

47. 學生：一串。

48. 老師：他們說是一串，所以呢，1 串有 16 個。但是，看看柏柏這一組的好有趣喲

！一共有 16 個，每一串有 1 個，所以呢，串成 16 串。你覺得這兩種說法都合理嗎？

$$16 \div 1 = 16$$

49. 學生：合理。

50. 老師：好，第四組請。

51. 學生：老師等一下，我覺得這樣有點不太合理。你問每一串有幾個鈴噹？

52. 老師：我問每一串有幾個鈴噹？

53. 學生：那這樣會變成…

54. 老師：所以你覺得哪一組比較合理？

55. 學生：第三組比較合理。

56. 老師：第三組比較合理。因為老師問的是每一串有幾個？還是問可以串成幾串？

57. 學生：可以串成幾個。

58. 老師：很好。第四組請上台。

59. 學生：老師剛剛的題目我們總共有五種方法可以做。第一種方法就是總共有 16 個鈴鐺，然後串成一串，一串裡面有 16 個。第二種方法是 16 個鈴鐺串成 2 串，每 1 串有 8 個鈴鐺。第三種方法是 16 個鈴噹，總共有 4 串，一串裡面就有 4 個鈴噹。然後第四種方法是 16 個鈴噹，總共有 8 串，每串 2 個鈴噹。然後第 5 種方法是 16 個鈴噹，總共有 16 串，每串裡面有 1 個鈴噹。

- (1) $16 \div 1 = 16$
 - (2) $16 \div 2 = 8$
 - (3) $16 \div 4 = 4$
 - (4) $16 \div 8 = 2$
 - (5) $16 \div 16 = 1$
- (第四組)

60. 老師：謝謝第四組。有沒有問題？沒有，歡迎第五組。

61. 學生：有 16 個鈴噹，如果有 8 串，每串有 2 個鈴噹，然後反過來，用這圖來看，要是 8 串，就是這樣直的看，每一串

$$(1) 16 = 8 \times 2$$

□□□□□□□□

□□□□□□□□

$$(2) 16 = 4 \times 4$$

□□□□ □□□□

□□□□ □□□□

$$(3) 16 = 1 \times 16$$

□□□□□□□□□□□□□□

(第五組)

就有 2 個，橫的來看是說有 2 串，每一串有 8 個。這一個就是說 16 個鈴噹，串成 4 串，每一串裡面就有 4 個。然後這個是一串裡面有 16 個，要是 16 串的話，裡面就有一個。謝謝。

62. 老師：好，有沒有人要問第五組問題？承翰。

63. 學生：為什麼她的算式要寫成 16 等於 8 乘以 2？

64. 老師：麗安，你可以回答嗎？16 是什麼？

65. 學生：16 是有 16 個鈴噹。

66. 老師：有 16 個鈴噹。那 8 是什麼？

67. 學生：可以分成幾串。

68. 老師：可以分成幾串。2 是什麼？

69. 學生：每串有幾個。

70. 老師：可是你剛才說也可以顛倒。來，看。這個 8 也可以看作什麼？ $16=8\times 2$

71. 學生：幾個。

72. 老師：幾個。然後可以串成…

73. 學生：2 串。

74. 老師：所以我要問你了，他們這組這樣畫，還有別組的算式，你會發現，我們的串法是…

75. 學生：一樣。

76. 老師：都一樣，還有呢？你還發現什麼？

77. 學生：兩邊顛倒。

78. 老師：兩邊顛倒，方恆的意思是什麼？什麼叫兩邊顛倒？

79. 學生：就是說 16 等於 8 乘以 2。

80. 老師：喔，這邊。（指小白板）16 等於 8 乘以 2。

81. 學生：8 個一串，可以串 2 串；顛倒過來，2 個一串…

82. 老師：方恆，你的意思是不是 16 也可以寫做等於 2 乘以 8。哦，你看它是不是都是這樣子？是不是剛好會顛倒出現？因為 4、4、16(4 乘以 4 等於 16)，所以它就只有 1 個算式，你們發現了嗎？它們都是成對出現。謝謝你，方恆，你說得真好。
83. 老師：好，再來，我要問你，如果我想要 3 個串一串，能不能？
84. 學生：當然是可以串，但串不完。
85. 老師：柏柏，請你站起來說。3 個可不可以一串？
86. 學生：可以，可是串不完，最後會剩下幾個沒有串。
87. 老師：哦，會剩下來。所以 3 個串成一串可以嗎？
88. 學生：不行。
89. 老師：老師說要通通串完，不然很可惜，所以 3 個能不能成一串？
90. 學生：不行。
91. 老師：好，謝謝。請各組把小白板拿回去。好，謝謝你們剛才幫我解決了這個難題。好，我們已經串好鈴噹。妝扮好就可以進場了，進場時要排隊。我們班上要有一個班長喊口令，要有一個掌旗的，還要有一個掌牌的，班上的小朋友是 30 個，扣掉 3 個要在前面帶隊的，所以剩下…
92. 學生：27 個。
93. 老師：現在，請你幫我想想看怎麼排隊呀？我們進場時要排成長方形的隊伍，有 27 個人要來排隊，每一排的人數要一樣多才整齊，才好看，而且不能讓人剩下來的喲，不然他會哭的，因為他不能進場。所以，每一排的人要一樣多，人要全部排完。老師要請你幫我想想看，有哪幾種排法？每一排可以分到幾個小朋友？有沒有人要把這個題目再說一下，或者是有不懂的地方？柏柏。
94. 學生：長方形的話，所有的人排成一排那算長方形嗎？

95. 老師：你們說呢？

96. 學生：算。

97. 老師：算，好。還有嗎？那就開始請把你們的過程跟結果記錄在白板上。

98. 老師：你們已經討論好了？第六組，從第六組開始。

99. 學生：27 是有 27 個人，1 是如果 27 個人全部排 1 排的話，一排會有 27 個人；然後如果排成 3 排的話，一排會有 9 個人；如果排成 9 排的話，一排會有 3 個人；然後如果排成 27 排的話，

第六組的做法

$$27 \div 1 = 27$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$27 \div 9 = 3$$

$$27 \div 27 = 1$$

A：可排成 1、3、9、27。

每一排就有 1 個人。所以每 1 排可以有 1 個人、3 個人、9 個人、27 個人。

100. 老師：謝謝第六組。好，有沒有人有問題要問第六組？沒有。好，第五組。

101. 學生：有 27 個人，要是排成 1 排的話，一排有 27 個人；27 個人要是排成 3 排的話，一排就有 9 個人；27 個人要是排成 9 排的話，一排會有 3 個人；27 個人排成 27 排的話，每一排會有 1 個人。謝謝。

第五組的做法

$$27 = 1 \times 27$$

$$27 = 3 \times 9$$

$$27 = 9 \times 3$$

$$27 = 27 \times 1$$

102. 老師：有沒有人要問第五組問題？都明白嗎？好，第四組。

103. 學生：總共有 27 個人，如果排成一排的話，每一排就有 27 個人；如果排成 3 排的話，每一排就有 9 個人；如果排成 9 排的話，每一排只有 3 個人；然後如果排成 27 排的話，每一排只有 1 個人。謝謝。

第四組的做法

$$27 \div 1 = 27$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$27 \div 9 = 3$$

$$27 \div 27 = 1$$

104. 老師：好，第三組。

105. 學生：如果有 27 個人，27 個人排一排的話，可以排成 1 排；如果 27 個人，9 個人排一排的話，可以排成 3 排；然後 27 個人，如果 3 個人排一排

第三組的做法

$$27 \div 27 = 1$$

$$27 \div 9 = 3$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$27 \div 1 = 27$$

A：可以有 4 種排法，有 1、3、9、27。

的話，可以排成 9 排；如果 27 個人，每 1 個人排一排的話，可以排成 27 排。所以有 4 種排法，每 1 個人排一排，可以排 27 排；3 個人排一排，可以排 9 排；9 個人排一排，可以排 3 排；27 個人排一排，可以排 1 排。

第二組的做法

$$27 \div 1 = 27$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$27 \div 9 = 3$$

$$27 \div 27 = 1$$

A：可以一排有 27、9、3、1 人。

106. 老師：好清楚喔！謝謝第三組。有沒有人要問他問題？那就第二組，請。

107. 學生：有 27 個人，排成一排，一排裡面有 27 個人；排 3 排，一排裡面有 9 個人；排 9 排，裡面會有 3 個人；排 27 排的話，裡面就有 1 個人。

108. 老師：怡平稍等一下，你說第 4 個算式，這個 27 是什麼？

109. 學生：27 排。

$$27 \div 27 = 1$$

110. 老師：排成 27 排的話，1 是什麼？

111. 學生：1 個人。

$$27 \div 27 = 1$$

112. 老師：好，繼續。說完了嗎？

113. 學生：然後可以排有 27、9、3、1 人。

114. 老師：所以有 4 種排法。好，謝謝。第一組。

115. 學生：27 位一排的話，可以排成一排；3 位一排的話，共有 9 排；9 位一排的話會有 3 排。27...

第一組的做法

27 位 1 排有一排

3 位 1 排有九排

9 位 1 排有三排

$$27 \div 1 = 27$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$27 \div 9 = 3$$

116. 老師：27 是什麼？

117. 學生：總共有 27 個人，每一排都會有 3 個人。

118. 老師：3 是每一排都會有...

119. 學生：3 個人。9 的話是每一排都會有 9 個人。謝謝。

120. 老師：你們發現，第一組上面，他們還是用文字來寫，因為他們剛才已經用過文字，我請他們試試用算式來表達他們的想法，所以呢，他們並沒有寫完，是因為他們做了兩種做法，所以做法只有這三種排法嗎？

121. 學生：還有。

122. 老師：應該還有，對，還有一種。好，謝謝你們。那我們以音樂組為例，我們來看這個，可以看得清楚嗎？請你們再告訴老師，27 是什麼？

$$27 \div 27 = 1$$

123. 學生：27 個人。

124. 老師：我們有 27 個人，要排成長方形的隊伍。那這個 27 是什麼？

$$27 \div 27 = 1$$

125. 學生：27 排。

126. 老師：柏柏，你們的 27 是什麼？

$$27 \div 27 = 1$$

127. 學生：27 個人。

128. 老師：你們這一組的 27 是 27 個人，一排排 27 個人。所以這個 1 是什麼？

129. 學生：1 排。

$$27 \div 27 = 1$$

130. 老師：1 排。可以排 1 排。

131. 學生：老師，但是這樣不符合題意呀！

132. 老師：不符合題意，為什麼？怎麼說？

133. 學生：它是說一排可以分到幾個人？不是問你可以排成幾排？

134. 老師：所以你覺得這樣不符合題意？但是如果他是先想 1 排可以分到 27 個人，才得到 1 排呢？有沒有這個可能？

135. 學生：有。

136. 老師：有，所以這樣來說，合不合理？

137. 學生：合理。

138. 老師：只是你先想什麼。好，我們再來看第二個式子。27 是什麼？

$$27 \div 9 = 3$$

139. 學生：27 個人。

140. 老師：總共有 27 個人。這一邊呢，每一排有 9 個人，那這邊可以排成 3 排。好，現在老師要問你，像 27、9、3 這樣的數我們叫它什麼數啊？

141. 學生：因數。

142. 老師：因數？因數是什麼？像它們這樣的數我們叫它整數、小數、分數還是什麼數？
143. 學生：整數。
144. 老師：哦，是整數。記得整數嗎？像它這樣的數我們叫它整數。那我再問你，27 可以被 9...
145. 學生：整除。
146. 老師：你怎麼知道可以整除？好厲害。你怎麼知道？承翰，請你說。
147. 學生：因為它除了以後沒有剩下。
148. 老師：沒有剩下是沒有...
149. 學生：餘數。
150. 老師：所以我們說，27 可以被 9 整除，很好！我們再試一個式子，好嗎？
151. 學生：整除還要是除出來的數也要是整數。
152. 老師：對，沒錯。27、9、3 它們都是整數，政隆，謝謝你提醒我們。除出來的商也一定要是整數，我們就說它是整除。好，我們再試一個式子，你看這一個，27 是所有的 27 個人，這個 3 呢？
- $$27 \div 3 = 9$$
153. 學生：是 3 個人排 1 排。
154. 老師：那這個 9 呢？
155. 學生：排 9 排。
156. 老師：我現在問你，27 可以被 3 整除嗎？
157. 學生：可以。
158. 老師：告訴我為什麼？誰可以說？好，方恆。
159. 學生：它除出來的數是整數。
160. 老師：它除出來的數，我們叫它商，它是整數，而且它有沒有餘數？
161. 學生：沒有。

162. 老師：謝謝方恆，所以我們說，27 可以被 3 整除。我記得你們剛才突然蹦出一個名詞-因數。這個時候我們就可以來看因數了，當我們說 27 可以被 3 整除的時候，我們就說 3 是 27 的…
163. 學生：因數。
164. 老師：哇，好厲害！那我問你，動動腦筋，1 是不是 27 的因數？
165. 學生：是。
166. 老師：都說是，有沒有人覺得不是？有沒有人說不是？沒有。覺得是的舉手？好，請放下。冠廷，請你告訴老師，為什麼 1 是 27 的因數？為什麼？請站起來說。
167. 學生：因為 27 可以被 1 整除。
168. 老師：很好，他說因為 27 可以被 1 整除，有沒有餘數？
169. 學生：沒有。
170. 老師：沒有，所以我們就說 1 也是 27 的因數。好厲害喲！你們學會了。方恆。
171. 學生：1 是任何數的因數。
172. 老師：1 是任何一個數的因數，為什麼？
173. 學生：因為它隨便除一個數，都不會有餘數。
174. 老師：有沒有人要再幫方恆說清楚？剛才他說的意思不是很清楚。柏柏，你先說。
175. 學生：任何一個數字除以 1 都能被整除。
176. 老師：任何一個數除以 1 都可以整除，有沒有人要問？任何一個數除以 1，都可以整除？是嗎？
177. 學生：是！
178. 學生：不是！
179. 老師：有沒有人想說不是的？
180. 學生：我，我！

181. 老師：承翰，你說。

182. 學生：如果被除數是小數的話…

183. 學生：老師，但是你說要整數…

184. 學生：而且要整除…

185. 老師：所以我們要更嚴謹一點。來，方恆，你的說法要再嚴謹一點，再說一次。

186. 學生：1 要除以一個整數…

187. 老師：任何一個整數都可以被 1 整除，這樣是不是比較好一點？都沒有問題了。

所以我們可以說，1 是任何一個整數的…

188. 學生：因數。

189. 老師：好棒喲！你們會了。接下來我們還有一點時間，請各組把小白板拿回去。

我們來試試看，找一找因數。好，謝謝。

190. 老師：現在老師要你試試看，找出 24 所有的因數有哪些？請

你把算式記錄在白板上。你怎麼找出來的？

191. 老師：好，請看黑板。大家都很努力的找，看一下大家的答案

好不好？我們請一組來說，好不好？我們請第四組來說，宜謙。

192. 學生：24 的因數是 1、2、3、4、6、8、12、24。因為這些數，

我們剛剛算過，24 都可以被這些數整除，沒有餘數。

193. 老師：有沒有人有問題？沒有。我們請最特別的第五組來說說

看，大家都是用除法算式，他們用了乘法。我們來問問看，他們的想法是什麼？好，第五組。

194. 學生：因為 24 可以…，因為乘除是可以互逆的。

195. 老師：乘除可以互逆，我們學過對不對？好，然後呢？

第四組的作法

$$24 \div \boxed{1} = 24$$

$$24 \div \boxed{2} = 12$$

$$24 \div \boxed{3} = 8$$

$$24 \div \boxed{4} = 6$$

$$24 \div \boxed{6} = 4$$

$$24 \div \boxed{8} = 3$$

$$24 \div \boxed{12} = 2$$

$$24 \div \boxed{24} = 1$$

第五組的做法

$$24 = 1 \times 24$$

$$24 = 2 \times 12$$

$$24 = 3 \times 8$$

$$24 = 4 \times 6$$

$$24 = 6 \times 4$$

$$24 = 8 \times 3$$

$$24 = 12 \times 2$$

$$24 = 24 \times 1$$

196. 學生：這樣我們就可以知道 1、2、3、4、6、8、12、24 這些數，全都是 24 的因數。
197. 老師：有沒有人要問麗安問題？有沒有？沒有。都懂了嗎？
198. 學生：老師，我發現一件事。
199. 老師：請說，柏柏。
200. 學生：任何數它自己都是自己的因數。
201. 老師：他說什麼？你們聽到了沒？
202. 學生：聽到了。
203. 老師：柏柏再說一次好了，大聲說。
204. 學生：任何數本身都是它自己的因數。
205. 老師：同意的舉手。
206. 老師：放下。不同意的舉手。
207. 老師：好，大家都舉了。那我要問噢，誰可以說說看為什麼？為什麼說任何一個整數都會是它自己的因數？為什麼？薇晴。
208. 學生：任何一個數都可以被自己整除。
209. 老師：任何一個…
210. 學生：整數。
211. 老師：我們加上一個「整數」。任何一個整數都可以被自己…
212. 學生：整除！
213. 老師：所以我們就知道，任何一個整數都會是自己的因數。哇！你們好厲害。記得剛才方恆說什麼嗎？剛才他也講過很像的話。
214. 學生：1 會是所有整數的因數。
215. 老師：你們好厲害喲！
216. 學生：老師，我有話要講。

217. 老師：好。

218. 學生：1 是任何一個整數的最小因數。

219. 老師：他還要加上「最小」呢，為什麼？1 是任何一個整數最小的因數，為什麼？家楨，請你說。

220. 學生：因為 1 它是任何一個數都可以除…

221. 老師：1 可以把每一個整數都整除。那為什麼說它是最小的？為什麼？好，你坐下，再想想。麗安，你說說看。

222. 學生：因為你說要整數呀，因為 1 是整數中最小的。

223. 老師：哦！1 是整數裡面最小的。政隆，你說。

224. 學生：可是它不代表所有數中最小的。

225. 老師：也就是我們要加上「整數」。所以 1 是任何一個整數最小的因數。太棒了，這節課我們學到了因數的意義，還學到了因數的求法，我們還學到了 1 是任何一個整數最小的因數。還有一個別忘了，任何一個數都會是它自己的因數，但是這個「任何一個數」指的都是整數。

226. 學生：最大的！

227. 老師：哦，還有人講最大的。好，我們來把這句話說完整，任何一個整數都會是自己的最大的因數。太棒了，我們下課。

【第二節】

228. 老師：小朋友們，謝謝你們上一節課幫老師解決了兩個難題。一個是怎麼樣裝扮，一個是怎麼樣排隊進場，真的謝謝你們，我比較不煩惱了。哦！還有一個就是找出 24 的所有因數，那本來不是我的難題，是故意要考考你們的。我現在又有一個問題了，運動會舉行投籃比賽，這裡是成績。誰幫我念一下題目，好不好？昆穎，你自己來念吧！你的成績怎麼樣？昆穎，來！

229. 學生：昆穎投進 6 分，澤儀得分是昆穎的 3 倍，澤儀得多少分？沈譽的得分是昆

穎的 4 倍，沈譽得多少分？

230. 老師：有沒有人對這個成績有疑問的？

231. 學生：沒有。

232. 學生：不太可能。

233. 老師：但是這就是成績。好，請各組討論一下，沈譽跟澤儀的得分到底是多少？

請把你的想法用算式記錄下來。

234. 老師：澤儀的得分是昆穎的 3 倍…(教師引導學生討論的過程)

235. 老師：好，這裡好了。謝謝！小朋友請看各組的小白板。我們現在要從哪一組開始？好，第三組。

236. 學生：昆穎投進 6 分，澤儀得分是昆穎的 3 倍，所以 6 乘以 3 等於 18，澤儀得 18 分。沈譽的得分又是昆穎的 4 倍，所以是 6、4，是 24。澤儀得 18 分，沈譽得 24 分。

第三組的做法

$$6 \times 3 = (18)$$

$$6 \times 4 = (24)$$

A：(1)澤儀得 18 分

(2)沈譽得 24 分

237. 老師：有沒有問題？

238. 學生：沒有。

239. 老師：第四組，請。

240. 學生：昆穎投進 6 分，澤儀是昆穎投進的 3 倍，所以是 18；然後沈譽投的球是昆穎的 4 倍，所以是 24 分，然後澤儀投進 18 分，沈譽投進 24 分。

第四組的做法

$$\text{澤儀：} 6 \times 3 = 18$$

$$\text{沈譽：} 6 \times 4 = 24$$

A：澤儀投進 18 分

沈譽投進 24 分

241. 老師：有沒有問題？謝謝第四組。再來，第一組，請。

242. 學生：因為昆穎投進 6 分，澤儀投的是昆穎的 3 倍，所以 6 乘以 3 等於 18；又因為沈譽投的是昆穎的 4 倍，所以 6 乘以 4 等於 24。澤儀投的是 18 分，沈譽投進的是 24 分。謝謝。

第一組的做法

$$6 \times 3 = 18$$

$$6 \times 4 = 24$$

A：澤儀投進 18 分

沈譽投進 24 分

243. 老師：謝謝第一組，現在換第二組。

244. 學生：昆穎投進的是 6 分，澤儀是他的 3 倍，所以 6 乘以 3 等於 18，澤儀得到 18 分，然後沈譽是昆穎的 4 倍，所以是 6 乘以 4 是 24 分，沈譽得到 24 分。

第二組的做法

澤儀： $6 \times 3 = 18$

沈譽： $6 \times 4 = 24$

A：澤儀：18 分

沈譽：24 分

245. 老師：好，謝謝。再來是第五組。

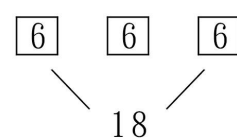
246. 學生：那是因為昆穎投進 6 分，澤儀是他的 3 倍，所以澤儀是 6 乘以 3，所以 18 是澤儀投進球的分數；然後沈譽是昆穎的 6 倍，所以是 6 乘以 4。不對，沈譽是昆穎的 4 倍，然後 6 乘以 4 等於 24，所以澤儀是 18 分，沈譽是 24 分。

第五組的做法

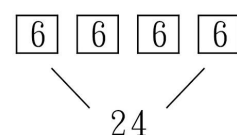
$6 \times 3 = 18$ (澤)

$6 \times 4 = 24$ (沈)

澤儀：



沈譽：



A：澤儀：18 分

沈譽：24 分

247. 老師：麗安請留步。你要不要說說看，你們下面那個圖在畫什麼？

248. 學生：就是把它當成昆穎投進分數。澤儀裡面有 3 個。

249. 老師：什麼叫澤儀有 3 個？

250. 學生：澤儀有 3 個 6。

251. 老師：3 個 6 是什麼意思？

252. 學生：6 的 3 倍。

253. 老師：好，再來呢？

254. 學生：3、6、18。沈譽有 4 個 6。

255. 老師：有 4 個 6 又是什麼意思啊？

256. 學生：6 的 4 倍。

257. 老師：好，所以…

258. 學生：沈譽得到 24 分。

259. 老師：好，謝謝第五組，他們還畫了圖，很清楚對不對？好，第六組。

260. 學生：我們這組 6 乘以 3 等於 18，6 是昆穎投進的分數，6 分，3 是澤儀得分是昆穎的 3 倍，18 是澤儀得 18 分，6 乘以 4 等於 24，6 是指昆穎投進 6 分，4 是指沈譽得分是昆穎的 4 倍，因為答案是 24，所以沈譽得分是 24 分。

第六組的做法

$$6 \times 3 = 18$$

$$6 \times 4 = 24$$

A：澤儀得 18 分

沈譽得 24 分

261. 老師：好，謝謝第六組，好，現在請大家看音樂組的白板。好，請問 6、3、18 是什麼數？

$$6 \times 3 = 18$$

262. 學生：整數。

263. 老師：對，整數。剛才我們學會了對不對？6 的幾倍會得到 18？

264. 學生：3 倍。

265. 老師：好，6 的 3 倍會等於 18，這個 18 我們就叫它是 6 的…

266. 學生：倍數。

267. 老師：你們怎麼會？太厲害了！為什麼？怎麼說？誰要不要再幫我說得更清楚？

那我們就再說一次，當 6 是整數，3 也是整數，6 的 3 倍會等於 18 的時候，我們就說 18 是 6 的…

268. 學生：倍數。

269. 老師：好，那我現在問你，24 是不是 6 的倍數？

270. 學生：是。

271. 老師：你怎麼知道的？誰要說說看？凱昀，請說。

272. 學生：24 可以被 6 整除。

273. 學生：ㄟ？

274. 老師：24 可以被 6 整除。也沒錯啊！可是我們剛才說，倍數應該怎麼說？

275. 學生：6 的 4 倍會等於 24。

276. 老師：6 的 4 倍會等於 24，所以 24 是不是 6 的倍數？

277. 學生：是。

278. 老師：這樣會說了嗎？我要問你，6 只有這兩個倍數嗎？6 的倍數只有這兩個嗎？

279. 學生：不只。無限多。

280. 老師：我聽到什麼？

281. 學生：是無限多。

282. 老師：什麼叫無限多？

283. 學生：就是永遠都算不完。

284. 老師：永遠都算不完？什麼叫無限多？誰要說說看？昆穎。

285. 學生：再怎麼乘永遠都乘不完。

286. 老師：誰有別的說法？誰，政隆，你要不要說？

287. 學生：因為 6 永遠可以乘…，它可以乘上所有的數。

288. 老師：6 可以乘上所有的數，好，還有沒有別的說法？你怎麼知道 6 的倍數是無限多個？宜謙。

289. 學生：因為沒有最大的數字，所以乘以 6 的數是永遠乘不完的。

290. 老師：也就是說，6 的 1 倍是 6，6 的 2 倍是 12，你們的意思是說它怎麼算也算不完，怎麼數也數不完，所以你們說 6 的倍數有無限多個。哦！原來是這樣子。

291. 學生：那因為老師出這個問題你們會告訴我說怎麼找也找不完，那老師限制一下好了，請各組找出 100 以內所有 6 的倍數。請你們開始做，記錄在白板上。

(292-293 為教師引導討論的過程)

292. 學生：老師，你的意思是說 6 的倍數是在 100 以內，還是乘數要在 100 以內？

293. 老師：6 的倍數還有哪些？100 以內，請記錄在白板上。

294. 老師：我們請一組來說就好了，哪一組自願？好多喲，好高興！好多組都要自願

，真好！那我們請柏柏好不好？待會瀚穎可以補充，好不好？好，小朋友請看黑板。

295. 學生：6 的 1 倍是 6，6 的 2 倍是 12，6 的 3 倍是 18，6 的 4 倍是 24，6 的 5 倍是 30，6 的 6 倍是 36，6 的 7 倍是 42...

296. 老師：好，停，暫停。

297. 學生：然後這些答案都是 6 的倍數。

298. 老師：哪些答案是 6 的倍數？是 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 嗎？是這些嗎？

$6 \times 1 = 6$	$6 \times 2 = 12$
$6 \times 3 = 18$	$6 \times 4 = 24$
$6 \times 5 = 30$	$6 \times 6 = 36$
$6 \times 7 = 42$	$6 \times 8 = 48$
$6 \times 9 = 54$	$6 \times 10 = 60$
$6 \times 11 = 66$	$6 \times 12 = 72$
$6 \times 13 = 78$	$6 \times 14 = 84$
$6 \times 15 = 90$	$6 \times 16 = 96$
A：6、12、18、24、30、36、42、48、54、60、66、72、78、84、90、96	

299. 學生：6 乘以 1 等於 6，「等於」（指等號）後面的答案才是 6 的倍數，這是 100 以內的 6 的倍數。

300. 老師：這些是 100 以內的 6 的倍數。有沒有人要問第三組問題？

301. 學生：沒有。

302. 老師：沒有嗎？你們找到的倍數都和第三組一樣嗎？檢查看看，有沒有少了，還是多了？有沒有？好，謝謝柏柏。謝謝。剛才第六組發生了一件事情，他們在寫答案的時候，他們就寫 6 的倍數是 1、2、3、4、5、6……列到 16，對不對？

303. 學生：不對。

304. 老師：不對，為什麼？1、2、3、4、5、6、7、8 一直到 16，那是什麼？

305. 學生：因數。

306. 學生：乘數。

307. 老師：這個是被乘數，這個是乘數，你們告訴我這個 1 是什麼意思？

308. 學生：6 的幾倍。



$6 \times 1 = 6$

309. 老師：1 代表的就是 6 的 1 倍，答案是 6，所以 6...

310. 學生：6 的 1 倍是 6。

311. 老師：6 什麼？我聽不清楚？

312. 學生：6 的 1 倍是 6。

313. 老師：很好，謝謝政隆。那我問你，6 是 6 的倍數嗎？

314. 學生：是，而且是最小的。

315. 老師：你怎麼知道？而且還要加上「最小的」，你們很厲害！為什麼，你怎麼知道的？

316. 學生：因為 6 乘以 1 是 6。

317. 老師：因為 6 乘以 1 是 6，6 的 1 倍是 6，所以我們可以說，6 也是 6 的倍數。

318. 學生：每一個整數是自己最大的因數，也是自己最小的倍數。

319. 老師：好像繞口令，誰要幫我再說一次，有沒有人已經糊裡糊塗了。好了，先講倍數好了。我們發現，6 是 6 的倍數，而且，有沒有比它更小的？

320. 學生：沒有。

321. 老師：哦！而且知道自己是自己最小的倍數。

322. 學生：也是最大的因數。

323. 老師：噢！上節課講到，自己也是自己的最大的因數，太厲害了，到這邊有沒有問題？

324. 學生：沒有。

325. 老師：好，請你們把小白板拿回去，謝謝。好，投完球了對不對？接下來我們玩趣味競賽。5 人成一組參加趣味競賽，2 組、3 組、4 組、5 組、6 組……時，各組的人數是多少？我這邊有一個表，你們看得懂它是寫什麼嗎？

組數	1	2	3	4	5	6	7
人數	5						

326. 學生：看得懂。5、1 得 5，5、2 得 10，5、3、15，5、4、20，5、5、25，5、6、30，5、7、35。

327. 老師：我把它寫在黑板上，好不好？然後你們告訴我，為什麼這樣子？5 乘以 1 等於 5，是不是？5 乘以 2 得 10，再來呢？

328. 學生：5、3、15。

329. 老師：再來呢？

330. 學生：5、4、20，5、5、25，5、6、30，5、7、35。

331. 老師：誰來幫我說說看這些算式的意義？5 是什麼？1 是什麼？誰要幫我說說看，好不好？政佐，好棒喲！你舉手了，來，你要不要站到台上？

332. 學生：不要。

333. 老師：不要，那老師幫你指。這個 5 是？ $5 \times 1 = 5$

334. 學生：是 5 個人。

335. 老師：什麼 5 個人啊？

336. 學生：1 組 5 個人。

337. 老師：哦！1 組 5 個人。這個 1 是什麼？ $5 \times 1 = 5$

338. 學生：1 是 1 組。好，這個 5 呢？ $5 \times 1 = 5$

339. 學生：1 組有 5 個人。

340. 老師：1 組有 5 個人，好，再來，這個呢？讓他說，這裡 1 組有 5 個人，這個 2 呢？ $5 \times 2 = 10$

341. 學生：兩組。

342. 老師：所以…

343. 學生：2 組有 10 個人。

344. 老師：謝謝政佐，再來我要找一個人幫我把這個表完成，誰要來幫我完成？

345. 學生：老師，用什麼筆呀？

346. 老師：我這邊有筆，不要擔心。來，小柏瑞，請來幫老師，來，這裡，這邊有筆。
好漂亮，他很用心的在寫。沒關係，他快寫完了。好，謝謝小柏瑞。給他
鼓鼓掌！

347. 老師：我要找人說說看這表上的數字是什麼意思好不好？陳歆。來。這個 1 是什麼？

348. 學生：1 組。

組數	1	2	3	4	5	6	7
人數	5	10	15	20	25	30	35

349. 老師：1 組，這個 5 呢？

350. 學生：一組有 5 個人。

351. 老師：謝謝陳歆，再來喲！沈譽，你剛才投球投得好厲害。這個 2 是什麼？沈譽，這個 2。

組數	2
人數	10

352. 學生：有兩組。

353. 老師：這個 10 呢？

354. 學生：2 組有 10 個人。

355. 老師：謝謝沈譽。還有，再來，剛才還有誰沒說話？澤儀，這個 3 是什麼？

356. 學生：3 組。

組數	3
人數	15

357. 老師：3 組，這個呢？15 是什麼？

358. 學生：3 組有 15 個人。

359. 老師：謝謝，再來，董安，換你。4 是什麼？

組數	4
人數	20

360. 學生：4 組。

361. 老師：4 組，20 呢？

362. 學生：4 組裡面有 20 個人。

363. 老師：謝謝。再來這邊，來，跳到這個 7，易穎，這個 7 是什麼？

組數	7
人數	35

364. 學生：7 組。

365. 老師：7 組，35 呢？

366. 學生：7 組裡面有 35 個人。

367. 老師：7 組總共有 35 個人。好，現在聽老師說，請你在這個表上面找一找，哪些數是 5 的倍數？知道的請舉手。好，請放下。迦康，你說說看，在這個表上哪些數是 5 的倍數？

組數	1	2	3	4	5	6	7
人數	5	10	15	20	25	30	35

368. 學生：5 到 35。

369. 老師：這邊的 5、10、15，還有呢？20、25、30、35 都是。還有組數的 5，對。你們發現哪一欄都是 5 的倍數呀？

370. 學生：人數。

371. 老師：哦！人數這一欄都會是 5 的倍數。再來，我要問你，仔細聽，5 是哪些數的因數？知道的舉手。好，柏柏你說。

372. 學生：1 跟 5。

373. 老師：1 和 5？

374. 學生：不對啦！可是 1 和 5 是 5 的因數呀，可是老師是問是哪些數的因數呀？

375. 老師：好，我把它寫下來。5 是哪些數的因數？

376. 學生：很多呀！

377. 老師：我說是在表上。

378. 學生：5、10、15、20、25、30、35。

379. 老師：你可不可以再說一次？

380. 學生：5、10、15、20、25、30、35，5 都是這些數的因數。

381. 老師：謝謝，你發現什麼？剛才其實冠廷已經講了，你們有沒有聽到？再想想看，剛才老師第一個問題是什麼？哪些數是 5 的倍數？我第二個問的是什麼

？5 是哪些數的因數？你發現你的答案都一樣。可是我問的題目不一樣。你發現什麼？除了這兩位，還有沒有人發現？有沒有人要說說看？承翰先說。

382. 學生：只要是 5 的倍數，都是 5 的因數。

383. 老師：只要是 5 的倍數…

384. 學生：它的因數都會有 5。

385. 老師：這些數的因數裡面都會有 5，聽懂了嗎？聽懂承翰說什麼嗎？有沒有人要幫他說一次？還是你不懂的，可以舉手。政隆，請你說。

386. 學生：只要是 5 的倍數，5 都是它的因數。

387. 老師：只要是 5 的倍數，5 都會是它們的因數。我們來舉個例子好不好，再舉個例子，你看 10，10 是誰的倍數？

388. 學生：5。

389. 老師：5 會不會是它的因數？

390. 學生：會。

391. 老師：為什麼？你怎麼知道的？5 是不是 10 的因數？

392. 學生：是。

393. 老師：你怎麼知道的？記得我們剛才講過。

394. 學生：因為 10 是 5 的倍數。

395. 老師：因為 10 是 5 的倍數。再試一個，15 是不是 5 的倍數？

396. 學生：是。

397. 老師：5 會不會是 15 的因數？

398. 學生：會。

399. 老師：會。有沒有問題？沒有問題。再來請你們玩一個遊戲，請你們把老師發給你們的百數表拿出來，一組一張，先拿出一張。你發現什麼？你現在看到

百數表，你可不可以告訴老師上面有些什麼？要不要說說看？請舉手。冠廷。

400. 學生：有數字。

401. 老師：有數字，好，還有呢？

402. 學生：一大堆格子。

403. 老師：還有呢？等一下，請尊重發言的小朋友。凱昀說上面的數都是整數，對不對？

404. 學生：對。

405. 老師：還有呢？好，柏柏，請你說。

406. 學生：1 的下面，十位數後面都會是 1，2 後面都會是 2，3 後面都會是 3，4 後面都會是 4，5 後面都是 5，6 後面都是 6，7 後面都是 7……

407. 老師：這是哪一位數？

408. 學生：個位。

409. 老師：個位數都會一樣，還有呢？你還發現什麼？好，承翰。還有呢？

410. 學生：下面有一大堆空白。

411. 老師：謝謝，還有呢？

412. 學生：所有的數都是 1 的倍數。

413. 老師：嗯！所有的數都是 1 的倍數。還有呢，它的範圍？它從哪裡到哪裡？

414. 學生：1 到 100。

415. 老師：好，現在老師要請你在百數表上找出所有 2 的倍數，請你把它圈起來。

416. 老師：好，請看黑板。第五組好了嗎？好了，請看老師。好，這個是跟第六組借來的，好，你們做的跟他們一樣嗎？

第六組圖示：

1	②	3	④	5	⑥	7	⑧	9	⑩
11	⑫	13	⑭	15	⑮	17	⑯	19	⑰
21	⑳	23	㉑	25	㉒	27	㉓	29	㉔
31	㉕	33	㉖	35	㉗	37	㉘	39	㉙
41	㉚	43	㉛	45	㉜	47	㉝	49	㉞
51	㉟	53	㊱	55	㊲	57	㊳	59	㊴
61	㊵	63	㊶	65	㊷	67	㊸	69	㊹
71	㊺	73	㊻	75	㊼	77	㊽	79	㊾
81	㊿	83	㊿	85	㊿	87	㊿	89	㊿
91	㊿	93	㊿	95	㊿	97	㊿	99	㊿

417. 學生：不一樣，顏色不一樣。

418. 老師：顏色是選的筆的關係。我現在要問你，你發現什麼？你圈出來的數有哪些？它們有共通的地方嗎？什麼特殊的地方？你要不要告訴老師？鄭姣，試看看。

419. 學生：都是雙數。

420. 老師：都是雙數，什麼叫雙數？「雙數」我們現在都叫它偶數。鄭姣，你要不要說說看，什麼是偶數？鄭姣，你圈出了什麼？你們這組圈出了什麼？你們可以看你們的百數表，圈出哪些數？誰要幫鄭姣說？瀚穎。

421. 學生：2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、……

422. 老師：…，一直到 100。

423. 學生：老師說錯了，還有很多。

424. 老師：我說是在這張表上。我們先討論偶數，我還沒有說完。什麼叫偶數呀？

425. 學生：可以被 2 整除的數。

426. 老師：哦！政隆，你再說一次。可以被 2 整除的數就叫偶數。

427. 學生：可是小數的話就不一定。

428. 老師：我們討論都要是整數的數，才能討論喔，別忘了。對，我們討論，一定要是整數才能討論因數和倍數，一定要限制在整數裡面才能夠討論，不要忘記了。好，除了你發現圈出來都是偶數之外，還有什麼？麗安。

429. 學生：2、4、6、8、10，然後它下面，比如說 12，2 的話，只要有 2 的這些都可以圈。

430. 老師：個位數是 2、4、6、8、10、0。

431. 學生：可是 0 又不能被 2 整除。

432. 老師：他們兩個在那邊討論起來了。你們有沒有聽到他問的？

433. 學生：有，0 不能被 2 整除。

434. 學生：我是說 10。

435. 老師：0 是個很有趣的數，但是我們在小學的時候呢，不去討論它，不過以後你會知道，等到國中去問問你的國中老師，我們留到國中再來學，我們現在並不討論零，但是 0 是很有趣的。你發現只要個位數是 2、4、6、8、0 都會被圈起來，還有呢，是偶數的也會被圈起來。還有沒有別的發現？

436. 學生：都是一條一條的。

437. 老師：哦！它的圖案很規則，都會是一條一條的。每隔一行都會被圈起來。

438. 學生：老師，只要它排的不一樣，跳著排就會不一樣。

439. 老師：對，沒有錯，但是百數表都是這樣排列的，當然，如果數字更動，圖案當然就會不一樣。要不要再試一個？請你找出所有 3 的倍數。

440. 老師：停，暫停，不管你做到哪裡，請看黑板。第四組。好，我們來看一下這一組做的，好，你發現什麼？好，家植。

441. 學生：都是一條一條的。

442. 老師：哦！都會是一條、一條、一條的斜線，也很有規律，看起來還滿漂亮的，對不對？還有呢，你還發現什麼？

443. 學生：一條一條斜線中各差 3。

444. 老師：各差 3 什麼意思？你要不要說說看？

445. 學生：第一條斜線和第二條斜線差 3，第二條斜線和第三條斜線差 3。

446. 老師：政隆，你的意思是說 6 減 3 會等於 3，是這個意思嗎？那這個 9 減 6 等於 3。等於 6 啊？要思考再回答。好，那我跳遠一點，66 減 63？

447. 學生：3。

第四組圖示：

1	2	③	4	5	⑥	7	8	⑨	10
11	⑫	13	14	⑮	16	17	⑱	19	20
⑳	22	23	㉑	25	26	㉒	28	29	㉓
31	32	㉔	34	35	㉖	37	38	㉘	40
41	㉙	43	44	㉛	46	47	㉝	49	50
㉞	52	53	㉟	55	56	㊱	58	59	㊲
61	62	㊳	64	65	㊴	67	68	㊵	70
71	㊶	73	74	㊸	76	77	㊹	79	80
㊺	82	83	㊼	85	86	㊾	88	89	㊿
91	92	㊿	94	95	㊿	97	98	㊿	100

448. 老師：等於 3，好，60 減 57？

449. 學生：等於 3。

450. 老師：哦，你好棒喲！政隆，你發現兩個數都會差 3，還有呢，你還發現什麼？
恆奎。

451. 學生：百數表上呈現斜線。

452. 老師：這個我們剛才說過了。還有沒有呢？最後一個，宜謙。

453. 學生：圈起來的數中，把兩個位置相加一定可以被 3 除盡。

454. 老師：哦！我們來舉個例子。宜謙說，如果有兩位數，比如說 15，1 加 5 等於 6，
6 可不可以被 3 整除？可不可以？

455. 學生：可以。

456. 老師：再舉一個例，96，9 加 6 等於？

457. 學生：15。

458. 老師：15，可不可以被 3 整除？

459. 學生：可以！

460. 老師：好神奇喲！好，我們再舉一個例，最後一個，33，3 加 3 等於 6，6 可不可以
被 3 整除？

461. 學生：可以。

462. 老師：可以，你再試試看，是不是每一個數都是把兩個位置…，3 呢？3 就是 3，
3 可不可以被 3 整除？

463. 學生：可以。

464. 老師：可以呀，很有趣，對不對？

465. 學生：只要找出十位的話，然後再把個位加在一起，如果可以被 3 整除，那麼就
可以…

466. 老師：就可以被 3 整除，謝謝政隆的補充。好，冠廷。

467. 學生：每一個橫排和直排，兩個圈起來的數都會差兩個。

468. 老師：橫排和直排怎麼樣？喔！你是說會隔兩個圈一次，隔兩個圈一次，你是這個意思嗎？

469. 學生：直的也是！

470. 老師：直的也是隔兩個圈一次、隔兩個圈一次。哇！你們太厲害了，發現這麼多！現在各組還有一張空白的百數表，對不對？待會兒要請你們利用下課的時間，請你們找出 5、還有 9 的倍數。利用下課做，但是我們現在就上到這邊，下課。

471. 學生：謝謝老師。

參、教學說明

一、教學活動設計

本活動的教學目標我設定為五個：第一個是認識因數的意義，第二個是了解整除和因數之間的關係，第三個是認識倍數的意義，第四個是了解因數和倍數之間的關係，最後一個目標是希望他們能夠認識簡單的倍數識別法。本教學共分為五個活動，第一個活動是讓小朋友想一想，運動會時，我們運動員進場的時候要以鈴噐為裝扮，總共有 16 個鈴噐，要串成一串一串的，可以有哪幾種串法？這個活動是希望給小朋友一個總量，然後讓他們去分析裡面有哪些單位量。第二個活動是在運動員裝扮之後呢，希望小朋友能夠幫老師想想看，運動員進場的排隊方式。總共有 27 個小朋友，要排成長方形的隊伍，每一排的人數都要一樣多，問小朋友有哪幾種排法？這個問題是希望透過矩陣的排列問題，在數的的情境之下引入因數的概念，再透過整除的概念，引入因數的意義。活動三是小朋友舉行投籃比賽的問題，昆穎投進的分數是 6 分，澤儀的得分是昆穎的 3 倍，沈譽的得分是昆穎的 4 倍，分別問這兩個小朋友的實際得分是多少？這個活動是希望透過「某數的整數倍」這樣子的一個解題活動，來介紹倍數的意義，然後再透過討論，希望讓小朋友能夠知道，某一數的倍數個數是無限多。活動四是運

動會趣味競賽的問題：有 5 個人為一組參加趣味競賽，然後再問小朋友兩組的時候是多少人？3 組的時候是多少人？這一布題的處理方式比較不同的是在於，我運用了一個表格讓小朋友來填入答案，即各組的總人數會是多少？透過這個活動，希望能夠讓小朋友把某一數的倍數整理在表格中，而且讓小朋友察覺因數和倍數之間的關係，也就是說某數將會是它因數的倍數。最後一個活動並非運動會的情境，而是純粹數的一個活動。利用百數表讓小朋友找出 2、3 的倍數，再請他們找出規律，以上是本教學五個活動的內容。

這個教學活動，學生的先備能力包括數與計算的能力，例如學生在之前已學過了乘法和除法的計算，此外，教學活動的進行是以小組討論方式來解題，所以討論文化的建立、小組的分工合作模式的建立也是相當重要的。

二、學生的表現

在活動一，有 16 個鈴鐺要串成一串一串的。在小朋友的解題過程當中發現一個滿有趣的紀錄，小朋友會寫 16 除以 1 等於 16，16 除以 2 等於 8，一

(1) $16 \div 1 = 16$	(2) $16 \div 2 = 8$
(3) $16 \div 4 = 4$	(4) $16 \div 8 = 2$
(5) $16 \div 16 = 1$ (第四組)	

直到 16 除以 16 等於 1。在他們發表的時候，他們會把這個 1 當做是一串，也就是說 16 個鈴鐺串成一串，這個 16 是指一串有 16 個鈴鐺。原本設計這個布題時，是希望小朋友能夠把 1 當作是 1 個鈴鐺，而這個 16 應該是指 16 串。在透過小朋友的討論之後，小朋友都認為這兩種方式只要說得通，也就都合理。活動二是透過整除的概念，向小朋友介紹因數的意義，之後的一個問題是問小朋友：24 所有的

第五組的做法
$24 = 1 \times 24$
$24 = 2 \times 12$
$24 = 3 \times 8$
$24 = 4 \times 6$
$24 = 6 \times 4$
$24 = 8 \times 3$
$24 = 12 \times 2$
$24 = 24 \times 1$

因數是哪些？結果有一組小朋友的解題過程是像這樣子的(第五組)。他們是用乘法算式來表示因數，我們都很好奇問他用乘法怎麼知道呢？是不是 24 可以被 1 整除？24 是不是可以被 2 整除？結果這一組的小朋友回答是：他們知道乘除互逆的關係。我在

這邊要特別說明的是，這些小朋友之前已經學過了乘除互逆的概念，由於並非每個小朋友都能夠知道，乘除互逆可以運用在這個題目的解題，透過這一組小朋友的提醒，他們發現原來這樣子的解題方式也是合理的，這是讓我很意外、很有收穫的地方。最後一個活動是一個純粹數的活動，我利用百數表讓小朋友找出 2 還有 3 的倍數，我發現他們做得很有興趣，做出來的成果也很好，透過討論，小朋友說出很多有關於 2 和 3 的倍數規則。九年一貫的課程精神非常強調小朋友歸納的能力，所以我覺得這個活動讓小朋友收穫許多。

三、老師的感想與分享

剛才提到的是小朋友在課堂上表現的部分。接下來我想談的是，我在整個教學活動進行完之後的一些想法、看法。首先提出一些我覺得很不錯的部分：我覺得學生的表現出乎我意料之外，他們常常是跑在我前面，許多我本來沒有想到要提出的概念，都是由小朋友自己發現、自己提出的。比如說：1 是每個整數最小的因數，這個原來並不在我的活動設計中，但是小朋友就自己說出來，這讓我覺得又驚又喜，讓我覺得他們很棒。另外我覺得很不錯的部分是：布題能夠引起學生的興趣，所以小朋友即使進行兩節教學活動，學習的興緻還是很高昂，這兩個部分是我覺得很不錯的地方。接下要談的是我覺得可以改進的地方，今天兩節的教學活動小朋友都表現得非常好，倒是老師自己太過緊張。此外，與因數和倍數有關的概念非常多，教學時間的運用也是另一個棘手的問題，所以各位教師可以在活動設計時，斟酌各班的實際狀況，增加或刪減一些教學活動。

最後是我想跟各位伙伴分享的是我們班上小組分工的狀況，今天所進行的兩節教學活動都是以小組討論的方式來解題，本班的小組分工是從開學就開始慢慢建立他們的討論文化，一個月會更動小組成員一次，今天的小組是從 11 月初就開始成形的，所以到現在他們已經相處了一個月，他們的默契跟討論的方式也都很上軌道，這是今天

教學可以這麼順暢的重要因素之一。另外，在因數和倍數這樣的教學活動結束之後，也許教師可以提出「質數」的概念，雖然「質數」並不在我們現行的課程標準中，但它卻是很多數學家長久以來一直非常感興趣的概念，小朋友在很多的科普雜誌、書籍或是文章上面也常常可以看到相關的內容，因此，讓小朋友接觸這樣子的概念，或可增加小朋友學習數學的興趣。

肆、教學後的省思

本活動先由「組成總量的單位量」問題情境，作為探討因數意義的起點，是考量整數概念對國小學生而言相當抽象，若直接透過「是否能夠整除」來討論因數的意義，並不太恰當。在學生能掌握「總量由哪些單位量組成」的意義，並能使用除法算式記錄解題過程，接著就可以討論「整除」，以引入因數的概念。

和因數概念不同的是，五年級學生已經具有許多「倍的問題」的解題經驗，亦經常使用「倍」的語言，所以本教學活動設計便直接引入倍數的意義。雖然學生在生活經驗中，經常使用「倍」的語言，但要特別注意的是，在國小階段討論「甲是乙的倍數」時，甲和乙都必須是「正整數」，且甲除以乙的商數也要是「正整數」，且餘數為零；而日常生活中習慣用的「甲是乙的幾倍」，係指「數量上的關係」，甲和乙並不一定要是整數，甲和乙的關係也不一定要是整數倍。

國小階段討論因數和倍數時，並不宜包含「零」的概念。0 相當抽象，而且國小學生的生活經驗中不易找到「任何正整數都可以作為描述 0 的單位量」的例子，所以學生不太容易接受「0 是任何正整數的倍數」這樣的概念。然而，在本教學實錄中卻有學生提出 0 和倍數的關係，可見學生對於 0 充滿好奇；建議教師在教學時淡化處理，因為此階段的因、倍數教學，不討論「0 是否為某數的倍數」，也不討論「0 是否為偶數」這樣的問題。

公因數和公倍數

壹、教學活動設計

一、教學年級：五年級上學期

二、教 學 者：台北市仁愛國小 趙曉燕 老師

三、教學目標：

1. 認識公因數的意義和求法。
2. 認識公倍數的意義和求法。

四、活動目標：

【第一節】認識公因數的意義和求法。

1. 找出兩個整數的相同因數，進行「公因數」的命名。
2. 能分別列出兩個數的所有因數，並找出其公因數。

【第二節】認識公倍數的意義和求法。

1. 從兩個整數的倍數中，察覺相同的倍數，進行「公倍數」的命名。
2. 依序列出兩個不同整數的倍數，從中求兩數的「公倍數」。

五、教學概要說明：

「公因數」和「公倍數」都是指兩個（或以上）正整數之間的關係。如果一個數同時是兩個或兩個以上正整數的共同因數，則此數為它們的「公因數」；如果一個數同時是兩個正整數的共同倍數，則稱此數為它們的「公倍數」。

這個教學活動的設計，是透過解決各種生活情境的問題，來介紹「公因數」和「公倍數」。

在第一節課，透過下列生活情境問題，如：分裝糖果、作水果拼盤等情境，幫助學童逐步形成公因數的概念與求法。

在求兩數的公因數時，一般學生有兩種求法：其一是先分別求出兩數的所有

因數，再從其中找出公因數；另外，也可以先找較小的數的所有因數，逐一去除大的數，看看是否除得盡，如此，可以容易的找出它們的公因數。但本活動限制學童在開始學習公因數意義時，使用先窮盡兩數量由哪些因數組成，再尋找都能組成兩數量的共同因數的方式解題，當學童能掌握公因數的意義後，才開始接受其他的解題策略。

在國小階段，「短除法」、「輾轉相除法」等方法，學生不易理解，因此不宜出現。

第二節課介紹「公倍數」的意義與求法。也透過各種生活情境問題：如彩虹噴泉中紅、藍顏色的投射燈何時會同時亮起？以及在跑道上，找出同時出現旗子和糾察隊員的地點，並透過拍手、踏腳遊戲等，幫助學童逐步形成公倍數的概念。

在公倍數的求法中，因為正整數的倍數有無限多個，教師只要引導學童在某一數字範圍內即可。在求兩數在某一數量範圍內的公倍數時，學童大都會採用先找出個別正整數的所有倍數，再找出共同的倍數，當然，也可以逐一算出大的數的1倍、2倍、3倍...，並逐一複驗是否為另一數的倍數，如果是，那就是這兩個數的最小公倍數。

根據課程綱要，最大公因數與最小公倍數並不是國小課程教材的範圍，但從情境中，透過比較活動學習，這些都是學童能夠掌握並理解其意義的。但並不期望學童能使用其概念來解決問題。

六、教學活動設計：

【第一節】公因數的意義與求法

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 教師布題	1. 聖誕節快到了， <u>彥廷</u> 準備了 12 顆水果糖，要裝成一袋一袋的，每袋	• 教師提問，學生討論並回答。	• 能明白題意，並進行解題。

• 學生解題並發表	的水果糖要一樣多，而且要全部分完。有哪些分法？用除法算式記看。 2. 說說看，你是怎麼做的？	• 學生已學過因數的意義與求法。 (1) 學生的可能記法： $12 \div 1 = 12$ $12 \div 2 = 6$ $12 \div 3 = 4$ $12 \div 4 = 3$ $12 \div 6 = 2$ $12 \div 12 = 1$ - 說明： 1 顆 1 袋，可分成 12 袋。 2 顆 1 袋，可分成 6 袋。 3 顆 1 袋，可分成 4 袋。 4 顆 1 袋，可分成 3 袋。 6 顆 1 袋，可分成 2 袋。 12 顆 1 袋，可分成 1 袋。 (2) 其他。	• 會說明分法及每袋的水果糖數可以是 1、2、3、4、6、12 顆。
• 教師提問—12 有哪些因數	3. 12 顆水果糖，可以分成 1 顆、2 顆、3 顆、4 顆、6 顆和 12 顆一袋。那麼，1、2、3、4、6、12 是 12 的「因數」嗎？為什麼？	• 複習因數的意義。 • 學生的可能說法： 因為 12 可以被 1、2、3、4、6、12 整除，所以 1、2、3、4、6、12 都是 12 的因數。	• 能回答這些數都是 12 的因數，並說明理由。
• 教師布題	4. 彥廷有牛奶糖 18 顆，要裝成一袋一袋的，每袋的牛奶糖要一樣多，而且要全部分完。有哪些分法？用除法算式記看。		• 能明白題意，並進行解題。

• 學生操作解題並發表	5. 說說看，你是怎麼做的？	• 學生的可能記法： $(1) 18 \div 1 = 18$ $18 \div 2 = 9$ $18 \div 3 = 6$ $18 \div 6 = 3$ $18 \div 9 = 2$ $18 \div 18 = 1$ - 說明： 1 顆 1 袋，可分成 18 袋。 2 顆 1 袋，可分成 9 袋。 3 顆 1 袋，可分成 6 袋。 6 顆 1 袋，可分成 3 袋。 9 顆 1 袋，可分成 2 袋。 18 顆 1 袋，可分成 1 袋。 (2) 其他。	• 會說明分法及每袋的牛奶糖數可以是 1、2、3、6、9、18 顆。
• 教師提問—18 有哪些因數	6. 18 顆牛奶糖，可以分成 1 顆、2 顆、3 顆、6 顆、9 顆和 18 顆一袋。那麼，1、2、3、6、9、18 是 18 的「因數」嗎？為什麼？	• 學生的可能說法： 因為 18 可以被 1、2、3、6、9、18 整除，所以 1、2、3、6、9、18 都是 18 的因數。	• 能回答這些數都是 18 的因數，並說明理由。
• 教師提問—找出是 12 也是 18 的因數	7. 找找看，幾個糖果分裝成一袋時，水果糖和牛奶糖都可以剛好分完？	• 透過情境，認識「公因數」。 • 學生的可能說法： 12 顆水果糖可以分成 1 顆、2 顆、3 顆、4 顆、6 顆和 12 顆一袋。18 顆牛奶糖可以分成 1 顆、2 顆、3 顆、6 顆、9 顆和 18 顆一袋。 當水果糖和牛奶糖是 1 顆、2 顆、3 顆或 6 顆一袋時，都可以剛好分完。	• 能回答水果糖和牛奶糖是 1 顆、2 顆、3 顆或 6 顆一袋時，都可以剛好分完。

教師宣告—認識公因數	8. 像「1、2、3、6」這4個數，是12的因數，也是18的因數，我們說1、2、3、6是12和18的「公因數」。	教師揭示「公因數」字卡。(一個數同時是兩個或兩個以上正整數的共同因數，則此數為它們的「公因數」)	認識「公因數」的用語。
教師布題—找出20和30的公因數	9. 找找看，20和30的「公因數」有哪些？	教師以數字布題，讓學生熟悉「公因數」的意義與求法。	能明白題意，並進行解題。
學生解題並回答	10. 說說看，你是怎麼做的？	- 學生說明解題過程。 - 學生的可能記法： $20 \div 1 = 20$ $30 \div 1 = 30$ $20 \div 2 = 10$ $30 \div 2 = 15$ $20 \div 4 = 5$ $30 \div 3 = 10$ $20 \div 5 = 4$ $30 \div 5 = 6$ $20 \div 10 = 2$ $30 \div 6 = 5$ $20 \div 20 = 1$ $30 \div 10 = 3$ $30 \div 15 = 2$ $30 \div 30 = 1$ 20的因數有1、2、4、5、10、20；30的因數有1、2、3、5、6、10、15、30。 所以20和30的公因數有1、2、5、10。	能回答20和30的「公因數」有1、2、5、10。因為它們是20的因數，也是30的因數。
教師布題	【重新布題】 11. 媽媽想用16個蓮霧和24個草莓作水果拼盤，每盤分到的蓮霧都要一樣多，每盤分到的草莓也一樣多，可以平分裝在幾個盤子裡？用除法算式把做法記下來。	- 教師以生活情境布題。此題所求之公因數為水果拼盤的「盤數」(單位數)，不是裝的水果數量。與前面求每袋的糖果數量(單位量)有不同的解題意義。 - 學生分組，每組準備一	能明白題意，並進行解題。

• 學生討論解題並發表	12.說說看，你是怎麼做的？	些花片（或積木），學生進行解題時如有困難，可操作花片，並記錄解題過程。 • 學生說明解題過程。 • 學生的可能記法： $\begin{array}{ll} 16 \div 1 = 16 & 24 \div 1 = 24 \\ 16 \div 2 = 8 & 24 \div 2 = 12 \\ 16 \div 4 = 4 & 24 \div 3 = 8 \\ 16 \div 8 = 2 & 24 \div 4 = 6 \\ 16 \div 16 = 1 & 24 \div 6 = 4 \\ & 24 \div 8 = 3 \\ & 24 \div 12 = 2 \\ & 24 \div 24 = 1 \end{array}$ • 可能的說法： (1) 16 個蓮霧可以分別裝在 1、2、4、8、16 個盤子裡；24 個草莓可以分別裝在 1、2、3、4、6、8、12、24 個盤子裡。所以可以平分裝在 1、2、4、8 個盤子裡。 (2) 16 的因數有 1、2、4、8、16。24 的因數有 1、2、3、4、6、8、12、24。16 和 24 的公因數有 1、2、4、8。所以可以平分裝在 1、2、4、8 個盤子裡。 (3) 其他。 學生根據前面的操作與討論回答，並說明理由。若學生答案不完整時，教師再追問。	• 能回答可以平分裝在 1、2、4、8 個盤子裡。
--------------------	-----------------------	--	----------------------------------

教師提問—經驗最大公因數	13. 說說看，最多可以裝在幾個盤子裡？（想想看，每個盤子裡有幾個蓮霧？幾個草莓呢？） 【重新布題，因時間不足實際教學時並未進行】	- 透過情境，希望學生察覺到能夠都剛好分完的盤數，就是它們的公因數。 - 此時並不介紹「最大公因數」的名詞，但讓學生經驗「最大公因數」是哪一個數。	能回答是 8 個盤子。
教師布題—從量的情境中，找出兩數的公因數	14. 把長 12 公分、寬 8 公分的長方形色紙，分成一些大小一樣的小正方形（正方形邊長的公分數是整數），要全部分完，有哪些分法？	- 教師發給學生 12 公分 $\times$ 8 公分的長方形紙張，供學生解題用。 - 教師須提醒學生分出來的小正方形邊長必須是整公分，且要全部分完。	能明白題意，並進行解題。
學生討論解題並發表	15. 說說看，你是怎麼做的？小正方形邊長可以是幾公分？	- 學生說明解題過程。 - 學生的可能解法： (1) 12 的因數有 1、2、3、4、6、12。8 的因數有 1、2、4、8。 12 和 8 的公因數是 1、2、4。 (2) 其他。	能說明解法，及小正方形的邊長可以是 1、2、4 公分。
教師提問，學生回答	16. 有沒有不同的分法？		
教師提問—經驗最大公因數	17. 說說看，小正方形的邊長和長方形色紙的長、寬有什麼關係？	學生根據解題結果，說明小正方形的邊長是長方形色紙的長、寬的公因數。	能回答小正方形的邊長就是長方形色紙長、寬的公因數

• 教師提問—經驗最大公因數	18.說說看，分出來的最大的正方形邊長是幾公分？它和長方形色紙的長、寬有什麼關係？（可以分成幾個小正方形？）	• 此時並不介紹「最大公因數」的名詞，但讓學生經驗「最大公因數」是哪一個數。	• 能回答是4公分。它是長方形色紙長、寬的公因數中最大的。
----------------	--	--	-------------------------------

【第一節課結束】

【第二節】公倍數的意義與求法

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 教師布題	1. 河濱公園有一座彩虹噴泉，那裡有許多好看的投射燈。每天的燈光秀從下午 6 時開始，所有燈都亮一次，接著，紅色的投射燈每 3 秒亮一次，藍色的投射燈每 5 秒亮一次。說說看，兩燈下一次同時亮，是什麼時候？		• 能明白題意，並進行解題。
• 學生討論解題並發表	2. 說說看，你是怎麼做的？	• 學生說明解題過程。 • 學生的可能記法： $5 \times 1 = 5$ $5 \times 2 = 10$ $5 \times 3 = 15$ $5 \times 4 = 20$ $5 \times 5 = 25$ $3 \times 1 = 3$ $3 \times 2 = 6$ $3 \times 3 = 9$ $3 \times 4 = 12$ $3 \times 5 = 15$ • 學生可能的說法： (1) 先分別找出若干個 5 的倍數和 3 的倍數，再找出 5 和 3	• 能回答是 6 時 15 秒。

• 教師宣告 ◎ 認識「公倍數」的用語 • 教師布題 ◎ 在百數表上找出 8 和 12 的公倍數 • 教師布題 ◎ 在離散量的情境中，找出兩數的公倍數	3. 15 是 5 的倍數嗎？15 是 3 的倍數嗎？15 是 5 和 3 的共同倍數，所以 15 是 5 和 3 的一個「公倍數」。 4. 找找看，還有哪些數也是 5 和 3 的「公倍數」？ 【重新布題】 5. 找找看，在 100 以內，8 和 12 的「公倍數」有哪些？ 6. 說說看，你是怎麼做的？ 【重新布題】 7. 長 100 公尺的跑道，從起點開始，每隔 4 公尺插一支旗子，每隔 10 公尺站一位糾察隊員。起點有旗子和糾察隊員，想一想，下一個同時有旗子和糾察隊員	的公倍數。 (2) 先找出 5 的倍數若干個，再檢查是否也是 3 的倍數。 (3) 先找出 3 的倍數若干個，再檢查是否也是 5 的倍數。 (4) 其他。 • 教師介紹「公倍數」的用語。 • 每組一張百數表，讓學生利用百數表找找看。 • 學生在百數表上找出 8 和 12 的倍數，再找出它們的公倍數。 • 教師口述布題。學生分組進行解題。	• 認識「公倍數」的用語。 • 能說出還有 30、45、60 等數。 • 能回答有 24、48、72、96。 • 能明白題意，並進行解題。
--	---	---	---

• 學生討論解題並發表	的地點，距離起點有幾公尺？ 8. 說說看，你怎麼知道的？ 9. 還有哪些地點，也同時出現旗子和糾察隊員？距離起點各是幾公尺？	• 學生說明解題過程。 • 學生的可能記法： 插一支旗子的地方是 4 的倍數，在 4、8、12、…、96、100 公尺的位置。 站一位糾察隊員的地方是 10 的倍數，在 10、20、30、…、90、100 公尺的位置。 所以從起點之後，下一個有旗子和糾察隊員的位置距起點有 20 公尺。 • 可能的說法： (1) 先分別找出 4 的倍數和 10 的倍數若干個，再找出 4 和 10 的公倍數。 (2) 先找出 4 的倍數，再檢查是否也是 10 的倍數。 (3) 先找出 10 的倍數，再檢查是否也是 4 的倍數。 (4) 其他。 • 教師口述布題。 • 學生分根據剛才的解題解果說明。	• 能回答是 20 公尺，並說明理由。 • 能回答距離起點 40 公尺、60 公尺、80 公尺、100 公尺遠的地點。
--------------------	---	---	---

◎進行倍數與公倍數的遊戲	【重新布題】 10.我們來玩個遊戲：老師從 1 開始，依序報數，小朋友分成兩組，第一組聽到 2 的倍數的數字時，就拍手一下；第二組聽到 5 的倍數的數字時，就踏腳一下。好，開始囉！ 11.說說看，聽到哪些數字時第一組會拍手？ 12.說說看，聽到哪些數字時第二組會踏腳？ 13.那麼，聽到哪些數字時，第一組會拍手，第二組會踏腳？這些數字與 2 和 5 有什麼關係？	• 老師所報的數詞序列，只要 1 到 20 即可，速度不可太快。	• 能明白遊戲規則。 • 回答有 2、4、6、…、18、20。 • 能回答有 5、10、15、20。 • 能回答有 10、20，它們是 2 和 5 的公倍數。
---------------------	---	---	---

貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：聖誕節快到了，對不對？
2. 學生：對！
3. 老師：什麼時候呢？
4. 學生：十二月二十五日。
5. 老師：喜歡過聖誕節嗎？
6. 學生：喜歡！

7. 老師：看看剛剛誰的嘴巴張得最大、最喜歡的樣子？
8. 老師：為什麼喜歡呢？
9. 學生：因為過聖誕節的時候，爸爸媽媽會送禮物給我。
10. 老師：哦！聖誕節會收到聖誕禮物。她說是爸爸媽媽送的耶！有沒有人是聖誕老公公送的？沒有啊！不是都是聖誕老公公送禮物嗎？淇媛，你呢？
11. 學生：在那個時候，爸爸晚上抬一輛腳踏車，被我發現了。
12. 老師：爸爸當聖誕老公公，是不是？你呢？
13. 學生：是我阿公扮聖誕老公公。
14. 老師：真是幸福！好，我們看喔！聖誕節快到了，彥廷準備了 12 顆糖果。是什麼糖呢？
15. 學生：水果糖。
16. 老師：他要把水果糖裝成一袋一袋的，每袋的水果糖要一樣多，而且要全部分完。想想看，有哪些分法？請小朋友用除法的算式記下來。
- 題目：耶誕節快到了，彥亭準備了 12 顆水果糖，要裝成一袋一袋的，每袋的水果糖要一樣多，而且要全部分完，有哪些分法？用除法算式記記看。
17. 老師：想想看，要用除法的算式。他一袋裡面要裝幾顆糖果，才可以完全分完？
18. 老師：彥廷很乖，速度很快。每一塊白板都要寫得很整齊，別人才會看得清楚。已經做好的請舉手，要找到結果哦！
19. 老師：到底他可以怎麼分？哪一個小朋友可以說說看？鳴駿，你拿白板到前面來說給我們聽好不好？
- 鳴駿的作法：
20. 學生：彥廷可以把十二顆水果糖，每一顆裝一袋可以裝十二袋。
21. 老師：小朋友看到了沒？
22. 學生：看到了。
23. 老師：他第一個算式記了什麼？

$$\begin{aligned}12 \div 1 &= 12 \\12 \div 2 &= 6 \\12 \div 3 &= 4 \\12 \div 4 &= 3 \\12 \div 6 &= 2 \\12 \div 12 &= 1\end{aligned}$$

24. 學生：十二除以一等於十二。
25. 老師：你說一顆裝一袋的「一顆」在哪裡？
26. 學生：這邊的「1」代表一顆裝一袋。
27. 老師：可以裝幾袋呢？
28. 學生：十二袋。
29. 老師：再來就是二顆裝一袋，可以裝六袋。繼續說。
30. 學生：三顆裝一袋的話可以裝四袋，下面的就是四顆裝一袋可以裝三袋，六顆裝一袋可以裝二袋，最後十二顆裝一袋可以裝一袋。
31. 老師：好，可不可以綜合的說說看，你有哪些分法？可以幾顆裝成一袋呢？
32. 學生：可以有一顆、二顆、三顆、四顆、六顆、十二顆裝成一袋。
33. 老師：都可以完全分完嗎？
34. 學生：可以。
35. 老師：他有沒有說得很清楚？
36. 學生：有。
37. 老師：謝謝你。我們給他拍拍手。有沒有小朋友要補充？有沒有人做法跟他不一樣，或者說法不同？好，恩莉說說看。
38. 學生：剛剛鳴駿是說一顆分成一袋，可以分成十二袋，然而，我是把它分成一袋，每袋有十二顆；然後分成兩袋，每袋有六顆；分三袋，每袋裡面有四顆；分四袋，每袋裡面有三顆；分六袋，每袋裡面有二顆；分十二袋，每袋裡面有一顆。所以就是可以分成一袋、二袋、三袋、四袋、六袋、十二袋。
- 恩莉的作法：

$$12 \div 1 = 12$$
$$12 \div 2 = 6$$
$$12 \div 3 = 4$$
$$12 \div 4 = 3$$
$$12 \div 6 = 2$$
$$12 \div 12 = 1$$

A：可分成 1、2、3、4、6、12 袋。
39. 老師：好不好？誰發現她的分法跟剛剛鳴駿有什麼不一樣？恩莉認為不一樣，你

有沒有發現不一樣的地方在哪裡？好，品均。

40. 學生：恩莉是說她的十二除以一，「一」是表示裝成一袋，一袋就有 12 顆。一、二、三、四、六、十二，都是說如果裝成「一袋」的話。鳴駿是說一顆裝成一袋，可以裝 12 袋；恩莉是說裝成一袋，一袋有 12 顆。他們的意思不一樣。
41. 老師：對不對？
42. 學生：對！
43. 老師：請問這兩種做法都可以嗎？
44. 學生：可以。
45. 老師：事實上他們找到的結果一樣不一樣？
46. 學生：一樣。
47. 老師：究竟可以分成幾袋呢？說說看。
48. 學生：一、二、三、四、六、十二。
49. 老師：每一袋的水果糖有幾顆？他一共有十二顆水果糖，可以分成一顆、二顆、三顆、四顆、六顆、十二顆，都可以剛好分完，對不對？
50. 學生：對！
51. 老師：小朋友看看，一、二、三、四、六、十二這些數字跟十二有什麼關係，為什麼它可以這樣分，怎麼不可以分成八顆呢？怎麼不可以分成十一顆呢？為什麼是一、二、三、四、六、十二，這六個數字跟十二有什麼關係？宗宇說說看，你發現什麼？
52. 學生：因為這六個數字都是十二的因數。
53. 老師：他說這六個數字都是十二的因數，同意嗎？
54. 學生：同意！
55. 老師：為什麼是它的因數？我已經忘記了耶！你們好厲害，好久以前上的還記得

。請昂均說說看。

56. 學生：因為那些因數可以被十二整除。

57. 老師：錯！恩莉說錯。

58. 老師：哪裡錯？恩碩說說看。

59. 學生：應該是十二會被那些數整除。

60. 老師：對不對？

61. 學生：對！

62. 老師：昂均要謝謝恩碩對不對？因為十二可以被一、二、三、四、六、十二整除，一、二、三、四、六、十二是十二的因數。好，真的很不錯哦！

63. 老師：彥廷還有十八顆牛奶糖，他要把這十八顆牛奶糖像水果糖一樣的方式，一袋一袋的裝起來之後，每一袋的牛奶糖一樣多，而且要全部分完。

題目：彥廷還有 18 顆牛奶糖，要裝成一袋一袋的，每袋的牛奶糖要一樣多，而且要全部分完，有哪些分法？用除法算式記看。

64. 老師：這一題老師要小朋友說結果就好。好，請采吟。可以嗎？你們都好了沒？

65. 老師：采吟要說囉！采吟說說看，十八顆的時候可以分成幾袋？

66. 學生：可以一顆裝成一袋、二顆裝成一袋、三顆裝成一袋、還有六顆裝成一袋、還有九顆裝成一袋，還有十八顆裝成一袋。

采吟的作法：

$$18 \div 1 = 18$$

$$18 \div 2 = 9$$

$$18 \div 3 = 6$$

$$18 \div 6 = 3$$

$$18 \div 9 = 2$$

$$18 \div 18 = 1$$

A：1、2、3、6、9、18 顆。

67. 老師：你們覺得好好玩？覺得哪裡好玩？

68. 學生：她說得好快。

69. 老師：還有呢？還有，我們都沒有看到她到底在算什麼，對不對？

70. 學生：對！

71. 老師：她說有一顆、二顆、三顆、六顆、九顆、十八顆可以裝成一袋，同意嗎？
72. 學生：同意！
73. 老師：可以一顆、二顆、三顆、六顆、九顆、十八顆裝成一袋。那一、二、三、六、九、十八都是十八的什麼數？
74. 學生：因數。
75. 老師：太厲害了。好！
76. 老師：這題有點難哦！請你們把白板擦掉，或者不擦都沒關係，如果你還有位置的話。找找看，當幾顆裝成一袋時，水果糖和牛奶糖，都可以剛好分完？
77. 老師：幾顆裝成一袋的時候，水果糖和牛奶糖，都可以剛好分完？老師看到有人紀錄很特別。哦，你們都好了。
78. 老師：好！手放下，好辛苦。可以了嗎？
79. 學生：可以了。
80. 老師：好。你找到幾顆裝成一袋時，兩種都可以剛好分完？好，子駿。請到前面。
81. 學生：我是先把十二跟十八的因數寫出來，我發現裡面一顆、二顆、三顆、六顆裝成一袋都可以剛好分完。
82. 老師：所以你的答案是？
83. 學生：一、二、三、六。
84. 老師：同意嗎？
85. 學生：同意！
86. 老師：他說他先把十二的因數找出來，把十八的因數找出來，為什麼你要找十二跟十八的因數？
87. 學生：因為我要找它們的公因數。
88. 老師：他要找出它們的公因數，也就是說它是它(12)的因數，也是它(18)的因數，對不對？

題目：找找看，幾顆糖果分裝成一袋時，水果糖和牛奶糖都可以剛好分完？

子駿的作法：

12 : 1, 2, 3, 4, 6 12
18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18

89. 學生：對！
90. 老師：老師問你，為什麼要找出它們的公因數，你怎麼知道找出它們的公因數就是水果糖和牛奶糖都可以剛好分完？好，恩莉要幫你說。
91. 學生：那是代表說這些數可以整除十二跟十八。
92. 老師：也就是說我們剛剛找到的因數可以整除十二，也可以整除十八，都可以被它們整除對不對，十二和十八可以被它們整除，就是可以剛好分完，所以他找到一、二、三、六這四個，它們會出現在十二，也會出現在十八。
93. 老師：好，謝謝你！有沒有人的結果是跟他不一樣的？有沒有？都相同嗎？沒有人算法跟他不同、紀錄跟他不一樣？有誰？請彥廷。
94. 學生：老師，他的紀錄跟他不一樣。
95. 老師：哦，好！沒關係。他說他記錄錯誤了，給小朋友看一看哦。
。他也找到了，但還沒有找完，對不對？他還沒有做完，你們看他的紀錄你發現什麼？
96. 學生：他是用除的。
97. 老師：彥廷說說看。
98. 學生：他是用除的，都除剛好，一樣的。
99. 老師：第一個算式他寫十二除以一，他先算什麼？十二顆水果糖可以被一顆除盡，對不對？
100. 學生：對！
101. 老師：然後十八顆也可以被一顆除盡，所以他在做什麼事？每一種糖果他一顆一顆去檢查對不對？所以，「一顆」是不是他的答案？
102. 學生：是。
103. 老師：然後他又找了幾顆？
104. 學生：兩顆。

圖示：

$$12 \div 1 = 12$$

$$18 \div 1 = 18$$

$$12 \div 2 = 6$$

$$18 \div 2 = 9$$

$$12 \div 3 = 4$$

$$18 \div 3 = 6$$

105. 老師：兩顆，發現也可以。三顆，可以。這是勁嘉的記錄方式，他還要找對不對？

你覺得他的方法跟子駿的方法有什麼不一樣？

106. 學生：一個是除的，一個是用直接找的。

107. 老師：那你們覺得呢？要像勁嘉一樣，還是像子駿就可以？

108. 學生：像子駿就可以。

109. 老師：為什麼像子駿就可以？

110. 學生：比較快。

111. 老師：比較快的原因在哪裡？來，請勁叡說說看。

112. 學生：因為我們之前已經把它算出來了。

113. 老師：對，他說我們之前，剛剛前面第一題、第二題我們都已經把它找出來了，對不對？好，那現在我們發現一、二、三、六這四個，一、二、三、六剛好是十二的因數，也是十八的因數，那我們說一、二、三、六是十二和十八的公因數。

114. 老師：好，現在請小朋友試試看哦！找找看，二十和三十的公因數有哪些？如果我們沒有做剛剛除法的動作，你會不會直接找出它的因數？還是我們要在腦袋裡透過除法的動作，再找出它的因數有哪些？

題目：找找看，20 和 30 的「公因數」有哪些？

115. 老師：二十和三十的公因數有哪些？

116. 老師：好，時間到。來，請榆琍好了。看看榆琍怎麼做。

榆琍的作法：

20 : $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、4、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{10}$ 、20
30 : $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、3、 $\boxed{5}$ 、6、 $\boxed{10}$ 、15、30

117. 老師：我覺得恩碩好專心哦！

118. 學生：就是我把二十和三十的因數找出來。

119. 老師：那你找到二十的因數有哪些？

120. 學生：一、二、四、五、十還有二十。三十的因數是一、二、三、五、六、十、

十五、三十，所以我找到它們的公因數有一、二、五和十。

121. 老師：同意嗎？她做的好不好？

122. 學生：好！

123. 老師：對她有沒有什麼意見？

124. 學生：沒有！

125. 老師：沒有啊？可是老師發現還在寫除式的人，你為什麼不問問他為什麼可以這樣做呢？彥廷，問問看，你有什麼問題？他的做法跟你不同，對不對？要不要問他什麼？好，炫廷。

126. 學生：你的公因數為什麼可以找得這麼快？

127. 學生：因為二十跟三十都可以被它們整除。

128. 老師：他說的是公因數的意思，你剛剛要問的是他怎麼可以找的是一、二、四、五、十、二十，為什麼還有的人寫除法算式寫了好半天？你是怎麼可以直接找到？恩莉說說看。

129. 學生：像我是先把…

130. 老師：你也跟他一樣是不是？

131. 學生：就是像除以一可以整除嘛，然後就等於二十，然後除以二等於十，除以四的話等於五，就是這樣子。

132. 老師：有沒有聽懂？來，恩莉拿到前面來。她一次都找幾個？有沒有發現？

恩莉的作法：

20 : $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、4、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{10}$ 、20

30 : $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、3、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{10}$ 、15、30

A : 1、2、5、10。

133. 學生：兩個。

134. 老師：她一次找兩個，在哪裡？郁婷，你沒有看這邊。

135. 學生：第一個就是除以一可以整除嘛，然後它的答案就是二十，代表說它也可以被二十整除。

136. 老師：她說它除以一可以整除，它的答案是二十，它也可以被二十整除，為什麼

？二十除以一等於二十，為什麼二十除以一的時候可以被它整除？除以二十的時候也可以被它整除？采吟說什麼？

137. 學生：倒過來。

138. 老師：你說。

139. 學生：是二十和三十的公因數。

140. 老師：是這樣嗎？秉叡，你要說什麼？我還沒有聽懂。炫廷。

141. 學生：二十除以一等於二十，那時候二十就可以直接填上去。

142. 老師：對，為什麼二十就可以直接填上去呢？你說說看。

143. 學生：因為二十除以一等於二十，二十除以二十等於一。

144. 老師：為什麼會這樣？你有沒有發現好奇怪喲？

145. 學生：因為乘除互逆。

146. 老師：可是我現在沒有用乘啊？二十除以一等於二十，二十除以二十等於一，我哪有去乘？跟乘有什麼關係。我都是用除啊！乘除互逆在哪裡？

147. 老師：我問你，一乘以二十等於多少？

148. 學生：二十。

149. 老師：二十可以等於一乘以二十，也等於二十乘以一，對不對？所以二十除以二十等於一，二十除以一等於二十。你這時說，它因為乘除互逆，不錯，可以找到。那他說我找到二的時候同時找到十，找到四的時候就找到…

150. 學生：五。

151. 老師：所以她找的速度很快。好不好？

152. 學生：好。

153. 老師：可以學習，不錯！你們都找到了嗎？

154. 學生：找到了。

155. 老師：那我問你，二十和三十的公因數是哪些？

156. 學生：一、二、五、十。

157. 老師：好，謝謝。這次老師要請小朋友整組來解決問題，請你們把大白板拿出來。
。好了嗎？哪個小朋友可以把題目說說看？好，淇媛。

158. 學生：媽媽想用十六個蓮霧和二十四個草莓作水果拼盤，每盤分到的蓮霧都要一樣多，每盤分到的草莓也一樣多，可以平分裝在幾個盤子裡？

題目：媽媽想用 16 個蓮霧和 24 個草莓做水果拼盤，每盤分到的蓮霧都要一樣多，每盤分到的草莓也一樣多，可以平分裝在幾個盤子裡？
--

159. 老師：好，謝謝她。請問看懂題目了嗎？

160. 學生：看懂了。

161. 老師：它裡面在問什麼？這個題目告訴我們什麼？媽媽要做什麼事情？

162. 學生：水果拼盤。

163. 老師：拼盤的意思是裡面會有幾種水果以上？

164. 學生：兩種。

165. 老師：對。至少兩種以上的水果，我們才會叫拼盤對不對？他說每盤分到的蓮霧都要一樣多，分到的草莓也要一樣多，這是什麼意思？品儒。

166. 學生：就是每盤分到的草莓和蓮霧的數量都要一樣多。

167. 老師：對不對？

168. 學生：對。

169. 老師：對嗎？我三個蓮霧就要三個草莓，五個蓮霧就要五個草莓。是嗎？如果是這樣的話，媽媽媽只有十六個蓮霧跟二十四個草莓怎麼分呢？他們兩個數量不一樣多耶，所以好像不是品儒剛剛的意思喲？

170. 老師：誰曉得？每一盤的蓮霧都要一樣多，每一盤的草莓也要一樣多，意思是蓮霧跟蓮霧的數量一樣多，草莓跟草莓的數量一樣多，所以我這一盤的是三個蓮霧，所以我每一盤的蓮霧都是三個，如果我這一盤有五個草莓，我每

一盤的草莓也都是五個。

171. 學生：懂。

172. 老師：這樣清楚後，請小朋友想想看可以平分裝在幾個盤子裡？

173. 老師：你們那組可以討論想一想再記錄。

(174-191 為教師引導小組討論的對話)

174. 老師：你們說說看，你們的「一」是什麼意思？是裝在一個盤子裡面，還是一個蓮霧裝在兩個盤子裡面？

175. 老師：你要放中間一點，子謙才看得到。

176. 老師：好，第五組放上來。已經好了的組擺上來。

177. 老師：第三組不要急，你們可以記錄得很清楚。

178. 老師：怎麼樣，采吟？

179. 老師：對，不錯啊！

180. 老師：來，一、二、三、四。

181. 老師：四、六，二十四。

182. 老師：趕快寫，別組都好了。

183. 老師：二十四除以六。

184. 老師：翹超今天很棒。

185. 老師：八。

186. 老師：趕快告訴他，這邊三已經有啦！

187. 老師：接下來呢？十二？

188. 學生：十二乘以二等於二十四。

189. 老師：原來還有第六組。

190. 老師：你們告訴他，可以是幾盤？

191. 老師：板擦拿下來放這邊，品均。

192. 老師：今天好棒哦，每個人做完就看看別組在做什麼？有沒有跟別組不一樣的作法？
193. 老師：我們要請哪一組先說？哪一組願意先講？
194. 老師：彥廷指名要第三組先說。
195. 老師：好，請黃山，你來說說看。
196. 老師：第四組，第四組的白板放在第一塊，對不對？
197. 學生：對！
198. 老師：開始我有一跟細細的棍子在哪？在我桌上，拿給我一下，鳴駿。
199. 老師：那邊有一支指示棒，對給黃山，好開始。
200. 老師：大聲一點。
201. 學生：我們第四組的答案是每一盤一個蓮霧一個草莓剛好，二個蓮霧二個草莓剛好，四個蓮霧四個草莓剛好，八個蓮霧八個草莓剛好。
202. 老師：有沒有問題？我重複說一次，他說：「每一盤一個蓮霧、一個草莓剛好，二個蓮霧、二個草莓剛好，四個蓮霧、四個草莓剛好，八個蓮霧、八個草莓剛好。」同意嗎？
- 第四組的作法：

16 : 1、2、4、8、16
 24 : 1、2、3、4、6、8、12、24
 A : 1、2、4、8 盤。(每盤個)
203. 學生：同意。
204. 老師：同意的舉手。
205. 老師：那老師來問一個問題，媽媽有十六個蓮霧，跟二十四個草莓，結果他八個蓮霧，八個草莓剛好，那還剩下八個蓮霧和十六個草莓，媽媽一個人把它吃掉了，對不對？是不是？
206. 老師：不要把它做成拼盤，媽媽把它吃掉，這樣嗎？你發現什麼問題？跟你們那組的想法一樣嗎？劭叡說說看，你們那一組的作法。
207. 學生：十六個蓮霧可以裝成一盤，裡面有十六個；也可以裝成兩盤，裡面有八個

；也可以裝成四盤，裡面有四個；也可以裝成八盤，裡面兩個；也可以裝成十六盤，裡面有一個。

208. 老師：好，謝謝。你們發現他做的事情，哪一組白板把這件事記得很清楚？

209. 學生：第三組。

210. 老師：采吟說，我們這一組，對不對？來，采吟到前面來，告訴他們你們記在哪裡？你們跳過了這個計算的過程，直接到因數的時候，你常常會忘記到底題目在問什麼呢，對不對？好，開始。

211. 學生：就是十六個蓮霧裝成一盤，就有十六個嘛，就是他剛才說的這個嘛！

212. 學生：十六蓮霧他已經說完了，那我們說二十四個草莓，二十四個草莓裝成一盤就會有二十四個，二十四個草莓裝成二盤就會有十二個，二十四個草莓裝成三盤就會有八個。

第三組的作法：

$$16 \div 1 = 16 \quad 24 \div 1 = 24$$

$$16 \div 2 = 8 \quad 24 \div 2 = 12$$

$$16 \div 4 = 4 \quad 24 \div 3 = 8$$

$$16 \div 8 = 2 \quad 24 \div 4 = 6$$

$$16 \div 16 = 1 \quad 24 \div 6 = 4$$

$$24 \div 8 = 3$$

$$24 \div 12 = 2$$

$$24 \div 24 = 1$$

A：1、2、4、8 個盤子。

213. 老師：每一盤有八個，慢一點。

214. 學生：二十四個草莓裝成四盤就會有六個，然後二十四個草莓裝成六盤就會有四個，二十四個草莓裝成八盤就會有三個，二十四個草莓裝成十二盤就會有二個，二十四個草莓裝成二十四盤就會有一個。

215. 老師：聽懂嗎？二十四盤草莓嗎？來，謝謝你，老師幫忙。請問是二十四個草莓還是二十四盤草莓？

216. 學生：二十四個。

217. 老師：我們來看一下哦，其實我相信很多組的做法都會跟他們一樣，只是他們把這些東西挑出來了，這些東西到底是什麼？老師說要每盤分到的東西都一樣多。我們是每一盤分到蓮霧，分到草莓，我問的是能平分裝在幾個盤子裡，是要裝在不同數量的盤子裡，所以他們算的是十六除以一，可不可以

裝在一個盤子裡？

218. 學生：可以。

219. 老師：一盤幾個？

220. 學生：十六個。

221. 老師：可不可以裝在兩個盤子？

222. 學生：可以。

223. 老師：發現可以裝在一盤、二盤、四盤、八盤、十六盤，分成這些盤數的時候剛好都可以分完，而且每一盤的蓮霧都一樣多，因為可以被整除對不對？所以都一樣多。

224. 老師：那草莓可以裝在幾個盤子裡？

225. 老師：可不可以裝在一盤裡？

226. 老師：二盤？

227. 學生：可以。

228. 老師：三、四、六、八、十二、二十四？

229. 學生：可以。

230. 老師：跟你們找到的因數不一樣？

231. 學生：一樣。

232. 老師：可以被它整除，所以我們可以分在這些盤子裡。那為什麼得到一、二、四、八？你們都把那個東西圈起來，找到它的公因數。圈起來的意思是什麼？第四組，黃山知道了嗎？吳毓婷知道了嗎？第四組知道了嗎？還是不太知道？好，炫廷說說看。

233. 老師：圈起來的是代表他們是這兩個數字的公因數。

234. 老師：「一」是什麼？我的草莓跟蓮霧都可以裝在一盤裡面，所以我的一盤裡面就有幾個草莓？幾個蓮霧？

第三組的作法：

$$16 \div 1 = 16 \quad 24 \div 1 = 24$$

$$16 \div 2 = 8 \quad 24 \div 2 = 12$$

$$16 \div 4 = 4 \quad 24 \div 3 = 8$$

$$16 \div 8 = 2 \quad 24 \div 4 = 6$$

$$16 \div 16 = 1 \quad 24 \div 6 = 4$$

$$24 \div 8 = 3$$

$$24 \div 12 = 2$$

$$24 \div 24 = 1$$

A：1、2、4、8 個盤子。

235. 學生：十六個草莓，二十四個蓮霧。

236. 老師：可不可以裝在兩盤裡？哦，是十六個蓮霧，二十四個草莓，可不可以裝在兩盤裡面？

237. 學生：可以。

238. 老師：因為草莓可以被兩盤平分，蓮霧也可以平分成兩盤，所以兩盤也可以。三盤可以嗎？

239. 學生：可以。

240. 老師：可以嗎？

241. 學生：不行。

242. 老師：為什麼三盤不可以？

243. 老師：因為十六個蓮霧不可以被三整除。因為它沒有辦法平分成三盤，對不對？所以你們找到的一、二、四、八、十六或者一、二、三、四、六、八、十二、二十四。到底找到的是它的什麼？是蓮霧跟草莓的個數，還是平分成的盤數？

244. 學生：盤數。

245. 老師：那剛剛黃山，黃山告訴老師，我們十六這個的「一」是什麼？是把十六個蓮霧分成什麼？

246. 老師：黃山在哪裡？請起立。黃山說說看，這個「一」是什麼？一盤，對不對？

247. 學生：對。

248. 老師：好，可以平分在一盤裡面，也可以平分在兩盤、四盤、八盤、十六盤。那二十四個草莓呢？

249. 學生：可以平分在一盤、二盤、三盤、四盤、六盤、八盤、十二盤、二十四盤。

250. 老師：那麼共同的盤數，就是分的盤數要一樣多啊，對不對？

251. 學生：對。

252. 老師：是哪幾個？
253. 學生：一、二、四、八。
254. 老師：請問有沒有問題？
255. 學生：沒有。
256. 老師：最多可以裝在幾個盤子裡？最多？
257. 學生：八盤。
258. 老師：子駿。
259. 學生：最多可以裝在八盤裡面。
260. 老師：你怎麼知道？
261. 學生：因為他可以分裝在一、二、四、八裡面。
262. 老師：因為他可以分裝在一盤、二盤、四盤、八盤裡面，八盤是最多的盤數，對不對？所以最多可以裝在八個盤子裡。
263. 老師：請問當裝在八個盤子裡的時候，每個盤子裡會有幾個蓮霧、幾個草莓？好，每組商量一下告訴我。我剛剛說的是八盤的時候哦，知道的快舉手。第三組好了，第六組也好了。
264. 老師：當分裝在八個盤子裡的時候，媽媽拿出來的水果拼盤裡面有幾個蓮霧、幾個草莓？好了嗎？好。海琳。
265. 學生：兩個…
266. 老師：兩個什麼？兩個芭樂？
267. 學生：兩個蓮霧。
268. 老師：還有呢？
269. 學生：兩個草莓。
270. 老師：兩個草莓，對嗎？
271. 學生：錯。

272. 老師：到底幾個？

273. 學生：三個草莓。

274. 老師：請坐。還有誰要說說看？炫廷。

275. 學生：有兩個蓮霧和三個草莓。

276. 老師：為什麼？

277. 學生：因為十六除以二等於二。

278. 學生：啊…

279. 學生：十六除以八等於二，二十四除以八等於三。

280. 老師：你是說十六個蓮霧分在八個盤子裡，所以十六除以八等於二，所以水果拼盤裡面有兩個蓮霧。那把二十四個草莓也平分在八個盤子裡面呢？

281. 學生：可以裝三個草莓。

282. 老師：清楚了沒？

283. 學生：清楚了。

284. 老師：小朋友先下課。

【第二節】

285. 老師：看老師這邊哦！看到什麼？（老師揭示彩色噴泉的圖片，共四張）

286. 老師：紘宇，你看到什麼？

287. 學生：我看到…

288. 老師：好，把手放下。

289. 學生：抽象畫、煙火、噴水池…

290. 老師：有人看到了，品均說是打燈光的噴水池。

291. 老師：在哪裡啊？臺灣好像也有吧！

292. 老師：這是噴水池，在噴水的時候它底下有很多的探照燈，或是霓虹燈。

293. 老師：它會打出燈光，還會根據時間不同，打出不同顏色的燈光。對不對？有沒有看過？

294. 學生：有。

295. 老師：噴水的時候，它會有不同的姿態、不同的高度，所以我們叫它水舞，水在跳舞，有沒有見過？

296. 學生：有。

297. 老師：很多地方都有對不對？在台中有個亞哥花園，到夜晚的時候它就會放水舞。

298. 老師：在一座公園裡，有一個彩虹噴泉，這四張都是彩虹噴泉。它有好看的燈光秀，從下午六點鐘開始，所有的燈都亮了，接著呢，紅色的燈每三秒鐘亮一次，藍色的燈每五秒亮一次，紅燈跟藍燈下一次同時亮起，是什麼時候？

題目：河濱公園裡有一座彩虹噴泉，每天的燈光秀從下午 6 時開始，所有的燈都亮了一次，接著，紅色燈每 3 秒亮一次，藍色燈每 5 秒亮一次，說說看：兩燈下一次同時亮起是什麼時候？

299. 老師：每一組想想看，把它記在大白板上。

(300-308 為教師引導小組討論的對話)

300. 老師：好，已經完成的組拿上來。

301. 老師：我發現這次第四組有進步，很清楚你們在做什麼。

302. 老師：三、六組可以了嗎？

303. 老師：黑板上已經有四塊板，對不對？

304. 老師：賴郁婷，應該看板子，不要看別人，好不好？

305. 老師：品均，好了嗎？來，老師問大家好了。紅色燈三秒鐘亮一次，開始的時候是零秒，它不是已經亮完了嗎，然後經過幾秒後會亮？

306. 老師：一、二、三，三秒的時候會亮起來，然後四、五、六，六秒的時候又亮起來，對不對？就是它隔三秒鐘會亮一次。可以了嗎？

307. 老師：這邊有…

308. 老師：好，可以了，這樣就好，等一下用說的。

309. 老師：第三組也好了。哪一組小朋友要先說？

310. 老師：品儒好了，換不同的人說說看。品儒說說看。

311. 學生：因為紅色的…

312. 老師：來，站前面，找你們第五組的板。

313. 學生：因為紅色的燈三秒亮一次，所以三、六、九、十二、十五、十八、二十一秒，它會亮一次。那五秒是藍色的燈會亮，五、十、十五、二十、二十五、

第五組的作法：

3：3、6、9、12、15、18、21…

5：5、10、15、20、25、30…

6 時 + 15 秒 = 6 時 15 秒

A：6 時 15 秒

三十秒它會亮一次。所以把藍色和紅色的燈亮的秒數先寫出來，發現藍色和紅色的燈十五秒時是同時噴出來的，因為題目上寫說下午六時開始，所以就是六點加十五秒就是六點十五秒，所以答案是六點十五秒的時候紅色的燈，不，紅色的水。

314. 老師：是紅色的燈，還是紅色的水啊？

315. 學生：是紅色的燈。

316. 老師：所以紅色的燈跟藍色的燈在六時十五秒的時候會同時亮。說得好不好？

317. 學生：好！

318. 老師：給他拍拍手。來，有沒有一點讚美啊？

319. 老師：他們那組的說法，你們都同意嗎？

320. 學生：同意。

321. 老師：跟你們那組比比看，你有沒有覺得他們那一組的優點在哪裡？

322. 學生：字很清楚。

323. 老師：字很清楚，這是你看到的。還有沒有別的？你們那組沒有注意到什麼事情

，但是他們注意到了？或者，你們那組做法有沒有跟他們不一樣？有沒有發現，她剛剛報告的答案裡面跟其他組都不一樣！到底他們的優點在哪裡？他們好清楚的地方在哪裡？有沒有發現？淇媛！

324. 學生：他們有把十五秒加上六時，這樣比較清楚，比較完整。

325. 老師：對！就是真正在亮的時刻是六時十五秒，是那個時間亮起來的，對不對？其他的組都沒有注意，但是其他組都找到什麼？

326. 老師：都找到十五秒。

327. 老師：好，謝謝你！我們再看看別組。用乘法算式記的小朋友，哪一組要說說看，你們那組的記法跟他們有沒有什麼不同？請昂均好不好，剛剛第四組有些問題，來看看你們這個是不是很清楚？來，看小朋友。

第四組的作法：

$3 \times 1 = 3$	$5 \times 1 = 5$
$3 \times 2 = 6$	$5 \times 2 = 10$
$3 \times 3 = 9$	$5 \times 3 = 15$
$3 \times 4 = 12$	$5 \times 4 = 20$
$3 \times 5 = 15$	$5 \times 5 = 25$
$3 \times 6 = 18$	$5 \times 6 = 30$
$3 \times 7 = 21$	$5 \times 7 = 35$
$3 \times 8 = 24$	$5 \times 8 = 40$
$3 \times 9 = 27$	$5 \times 9 = 45$
$3 \times 10 = 30$	$5 \times 10 = 50$

328. 學生：我們先找出來是三的倍數。

329. 老師：為什麼要找三的倍數？

330. 學生：因為我們要找出它幾秒會亮一次。還有這邊題目是問兩燈下一次同時亮起是什麼時候？我們就先把三的倍數寫出來，和五的倍數寫出來以後，就找找看它們答案是不是有相同的，我找到的有三乘以五等於十五，五乘以三等於十五，所以這兩盞燈在六時十五秒都會亮一次。還有三乘以十等於三十，五乘以六等於三十，它們的答案都一樣，所以它們在六時三十秒時還會再亮一次。

331. 老師：你問問大家同意嗎？有這麼多人舉手耶！

332. 老師：哇！你說得真好，還是你們有什麼意見？你要請誰？

333. 學生：我請鳴駿！

334. 老師：有什麼問題？

335. 學生：……（搖搖頭）

336. 老師：那你的手舉這麼高！

337. 學生：請宗宇。

338. 學生：下次亮的時候，只要最少的一次。

339. 老師：老師問的問題是下一次，所以你要找，就找一次就好了。他們怎麼了？

340. 學生：他們找了兩次。

341. 老師：這樣有沒有關係？

342. 學生：有。

343. 老師：有關係啊？

344. 學生：而且他題目上面都寫著下午六時開始，所以他三十秒的話是亮三次了。

345. 老師：所以你們認為是他們多此一舉，多做了一件事。事實上找到十五秒，他們也就找到答案了，對不對？好，還有什麼？對剛剛昂均的說法還有什麼意見？

346. 學生：紅色的燈亮第幾次和藍色的燈亮第幾次，它們會同時亮起來？

347. 老師：她好厲害，有沒有聽懂恩莉問什麼？她問紅色的燈亮第幾次和藍色的燈亮第幾次的時候，它們會同時亮起來？

348. 學生：紅色的燈亮第五次的時候跟藍色的燈亮第三次的時候會同時亮起來。

349. 老師：還有什麼問題嗎？同意嗎？

350. 學生：同意！

351. 老師：真的同意啊？老師好像不太同意耶！請品均。

352. 學生：因為他是說在幾時的時候會亮起來？那他回答的是……

353. 老師：他回答的是十五秒。

354. 學生：對啊！

355. 老師：好像不是一個時刻，對不對？

356. 學生：對啊！
357. 老師：不是在告訴我們在那個時刻。但是在告訴我們經過十五秒的時候會亮。這樣懂嗎？好，要看老師在問什麼，其實他們的答案是找到了。
358. 老師：剛剛你們說，恩莉很同意他說的，紅色燈在亮第五次的時候，藍色的燈在亮第三次的時候會同時亮起。有沒有人記得，下午六點的時候所有的燈都亮了一次，恩莉發現什麼？如果要問你剛剛問題的時候，要考慮到我們開始的時候。
359. 學生：哦！
360. 老師：哦什麼？知道了什麼？勁叡。
361. 學生：次數會多一次。
362. 老師：次數還會多最開始的一次，但是如果從那個之後來算呢？第三跟第五就沒錯。
363. 老師：昂均說的很清楚。昂均剛剛還加了一句。他說，我先找到三的倍數，我又找到五的倍數。那是什麼意思？為什麼要找它的倍數？榆琍。
364. 學生：因為要先找到三和五的倍數，才會知道他們在什麼時候才會同時亮起來。
365. 老師：謝謝你！我問你，一個三、兩個三、三個三，是不是都是三的倍數？
366. 學生：是！
367. 老師：那每一次五的時候，一個五、兩個五、三個五，也都是五的倍數。謝謝你！請問十五是不是三的倍數？
368. 學生：是。
369. 老師：十五是不是五的倍數？它剛好是這兩個數的倍數，所以我們說十五是三和五的什麼數？
370. 學生：公倍數。
371. 老師：老師本來要下一個問題問的，但是第四組已經找出來了。請問除了十五以

外，還有哪些數也是三和五的公倍數？第四組已經找到三十。還可以找到什麼？這麼快就可以找到了？在心裡就找到了？第六組只有找到半個？好，恩碩。

372. 學生：我找到四十五。

373. 老師：找到四十五，同不同意？

374. 學生：同意。

375. 老師：你是怎麼找到的？

376. 老師：四十五可不可以，應該是被三除盡是不是？

377. 老師：它可以被五和三整除，四十五可以被五和三整除，那表示四十五是五和三的因數，那四十五就是五和三的公倍數。還不錯，你們真的很厲害喲！

378. 老師：我們以前上過，說像例如十是二的倍數，哦，不是，二是十的因數，十就會是二的倍數，大家都會用反過來看的哦，不錯。

379. 老師：四十五，還有沒有別的？

380. 老師：有人找到了嗎？吳毓婷。

381. 老師：六十對不對？

382. 老師：好，彥廷再找一個。

383. 老師：快想，宗霆。

384. 學生：七十五。

385. 老師：七十五是不是？

386. 學生：對。

387. 老師：有人還要想一下，七十五是不是三的倍數？請講。

388. 學生：是不是說用最開始的公倍數，這個公倍數的倍數就是這兩個數的公倍數。

389. 老師：對不對？

390. 學生：對！

391. 老師：為什麼？
392. 學生：我不知道啊！
393. 老師：他不知道，但是他發現了對不對？我先問你哦！請問，我們舉三十好了。
你發現十五是三和五的公倍數，三十也是三和五的公倍數。那三十是不是十五的倍數？是不是？
394. 學生：是。
395. 老師：為什麼是？他說十五的倍數，就一定是三和五的公倍數對不對？
396. 學生：對！
397. 老師：我們都發現這件事情，為什麼會這樣？因為十五同時就是誰的倍數？十五本身就是誰的倍數？它就是三和五的倍數，它的倍數再往上幾倍的時候，還會不會是三和五的倍數？所以你發現你根本就不用去排，只要從它的公倍數再往上找就可以找到了，是不是？很厲害哦！
398. 老師：好，來，換一個題目。先把白板拿下來。每一組組長過來。好，你們看到這張表是什麼？
399. 學生：百格板。
400. 老師：還有呢？
401. 學生：百格表。
402. 學生：數字表。
403. 老師：還有呢？
404. 學生：百數表。
405. 老師：哦，他說百數表。你為什麼說它是百數表？
406. 學生：因為它有一百格。
407. 老師：他講的真好，對不對？
408. 學生：他說他發現它有一百格，而且上面有一到一百的數字。

409. 老師：有沒有找到？我們叫他百數表，它不叫百格板。

410. 老師：對，我想到一個問題。剛才第四組在做那個問題的時候，因為他們一直寫，寫到了三十，黃山就問，這個要寫到多久啊？寫也寫不完。為什麼？

411. 學生：因為倍數無限多。

412. 老師：對不對？所以現在老師為什麼要給你一百以內。我給你一個範圍，請小朋友在這一百個數字內找找看，八和十二有哪些公倍數？你可以去圈或者做記號，八和十二的公倍數。

題目：找找看，在 100
以內，8 和 12
的「公倍數」
有哪些？

413. 學生：十二哪有啊？

414. 老師：十二是十二的倍數啊！

415. 老師：哪一組好了？老師找最快的兩組，拿到上面來。

416. 老師：好，時間到，停。沒找到也沒關係，你下課再完成。我們先看看這兩組做了什麼？第二組跟第五組速度最快，對不對？來，兩組，好抬頭看這邊。

417. 老師：剛才老師有個發現，為什麼第二組跟第五組很快？

418. 學生：他們是先從後面看，找公倍數…

419. 老師：哦，第二組是這樣找的吗？來，勁叡說說看，你們怎麼找的？

420. 學生：就是先找出它們的最小公倍數，然後用最小公倍數去乘。

421. 老師：好，你怎麼找到它最小公倍數？

422. 學生：我先用想的。

423. 老師：怎麼想，想什麼？十二和八的最小公倍數，他怎麼想？來，讓他說清楚哦！可能是好方法教給我們大家。

第二組的作法：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

424. 學生：我先在頭腦裡面想八乘以二、八乘以三這樣子。我發現八乘以三是二十四，十二乘以二是二十四。所以，它們的最小公倍數是二十四。

425. 老師：哦，他的方法好不好？

426. 學生：好！

427. 老師：他說八、一得八，八、二得十六，八、三得二十四；十二乘以二等於二十四，所以二十四就是它(12)最小的，也就是它(12)的第一個，是不是它們兩個最小的公倍數？然後呢，公倍數的兩倍、三倍、四倍，所以你們找到二十四、四十八、七十二跟九十六，同意嗎？

428. 老師：給他拍拍手，不錯。

429. 老師：那第五組呢？第五組，誰要說？你們先找什麼？再找什麼？

430. 學生：我們先找八的倍數。

431. 老師：有哪些，在哪裡？

432. 學生：有八、十六、二十四、三十二、四十、四十八、五十六、六十四、七十二、八十還有八十八和九十六。

第五組的作法：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

433. 老師：他們第一步做了什麼事，誰聽到了，第一步做什麼？

434. 老師：找到八的倍數。

435. 老師：剛才為什麼看到有的組好慢？因為他們找到，然後又好客氣，在上面打了個小點，然後又有人生氣的說，你怎麼可以在上面做了什麼？然後在僵持不下的時候，他又忘記八的倍數有哪些？十二的倍數有哪些？要找出公倍數就有點難。再來呢？

436. 學生：我們第二是找十二的倍數。

437. 老師：他用藍色的筆圈十二的倍數是不是？

438. 學生：十二的倍數有十二、二十四、三十六、四十八、六十、七十二、八十四、九十六。
439. 老師：好，再來呢？你怎麼找到它們的公倍數？
440. 學生：如果有公倍數的話，我們用紅色圈起來。
441. 老師：你為什麼用紅色的？
442. 學生：因為藍色的是十二，黑色的是八，這樣二十四就是它們的公倍數。
443. 老師：這樣聽得懂嗎？
444. 老師：紘宇，他怎麼找到公倍數？
445. 學生：有打兩個圈的。
446. 老師：哦，有打兩個圈的，同意嗎？子駿。
447. 學生：同意。
448. 老師：就是你剛剛圈了黑色又圈藍色。那個數字被圈兩次，表示它同時是八和十二的倍數。所以我們叫它什麼？
449. 學生：公倍數。
450. 老師：謝謝，有沒有問題？
451. 學生：沒有。
452. 老師：很好。請拿回來。
453. 老師：各組用大白板，把百數表放在抽屜，或者大白板底下都可以。
454. 老師：老師說題目哦，從起點開始，起點懂嗎？好，隨便畫一條跑道，從起點開始，每隔四公尺插一支旗子，就是從這邊開始(老師圖示)，四公尺的時候插一支旗子，然後呢，每隔十公尺站一個糾察隊員，我們每次都是用誰來
- 題目：長 100 公尺的跑道，從起點開始，每隔 4 公尺插一支旗子，每隔 10 公尺站一位糾察隊員，起點有旗子和糾察隊員，想一想，下一個同時有旗子和糾察隊員的地點，距離起點有幾公尺？

當糾察隊？

455. 學生：用童子軍…

456. 老師：從這邊開始到十公尺的時候，站一位糾察隊員，這個十公尺是從頭到這裡是十公尺哦，起點呢，開始的地方有旗子也有糾察隊員，請問，下一個同時有旗子也有糾察隊員的地方，距離起點有幾公尺呢？

457. 老師：好，想想看，陳瑜有沒有商量？想一想，你呢？

458. 老師：你看四公尺、八公尺、十二公尺、都會有旗子對不對，四公尺會出現一支旗子，四公尺會出現一支旗子，糾察隊員是十公尺哦。

459. 老師：對，十公尺會出現一個糾察隊員，二十公尺也會出現，三十公尺。

460. 老師：好，炫廷手舉得好長、好長，他想要第一個先說，對不對？

461. 老師：來，炫廷，他們第一組擺在最前頭。

462. 老師：庭瑄，先收起來好嗎？

463. 老師：好，開始。

464. 學生：我們是先找出四。

465. 老師：來，第一組開始做報告囉。紘宇。

466. 學生：我們先找出四的倍數，一些些，有四、八、十二、十六、二十，十的倍數有十和二十，找到這裡的時候，我們發現四和十有一個共同的倍數是二十，所以它們的公倍數是二十。所以二十公尺的時候，會同時有旗子和糾察隊員。

467. 老師：這樣清楚嗎？

468. 學生：清楚。

469. 老師：有沒有人有問題問他？為什麼要找出四的倍數跟十的倍數？四的倍數那些數字表示什麼？十的倍數的數字表示什麼？可不可以說清楚一點？

470. 學生：四就是四公尺。

第一組的作法：

4 : 4、8、12、16、20

10 : 10、20

A : 20 公尺。

471. 老師：四公尺會怎樣，四公尺會出現一個什麼？
472. 老師：在每四公尺的地方都會插一支旗子。
473. 老師：所以四、八、十二、二十，他還說了一些些，一些些是什麼？
474. 學生：就是後面還有很多。
475. 老師：點、點、點就表示後面還有很多，對不對？
476. 老師：在這些地方都會插一些旗子。
477. 老師：然後十呢？
478. 學生：十就是代表十公尺啊！
479. 老師：每十公尺都會站一位糾察隊員。所以在十公尺、二十公尺，只要在十公尺的倍數的位置，都會站一位糾察隊員，對不對？
480. 學生：對。
481. 老師：後來他找到兩個都出現二十的時候，表示在二十公尺的時候會有糾察隊員也會有旗子，同意嗎？
482. 學生：同意！
483. 老師：第一組說得很好，來，拍拍手。
484. 老師：有沒有哪一組要補充？你們的作法跟他不太一樣？子駿都先舉手，又摸頭的意思是什麼？
485. 老師：請問第四組呢，說說看你們的作法有什麼不同？陳瑜說說看，你們的想法跟第一組一樣嗎？
486. 學生：我們的想法跟，跟剛剛第一組…
487. 老師：你們的想法跟剛剛第一組一不一樣？你們的四乘以一、四乘以二，一直到四乘以十，你們的意思是什麼？

第四組的做法：

$4 \times 1 = 4$	$10 \times 1 = 10$
$4 \times 2 = 8$	$10 \times 2 = 20$
$4 \times 3 = 12$	$10 \times 3 = 30$
$4 \times 4 = 16$	$10 \times 4 = 40$
$4 \times 5 = 20$	$10 \times 5 = 50$
$4 \times 6 = 24$	$10 \times 6 = 60$
$4 \times 7 = 28$	$10 \times 7 = 70$
$4 \times 8 = 32$	$10 \times 8 = 80$
$4 \times 9 = 36$	$10 \times 9 = 90$
$4 \times 10 = 40$	$10 \times 10 = 100$

488. 學生：就是每隔四公尺就插一支旗子，然後在第五次的時候他有旗子，十公尺會站一個糾察隊員，是在第二個十公尺的時候會有糾察隊員。所以他們都會在同一個時候出現糾察隊員和旗子。
489. 老師：請問他們的想法跟第一組一樣嗎？
490. 學生：一樣。
491. 老師：他剛剛解釋的時候，有沒有什麼不一樣的地方？紘宇，我每次都看到你的後背，陳瑜說的跟炫廷說的有沒有不一樣的地方？
492. 老師：沒有啊！一模一樣啊！好像她講的比較多耶？
493. 老師：她還說了什麼，有專心聽的舉手。這麼少人啊？
494. 老師：好，有專心聽的發現他們有什麼地方不一樣？她還是一樣找四的一倍、二倍、三倍、四倍，在這些地方四公尺、八公尺、十二、十六都會有什麼？一支旗子。在這些地方都會有一個糾察隊員，但她剛剛說四乘以五是第五個四對不對？
495. 學生：對。
496. 老師：那是插的第幾支旗子？
497. 學生：第五支旗子。
498. 老師：恩莉發現應該是第六支旗子。
499. 老師：到底第幾支？第六支旗子那個地方會是二十公尺。
500. 老師：二十公尺是第六支旗子，然後在這個地方，第二個十的地方的時候，其實就是站第三個糾察隊員了，對不對？那個地方是二十公尺，所以在二十公尺那個地方會有旗子和糾察隊員。
501. 老師：雖然你們的記錄方法不同，其實意思一不一樣？
502. 學生：一樣。
503. 老師：請問二十公尺是四和十的什麼？

504. 學生：公倍數。

505. 老師：好，還會在哪些地點也有旗子跟糾察隊員？用說的就好。

506. 學生：四十、六十、八十和一百公尺的地方。

507. 老師：答案都出來了，四十、六十、八十和一百公尺時候，都會同時出現糾察隊員和旗子。

508. 老師：來，我們最後來玩一個遊戲，面對老師。

509. 老師：老師會說一串數字，前面一、二、三組的小朋友，當你聽到二的倍數的時候，就拍手一下，四、五、六組聽到五的倍數的時候，就踏腳一下。會嗎？
好，一、二、三拍組拍手聽聽看；四、五、六組呢？

510. 老師：不錯。預備好了嗎？

511. 學生：好了。

512. 老師：炫廷好緊張，叫我不要講太快。

513. 老師：一、二、啪、三、四、啪、五、踏、六、啪、七、八、啪、九、十、踏、
啪、十一、十二、啪、十三、十四、啪、十五、踏、十六、啪、十七、十八、
啪、十九、二十、踏、啪。

514. 老師：請問在哪些數字，你知道什麼？我題目都沒問。

515. 老師：昂均先說。

516. 學生：你要問的是，在什麼時候，一、二、三組拍手的時候，跟四、五、六組踏腳的時候是一樣的？

517. 老師：是不是？他真是厲害！他會舉一反三，對不對？

518. 老師：請問當老師說到哪些數字的時候，一、二、三組會拍手？

519. 學生：我知道。它們都是二的倍數。

520. 老師：哪些數字的時候，四、五、六組會踏腳？彥廷。

521. 學生：五、十、十五、二十。

522. 老師：對不對？

523. 學生：對。

524. 老師：哪些數字的時候，前面一、二、三組會拍手，後面四、五、六組又會踏腳？盈瑩，你說。

525. 學生：二十。

526. 老師：還有沒有？你說。

527. 學生：十跟二十，對不對？

528. 老師：為什麼在這兩個數字你們會又拍手又踏腳？淇媛。

529. 學生：因為這兩個數字是五跟二的公倍數。

530. 老師：對不對？

531. 學生：對。

532. 老師：又是二的倍數，又是五的倍數。

533. 老師：還不錯，我隨便說哦！注意哦，繼續哦！

534. 老師：三十八、啪、三十九、四十、啪、踏、四十一、四十九、五十、啪、踏。

535. 老師：還不錯哦。

536. 老師：剛剛你們什麼時候踏腳又拍手？

537. 學生：五十。

538. 老師：因為它是它們的公倍數。

539. 老師：好，到這裡，都很清楚了嗎？

540. 學生：對。

541. 老師：誰知道我們剛剛這節課在上什麼？你學到什麼？

542. 學生：我知道。

543. 老師：彥廷。你學到什麼？

544. 學生：他學到公因數和公倍數。

545. 老師：你學到什麼公因數，怎樣才叫公因數？
546. 老師：誰要幫他說？好，黃山。
547. 學生：可以被三個數字整除的。
548. 老師：是這樣說嗎？炫廷。
549. 學生：可以被兩個數字互相整除的都可以。
550. 老師：所以那個數字是二個或二個以上數字的因數，我們就說那是它們的什麼？
551. 學生：公因數。
552. 老師：什麼叫公倍數？好，子駿。
553. 學生：就是兩個數字乘出來相等。
554. 老師：兩個數字乘出來相等，什麼意思叫兩個數字乘出來相等？
555. 老師：二、五得十，然後十、一得十，那我們就說誰是誰的公倍數啊，好像不是這樣說對不對？你說。
556. 學生：就是十和二十的公倍數就是四十。
557. 老師：例如十和二十的公倍數就是四十，好像對哦，那怎麼解釋？她是在講例子。好，榆琍。
558. 學生：就是二個或二個以上數的共同的倍數。
559. 老師：當某個數是二個或二個以上的數的倍數的時候，我們說那個數是它們的公倍數。有沒有問題？
560. 學生：沒有。
561. 老師：很好。來，下課。

參、教學說明

今天進行的教學活動是公因數和公倍數的認識，當學童已學會因數、倍數的意義與求法後，要了解公因數與公倍數並不困難。然而，我覺得最不容易的事，就是教學

活動的設計。在規劃設計前，我會先擬定教學目標，並參閱各版本對此教材的處理後，嘗試安排較能符合數學概念、合理、清楚、且能貼近學童生活經驗、並能引起學習興趣的題材。如何選擇合適的情境來布題，真是一大挑戰！當教學完畢，正好檢視活動安排是否流暢？情境安排是否適切？以作為未來改進教學的依據。

在平常的教學活動中，我大都採用口述布題，只將關鍵字記錄在黑板，有時也使用電腦作成投影片，來進行教學活動，學童學習狀況尚佳；但錄影時無法使用電視螢幕，又希望觀眾能看清題目，知道學童在討論什麼，因此，才採用紙卡將題目完整呈現。

今天的教學主題是公因數和公倍數，「公因數」和「公倍數」都是指兩個（或以上）正整數之間的關係。如果一個數同時是兩個或兩個以上正整數的共同因數，則此數為它們的「公因數」；如果一個數同時是兩個正整數的共同倍數，則稱此數為它們的「公倍數」。

這個教學活動的設計，是透過解決各種生活情境的問題，來介紹「公因數」和「公倍數」。

在第一節課，透過下列三種情境問題，如：分裝糖果、作水果拼盤等情境，幫助學童逐步形成公因數的概念與求法。

在求兩數的公因數時，一般學生有兩種求法：其一是先分別求出兩數的所有因數，再從其中找出公因數；另外，也可以先找較小的數的所有因數，逐一去除大的數，看看是否除得盡，如此，可以容易的找出它們的公因數。但本活動限制學童在開始學習公因數意義時，使用先窮盡兩數由哪些因數組成，再尋找都能組成兩數的共同因數的方式解題，當學童能掌握公因數的意義後，才開始接受其他解題策略。在國小階段，「短除法」、「輾轉相除法」等方法，學生不易理解，因此不宜出現。

第二節課介紹「公倍數」的意義與求法。也透過各種生活情境問題：如彩虹噴泉中，紅、藍顏色的投射燈何時會同時亮起？以及在跑道上，找出出現旗子和糾察隊員

的地點，並透過拍手跟踏腳遊戲等，幫助學童逐步形成公倍數的概念。

在公倍數的求法中，因為正整數的倍數有無限多個，教師只要引導學童在某一數字範圍內即可。求兩數在某一數量範圍內的公倍數時，學童大都會採用先找出個別正整數的所有倍數，再找出共同的倍數。當然，也可以逐一算出大的數的1倍、2倍、3倍…，並逐一複驗是否為另一數的倍數，如果是，那就是這兩個數的最小公倍數。

根據課程綱要，最大公因數與最小公倍數並不是國小課程教材的範圍，但從情境中，透過比較活動學習，這些都是學童能夠掌握並理解其意義的，但並不期望學童能使用其概念來解決問題。

因數的學習其實是滿抽象的數學概念，即使我們今天的安排是透過生活的情境，對孩子來說也不太容易。再加上我們情境的不同也會增添小朋友在解題上的困難度。就像我們今天第一個問題是分糖果的時候，它是屬於包含除的情境，所以孩子們在解題上沒有什麼困難；但是到了第二題在作水果拼盤的時候，我們要求的是能夠分成的盤數，這時候就出現了一些狀況：例如，孩子們很快的找到十六個蓮霧，可以裝成十六個蓮霧，它可以分成一、二、四、八、十六它有這些因數，二十四呢，有一、二、三、四、六、八、十二、二十四這些因數，他也找到了一、二、四、八是它們的共同因數，但是當我們問他，這個「一」表示什麼的時候，有的孩子就以為這個「一」是一顆蓮霧或者是一個草莓，而不是一盤。所以他們在這個時候，到底他這個數量是水果的數量還是盤數，分不清楚，所以因為這樣子，這屬於等分除的問題，對他們來說較為困難，所以像這樣的狀況，教師就必須又回到情境，讓孩子們澄清它的概念，在倍數問題的時候，可能是跟孩子們的生活較接近，同時他們乘法的經驗也較豐富，所以在學習倍數或公倍數的時候，就容易得多。

肆、教學後的省思

本課程進行時間為十一月底，接近聖誕節，這是小朋友熟悉且喜愛的節日，所以，第一節課的活動內容以聖誕節為布題背景，學童在討論時顯得興趣濃厚。

學習公因數時首先在分糖果的情境下進行解題，由於是包含除問題，學生很容易明瞭題意，並能將「袋」與因數作連結，而成功解題。當了解公因數的意義與求法之後，接著以純數字布題，此布題的安排是希望學童的學習是由具體到抽象，由量到數。解法上的討論，偏重在如何較快速又正確的找出因數與公因數。在整個活動流程上，覺得順暢而自然，學童也能自發的解題並將解題過程敘述清楚。

接著重新布題，以水果拼盤為情境，此題為等分除問題，由於題目較長，因此，我採分段提問。布題後，請學童說明題意，題目中學童對「每盤分到的蓮霧都要一樣多，以及每盤分到的草莓也一樣多。」的意思較難了解，會誤以為是「每盤分到的草莓和蓮霧的數量都要一樣多。」同時，在解題過程中，學童對於求得的是水果個數或盤數，也產生極大困惑，這是我始料未及的。因此，雖然，從成人眼光來看，都屬求公因數的題目，但對初學的學童來說，在意義的了解與掌握，是有相當的不同與困難度，因此，教師在教材的了解與布題的選擇，需要特別注意。

在學習倍數或公倍數的時候，可能是跟學童的生活較接近，同時乘法的經驗也較豐富，所以，就顯得較容易，尤其是以彩虹噴泉、百數表、拍手踏腳遊戲，在情境上有變化，學習的興趣與效果也比較好。

從這次的教學活動中，讓我驚覺學童的學習的確受到諸多因數的影響，而教師的確是教學活動的舵手，掌握了學習的方向、內容、流程……，這也是教學活動是否成功的重要原因。因此，在設計教學活動時，一定要了解學童的起點行為，貼近學童生活經驗，熟悉教材，才不會花了很大的力氣，卻未收到教學效果。

因數與公因數

壹、教學活動設計

一、教學年級：七年級上學期

二、教 學 者：桃園縣立新屋國中 楊椿 老師

三、教學目標：

1. 能將一數記成質因數連乘積。
2. 利用甲數質因數連乘積，寫出甲數的所有因數。
3. 先將兩數記成質因數連乘積，再找出兩數的公因數。

四、活動目標：

【第一節】

1. 透過是否能整除的方式，復習求一數的因數及兩數公因數的問題。
2. 介紹如何透過樹狀圖將一數記成質因數連乘積。
3. 引入質數、合數、質因數的意義。
4. 連絡數及其質因數連乘積記法的意義。

【第二節】

1. 透過由最小質因數開始尋找的約定，利用短除法將一數記成質因數連乘積。
2. 將一數記成質因數連乘積，看著質因數連乘積直接找出該數所有的因數。
3. 透過先將兩數記成質因數連乘積，再找出共同因數的方法，求兩數的公因數。

五、教學概要說明：

國小學生是利用整除的概念，透過嘗試錯誤的方式求一個數的因數及兩個數的公因數；國中學生是利用質數的概念，透過質因數分解的算式（質因數的連乘積）求一個數的因數及兩個數的公因數，本教學的重點是連絡兩者間的關係。

第一節課，本活動設計先復習國小解因數及公因數問題的舊經驗，再透過樹狀圖

的方式將一數記成質因數的連乘積，並澄清當質因數由小至大排列時，質因數連乘積的表示法唯一。接著引入質數、合數、質因數的意義，並透過連連看的活動，幫助學生連絡數及其質因數連乘積記法的意義。

第二節課，先透過由最小質因數開始尋找的約定，利用短除法將一數記成質因數連乘積，並要求學生說明樹狀圖法和短除法求質因數連乘積的異同。接著要求學生看著質因數連乘積的算式，直接找出該數所有的因數。最後透過先將兩數記成質因數連乘積，再找出共同因數的方法，求兩數的公因數，為以後利用質因數分解法或短除法求最大公因數及最小公倍數問題鋪路。

六、教學活動設計：

【第一節】

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
◎復習活動	1. 12 的因數有哪些？	- 學生可能的解法： (1) 透過嘗試 12 能整除那些數的方式求 12 的因數。 $12 \div 1 = 12$ $12 \div 2 = 6$ $12 \div 3 = 4$ $12 \div 4 = 3$ $12 \div 6 = 2$ $12 \div 12 = 1$ 12 的因數： 1、2、3、4、6、12。 - 國小學生的舊經驗。 (2) 將 12 改記成質因數的連乘積後求出 12 的因數。 $12 = 2 \times 2 \times 3$， 12 的因數： 1、2、3、4 (2×2)、	能找出 12 的因數。

		$6(2 \times 3)$ 、 $12(2 \times 2 \times 3)$ 。 • 若學生出現該解法，請學生說明解題的意義。	
	2. 18 的因數有哪些？		• 能找出18的因數。
	3. 12 和 18 的公因數有哪些？	• 學生可能的解法： (1)先分別求出 12 和 18 的因數，再找出 12 和 18 共同的因數。 12 的因數： $1、2、3、4、6、12$ 。 18 的因數： $1、2、3、6、9、18$ 。 12 和 18 的公因數： $1、2、3、6$ 。 • 國小學生的舊經驗。 (2)先利用短除法求出 12 和 18 的最大公因數 6，6 的因數 1、2、3、6 就是 12 和 18 的公因數。 • 若學生出現該解法，請學生說明解題的意義。	• 能找出 12 和 18 的公因數。
◎利用樹狀圖將一數記成質因數連乘積	4. 哪兩個數字相乘會得到 8？ 請注意，這兩個數字都不可以是 1。	• 若學生回答 1 和 8 的乘積是 8，教師應強調問題限制這兩個數都不可以是 1。	• 能說出 4 和 2 相乘可以得到 8。
	5. 哪兩個數字相乘會得到 4？		• 能說出 2 和 2 相乘可以得到 4。

	請注意，這兩個數字都不可以是 1。 6. 哪些數字相乘會得到 8？ 請注意，這些數字都不可以是 1，而且讓這些數字儘量的多。 7. 2 和 4 相乘可以得到 8；2 和 2 和 2 相乘也可以得到 8。 $\begin{array}{c} 8 \\ \swarrow \searrow \\ 4 \quad 2 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array}$ 上面這個記法，可不可以看到： $\begin{aligned} 8 &= 4 \times 2 \\ &= (2 \times 2) \times 2 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \end{aligned}$ 說說看，你怎麼知道的？	• 若學生回答 2 和 4 相乘會得到 8，教師應追問：『還可以有更多的數相乘會得到 8 嗎？』。 • 若學生無法回答，教師可以透過下列分段布題的方式幫助學生。 (1) $\begin{array}{c} 8 \\ \swarrow \searrow \\ 4 \quad 2 \end{array}$ 可以看到 2 和 4 相乘得到 8 嗎？ 可以記成『$8 = 4 \times 2$』嗎？ (2) $\begin{array}{c} 4 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array}$ 可以看到 2 和 2 相乘得到 4 嗎？ 可以記成『$4 = 2 \times 2$』嗎？ (3) $\begin{array}{c} 8 \\ \swarrow \searrow \\ 4 \quad 2 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array}$ 可以看到 2 和 4 相乘得到 8 嗎？ 可以看到 2 和 2 相乘得到 4 嗎？	4。 • 能說出 2 和 2 和 2 相乘可以得到 8。 • 能說出理由。
--	--	---	--

◎澄清質因數連乘積記法答案唯一	8. $8=2 \times 2 \times 2$，乘積中的每一個數都是質數，我們稱這種記法為8的質因數連乘積。 我們稱這種算出8的質因數連乘積的方法為樹狀圖方法。 9. 用樹狀圖方法將12記成質因數的連乘積。 10. $12=2 \times 6=2 \times 2 \times 3$ $12=2 \times 6=2 \times 3 \times 2$ $12=6 \times 2=2 \times 3 \times 2$ $12=6 \times 2=3 \times 2 \times 2$ $12=3 \times 4=3 \times 2 \times 2$ $12=4 \times 3=2 \times 2 \times 3$ 這些都是同學們的記法，他們的答案都正確嗎？ 現在老師規定依數字由小到大的順序列出質因數的連乘積，記記看，同學們的答案都一樣嗎？	可以記成 $\text{『}8=4 \times 2$ $= (2 \times 2) \times 2$ $= 2 \times 2 \times 2\text{』}$嗎？ • 教師可以先與學生溝通質數的意義。 • 教師可以說明這種記法很像樹木，因此稱之為樹狀圖方法。 • 學生可能的記法： $12=2 \times 6=2 \times 2 \times 3$ $12=2 \times 6=2 \times 3 \times 2$ $12=6 \times 2=2 \times 3 \times 2$ $12=6 \times 2=3 \times 2 \times 2$ $12=3 \times 4=3 \times 2 \times 2$ $12=4 \times 3=2 \times 2 \times 3$ • 教師在黑板上列出同學們所有的記法，如果某些記法沒有出現，教師應主動提出。 • 教師應澄清質因數連乘積記法答案唯一，也就是依數字由小到大的順序列出質因數的連乘積後，這些同學的答	• 能用樹狀圖方法將12記成質因數的連乘積。 • 能說出答案都一樣。
------------------------	---	--	--

◎澄清質因數的意義	11. 用樹狀圖方法將 18 記成質因數的連乘積。 12. $18=2\times 9=2\times 3\times 3$ $18=9\times 2=3\times 3\times 2$ $18=6\times 3=2\times 3\times 3$ $18=6\times 3=3\times 2\times 3$ $18=3\times 6=3\times 2\times 3$ $18=3\times 6=3\times 3\times 2$ 這些都是同學們的記法，他們的答案都正確嗎？ 現在老師規定依數字由小到大的順序列出質因數的乘積，記記看，同學們的答案都一樣嗎？ 13. $18=2\times 3\times 3$ 2 是 18 的因數嗎？ 2 是質數嗎？ 說說看，何謂質數？	案都一樣。 • 除了 1 和自己以外沒有其它因數的整數稱為質數。 • 此部份可以在樹狀圖方法之前引入。	• 能用樹狀圖方法將 12 記成質因數的連乘積。 • 能說出答案都一樣。 • 能回答 2 是 18 的因數。 • 能回答 2 是質數。 • 能說出質數的意義。
------------------	--	--	--

◎依由小到大的順序列出質因數的連乘積	14. 2 是 18 的因數、2 也是質數，我們稱 2 是 18 的質因數。 15. 依照由小到大的順序列出 36 的質因數的連乘積。 16. 連連看： 72 (1) $2 \times 3 \times 3$ 24 (2) $2 \times 2 \times 2 \times 3$ 18 (3) $2 \times 2 \times 3$ 12 (4) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$	- 此部份可以在樹狀圖方法之前引入。 - 學生必須依由小到大的順序列出質因數的連乘積。 - 如果有學生透過短除法解題，教師應該先接受，再要求他說明解題的意義。	能正確連出答案。
--------------------	---	---	--

【第二節】

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
◎復習活動 ◎利用短除法將一數記成質因數連乘積。	1. 如果我們依照由小到大的順序列出 36 的質因數的連乘積，每一個人的答案都和下面的記法一樣嗎。 $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 2. $\begin{array}{r} 2 \overline{) 36} \\ 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$ $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$	- 上一堂課解題的舊經驗。 - 若學生無法回答，教師可以透過下列分段布題的方式幫助學生。 (1) 老師先用樹狀圖方法，由最小質因數	能說出如何算出答案。

	上面是老師將 36 記成質因數連乘積的計算過程，說說看，老師如何算出答案？	開始將 36 記成質因數的連乘積。 $ \begin{array}{c} 36 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 18 \\ \quad \swarrow \searrow \\ \quad 2 \quad 9 \\ \quad \quad \swarrow \searrow \\ \quad \quad 3 \quad 3 \end{array} $ $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ (2) $\begin{array}{r} 2 \overline{) 36} \\ \underline{18} \\ \end{array}$ 可以看到 $36 = 2 \times 18$ 嗎？ (3) $\begin{array}{r} 2 \overline{) 36} \\ \underline{2 \overline{) 18}} \\ 9 \end{array}$ 可以看到 $36 = 2 \times 18$ $= 2 \times (2 \times 9)$ $= 2 \times 2 \times 9$ 嗎？ (4) $\begin{array}{r} 2 \overline{) 36} \\ \underline{2 \overline{) 18}} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$ 可以看到 $36 = 2 \times 18$ $= 2 \times (2 \times 9)$ $= 2 \times 2 \times 9$ $= 2 \times 2 \times (3 \times 3)$ $= 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 嗎？	
--	--	---	--

◎看著質因數連乘積的算式說出因數有哪些	3. 這種算出 36 的質因數連乘積的方法，我們稱之為短除法。 4. 用樹狀圖方法和短除法將 64 記成質因數的連乘積。 說說看，這兩種方法有哪些地方相同、哪些地方不相同？ 5. $甲 = 2 \times 2 \times 3$ 1 是甲的因數嗎？ 2 是甲的因數嗎？ 3 是甲的因數嗎？ 2×2 是甲的因數嗎？ 2×3 是甲的因數嗎？ $2 \times 2 \times 3$ 是甲的因數嗎？ 6. $甲 = 2 \times 2 \times 3$ 看著質因數連乘積的算式說說看，甲的因數有哪些？	- 學生必須使用樹狀圖方法和短除法將 64 記成質因數的連乘積。 - 教師應提醒學生使用短除法解題時只能提出質因數。 - 如果學生無法回答，教師可以追問： (1) $甲 \div 2 = 2 \times 3$ (6) 嗎？ (2) 2 是甲的因數嗎？ - 如果學生無法回答，教師可以追問： (1) $甲 \div 2 \times 2$ (4) = 3 嗎？ (2) 2×2 是甲的因數嗎？ - 如果學生無法回答，教師可以追問： (1) $2 \times 2 \times 3$ 是 $2 \times 2 \times 3$ 的因數嗎？ (2) $2 \times 2 \times 3 = 甲$ 嗎？ (3) $2 \times 2 \times 3$ 是甲的因數嗎？	- 能用樹狀圖方法和短除法將 64 記成質因數的連乘積。 - 能說明相同和不同的地方。 - 能說出 1、2、3、2×2、2×3、$2 \times 2 \times 3$ 是甲的因數。 - 能說出 1、2、3、2×2、2×3、$2 \times 2 \times 3$ 是甲的因數。
----------------------------	---	---	--

◎看著質因數連乘積的算式說出公因數有哪些	說說看，你怎麼知道你的答案是正確的？ 7. $乙 = 2 \times 3 \times 3$ 看著質因數連乘積的算式說說看，乙的因數有哪些？ 說說看，你怎麼知道你的答案是正確的？ 8. $丙 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$ 看著質因數連乘積的算式說說看，丙的因數有哪些？ 9. $甲 = 2 \times 2 \times 3$ $乙 = 2 \times 3 \times 3$ 甲和乙的公因數有哪些？ 1 是不是甲和乙的公因數？ 2 是不是甲和乙的公因數？ 3 是不是甲和乙的公因數？ 2×3 是不是甲和乙的公因數？ 10. $丙 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$ $丁 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ 丙和丁的公因數有哪些？	• 如果學生無法回答，教師可先問 $a(a = 2 \times 2 \times 3 \times 7)$ 的因數有哪些，再問丙的因數有哪些。 • 如果學生無法回答，教師可以追問： 2 是不是甲的因數？ 2 是不是乙的因數？ 2 是不是甲和乙的公因數？ • 如果學生無法回答，教師可以追問： 2×3 是不是甲的因數？ 2×3 是不是乙的因數？ 2×3 是不是甲和乙的公因數？	• 能說出理由。 • 能說出 1、2、3、2×3、3×3、$2 \times 3 \times 3$ 是乙的因數。 • 能說出理由。 • 能說出丙的因數。 • 能說出 1、2、3、2×3 是甲和乙的公因數。 • 能說出丙和丁的公因數。
-----------------------------	---	--	--

學生練習單(一)

P1

請寫出 12 的所有因數

請寫出 18 的所有因數

學生練習單(二)

P2

寫出 12 的樹狀圖

寫出 18 的樹狀圖

學生練習單(三)

P3

請寫出 36 的樹狀圖

請寫出 64 的樹狀圖

學生練習單(四)

P4

甲數： $2 \times 2 \times 3$ 的所有因數	理由
乙數： $2 \times 3 \times 3$ 的所有因數	理由

學生練習單(五)

P5

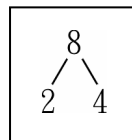
甲數：24 請找出甲數的所有因數	理由
乙數：$2 \times 3 \times 3$ 請找出乙數的所有因數	理由

貳、教學實錄

【第一節】

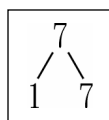
1. 班長：起立，敬禮。
2. 學生：老師好。
3. 老師：好。
4. 班長：坐下。
5. 老師：同學們，前一節課老師帶你們到視聽教室看了一個影片，你們還記得那個影片的名稱嗎？
6. 學生：公因數和公倍數。
7. 老師：對！今天我們要上的課，跟這個影片非常有關。同學們請看老師這裡寫的是什麼數字？
8. 學生：十二。
9. 老師：十二的因數有哪些？什麼是十二的因數？
10. 老師：我們先問宋伯欣，什麼數是十二的因數，請你站起來告訴大家。
11. 伯欣：可以整除十二的數叫做十二的因數。
12. 老師：請同學們將十二的因數說出。
13. 學生：一、二、三、四、六、十二。
14. 老師：請問同學，什麼是十八的因數？
15. 學生：一、二、三、六、九、十八。
16. 老師：十二的因數是一、二、三、四、六、十二。十八的因數是一、二、三、六、九、十八。同學們，你有沒有發現到老師有唸到重覆的數字，有沒有？
17. 學生：有。
18. 老師：什麼是重覆的數字？

19. 學生：一、二、三、六。
20. 老師：一、二、三、六，這些數能被十二整除。也能被十八整除，因此我們稱一、二、三、六是十二和十八的什麼？
21. 學生：公因數。
22. 老師：現在老師要問同學一個問題，同學看到黑板上這邊寫著一個數字嗎？
23. 學生：七。
24. 老師：哪兩個數相乘會得到七？一跟什麼？
25. 學生：七。
26. 老師：好。現在老師再寫一個字，這個數字是什麼？
27. 學生：八。
28. 老師：請問同學，有哪兩個數字相乘會得到八？
29. 學生：四乘二。
30. 老師：好，請坐。如果二乘四呢？可不可以？
31. 學生：可以。
32. 老師：其實它們都是同一組的。還有沒有其它兩個數相乘會得到八？
33. 學生：一乘八。
34. 老師：還有沒有其它的方法？有沒有？
35. 學生：沒有了。
36. 老師：沒有其它的方法了。現在我們要做一件事情，老師在這邊寫著一個八，我們都知道八會等於四乘二。現在，老師畫出這樣的一個圖，然後在寫上二跟四。同學們，「二乘四」會得到多少？
37. 學生：八。
38. 老師：請同學再看一下「四」，由哪兩個數相乘會得到四？
39. 學生：二乘二。



40. 老師：好，同學們，現在請你們再注意一下老師這邊，「七」剛才講過，它可以是

「一」和「七」相乘是不是？

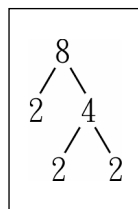


41. 學生：是。

42. 老師：我們在畫圖的時候，有「一」的部份我們就不要出現，聽懂嗎？

43. 學生：懂。

44. 老師：「八」這個數等於二乘四，對不對？



45. 學生：對。

46. 老師：我們知道「四」等於二乘二，是不是？

47. 學生：是。

48. 老師：因為「二」是質數所以我們不再分解下去了！有沒有問題？

49. 學生：沒有。

50. 老師：按照這樣的方法，我們可以把一數分解成都是質數相乘。

51. 老師：好，同學們請將學習單(二)上「寫出 12 的樹狀圖」(見

P. 107)這題，按照剛才老師所說的方式，把十二分解
成其質因數相乘，等一下老師要請同學回答。

學生練習單(一)
寫出 12 的樹狀圖
寫出 18 的樹狀圖

52. 老師：(老師提示同學)有哪些數相乘會得到十二？有三乘四，對不對？有二乘六，有一乘十二。你寫一組即可。如果你兩個都會的話，旁邊還可以再寫一組。

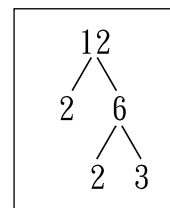
53. 老師：寫完了嗎？

54. 學生：寫完了。

55. 老師：寫兩組的同學請你舉手一下。哇！寫兩組的同學，有那麼多同學啊！

56. 老師：現在老師來看陳振國所寫的。陳振國到黑板這邊來，你把你所做的方法寫到黑板上。現在請你告訴同學，你是怎麼做的？

57. 老師：首先我們要將十二分解成二乘六對不對？我們把二先寫出來，然後六寫出來。但是六這個數字可以怎麼樣？還可以再變成由兩個數相乘對不對？這兩個數到底是什麼？

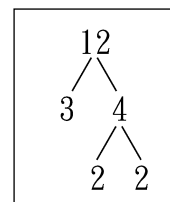


58. 振國：二跟三。

59. 老師：來，你替我們解釋另一個。

60. 振國：三跟四相乘。

61. 老師：把十二分解成「三跟四相乘」，但是「四」這個數，它可以變成二跟二相乘，是不是？



62. 振國：是。

63. 老師：好，有沒有問題？

64. 學生：沒有。

65. 老師：沒有問題，你們是不是跟他一樣？

66. 學生：對！跟他一樣。

67. 老師：同學們，請你注意一下。圖中「不再寫數字的地方」，我們叫做端點，端點的地方，你發現到有什麼東西？

68. 老師：一個「三」，兩個「二」，是不是？另外一個圖形，也是得到兩個「二」，一個「三」，雖然我們用不同的方法，但是我們都得到兩個「二」，一個「三」！如果把端點的數字，從小到大排列，是如何呢？首先我們看左邊這排樹狀圖，有一個「二」、一個「三」、一個「二」，我們把它按次序排出來的話，應該要怎麼寫？

69. 學生：二、二、三。

70. 老師：我們按次序排出來，數與數中間給它一個乘號，那代表是什麼？

71. 學生：質因數相乘。

72. 老師：右邊另外一個圖呢？同樣是一個「二」、一個「二」、一個「三」是不是？

如果將這三個數由小而大做一個排列，請問同學，要先寫什麼數字？

73. 學生：二。

74. 老師：二之後呢？

75. 學生：二與三。

76. 老師：並且二與三中間用乘號把它乘起來。這三個數字相乘得到多少？

77. 學生：十二。

78. 老師：你覺得「數」的樹狀圖圖案跟我們校園的某一個東西長的很像？樹木或房屋？你覺得它比較像樹木還是房屋？

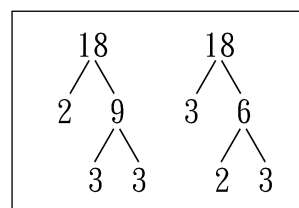
79. 學生：樹木。

80. 老師：樹木，有沒有像樹木？有，顛倒過來正是，樹木是不是這樣子？

81. 老師：以數學用語來說，我們稱這個圖形為樹狀圖。因為它好像樹木一樣，所以我們叫做樹狀圖，這樣有沒有問題？

82. 學生：沒有。

83. 老師：現在請同學做學生練習單(二)(P. 106)，畫出十八的樹狀圖的這個題目，請你畫出其樹狀圖，每一種方式你都把它畫出來。



84. 老師：你都畫出來了嗎？你畫了幾種？

85. 學生：兩種。

86. 老師：好。你畫了兩種，有沒有同學畫一種的？有沒有畫三種的？你畫了幾種？

87. 學生：畫了兩種。

88. 老師：我們來試試看，你知道十八是有兩個數相乘，有二乘九，有三乘六，還有什麼？

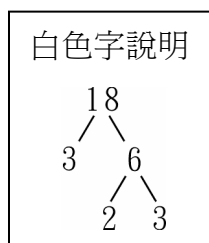
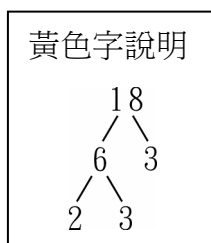
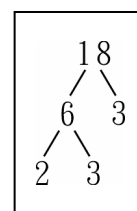
89. 學生：一乘十八。

90. 老師：一乘十八這個方法，要不要用？

91. 學生：不要。

92. 老師：因為它有一個「一」在，所以不需要用它，所以用三乘六，這邊寫三，那邊寫六。如果用二乘九，得三乘三。有沒有同學寫六乘三的？

93. 老師：有，你們都寫這樣子。如果是這樣子寫，黃色字與白色字，白色的字與黃色字所代表，請問同學有沒有一樣？



94. 學生：有。

95. 老師：你為什麼覺得它一樣？

96. 學生：因為都是一個「二」乘一個「三」，之後再乘以「三」。

97. 老師：你認為它們底端的部份，它們都是一樣嗎？

98. 學生：一樣。

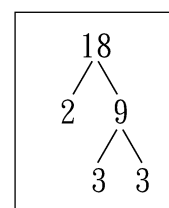
99. 老師：底端的部份都一樣，對嗎？

100. 學生：對。

101. 老師：如果我把十八這個數，分成三乘六，三寫在左邊，六寫在右邊，做分解，其實得到底端的部份，是一個「三」，一個「二」，一個「三」，與我們把這個十八，寫成六乘三，六寫在左邊，三寫在右邊的時候做分解，我們看到在底端的部份，它是一個「二」，兩個「三」，其實這兩種分法是怎麼樣？

102. 學生：是一樣的。

103. 老師：再來看十八這一個數，這個數可以變成二乘九，接著我們還可以把九分成兩個數，對不對？我們來看底端的部份，底端的部份現在有幾個二？



104. 學生：一個二。

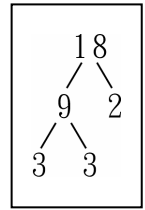
105. 老師：幾個三？

106. 學生：兩個三。

107. 老師：你有沒有寫成九乘二這樣表示的？有沒有？來舉手一下。

108. 老師：好，手放下來。同學寫九乘二的跟這邊寫二乘九的有沒有一樣？

109. 學生：有。



110. 老師：其實這兩個形式是一樣的。現在老師要同學把底端的數字乘起來，結果是什麼形式呢？

111. 學生：二乘三乘三。

112. 老師： $2 \times 3 \times 3$ 的值是多少？

113. 學生：十八。

114. 老師：好，你們知道是十八。我們班上的同學好聰明，得到十八。請問你們，二是什麼？你們能不能回答老師，二是什麼？二，我們剛才講過啊！一開始不是說過嗎？你們不是知道嗎，二是什麼？

115. 學生：十八的因數。

116. 老師：三是什麼？

117. 學生：十八的因數。

118. 老師：好，你們現在都知道二跟三是什麼？

119. 學生：是十八的因數。

120. 老師：你有沒有學過質數？

121. 學生：有。

122. 老師：什麼是質數？請你站起來，大聲的跟同學講。

123. 學生：因數只有一跟自己。

124. 老師：他說質數是「它的因數只有一跟自己」，請問同學，對不對？

125. 學生：對。

126. 老師：好，講的很好，同學們給他鼓勵一下。
127. 老師：什麼是質數呢？就是說，這個數的因數只有一跟本身，現在老師再舉一個例子，請問七的因數是什麼？
128. 學生：七的因數是一與七。
129. 老師：好，再舉個例子，八的因數為何？
130. 學生：一、二、四、八。
131. 老師：我聽到某一個同學聲音說的很大聲，是哪一位？
132. 老師：陳慶偉是不是？
133. 老師：請你站起來，我剛剛就聽到你的聲音，陳慶偉，八的因數有哪些？
134. 慶偉：一、二、四、八。
135. 老師：對不對？
136. 學生：對。
137. 老師：好，給他鼓勵一下。現在我們來看一下「七」，剛才同學講了，它是一個質數，為什麼？
138. 老師：因為它的因數裡面只有一跟七。而「八」是不是一個質數？
139. 學生：不是。
140. 老師：它不是一個質數，它叫什麼數呢？
141. 老師：「八」的因數有一、二、四、八。它除了一跟本身之外，另外還有兩個因數，所以「八」就不是質數，它不是質數，我們在數學上叫做合數。唸一次。
142. 學生：合數。
143. 老師：我們回到前面， $18=2 \times 3 \times 3$ ，「二」是一個什麼數？
144. 學生：質數。
145. 老師：它也是十八的一個因數。「三」，它是一個什麼數？
146. 學生：質數。

147. 老師：二、三也是十八的什麼？

148. 學生：因數。

149. 老師：二、三也稱十八的質因數，「 $2 \times 3 \times 3$ 」這樣的一個形式，就給它一個名稱叫做質因數連乘。同學們會嗎？

150. 學生：會。

151. 老師：好，學生練習單(三)拿出來(P. 107)，你們其他的講義不要收到抽屜裡面。現在請同學做「寫出三十六的樹狀圖」這個題目，你們把三十六這個數

學生練習單(三)
請寫出 36 的樹狀圖
請寫出 64 的樹狀圖

做樹狀圖分解，用一種方法就好。我們知道將三十六這個數的樹狀圖分解法，有很多種，但是你們只要做一種出來就好了，並且把三十六的質因數連乘形式寫在紙上，這樣子會嗎？

152. 學生：會。

153. 老師：好，我現在找三位同學回答，鄭宛華，請你站起來，現在上去把你所寫的東西寫在黑板上，你寫第一題，徐政璿，你寫第二題，宋侑欣，你寫第三題。

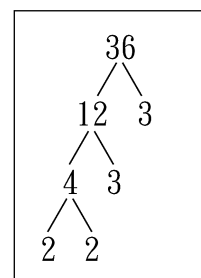
154. 老師：徐政璿，你的做法是先把三十六變成兩個數相乘，哪兩個數相乘？

155. 政璿：十二跟三。

156. 老師：三是一個質數。我們就不要再分解了。

157. 老師：請問十二是一個質數還是合數？

158. 政璿：合數。



159. 老師：所以我們必需再分解。十二可分解成什麼？

160. 政璿：四跟三。

161. 老師：好，四跟三，三是質數，四是合數，所以我們必需再把四做一個什麼？

162. 政璿：分解。

163. 老師：四可以分解成什麼？二乘二，二又是什麼？

164. 政璿：質數。

165. 老師：所以不要再繼續分解下去了。

166. 老師：請同學們告訴老師，端點的數是什麼？端點的數是哪些？幾個二，幾個三？

167. 政璿：兩個二，兩個三。

168. 老師：喔！同學知道是兩個二，兩個三，兩兩相乘會得到什麼？

169. 政璿：三十六。

170. 老師：三十六分解會得到什麼數？請你們唸一次。

171. 學生：二乘二乘三乘三。

172. 老師：得到三十六。二乘二乘三乘三代表三十六的什麼？

173. 政璿：質因數連乘。

174. 老師：了解嗎？請你回座，謝謝你。下一位，請你說一下，請你告訴老師也告訴同學，三十六你把它變成什麼數跟什麼數相乘？

175. 宛華：變成六乘六，這兩個數相乘。

176. 老師：六和六都是什麼？

177. 宛華：合數。

178. 老師：因為六和六都是合數，所以我們必需把它再分解成兩個數相乘，六可以分解成那兩個數相乘呢？

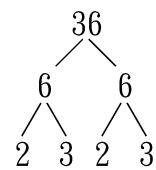
179. 學生：二乘三。

180. 老師：按樹狀圖分解完畢之後，樹狀圖端點的數是哪些？

181. 宛華：二與三，二與三。

182. 老師：喔！有一位同學，他把樹狀圖端點的數寫出來，結果是「二」、「三」，「二」、「三」，有沒有看到？剛才老師告訴過同學，端點數字要「由小到大排列」，三十六分解後的數字相乘要不要像他這樣子寫？

鄭宛華的作法



183. 學生：不要。

184. 老師：因此必須將他所寫的數字更正為由小到大做一個排列，然後把它相乘。更正之後，這才是三十六的質因數連乘，對不對？是不是這樣子？

185. 學生：是。

186. 老師：好，謝謝你，請回座，宋伯欣，請你講一下，三十六你把它分成什麼樣的數相乘？

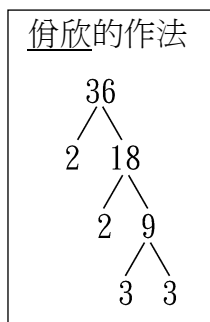
187. 伯欣：二跟十八。

188. 老師：二是什麼數？

189. 伯欣：質數。

190. 老師：十八呢？

191. 伯欣：合數。



192. 老師：遇到合數的話，我們必需再怎樣？

193. 伯欣：做分解。

194. 老師：十八可把它分解成什麼數相乘？二跟九，九是一個合數，於是我們必需再把它做一個分解。九可分解成什麼呢？

195. 學生：三跟三。

196. 老師：同學們，現在請你講出來，你的樹狀圖其端點的數是什麼？

197. 老師：二、二、三、三對不對？

198. 學生：對。

199. 老師：二乘二乘三乘三代表什麼？

200. 學生：三十六的質因數連乘。

201. 老師：現在老師寫一個數字，請同學猜猜看。有兩個數，按數的質因數分解法，得到第一個數的質因數連乘是二乘三乘五，另外一個數是二乘三乘三乘七，請問同學，第一個數原本是多少？

202. 學生：第一個數原本是三十。

203. 老師：好，你們很厲害。第二個數呢？

204. 學生：一百二十六。

205. 老師：為什麼是一百二十六？

206. 學生：因為相乘嘛，二乘三得六，六再乘三，得十八，十八再乘七，得一百二十六。

207. 老師：現在要請兩位同學幫忙，請起立，請一人拿一個角落，抬高一點。現在老師指給同學看，左邊一行有四個數，分別是 72，24，18，12，右邊一行有四個選項。「A」是 $2 \times 3 \times 3$ ，「B」是 $2 \times 2 \times 2 \times 3$ ，「C」是 $2 \times 2 \times 3$ ，「D」是， $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ，現在老師要同學連連看，懂嗎？

72	(A) $2 \times 3 \times 3$
24	(B) $2 \times 2 \times 2 \times 3$
18	(C) $2 \times 2 \times 3$
12	(D) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

208. 學生：懂。

209. 老師：你會不會連？

210. 學生：會。

211. 老師：好，來幫老師擦一下黑板。

212. 老師：你們把答案寫在你的紙上。72 要連 A、B、C、D 哪一個答案？24 要連那一個答案？18 要連哪一個答案？12 要連哪一個答案？

213. 老師：寫好了嗎？

214. 學生：寫好了。

215. 老師：同學，請你把 72 的答案告訴我！

216. 學生：D。

217. 老師：對嗎？

218. 學生：對。

219. 老師：D。24 呢？

220. 學生：B。

221. 老師：24 是 B，18 呢？

222. 學生：A。

223. 老師：A，12 呢？

224. 學生：C。

225. 老師：C，好，你都做對了嗎？

226. 學生：對了。

227. 老師：做對的舉手，我們班很優秀喔！目前是下課時間，現在同學手放下來，把你的講義收到抽屜裡面。班長喊起立。

228. 學生：起立，敬禮。

229. 學生：謝謝老師。

【第二節】

230. 學生：起立，敬禮。

231. 學生：老師好。

232. 老師：同學好！

233. 老師：現在請同學們將講義拿出來，並將第三張放在最上面。

234. 老師：前一節課我們講過三十六的樹狀圖分解，對不對？

235. 學生：對。

236. 老師：三十六可以分解成兩個數相乘，是哪兩個數？二跟十八，或是三跟十二，或是四跟九，對不對？但是不管你如何分解三十六，成什麼形式的一個樹狀圖，其質因數連乘的結果都是怎麼樣？

237. 學生：都是一樣的。

238. 老師：因為「三十六」它的質因數連乘表徵都是一樣的，所以我們就用一種方式

即可。三十六的因數裡面最小的是哪一個數？陳振國，請你回答。

239. 振國：二。

240. 老師：於是我們從三十六的最小的因數開始，把三十六分解成二跟哪一個數相乘？

241. 振國：十八。

242. 老師：二跟十八相乘。十八也會有很多的因數，但是它的最小質因數是多少？

243. 振國：二。

244. 老師：所以我們在左邊的部份寫了一個二，右邊的部份我們就寫上九。請問同學「九」的最小質因數是哪一個？

245. 振國：三。

246. 老師：三。

247. 老師：現在我們就把三十六的質因數的連乘寫出來。我們再複習一次，三十六這個數的質因數連乘到底是哪些數相乘呢？

248. 老師：一起講。

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

249. 學生：二乘二乘三乘三。

250. 老師：好，同學們都答對了，是二乘二乘三乘三，有沒有問題？

251. 老師：我們現在要用另外一個方法，同學們，你看這個算式跟樹狀圖有沒有一樣？

252. 老師：三十六這邊是一個除號。同樣的也是用最小的質因數來除它，用多少呢？

253. 學生：二。

254. 老師：然後三十六除二得到多少？

255. 學生：十八。

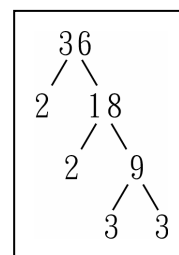
256. 老師：然後再除二得到二，九然後再除三…

257. 學生：三。

258. 老師：同學們，這種方法，你見過嗎？

259. 學生：見過。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 36} \\ 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$



260. 老師：我們在小學裡，有學過這個方法，叫做什麼？

261. 學生：短除法。

262. 老師：我們再來看一下短除法這個算式，有一個二，兩個二，一個三，兩個三，對不對？

263. 老師：好，我們按照樹狀圖的方式分解三十六，然後將這些數相乘起來，我們會得到，兩個二相乘，兩個三相乘。

264. 老師：這四個數相乘起來得到多少？

265. 學生：三十六。

266. 老師：請問同學，前一次老師用的方法稱做什麼方法？

267. 學生：樹狀圖分解法。

268. 老師：另外一個分解法叫做什麼？

269. 學生：短除法。

270. 老師：短除法跟我們的樹狀圖分解，你覺得它有沒有一樣？

271. 學生：有。

272. 老師：你們是會用樹狀圖分解法呢？還是用短除法？

273. 學生：樹狀圖與短除法。

274. 老師：兩個都會？

275. 學生：會。

276. 老師：確定？

277. 學生：確定。

278. 老師：好，你們把練習單(三)拿出來，先寫第三張。

279. 老師：同學們，把六十四這個數，利用樹狀圖與短除法做分解。

280. 老師：短除法寫了嗎？

畫出 64 的樹狀圖與短除法

281. 學生：寫了。

282. 老師：你的短除法寫了，你的樹狀圖寫了沒有？你把你的樹狀圖分解法寫在白板上面。

283. 老師：好，同學們請注意這邊，老師剛才請同學用兩種方法做「六十四」的分解，一個叫做樹狀圖分解法，另外一個方法叫做短除法。

284. 老師：我們先來看樹狀圖分解法，首先用六十四最小的質因數來除它。六十四的質因數最小的是那一個？

285. 學生：二。

286. 老師：所以先用二來除，喔，他這個方法也可以，他是用多少？

287. 學生：八。

288. 老師：八可不可以呢？

289. 學生：可以。

290. 老師：六十四等於八乘八。八可分解成什麼呢？

291. 學生：二跟四。

292. 老師：四可以分解成多少呢？

293. 學生：二。

294. 老師：同學們，有端點的地方有幾個二？五個還是六個？

295. 學生：六個。

296. 老師：好！有六個。

297. 老師：另一位同學用什麼方法？

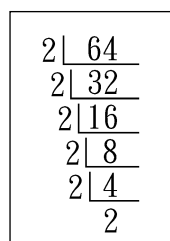
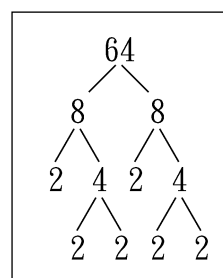
298. 學生：短除法。

299. 老師：短除法是必需利用最小的什麼來除？

300. 學生：質數來做。

301. 老師：可不可以用合數？

302. 學生：不行。



303. 老師：剛才老師巡視了一下，發現有同學用「四」來除，用「四」來除對嗎？
304. 學生：不對。
305. 老師：四是什麼數？
306. 學生：合數。
307. 老師：合數就不能用了喔！我們必需用什麼數？
308. 學生：質數。
309. 老師：好，六十四除「二」得到什麼？
310. 學生：三十二。
311. 老師：三十二再用多少來除？
312. 學生：二。
313. 老師：二來除得到十六，十六再除二得到什麼？
314. 學生：八。
315. 老師：八用二來除得到四，四除二得二，因此我們會有幾個二？
316. 學生：有六個二。
317. 老師：那六十四就等於六個二相乘，對不對？
318. 老師：六十四的質因數連乘跟它的樹狀圖分解法有沒有一樣？
319. 學生：有。
320. 老師：好，謝謝你。你們看他寫的非常好喔，他剛才才聽老師講喔！六十四這個數第一次用什麼數來除？
321. 學生：二來除。
322. 老師：二放在左邊跟放在右邊有沒有關係？
323. 學生：沒有關係。
324. 老師：完全沒有關係。你寫對了，不錯喔！這邊是二，然後那邊是什麼？
325. 學生：三十二。

326. 老師：三十二可以用多少來除？

327. 學生：用一個二來除。

328. 老師：得十六，十六用二除得八，八用二除得四，四用二除得二，對不對？

329. 學生：對。

330. 老師：你們都會了嗎？

331. 學生：會。

332. 老師：現在我們來看徐政璿所寫的，坐在後面的同學，你們有沒有看到？

333. 學生：有。

334. 老師：拿好。請問同學徐政璿寫的有沒有標準？

335. 學生：有。

336. 老師：有，他寫的非常的標準，左邊的部份他先用了多少？

337. 學生：二。

338. 老師：然後得三十二，然後接著二、十六、二、八…這邊有點不太對，這邊應該是二，然後是四，我們把小的數字放在左邊，大的數字放在右邊，這邊有點不同，但是最後的結果是一致的。這些同學做的好不好？

339. 學生：好。

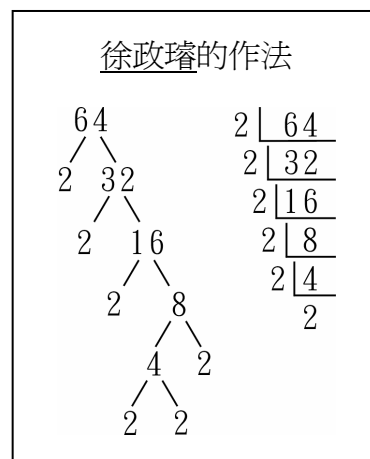
340. 老師：來鼓勵一下吧！

341. 老師：樹狀圖分解法跟短除法你都會了，我們現在要做一個比較困難的問題。請同學將練習單(四)拿出來。都準備好了嗎？

342. 學生：準備好了。

343. 老師：老師要同學先唸出甲數！

344. 學生：二乘二乘三。



練習單(四)

求甲數： $2 \times 2 \times 3$ 的所有因數

求乙數： $2 \times 3 \times 3$ 的所有因數

345. 老師：甲數是二乘二乘三的連乘，那乙數呢？

346. 學生：二乘三乘三。

347. 老師：乙數它是二乘三乘三的連乘，對不對？

348. 學生：對。

349. 老師：每一個數我們都可以把它變成質因數連乘，現在老師就要問同學一個問題，像甲數寫成是二乘二乘三，請問你們，它的因數有那些？

350. 學生：一、二、三、四、六、十二。

351. 老師：胡志豪講出來。好，我們就請胡志豪說明，請你站起來，甲數的因數有哪些？慢慢講喔！

352. 志豪：一。

353. 老師：他說有一。

354. 志豪：二。

355. 老師：他說有二。

356. 志豪：三。

357. 老師：有三。

358. 志豪：四。

359. 老師：有四。

360. 志豪：六。

361. 老師：有六。

362. 志豪：十二。

363. 老師：有十二，好，請坐。徐政璿，是不是你也做出來了？

364. 政璿：是。

365. 老師：徐政璿，老師不要問你的答案，老師要問：你的答案有沒有跟他一樣？

366. 政璿：跟他一樣。

367. 老師：你是怎麼知道甲數的因數有六個，為什麼？你為什麼知道，你為什麼會說甲數的因數是這六個？請你站起來回答！

368. 老師：因為二乘二乘三等於多少？

369. 政璿：十二。

370. 老師：甲數是十二，所以甲數的因數就會有一、二、三、四、六、十二，是不是這樣子？好！不錯，同學們請拍拍手，給他們鼓勵一下，兩位同學都講的很好。我們來看乙數的部份，請問乙數的因數有哪些？

371. 學生：一、二、三、六、九、十八。

372. 老師：好，這一次老師聽到很多、很多的同學都答出來了。十八的因數有哪些？

373. 學生：有一、二、三、六、九、十八。

374. 老師：甲數是十二，乙數是十八，好，同學們都能夠找出其各別的因數出來。

375. 老師：現在老師要出一個問題，同樣給予兩個數，但是這兩個數比較不一樣，你們看到沒有，甲數你猜得出來是多少嗎？

376. 老師：甲數是二乘二乘三乘七乘七，你猜的出來這個數是多少嗎？要不要趕快算一下？每一個同學都算一下？甲數是多少？

題目：

$$\text{甲數} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$$

$$\text{乙數} = 2 \times 2 \times 3$$

377. 學生：八百八十二。

378. 老師：同學說甲數是八百八十二。請問同學，甲數，它的因數有哪些？

379. 學生：一，二……。

380. 老師：好，等一下，有一個同學有答案了。來，請你站起來回答。

381. 老師：他說甲數如果是二乘二乘三乘七的話，它的因數，第一個是多少？

382. 學生：一。

383. 老師：正確。還有什麼？

384. 學生：八八二。

385. 老師：還有八八二，除了八八二之外，還有什麼數呢？
386. 學生：四四一。
387. 老師：四四一，那還有沒有？
388. 學生：二二零。
389. 老師：二二零對嗎，八八二可以除盡二二零嗎？
390. 學生：四一四。
391. 老師：是四四一還是四一四？迷糊了喔！前面他答對兩個，後面的呢？有沒有同學可以答的出來？
392. 學生：六十三。
393. 老師：告訴我為什麼是？
394. 學生：六十三。
395. 老師：有同學說六十三，你怎麼知道是六十三？
396. 老師：有嗎？六十三有嗎？
397. 老師：六十三沒有。
398. 學生：有三。
399. 老師：好，三，張修瑜講有三。
400. 老師：對！有三。
401. 學生：二百九十四。
402. 老師：同學說二百九十四，好二百九十四，有沒有？
403. 學生：七。
404. 老師：好，剛才說同學說七。
405. 老師：有。
406. 老師：老師說七有。
407. 學生：九。

408. 老師：九也會有嗎？
409. 學生：確定。
410. 老師：八八二可以除九嗎？九可以嗎？
411. 學生：可以？
412. 老師：八八二除九可以除的盡嗎？我們來看一下，八八二除九，張修瑜，除得盡嗎？一百二十六，九九八十一，九九八十一，七十二，好七十二，剛才說同學說九，十八，你這個數有沒有錯誤啊？我覺得這個數好像有錯誤？現在來我們把這邊擦掉，剛才同學說的這個數好像有說錯，重新驗證。
413. 學生：老師，是五百八十八才對。
414. 老師：對！老師就感覺同學說的數有錯嘛！現在老師把找某個數的所有因數的方法告訴你們，你們就會了嘛！
415. 老師：十二的質因數的連乘是什麼？
416. 學生：二乘二乘三。
417. 老師：十八這個質因數的連乘是什麼？
418. 學生：二乘三乘三。
419. 老師：現在我們先看甲數，甲數是十二，它的質因數連乘是多少？
420. 學生：二乘二乘三。
421. 老師：同學們看到這裡有一個什麼？它這邊有沒有一個二？
422. 學生：有。
423. 老師：這邊是不是有一個三？
424. 學生：有。
425. 老師：請問你們四呢？
426. 學生：沒有。
427. 老師：對！沒有四這個數字，但是我們可不可以找到有「因數四」的存在？

428. 學生：可以。

429. 老師：「因數四」可利用二乘二，是不是？

430. 老師：質因數連乘中，有沒有六這個數字？

431. 學生：沒有！

432. 老師：看不到六，但是我們也可以找到六啊，是不是？同學有沒有找到六？

433. 學生：有。

434. 老師：有沒有看到十二，這裡面沒有十二，但是我能不能湊出十二出來？

435. 學生：可以。

436. 老師：可以湊出十二。十二怎麼湊？

437. 學生：全部乘起來。

438. 老師：六是幾個數乘起來？

439. 學生：二個。

440. 老師：二個，二個數乘起來對不對？那四呢？

441. 學生：一個。

442. 老師：三呢？二呢？

443. 學生：一個。

444. 老師：一呢？一，有沒有在這裡面？

445. 學生：沒有。

446. 老師：為什麼它可以寫在這裡？因為一是所有數的因數，任何數除一都會得到什麼？

447. 學生：本身。

448. 老師：所以我們可以先把它寫出來？現在我們來看乙數，乙數是多少？

449. 學生：十八。

450. 老師：你能不能找出乙數的因數出來，可不可以？

12 的所有因數

1

2, 3

2×2 , 2×3

$2 \times 2 \times 3$

451. 學生：可以。

452. 老師：我們先把什麼寫上去，「一」寫上去，再來寫什麼？「二」，再來寫什麼？

453. 學生：三。

454. 老師：再來寫什麼？

455. 學生：六。

456. 老師：再來寫什麼？

457. 學生：九。

458. 老師：再來寫什麼？

459. 學生：十八。

460. 老師：那十八這個數，你覺得老師會畫幾個圈圈？

461. 學生：三個。

$18 = \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc$ $\bigcirc$ 代表 18 的質因數

462. 老師：三個圈圈，為什麼會畫三個圈圈？請你站起來回答。

463. 學生：三個數相乘。

464. 老師：要畫三個圈圈？「六」這個數，你覺得老師會畫幾個圈圈？

465. 學生：兩個。

466. 老師：二乘三就得到多少？

467. 學生：六。

$6 = \bigcirc \times \bigcirc$ $\bigcirc$ 代表 6 的質因數

468. 老師：「九」這個數，你覺得老師會劃幾個圈圈？

469. 學生：兩個。

470. 老師：三乘三是得到多少？

471. 學生：九。

472. 老師：好，請坐，呂紹賓，老師這邊為什麼畫三個圈圈？

473. 老師：因為我從 18 的質因數連乘裡面找幾個數出來相乘…

474. 紹賓：三個數。

475. 老師：這三個數相乘就得到多少？

476. 紹賓：十八。

477. 老師：好，請坐，現在老師寫出一個數，這個數是二乘二乘三乘七乘七，請問同學它的因數有那些？請你們大聲講一下。

478. 學生：一。

479. 老師：好。

480. 學生：二。

481. 老師：好。

482. 學生：三與七。

$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$ 的所有因數
1
2, 3, 7
$2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 7, 3 \times 7, 7 \times 7$
$2 \times 3 \times 7, 2 \times 2 \times 3, 2 \times 2 \times 7, 3 \times 7 \times 7$
$2 \times 2 \times 3 \times 7, 2 \times 3 \times 3 \times 7$
$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$

483. 老師：我們剛才所做的是，代表從 $2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$ 的式子中，找出一些數出來相乘，第一次要找幾個出來？

484. 學生：一個數出來。

485. 老師：一個數找完了之後，要找幾個數？

486. 學生：二個。

487. 老師：二個數要怎麼找？我們從最小的數相乘開始，二乘二可以嗎？

488. 學生：可以。

489. 老師：再來，二乘三可以嗎？

490. 學生：可以。

491. 老師：可以得到什麼？得到六。

492. 老師：二乘七可以嗎？

493. 學生：可以。

494. 老師：得到十四。好，還有沒有？

495. 學生：有。

496. 老師：是什麼？

497. 學生：三乘七。
498. 老師：三乘七，還有嗎？還有什麼？
499. 學生：七乘七。
500. 老師：七乘七得到什麼？四十九是不是？有沒有三個數相乘的？
501. 學生：有。
502. 老師：三個數的部份是哪三個？
503. 學生：二乘二乘三。
504. 老師：好，二乘二乘三得到十二，還有？
505. 學生：二乘二乘七。
506. 老師：二乘二乘七可以嗎？
507. 學生：可以。
508. 老師：二乘二乘七得二十八，對不對？
509. 老師：可以有二乘三乘七嗎？二乘三乘七可以嗎？
510. 學生：可以。
511. 老師：二乘三乘七是多少？
512. 學生：四十二。
513. 老師：二乘三乘七得四十二，還有沒有三個數相乘的？
514. 學生：三乘七乘七。
515. 老師：三乘七乘七。三乘七乘七是多少？一百四十七。是幾個數相乘的？
516. 學生：三個。
517. 老師：剛才所寫的是三個數相乘，有沒有四個數相乘的？
518. 學生：有。
519. 老師：哪些是四個數相乘的？
520. 學生：二乘二乘三乘七。

521. 老師：二乘二乘三乘七得到多少？

522. 學生：八十四。

523. 老師：二乘三乘七乘七，得到多少？

524. 學生：二百九十四。

525. 老師：最後一個是幾個數相乘？

526. 學生：五個數。

527. 老師：這五個數相乘相乘的形式是什麼？

528. 學生：二乘二乘三乘七乘七。

529. 老師：五個數相乘得多少？

530. 學生：五八八，因為剛才老師有被同學有騙了一下，所以老師必須先算一下到底是多少。

531. 老師：五八八。

532. 老師：同學們，你看甲數的因數個數有幾個？

533. 老師：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、十一、十二、十三、十四、十五、十六，有十六個因數耶！好多，是不是？

534. 學生：是。

535. 老師：有十六個因數，如果你把它變成五八八之後，用國小所教找因數的方法可以用嗎？

536. 學生：不行。

537. 老師：樹狀圖分解的目的是將一數變成其質因數的連乘，並可藉由此法找出其所有因數。

538. 老師：你們剛才有沒有注意到老師找某一數的因數是怎麼找的？先把一數寫成其質因數的連乘，然後從這個質因數連乘形式裡面找。第一次要找幾個數？

539. 學生：一個。

540. 老師：第二次找幾個數？
541. 學生：兩個。
542. 老師：第三次，老師應該這邊畫幾個圈圈？
543. 學生：三個。
544. 老師：為什麼要畫三個圈圈？喔！這邊是它們三個數的什麼？
545. 學生：乘積。
546. 老師：這邊呢？幾個圈圈？
547. 學生：四個。
548. 老師：這邊幾個圈圈？
549. 學生：四個。
550. 老師：最後一個是幾個？
551. 學生：五個。
552. 老師：好，那你會不會了？
553. 學生：會。
554. 老師：我們現在來再問同學，請問同學如果有一個數的質因數連乘是二乘二乘三，請問你們它的所有因數是什麼？會寫的同学舉手？姜亭安，你會嗎？好，手放下，老師不問同學了，可以一起講嗎？
555. 學生：可以。
556. 老師：二乘二乘三這個數，我們要找它的所有因數，第一個步驟是要找什麼？
557. 學生：一。
558. 老師：好，第一個是一，第二個？
559. 學生：二。
560. 老師：二，第三個？
561. 學生：三。

$2 \times 2 \times 3$ 的所有因數

1

2, 3

2×2 , 2×3

$2 \times 2 \times 3$

562. 老師：三，很好。

563. 學生：四。

564. 老師：四，再來。

565. 學生：六。

566. 老師：六。

567. 學生：九。

568. 老師：九。

569. 學生：十二。

570. 老師：十二，好，我們很快的就把它的所有因數找出來了，對不對？

571. 老師：現在請同學拿出最後一張講義出來，甲數現在是二十四，乙數是什麼？

學生練習單(五)

甲數：24

請找出甲數的所有因數

乙數： $2 \times 3 \times 3$

請找出乙數的所有因數

572. 學生：二乘三乘三。

573. 老師：現在請你們按題意作答，如果甲數是二十四，

它的因數是什麼？如果乙數是二乘三乘三，它的因數是什麼？現在請你們把它寫出來。

574. 老師：做完了沒有？

575. 老師：我們現在來看一下，甲數的因數呢有哪些？

576. 老師：二十四它可以把分解成二乘二乘二乘三，它的質因數連乘是黑板上這樣子寫的，請問同學，二十四的所有因數到底是什麼？現在請同學唸出來，開始。

577. 學生：一、二、三、四、六、八、十二、二十四。

578. 老師：好！同學們你寫的有沒有跟老師一樣？

579. 學生：有。

580. 老師：請問同學二乘三乘三是什麼？

581. 學生：十八。

582. 老師：十八的因數呢？

583. 學生：一、二、三、六、九、十八。

584. 老師：我們現在要把它們共同的因數圈起來，它們的共同因數是哪些？

585. 學生：一、二、三、六。

586. 老師：好！還有沒有其它的？

587. 學生：沒有。

588. 老師：現在請同學把筆放下，講義收到抽屜裡面，今天同學表現的非常的好，老師講的有沒有聽懂？

589. 學生：有。

590. 老師：老師非常的高興，今天老師上課所講「兩數各別的質因數表徵，求兩數公因數」，一講你們就會了，同學們表現的非常好。現在是下課時間，班長請你喊起立。

591. 學生：起立，敬禮。

592. 學生：謝謝老師。

參、教學說明

今天我們上了兩節的數學課。這兩節數學課的教學目標是因數與公因數。目前各位所看到的這群學生是小六的畢業生，剛剛進入國中，是本校國一新生，這群孩子在小學裡所用的數學課本是依據八十二年版數學課程標準所編製的課本，但是進入國中之後所用的課本是依據九年一貫課程數學暫行綱要所編製的課本。在這兩節課裡面，我們所做的工作是因數與公因數的課程銜接。第一節課裡，教學重點是在察覺學生是否具有因數的能力，察覺學生是否有求一個數的因數以及兩個數求其公因數的能力。經過剛才上課的檢驗，學生對於找一個數的因數以及找兩個數的公因數的求法，他們

都非常有概念，也做的非常的好。接下來是進入國中課程樹狀圖分解法，樹狀圖分解法裡面，我們企圖將一個數分解成樹狀圖形式，最主要的目的是讓學生能夠瞭解如何讓一個數分解成質因數的連乘。數的質因數的連乘表徵在國中這個階段是非常重要的。我發現到經第一節課的講解之後，學生已經具備了這種能力而且做的相當的不錯。

這群孩子在小學求學的過程中，有學過利用短除法找公因數的方法，短除法跟樹狀圖分解法這兩個法則有異曲同工之妙。樹狀圖分解法、短除法我一併在第一節課裡面做一個講解，其實就是要做一個連結，讓孩子們知道短除法實際上跟樹狀圖分解法是一致的，讓他們能夠在學習的過程當中不致於把樹狀圖分解法和短除法看成兩種方法。在這次的教學裡，我把它們兩個做一個連結，讓孩子能夠隨時的去利用它，利用了之後，就能夠將一個數分解成其質因數的連乘。孩子們在國中求學階段裡具備這樣一個能力的話，之後處理一些數學問題就比較容易。我在第二節課的教學目標是利用一個數的質因數連乘求它們的所有公因數，我引用一個數字，這個數字就是二乘二乘三乘七，它是一個相當大的數，並以一個質因數連乘的表徵呈現，我在這裡將此數以質因數連乘表徵呈現，主要是希望學生不要用過去小學求因數的方法，找這個數的因數。在第二節課一開始，提到二乘二乘三這個數，學生們很容易看的出來，這個數的數值就是十二。他們直覺上就會利用國小所學過的除法或列舉法則，把它的因數找到，但是如果換成了二乘二乘三乘七這個數的話，這個數乘起來的值是五百八十八，五百八十八這個數如果要用除法法則或列舉法則找因數，其實是不太容易能夠求到的。此次教學，特別在這裡提起，我最主要的目的是希望學生不要用列舉的方法找出它的因數出來。但是我們發現到學生做「二乘二乘三乘七乘七」這個數計算的時候，有一個學生先提出此數八百八十二，他講出這數是八百八十二很久之後，其他的孩子也沒有查覺到這個數不是八百八十二，這件事情代表了這班的學生對於估算「數」的這個能力，目前還是顯現不足。對於數的「量」感部份的能力也是不足的，我們國中老師教學上對這部份應該對孩子這些能力加強。

肆、教學後的省思

今天教學的主題是「因數、公因數」，國小及國中都有這個教材，只是對「因數、公因數」的解讀不同，導至學生有不同的解題策略。教學班級的學生剛升入國一，他們在國小階段使用的是依據 82 年課程標準所編寫的課本，跨入國中後，使用的是依據九年一貫課程暫行綱要所編寫的課本，如何讓這群剛從國小畢業的孩子，順利接續至國中課程，就是今天教學的重點。

第一節課，教師首先復習國小階段的教材，透過布題『寫出 12 的所有因數』，檢驗學生是否理解國小階段所學習「因數」的意義，多數學生都能透過整除的方式，找出 12 的所有因數。教師接著布題『寫出 12、18 所有的公因數』，檢驗學生是否理解國小階段所學習「公因數」的意義，多數學生都能透過整除的方式，分別找出 12 和 18 的所有因數，再找出 12 和 18 的所有公因數。

接著進行國中教材的部分，教師先幫助學生將 12 改寫成質因數的連乘積，部份學生透過樹狀圖法算出答案，部份學生透過短除法算出答案，接著教師限制必須由小至大寫出質因數的連乘積，幫助學生發現使用不同方法算出質因數連乘積的表示法為唯一，並讓學生發表短除法與樹狀圖分解的差異與相同的地方。

因為樹狀圖法是採隨機分解的解題方式，而短除法是較有系統且較有效率的解題方式，因此在將 12 改寫成質因數連乘積的教學活動中，建議國中教師先引入樹狀圖法，接著幫助學生發現質因數連乘積的表示法為唯一，再要求學生透過短除法，依由小至大的順序，將一數分解為質因數的連乘積。

接著教師布題『 $15=3\times 5$ ，寫出 15 所有的因數』，多數學童利用是否能被 15 整除的舊經驗，求出 15 所有的因數，教師接著透過分段布題，逐一詢問「1 是不是 15 的因數、3 是不是 15 的因數、5 是不是 15 的因數、 3×5 是不是 15 的因數？」，希望學生看著質因數連乘積『 3×5 』，就能寫出 15 所有的因數。

第二節課教學的重點是能利用質因數分解法或短除法求最大公因數，教師先布題『甲數 $=2\times2\times3$ 、乙數 $=2\times3\times3$ ，求甲數與乙數的公因數及最大公因數』，有了上節課看著一數質因數的連乘積，就能寫出該數所有因數的解題經驗，學生先分別找出甲數和乙數所有的因數，再找出共同的因數，也就是公因數，再由公因數中找出最大公因數 2×3 。

接著教師幫助學生發現，最大公因數 2×3 就是甲數和乙數共同質因數的連乘積，希望學生能夠直接看著甲數和乙數質因數連乘積的算式，就能找出甲數和乙數的最大公因數，並能說出甲數和乙數共同質因數的連乘積就是甲數和乙數的最大公因數的理由。

多數國中教師並沒有經過上述教學流程，幫助學生透過國小的舊經驗理解利用質因數分解法找最大公因數的意義，而直接告訴學生兩數共同質因數的連乘積就是兩數的最大公因數，讓學生覺得國小和國中學習找最大公因數的方法無關。建議國中教師在教學時，能透過國小的舊經驗，發展出更有效率的解題策略。

最後教師呈現利用質因數分解法求最大公因數的紀錄，幫助學生改用短除法解題，透過逐一比對的方式，說明並澄清兩種解法的意義，幫助學生發現利用短除法可以更有效地求出兩數的最大公因數。

透過上述教學流程，教師發現學生能自發性的解決問題，並理解解題的意義，學生學習的表現，超出教師的預期，讓我有很深的感觸，只要透過適當的布題，不需要提供口訣，或程序性解題的步驟，學生也能自行解決問題，並理解解題的意義。

公因數與最大公因數

壹、教學活動設計

一、教學年級：七年級下學期

二、教 學 者：桃園縣立新屋國中 楊椿 老師

三、教學目標：

1. 利用質因數連乘積，寫出一數的所有因數。
2. 引入互質的意義。
3. 利用質因數連乘積，找出兩數的公因數及最大公因數。

四、活動目標：

【第一節】

1. 利用質因數連乘積 ($a \times b$ ， a 、 b 是相異質數)，寫出一數的所有因數。
2. 利用質因數連乘積 ($a \times b \times c$ ， $a \times a \times b$ ， $a \times b \times b$ ， a 、 b 、 c 是相異質數)，寫出一數的所有因數。
3. 利用質因數連乘積（四個以上質因數的連乘積），寫出一數的所有因數。

【第二節】

1. 引入互質的意義。
2. 利用記成質因數連乘積的兩數，求兩數的公因數。
3. 利用記成質因數連乘積的兩數，求兩數的最大公因數。

五、教學概要說明：

國小學生是利用整除的概念，透過嘗試錯誤的方式分別求出兩數所有的因數，其中共同的因數就是這兩數的公因數，而最大的那個公因數就是這兩數的最大公因數。國中學生是利用質數的概念，透過質因數分解的算式直接求出這兩個數的最大公因數，本教學的重點是連絡兩者間的關係。

第一節課，本活動先復習如何將一數記成質因數的連乘積，再利用質因數連乘積的算式，直接寫出該數所有的因數，為了讓學生熟悉不同質因數連乘積找因數的問題，本活動先討論兩個質因數相乘的問題（ $a \times b$ ， a 、 b 是相異質數），再討論三個質因數相乘的問題（ $a \times b \times c$ ， $a \times a \times b$ ， $a \times b \times b$ ， a 、 b 、 c 是相異質數），最後討論四個以上質因數相乘的問題。

第二節課，本活動先討論兩數互質的意義，接著呈現質因數連乘積的兩數，要求學生求出這兩數的因數及最大公因數，並發現共同質因數的連乘積就是這兩數的最大公因數，再透過短除法的記錄，溝通如何利用短除法求兩數的最大公因數，最後給兩個數字，要求學生求這兩個數字的最大公因數。

六、教學活動設計：

【第一節】

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
◎復習活動	1. 將 15 記成質因數的連乘積。 2. $15 = 3 \times 5$ 1 是不是 15 的因數？ 3 是不是 15 的因數？ 5 是不是 15 的因數？ 3×5 是不是 15 的因數？ 15 的因數有哪些？	• 如果學生記成 $15 = 5 \times 3$ ，教師應先接受，並提醒學生最好數字依由小到大的順序排列。 • 如果學生無法解題，教師可以追問『 $15 \div 3 = 5$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問『 $15 \div 5 = 3$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問『 $3 \times 5 = 15$ ， 3×5 是 15 的因數嗎？』。	• 能記成 $15 = 3 \times 5$ • 能說出 1、3、5、 3×5 都是 15 的因數。 • 能說出 15 的因

	3. $甲 = 2 \times 3 \times 5$ 1 是甲的因數嗎？ 2 是甲的因數嗎？ 3 是甲的因數嗎？ 5 是甲的因數嗎？ 2×3 是甲的因數嗎？ 2×5 是甲的因數嗎？ 3×5 是甲的因數嗎？	• 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$甲 = 2 \times 3 \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$，$甲 \div 2 = 3 \times 5$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$甲 = 2 \times 3 \times 5$ $= (2 \times 3) \times 5$， $= (3 \times 2) \times 5$ $= 3 \times (2 \times 5)$ $甲 \div 3 = 2 \times 5$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$甲 = 2 \times 3 \times 5$ $= (2 \times 3) \times 5$， $甲 \div 5 = 2 \times 3$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$甲 = 2 \times 3 \times 5$ $= (2 \times 3) \times 5$， $甲 \div (2 \times 3) = 5$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$甲 = 2 \times 3 \times 5$ $= 2 \times (3 \times 5)$， $= 2 \times (5 \times 3)$ $= (2 \times 5) \times 3$ $甲 \div (2 \times 5) = 3$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教	數有哪些。 • 能說出 1、2、3、5、2×3、2×5、3×5、$2 \times 3 \times 5$ 都是甲的因數。
--	---	---	--

	$2 \times 3 \times 5$ 是甲的因數嗎？	師可以追問： 『$甲 = 2 \times 3 \times 5$ $= 2 \times (3 \times 5)$， $甲 \div (3 \times 5) = 2$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$甲 = 2 \times 3 \times 5 = 30$， $2 \times 3 \times 5$ 是 30 的因數嗎？ $2 \times 3 \times 5$ 是甲的因數嗎？』。	
	4. $甲 = 2 \times 3 \times 5$ 看著質因數連乘積， 你能夠直接說出甲的 因數有哪些嗎？ 說說看，你怎麼知道的？	• 如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引導學生找出甲的因數： 1 是甲的因數嗎？ 任意一個質因數 2、3、5 都是甲的因數嗎？ 任意兩個質因數的乘積 2×3、2×5、3×5 都是甲的因數嗎？ 任意三個質因數的乘積 $2 \times 3 \times 5$ 是甲的因數嗎？	• 能說出甲的因數有哪些。 • 能說出如何找出甲的因數有哪些。
	5. $乙 = 2 \times 3 \times 17$ $丙 = 7 \times 13 \times 17$ $丁 = 5 \times 7 \times 13$ 看著質因數連乘積， 乙、丙、丁的因數有 哪些？ 說說看，你怎麼知道的？	• 教師可以要求學生分組做答，再一起討論。	• 能說出乙、丙、丁的因數有哪些。
	6. $戊 = 2 \times 2 \times 3$ 看著質因數連乘積，	• 如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引	• 能說出戊的因數有哪些。

	戊的因數有哪些？ 說說看，你怎麼知道的？ 7. $己 = 3 \times 5 \times 17 \times 19$ 1 是己的因數嗎？ 3 是己的因數嗎？ 5 是己的因數嗎？ 17 是己的因數嗎？ 19 是己的因數嗎？ 3×5 是己的因數嗎？ 3×17 是己的因數嗎？ 3×19 是己的因數嗎？ 5×17 是己的因數嗎？ 5×19 是己的因數嗎？ 17×19 是己的因數嗎？ $3 \times 5 \times 17$ 是己的因數嗎？ $3 \times 5 \times 19$ 是己的因數嗎？ $3 \times 17 \times 19$ 是己的因數嗎？ $5 \times 17 \times 19$ 是己的因數嗎？	導學生找出戊的因數： 1 是戊的因數嗎？ 任意一個質因數 2、3 都是戊的因數嗎？ 任意兩個質因數的乘積 2×2、2×3 都是戊的因數嗎？ 任意三個質因數的乘積 $2 \times 2 \times 3$ 是戊的因數嗎？ • 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$己 = 3 \times 5 \times 17 \times 19$ $= 3 \times (5 \times 17 \times 19)$， $己 \div 3 = 5 \times 17 \times 19$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$己 = 3 \times 5 \times 17 \times 19$ $= (3 \times 5) \times 17 \times 19$， $己 \div (3 \times 5) = 17 \times 19$ 嗎？』。 • 如果學生無法解題，教師可以追問： 『$己 = 3 \times 5 \times 17 \times 19$ $= (3 \times 5 \times 17) \times 19$， $己 \div (3 \times 5 \times 17) = 19$ 嗎？』。	• 能說出如何找出戊的因數有哪些。 • 能說出 1、3、5、17、19、3×5、3×17、3×19、5×17、5×19、17×19、$3 \times 5 \times 17$、$3 \times 5 \times 19$、$3 \times 17 \times 19$、$5 \times 17 \times 19$ 都是己的因數。
--	--	--	---

	數嗎？ $3 \times 5 \times 17 \times 19$ 是己的因數嗎？	如果學生無法解題，教師可以追問： 『$己 = 3 \times 5 \times 17 \times 19 = 4845$ 4845 是己的因數嗎？ $3 \times 5 \times 17 \times 19$ 是己的因數嗎？』。	
	8. $己 = 3 \times 5 \times 17 \times 19$ 看著質因數連乘積， 你能夠直接說出己的 因數有哪些嗎？ 說說看，你怎麼知道的？	如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引導學生找出己的因數： 1 是己的因數嗎？ 任意一個質因數 3、5、17、19 都是己的因數嗎？ 任意兩個質因數的乘積 3×5、3×17、3×19、5×17、5×19、17×19 都是己的因數嗎？ 任意三個質因數的乘積 $3 \times 5 \times 17$、$3 \times 5 \times 19$、$3 \times 17 \times 19$、$5 \times 17 \times 19$ 都是己的因數嗎？ 任意四個質因數的乘積 $3 \times 5 \times 17 \times 19$ 是己的因數嗎？	- 能說出己的因數有哪些。 - 能說出如何找出己的因數有哪些。
	9. $庚 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ 看著質因數連乘積， 庚的因數有哪些？ 說說看，你怎麼知道的？	如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引導學生找出庚的因數： 1 是庚的因數嗎？ 任意一個相異質因數 2、3、5 都是庚的因數嗎？	- 能說出庚的因數有哪些。 - 能說出如何找出庚的因數有哪些。

		任意兩個質因數的乘積 2×2、2×3、2×5、3×5 都是庚的因數嗎？ 任意三個質因數的乘積 $2 \times 2 \times 3$、$2 \times 2 \times 5$、$2 \times 3 \times 5$ 都是庚的因數嗎？ 任意四個質因數的乘積 $2 \times 2 \times 3 \times 5$ 是庚因數嗎？	
	10. 辛 = $2 \times 2 \times 2 \times 5$ 看著質因數連乘積，辛的因數有哪些？ 說說看，你怎麼知道的？	• 如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引導學生找出辛的因數： 1 是辛的因數嗎？ 任意一個相異質因數 2、5 都是辛的因數嗎？ 任意兩個質因數的乘積 2×2、2×5 都是辛的因數嗎？ 任意三個質因數的乘積 $2 \times 2 \times 2$、$2 \times 2 \times 5$ 都是辛的因數嗎？ 任意四個質因數的乘積 $2 \times 2 \times 2 \times 5$ 是辛的因數嗎？	• 能說出辛的因數有哪些。 • 能說出如何找出辛的因數有哪些。
	11. 壬 = $2 \times 2 \times 3 \times 3$ 看著質因數連乘積，壬的因數有哪些？ 說說看，你怎麼知道的？	• 如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引導學生找出壬的因數： 1 是壬的因數嗎？ 任意一個相異質因數 2、3 都是壬的因數嗎？ 任意兩個質因數的乘積 2×2、2×3、3×3 都是壬的因數嗎？ 任意三個質因數的乘積	• 能說出壬的因數有哪些。 • 能說出如何找出壬的因數有哪些。

		$2 \times 2 \times 3$ 、 $2 \times 3 \times 3$ 都是壬的因數嗎？ 任意四個質因數的乘積 $2 \times 2 \times 3 \times 3$ 是壬的因數嗎？	
--	--	--	--

【第二節】

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
◎復習活動	1. 甲 = $2 \times 7 \times 31$ 看著質因數連乘積，甲的因數有哪些？ 說說看，你怎麼知道的？ 2. 60 的因數有哪些？ 說說看，你怎麼知道的？	- 學生可能的解法： (1) 透過嘗試 60 能整除哪些數的方式，求出 60 的所有因數。 - 如果學生使用該策略解題，教師應先接受，再要求學生先將 60 記成質因數連乘積，再看著質因數連乘積寫出 60 的因數。 (2) $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$， 60 的因數： 1、2、3、5、2×2、2×3、2×5、3×5、$2 \times 2 \times 3$、$2 \times 2 \times 5$、$2 \times 2 \times 3 \times 5$ - 若學生出現該解法，請學生說明解題的意義。	- 能說出甲的因數有哪些。 - 能說出如何找出甲的因數有哪些。 - 能說出 60 的因數有哪些。 - 能說出如何找出 60 的因數有哪些。

◎引入互質的意義	3. 273 的因數有哪些？ 說說看，你怎麼知道的？	- 學生可能的解法： (1) 透過嘗試 273 能整除哪些數的方式，求出 273 的所有因數。 - 如果學生使用該策略解題，教師應先接受，再要求學生先將 273 記成質因數連乘積，再看著質因數連乘積寫出 273 的因數。 (2) $273 = 3 \times 7 \times 13$， 273 的因數：1、3、7、13、$3 \times 7$、$3 \times 13$、$7 \times 13$、$3 \times 7 \times 13$ - 若學生出現該解法，請學生說明解題的意義。	- 能說出 273 的因數有哪些。 - 能說出如何找出 273 的因數有哪些。
	4. 12 和 18 的公因數有哪些？	問題的用意是引入互質的概念，只要是合理的算法都可以接受。	能說出 12 和 18 的公因數有哪些。
	5. 21 和 35 的公因數有哪些？	問題的用意是引入互質的概念，只要是合理的算法都可以接受。	能說出 21 和 35 的公因數有哪些。
	6. 21 和 37 的公因數有哪些？	問題的用意是引入互質的概念，只要是合理的算法都可以接受。	能說出 21 和 37 的公因數只有 1。
	7. 21 和 37 的公因數只有 1，我們稱 21 和 37 這兩個數互質。 8. 下面哪一組中的兩數互質？		能說出哪一組中的兩數互質

	(1)49、35 (2)8、21 (3)12、15 說說看，你怎麼知道的？		。
◎引入質因數分解法求最大公因數	9. 30 和 42 的最大公因數是多少？ 10. $30 = 2 \times 3 \times 5$ $42 = 2 \times 3 \times 7$ 看著質因數的連乘積，說說看 30 和 42 的最大公因數是多少？ 說說看，你怎麼知道的？ 11. $30 = 2 \times 3 \times 5$ $42 = 2 \times 3 \times 7$ 30 和 42 共同質因數 2×3 的乘積 6 就是 30 和 42 的最大公因數。 說說看，你怎麼知道的？	- 只要是合理的算法都可以接受。 - 如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引導學生找出最大公因數： 看著質因數的連乘積說說看： 30 的因數有哪些？ 42 的因數有哪些？ 30 和 42 的最大公因數是什麼？	- 能說出最大公因數是 6。 - 能說出最大公因數是 2×3 或 6。
◎引入短除法求最大公因數	13. $\begin{array}{r l} 2 & 2 \times 3 \times 5 \quad 2 \times 3 \times 7 \\ 3 & \quad 3 \times 5 \quad \quad 3 \times 7 \\ \hline & \quad \quad 5 \quad \quad \quad 7 \end{array}$ 最大公因數：$2 \times 3 = 6$ 上面是老師求 $2 \times 3 \times 5$ 和 $2 \times 3 \times 7$ 最大公因數的算法，說說	如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引導學生找出最大公因數： $30 = 2 \times 3 \times 5$ $42 = 2 \times 3 \times 7$ 30 和 42 的最大公因數	

	看，老師是怎樣算出答案的？	是共同質因數 2 和 3 的乘積 2×3。 $\begin{array}{r rr} 2 & 2 \times 3 \times 5 & 2 \times 3 \times 7 \\ 3 & 3 \times 5 & 3 \times 7 \\ \hline & 5 & 7 \end{array}$ 上面的算式先找出共同的質因數 2，再找出共同的質因數 3，因為沒有共同的質因數了，所以最大公因數是共同質因數 2 和 3 的乘積 2×3。	
14.	$\begin{array}{r rr} 2 & 30 & 42 \\ 3 & 15 & 21 \\ \hline & 5 & 7 \end{array}$ 最大公因數：$2 \times 3 = 6$ 上面是老師求 30 和 42 最大公因數的算法，說說看，老師是怎樣算出答案的？	• 如果學生無法解題，教師可以透過下列問話引導學生找出最大公因數： 30 和 42 的最大公因數是共同質因數的乘積。 2 是不是 30 和 42 共同的質因數？ 3 是不是 30 和 42 共同的質因數？ 還有沒有其它共同的質因數？ 如果沒有其它共同的質因數，2×3 是不是 30 和 42 的最大公因數？	
15.	30 和 546 的最大公因數是多少？ 用上面老師的算法算算看。 說說看，你怎麼知道的？		

貳、教學實錄

【第一節】

1. 班長：起立，立正，敬禮。
2. 學生：老師好！
3. 班長：坐下。
4. 老師：各位同學好！我們今天第一節上課的內容，是要將一個「數」，寫成它的所有質因數連乘。還沒有進入正課之前，我們先來複習上個禮拜所教過的樹狀圖分解法與短除法。
5. 老師：請問同學，上禮拜所教過的樹狀圖分解法與短除法，它的功用在哪裡？知道的同學請舉手。育辰，你來答。樹狀圖分解法跟短除法的目的在做什麼？
6. 育辰：找出一個數的質因數連乘。
7. 老師：好，我們給他鼓勵一下。樹狀圖分解法跟短除法的目的，就是把一個數寫成它的質數因數相乘。
8. 老師：現在老師要問一個問題，什麼是 15 的標準分解式？班長，請你講一下。
9. 班長：3 乘 5。
10. 老師：好，請坐。我們知道 15 的標準分解式是 3 乘 5。現在老師要問同學：「15 的因數有哪些？」這問題很簡單吧！15 的因數有哪些？來一起講。
11. 學生：1、3、5、15。
12. 老師：我們都知道 15 的因數，有 1、3、5、15。那麼，3 乘 5 的因數，有哪些？
13. 學生：1、3、5、15。
14. 老師：15 的因數，你怎麼找出來的？桓鈺，你是怎麼找的？
15. 桓鈺：就是兩個數、兩個數相乘。
16. 老師：兩個數相乘？

$\begin{aligned} 15 &= 1 \times 15 \\ &= 3 \times 5 \end{aligned}$
--

17. 桓鈺：1 乘以 15，然後 3 乘以 5。
18. 老師：喔！桓鈺講得很好。他說，找 15 的因數，只要任找兩個數相乘之後得到 15，這兩個數就分別是 15 的因數。你們認為對不對？
19. 學生：對。
20. 老師：桓鈺記得很清楚，很好。有沒有同學用小學的方法？一個一個的除。
21. 學生：沒有。
22. 老師：現在老師再問一個問題，請你找出「3 乘 7 的所有因數」。
23. 學生：1、3、7、21。
24. 老師：接著我們來做一個比較難的題目！
25. 老師：3 乘 5 乘 17 乘 19，它是不是一個數？
26. 學生：對。
27. 老師：它是一個數！這個數是很大的數，還是很小的數？
28. 學生：很大的數！
29. 老師：請問，你有沒有辦法找出它的所有因數？桓鈺，有沒有辦法？佳宇、雅芸，有沒有辦法找出來？
30. 老師：3 乘 5 乘 17 乘 19 是一個很大的數，這個數是一個合數，我們要把它的所有因數找出來，你們有沒有辦法？同學們好像不會喔！同學們這個題目不會做！好，沒有關係，我們先寫其他的練習。
31. 老師：你們把學習單拿出來，做第一題，第一題的題目是找出 2 乘 3 乘 5 的因數，並在學習單上把 2 乘 3 乘 5 的因數勾選出來。
- 練習一、請從下列選項中選出 $2 \times 3 \times 5$ 的因數

(1)1 (2)5 (3)7 (4) 2×3

(5) 2×5 (6) $2 \times 3 \times 5$ (7) $2 \times 5 \times 7$
32. 老師：琬瑜，你寫好了嗎？
33. 琬瑜：寫完了。

34. 老師：好，琬瑜，跟大家對一下答案。我們這邊有 7 個選項，有哪些是 2 乘 3 乘 5 的因數？琬瑜，你告訴大家。
35. 琬瑜：選項(1)、(2)、(4)、(5)、(6)。
36. 老師：答案選項是 1、2、4、5、6。同學們，對不對？
37. 學生：對。
38. 老師：現在老師要請問琬瑜，你為什麼知道答案就是選項 1、2、4、5、6？
39. 琬瑜：都是 2 乘 3 乘 5 的因數。
40. 老師：你的做法是什麼？
41. 琬瑜：用乘的啊！
42. 老師：用乘的？你是把 2 乘 3 乘 5，變成 30。選項 4 裡，2 乘 3 得到 6，你就用 30 除 6，結果 30 可以整除 6，那就表示 30 是 6 的倍數，6 就是 30 的因數，你是不是這樣子做的？
43. 琬瑜：是。
44. 老師：好，我們給她鼓掌一下。有沒有同學還有用其它的方法來寫的？你們是不是都是用除的？
45. 育敏：不是的。
46. 老師：好，育敏，你的做法是什麼？
47. 育敏：30 有 2、3、5 這三個質因數。2 乘 3 乘 5 是 30 的質因數連乘，要找 30 的因數，只要從乘式中拿下來就好了。
48. 老師：育敏，第一次要拿幾個？
49. 育敏：3 個。
50. 老師：把 2、3、5 各別拿下來就好了？對不對？
51. 學生：對。

$\begin{array}{c} 1 \\ 2, 3, 5 \\ 2 \times 3, 2 \times 5, 3 \times 5 \\ 2 \times 3 \times 5 \end{array}$
--

52. 老師：同學們注意一下，30 的質因數是 2、3、5。30 除 2 是多少？
53. 學生：15。
54. 老師：30 能整除 2。所以 2 就是 30 的因數。30 除 3 得 10。所以 30 整除 3。30 能不能整除 5 呢？
55. 學生：能。
56. 老師：所以育敏很快地就得到 30 的部份因數，育敏，30 的因數還有沒有？
57. 育敏：還有！
58. 老師：其他的因數，我們要怎麼找？
59. 老師：很簡單，只要找出這個數的質因數後，再把它質因數互乘起來。例如：2 乘 3 得 6。30 除 6 有沒有整除？
60. 育敏：有。
61. 老師：2 乘 3 是不是 30 這個數的質因數？
62. 育敏：是。
63. 老師：我們再來找第二個數。第二個數你可以寫什麼？可不可以寫 2 乘 5？
64. 育敏：可以。
65. 老師：還有什麼數可以寫的？能不能告訴我？
66. 育敏：3 乘 5。
67. 老師：還有什麼？
68. 育敏：全部。
69. 老師：好，全部乘起來。
70. 老師：現在，老師問同學，我們現在按照這種方式，把它的因數找出來，是不是全部的因數都找出來了呢？你覺得有沒有漏掉？
71. 育敏：沒有。
72. 學生：有。

73. 老師：到底有沒有漏掉？

74. 學生：有。

75. 學生：還有 1 啊！

76. 老師：還有一個什麼？

77. 學生：1。

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2, 3, 5 \\ 2 \times 3, 2 \times 5, 3 \times 5 \\ 2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

78. 老師：你們在小學都學過「1」是所有數的什麼？

79. 學生：因數。

80. 老師：所有數的因數！我們能不能漏掉它？

81. 學生：不可以。

82. 老師：對，我們不能漏掉它。

83. 老師：我們要找 2 乘 3 乘 5 這個數的所有因數，其實我們有一個簡單的方法，就是我們先把「1」寫出來，然後再寫出它們的相異質因數。相異質因數寫出來後，再把它各別的質因數互乘。

84. 老師：第三層做兩個相異質因數相乘。第四層做三個相異質因數相乘。有沒有第五層？

85. 學生：沒有。

86. 老師：你們現在做學習單上的練習二，找 3 乘 5

練習二、下列選項中的那些是 $3 \times 5 \times 17 \times 19$ 的因數
(1)2 (2)3 (3)18 (4)23 (5) 3×5 (6) 3×19 (7) 5×17 (8) 17×19
(9) $2 \times 3 \times 7$ (10) $3 \times 23 \times 19$ (11) $3 \times 5 \times 17 \times 19$

乘 17 乘 19 的因數。

87. 老師：我們核對一下答案。答案是選項(2)、(5)、(6)、(7)、(8)、(11)，對不對？

88. 學生：對。

89. 老師：練習二中第二個選項數值 3，是不是能被 3 乘 5 乘 17 乘 19 整除？

90. 學生：是。

91. 老師：所以我們第二個選項要打勾。同學們，第三個選項數值 18 要選，對不對？
92. 學生：不對。
93. 老師：為什麼不對？
94. 老師：因為 18 的質因數連乘積是 2 乘 3 乘 3。3 乘 5 乘 17 乘 19 這個數裡面有沒有 2？
95. 學生：沒有。
96. 老師：所以我們第三個選項也要打叉不要選。第四個選項是數值 23，23 是質數還是合數？
97. 學生：質數。
98. 老師：23 是質數！請問同學，23 這個質數能不能被 3 乘 5 乘 17 乘 19 整除，能不能？
99. 學生：不能。
100. 老師：所以我們第四個也不要選。第五個選項是數值 3 乘 5。3 有沒有在裡面？
101. 學生：有。
102. 老師：5 有沒有在裡面？
103. 學生：有。
104. 老師：所以要勾起來。第六個選項是數值數 3 乘 19。3 乘 19 有沒有被 3 乘 5 乘 17 乘 19 整除，有沒有？
105. 學生：有。
106. 老師：我們要不要勾？
107. 學生：要。
108. 老師：第七個選項是數值 5 乘 17，同學們，5 有沒有被 3 乘 5 乘 17 乘 19 整除？
109. 學生：有。
110. 老師：17 有沒有被 3 乘 5 乘 17 乘 19 整除？

111. 學生：有。
112. 老師：第七個選項，也勾起來。第八個選項的數值是什麼？
113. 學生：17 乘 19。
114. 老師：17 有沒有被 3 乘 5 乘 17 乘 19 整除？
115. 學生：有。
116. 老師：19 有沒有被 3 乘 5 乘 17 乘 19 整除？
117. 學生：有。
118. 老師：好，第八個選項也勾起來了！接著我們來看第九個選項，選項中有一個 2，
但是 2 能不能被 3 乘 5 乘 17 乘 19 整除？
119. 學生：不能。
120. 老師：所以選項九要不要選？
121. 學生：不要。
122. 老師：第十個選項是 3 乘 23 乘 19，原來的那個數裡面有沒有 23？
123. 學生：沒有。
124. 老師：所以我們第十個選項要不要劃掉？
125. 學生：要。
126. 老師：第十一個選項是 3 乘 5 乘 17 乘 19。3 乘 5 乘 17 乘 19 有沒有被原數整除？
127. 學生：有。
128. 老師：所以這個答案要不要選？
129. 學生：要。
130. 老師：子婷來幫我們總結一下最後的答案，有哪些選項？
131. 子婷：(2)、(5)、(6)、(7)、(8)、(11)。
132. 老師：同學們，對不對？
133. 學生：對。

134. 老師：好，我們給她鼓勵一下。

135. 老師：現在我們請同學重述一次 3 乘 5 乘 17 乘 19 所有因數的找法？查辰，你來說一下！

$3 \times 5 \times 17 \times 19$ 的所有因數 1 $3, 5, 17, 19$ $3 \times 5, 3 \times 17, 3 \times 19, 5 \times 17, 5 \times 19, 17 \times 19$ $, 3 \times 5 \times 17, 3 \times 5 \times 19, 5 \times 17 \times 19$ $3 \times 5 \times 17 \times 19$
--

136. 查辰：先寫 1。

137. 老師：喔！先寫 1。再來寫什麼？

138. 查辰：將 3 乘 5 乘 17 的質因數一一寫出來。

139. 老師：第三次是把 3 乘 5 乘 17 乘 19 的質因數怎麼樣？

140. 查辰：互乘起來。

141. 老師：把它們互乘起來。互乘之後會有幾個數？

142. 老師：是哪些數值互乘？

143. 學生：3 乘 5，3 乘 17，3 乘 19。

144. 老師：再來是 5。5 要乘以什麼？

145. 學生：5 乘 17，5 乘 19。

146. 老師：再來呢？

147. 學生：17 乘 19。

148. 老師：第四次呢？桓鈺是幾個數互乘？

149. 桓鈺：三個數。

150. 老師：哪三個數？

151. 桓鈺：3 乘 5 乘 19。

152. 老師：再來。

153. 桓鈺：3 乘 17 乘 19。

154. 老師：好，再來。

155. 桓鈺：5 乘 17 乘 19。

156. 老師：好，請同學們算算看 3 乘 5 乘 17 乘 19 這個數的因數總共有幾個？

157. 學生：16 個。

158. 老師：有 16 個喔！3 乘 5 乘 17 乘 19 的因數總共有 16 個。因數的個數有很多！

如果用小學除的方式來做，會很快嗎？可能會做不出來！可能會，但是很慢，用國中教方法的，有沒有很快？

159. 學生：有。

160. 老師：現在我們再來做一題，我們把剛才做過的題目，求「2 乘 3 乘 5」這個數的所有因數，用同樣的方法做一次。

161. 老師：做好的同學舉手一下。好，我們先問做好的同學！琬瑜，2 乘 3 乘 5 乘積得 30，「30」的因數總共有幾個？

162. 琬瑜：8 個。

163. 老師：有 8 個因數。請你回答一下，是哪 8 個因數？

164. 琬瑜：1、2、3、5、6、10、15、30。

165. 老師：好，紹芸，請你把找出 2 乘 3 乘 5 的所有因數方法告訴同學。

166. 紹芸：求 2 乘 3 乘 5 所有因數的方法，是先寫 1，然後再把它質因數，兩個數、兩個數相乘。

167. 老師：同學們，是不是這樣子？先把 1 寫出來，然後再把它質因數互乘。

168. 婷瑜：我先乘出來，再寫出來。1 一定可以。然後乘以 3、4，然後看 2 可不可以，反正一個一個慢慢乘。

1
2, 3, 5
2×3 , 2×5 , 3×5
$2 \times 3 \times 5$

169. 老師：婷瑜告訴我們，她是先把 2 乘 3 乘 5 的乘積找出來得 30。30 可以等於 1 乘 30。2 乘上 15 等於 30。3 乘 10 等於 30。6 乘 5 等於 30。所以 30 有 1、2、3、5、6、10、15、30 這些因數。同學們，婷瑜的方法，可不可以？

170. 學生：可以。

171. 美琪：不太好。

172. 老師：美琪，為什麼不太好？

173. 美琪：數字太大就不好。

174. 老師：喔！美琪講對了。如果一個太大的數，用這樣的方法，有某些因數會漏掉。

請注意一下，如果我們利用婷婷的方式來找某數的因數，這個方法是可以
用，只不過數字要比較小一點。如果像 3 乘 5 乘 17 乘 19 這樣大的數值，
利用兩個數、兩個數相乘這種方式求某數的因數，有些很容易會漏掉。

175. 老師：同學們有沒有問題？會了嗎？

176. 學生：會了！

177. 老師：請看到學習單上的練習三，第一組跟第二組的同學，寫出丙的

練習三、求甲= $2 \times 7 \times 31$ 乙= $7 \times 13 \times 17$ 丙= $5 \times 7 \times 13$
第五組、第六組與第七組求甲的所有因數
第三組與第四組求乙的所有因數
第一組與第二組求丙的所有因數

所有因數。第三組、第四組，寫出乙的所有因數。第五組、第六組和第七組寫出甲的所有因數。

178. 老師：你們寫好了後，小組長將答案寫在白板上。老師點到的那個組別，組長就到前面來，好嗎？

179. 老師：第五組，寫好了沒有？

180. 學生：寫好了。

181. 老師：組長到前面來。

182. 老師：第五組做甲這一題。甲這個數是 2 乘 7 乘 31。琬瑜，你講一下，為什麼你很快的就可以把它的因數找出來？

183. 琬瑜：先把 1 寫出來，然後再用先前的方法找它的因數。

184. 老師：2、7、31 三數是原數的質因數，先寫出來！接著是寫 2 乘 7，再寫 2 乘 31 以及 7 乘 31，最後我們再把原數的三個質因數相乘。有沒有問題？

185. 學生：沒有。

186. 老師：老師發現到一個事情，請你們注意看到這邊，琬瑜寫了一個 434 這個數，同學們，434 是什麼？

187. 學生：2 乘 7 乘 31 的乘積。

$2 \times 7 \times 31$ 的所有因數

1

2, 7, 31

2×7 , 2×31 , 7×31

$2 \times 3 \times 31$

188. 老師：第五組同學幫我們算出來 2 乘 7 乘 31 這 3 個數相乘得到 434。434 這個數，如果用我們國小的方法找其所有的因數，也就是用一個一個除的方式，要不要花很久的時間？

189. 學生：要。

190. 老師：第五組同學，你們利用國中的方法做，速度有沒有很快？

191. 學生：有。

192. 老師：很快就寫出來了，對不對？

193. 學生：對。

194. 老師：如果要利用國小的方法找 434 的所有因數要花多少時間呢？

195. 琬瑜：要 6 分鐘。

196. 老師：喔！6 分鐘。那是因為你有學過心算，用 6 分鐘就好，其他的同學未必能夠 6 分鐘就寫好。

197. 老師：第四組，你們做乙這題是不是？

198. 學生：是。

1

7, 13, 17

91, 119, 221

1547

199. 老師：乙是找 7 乘 13 乘 17 這個數的所有因數，這個數的因數有什麼？

200. 雨柔：有 1、7、13、17，還有 91、119、221、1547。

201. 老師：雨柔不用連乘積的方式表達，卻用 91、119、221、1547 表示，可不可以？

202. 學生：可以。

203. 老師：國中的方法有沒有很快？

204. 雨柔：有。

205. 老師：好，我們謝謝她們。下課時間到了，現在請把你的東西放在桌上，有沒有問題？

206. 學生：沒有。

207. 老師：好，班長，請你喊起立。

208. 學生：起立，立正，敬禮。

209. 學生：謝謝老師。

【第二節】

210. 學生：老師好！

211. 老師：同學好！在上一節課裡，還有一些組別沒有發表，現在請他們來發表。

212. 老師：做乙的這一組的同學舉手一下。育辰，這一組。

育辰，你跟同學說明一

下，你們這一組是如何

寫的？為什麼很快的就把它的所有因數找出來？

練習三、求甲= $2 \times 7 \times 31$ 乙= $7 \times 13 \times 17$ 丙= $5 \times 7 \times 13$
 第五組、第六組與第七組求甲的所有因數
 第三組與第四組求乙的所有因數
 第一組與第二組求丙的所有因數
 各組答案寫於右邊

213. 育辰：先寫 1，然後將這個數的質因數互乘起來。

214. 老師：好，你在第三行這邊寫了幾個質因數互乘？

215. 育辰：2 個。

216. 老師：第四行那邊為什麼要寫 3 個？

217. 育辰：因為總共有 3 個質因數。

218. 老師：喔！因為那個數字共有 3 個質因數，是不是？

219. 育辰：是。

220. 老師： $7 \times 13 \times 17$ 那個數字的因數，可不可能出現 4 個數、5 個數互乘？

221. 育辰：不可能。

1
 $7, 13, 17$
 $7 \times 13, 7 \times 17, 13 \times 17$
 $7 \times 13 \times 17$

222. 老師：為什麼？

223. 育辰：因為它的質因數沒有那麼多個，所以我們不要寫那麼多個。

224. 老師：好，給他鼓勵一下。這一組不錯哦！

225. 老師：寫丙的同學請舉手一下。好，班長這一組寫丙。班長，請你跟同學說明一下丙這題的做法。

226. 班長：先把 1 寫出來。第二行這邊，寫出這個數的所有質因數。第三行就把它任兩個質因數拿來相乘嘛！最後一行，再把它質因數通通拿出來乘一次就好了。

1
5 , 7 , 13
5×7 , 5×13 , 7×13
$5 \times 7 \times 13$

227. 老師：可不可能有 4 個數互乘？

228. 班長：不可能。

229. 老師：可不可能有 5 個數互乘？

230. 學生：不可能。

231. 老師：不可能有 4 個，不可能有 5 個。好，有沒有問題？

232. 學生：沒有。

233. 老師：說的不錯。同學們給班長鼓勵一下。

234. 老師：老師看了一下，各組都表現得很好。現在各組組長把黑板擦拭乾淨。我們現在要換求丁、戊、庚的所有因數。

練習四、丁=60，戊=154，庚=273
第五組、第六組與第七組求丁的所有因數
第三組與第四組求戊的所有因數
第一組與第二組求庚的所有因數

235. 老師：第五組、第六組、第七組，請你們，求丁的所有因數。第三組、第四組，你們寫戊。第一組、第二組，你們寫庚。

236. 老師：你們寫完了沒？老師幫你們檢查一下。各組同學寫好了沒有？

237. 學生：寫好了。

238. 老師：同學們寫好了喔！好，現在老師要找同學回答。歐佳宇，你把你的方法寫在白板上。面。琬瑜，你寫好了嗎？

239. 琬瑜：寫好了。

240. 老師：雅芸寫好了沒有？

241. 雅芸：好了。

242. 老師：你已經把答案寫在白板上，是不是？育辰，你寫的讓老師看一下。好，育辰，你也把你的答案寫在白板上。面。桓鈺，你也把你的答案寫在上面。育敏，寫好了嗎？育敏，你也把你的答案寫在上面。老師剛才點到的各組組長，你們都寫好了嗎？歐佳宇，寫好了嗎？

243. 佳宇：寫好了。

244. 老師：各位同學現在請坐好，並把筆放下來。我們現在來聽育辰這一組說明。

245. 老師：同學們，育辰他們這一組，是求戊的所有因數。

246. 老師：育辰，你的做法是什麼？

247. 育辰：用除的。

248. 老師：你用除的。你是用 154 去除 1、154 去除 2、154 去除 7，是不是這樣子？你有沒有花很久的時間？

$$\begin{aligned} 154 &= 1 \times 154 \\ &= 2 \times 77 \\ &= 7 \times 22 \\ &= 11 \times 14 \end{aligned}$$

249. 育辰：沒有。

250. 老師：沒有，很快就算出來了？喔！你很厲害哦！

251. 老師：好，還有沒有同學做戊這個題目的？雨柔，你是不是這樣子寫？

252. 雨柔：是。

253. 老師：你也是跟他一樣嗎？也是利用 1 乘 154、2 乘 77 這樣的方法嗎？

254. 雨柔：是

255. 老師：雨柔，你到這裡來。請你告訴我們，為什麼你很快的可以知道 154，它有 11 乘 14？

256. 雨柔：因為 154 是 11 的倍數，所有會有 11 乘 14。

257. 老師：佳宇有沒有聽到？老師剛才問雨柔，為什麼知道會有 11 的因數存在，雨柔告訴老師說，154 是一個 3 位數，這個數字的奇位數跟奇位數相加，偶位數跟偶位數相加，然後奇數位數字的和減去偶數位數字的和等於 0，這時候就有 11 的倍數。所以就我們可以知道 154，可以被 11 除盡。

258. 老師：好，你們可以找到 11 是 154 的因數。請問你們如何知道 154 有 7 這個因數呢？

259. 學生：用「除」的。

260. 老師：好，我們給他們這兩組鼓勵一下。

261. 老師：做「求 60 的因數」這一題，請舉手。好，琬瑜，請你趕快到前面來。琬瑜，你為什麼知道 60 會等於 1 乘 60，會等於 2 乘 30？你用什麼樣的方法，很快的找出 60 的所有的因數出來？

$$\begin{aligned} 60 &= 1 \times 60 = 2 \times 30 \\ &= 3 \times 20 = 4 \times 15 \\ &= 5 \times 12 = 6 \times 10 \end{aligned}$$

262. 琬瑜：用乘的。

263. 老師：用乘的喔！你也是找兩個數、兩個數互乘，是不是？

264. 學生：是。

265. 老師：同學們，有沒有問題？

266. 學生：沒有。

267. 老師：育敏，你們這一組說明一下。你們為什麼很快的就可以知道 60 這個數的因數是這些？

268. 育敏：利用兩個數相乘。

269. 老師：我們找出兩個數相乘，不管是合數或是質數，相乘之後，等於原來的那個數的話，那相乘的兩個數必定是原來數的因數，是不是？

270. 學生：是。

271. 老師：有沒有同學做庚的那一題？歐佳宇這一組，你們是做庚這一個問題，是不是？

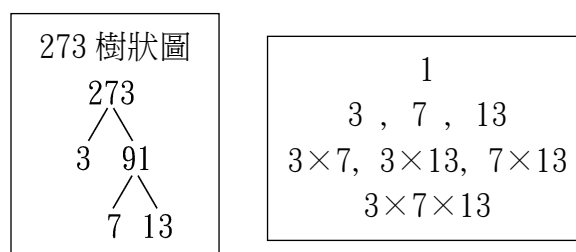
272. 佳宇：是。

273. 老師：佳宇，到老師這邊來。同學注意一下哦！歐佳宇這一組，他們用了一個短除法還是樹狀圖法？

274. 學生：樹狀圖。

275. 老師：他用樹狀圖方法找什麼？

276. 學生：找 273 這個數的質因數。



277. 老師：我們透過樹狀圖的方法，可以找到 273 的質因數有哪些？

278. 學生：3、7、13 這 3 個數。

279. 老師：佳宇，請你告訴同學，為什麼很快的可以找出 273 的因數？

280. 佳宇：「1」先寫出來嘛！

281. 老師：你為什麼會再寫「3」？

282. 佳宇：各數和是 3 的倍數。

283. 老師：273 這個數字和加起來是多少？

284. 佳宇：12。

285. 老師：12 是不是能夠除盡 3？

286. 佳宇：是。

287. 老師：7 呢？你為什麼知道 273 有 7 這個因數？

288. 佳宇：273 可被 7 除盡。

289. 老師：所以同學們得到 273 有 3、7、13 這些質因數。他們這一組還用了一個方法，這個方法的名稱是什麼？

290. 學生：樹狀圖法。

291. 老師：先使用樹狀圖分解法，將 273 的所有質因數找出來，然後將 273 的質因數

互乘，就可找到 273 的所有因數，是不是？

292. 學生：是。

293. 老師：273 是一個很大的數哦！如果用小學所學「除」的方法來找因數，好不好？

294. 學生：不好。

295. 老師：會不會很慢？

296. 學生：會啊！

297. 老師：班長，你們那一組有沒有發表？

298. 班長：沒發表。

299. 老師：好，趕快到前面來。班長，你講一下，你們這一組用的是什麼方法？

300. 班長：短除法。

301. 老師：你們所做的過程請說明一下。

302. 班長：我們這組是先把 273 用短除法，將 273 的質因數找出來

273 短除法

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 273} \\ 7 \overline{) 91} \\ 13 \end{array}$$

，273 的質因數連乘是 3 乘 7 乘 13。

303. 老師：班長的做法蠻不錯的。

304. 老師：用短除法，我們很快的就找到 273 的質因數連乘是質數 3 乘質數 7 乘質數 13。

305. 老師：剛才我們所講是找出一個數的所有因數，現在老師要同學找出 12 跟 18 這兩個數的公因數，你們先把講義翻到背面，用空白的地方將 12 跟 18 的公因數寫出來。

306. 老師：家琪，寫完了嗎？

307. 家琪：寫完了。

308. 老師：家琪，請你站起來，告訴同學 12 跟 18 的公因數有哪些？

309. 家琪：1、2、3、6。

310. 老師：同學們，12 跟 18 的公因數有 1、2、3、6，對不對？

311. 學生：對。
312. 老師：同學們，什麼是公因數？
313. 學生：兩個數共有的因數。
314. 老師：兩個數共有的因數叫做「公因數」。
315. 老師：12 跟 18 的公因數要怎麼找？先把 12 的因數找出來，再把 18 的因數找出來，接著再把它們共有的部份圈出來。同學，你可以看到 12 與 18 的公因數有哪些？
316. 學生：1、2、3、6。
317. 老師：老師現在再問一個問題，21 跟 35 的公因數有哪些？
318. 老師：好，寫好的同學舉手一下。黃偉恒，請你站起來到老師這邊。現在我們聽偉恒講解。偉恒，請你告訴我們，21 跟 35 的公因數有哪些？
319. 偉恒：1 跟 7。
320. 老師：1 跟 7。21 跟 35 的公因數有 1 跟 7，對不對？
321. 學生：對。
322. 老師：好，請你坐下來。我們把 21 與 35 的因數裡相同的數，通通把它圈出來。有 1 與 7。現在老師要再問同學一個問題。請問同學，21 跟 37 的公因數有哪些？
323. 學生：只有 1 而已啊！
324. 老師：為什麼只有 1？
325. 學生：37 是質數啊！
326. 老師：37 是質數？所以 21 與 37 這兩個數的公因數是 1，有沒有問題？
327. 學生：沒有。
328. 老師：現在老師要介紹同學一個名詞「互質」。什麼是互質呢？
329. 老師：我們在黑板上所寫的「求 12 跟 18 的公因數」這一題中，12 與 18 這兩數

有沒有共同的因數呢？

330. 學生：有。

331. 老師：12 跟 18 的共同因數有沒有很多個？

332. 學生：有。

333. 老師：12 跟 18 的因數，有 1、2、3、6，對不對？

334. 老師：好，21 跟 35 的公因數有哪些？

335. 學生：1 跟 7。

336. 老師：21 與 35 的公因數有兩個，但是 21 跟 37 的公因數，有兩個嗎？還是有 3 個？

337. 學生：只有 1 個。

338. 老師：21 與 37，只有 1 個公因數。因為 21 跟 37 的公因數只有一個 1，我們就稱這兩個數為「互質」，聽懂沒有？

339. 學生：有。

340. 老師：同學們，現在把你們的學習單拿出來，做第 5 題裡的第 1 個小題，題目上寫著：選出下列互質的兩個數出來。

341. 老師：請問同學，第一個選項，49 跟 35，
這兩個數有沒有互質？

下列四個選項中，請選出互質的兩數 (1)49，35 (2)8，21 (3)12，15

342. 學生：沒有。

343. 老師：為什麼沒有互質？

344. 學生：因為除了 1 這個公因數之外，還有一個公因數 7！所以這兩個數不互質。

345. 老師：好，你們在第一題的第一小題上打個叉，表示沒有互質。第二個小題，8 跟 21 會不會互質？

346. 學生：會。

347. 老師：為什麼會互質？

348. 學生：只有 1 這個因數。
349. 老師：第三小題，12 跟 15 有沒有互質？
350. 學生：沒有。
351. 老師：為什麼沒有互質？
352. 學生：因為它們的公因數除了 1 之外還有 3。
353. 老師：同學們對「互質」都瞭解了。
354. 老師：現在老師提出一個問題讓同學做，給兩個數，一個數叫作甲，甲是 2 乘 3 乘 5，乙是 2 乘 3 乘 7。請你把甲、乙兩個數的所有因數找出來。
355. 老師：桓鈺寫好了嗎？
356. 桓鈺：寫完了喔！
357. 老師：同學都寫完了！好，先把筆放下來，坐好。我們觀察甲，甲這個數是 2 乘 3 乘 5。請問 2 乘 3 乘 5 得到多少？
358. 同學：30。
359. 老師：30 的因數有哪些呢？它的因數有 1、2、3、5，還有什麼？
360. 學生：6。
361. 老師：6 就是 2 乘 3 嘛！還有什麼？
362. 學生：10。
363. 老師：10 就是 2 乘 5。還有什麼？
364. 學生：15。
365. 老師：最後還有一個什麼？
366. 學生：30。
367. 老師：乙的因數有哪些呢？
368. 學生：1、2、3、7，6，42。
369. 老師：6 是 2 乘 3，42 是 2 乘 3 乘 7。

370. 老師：甲和乙的因數都寫出來了，現在老師要同學找這兩數的公因數，什麼是「公因數」呢？

371. 老師：就是兩數的共同因數。甲數與乙數的共同因數是哪些？

372. 學生：1、2、3、6。

373. 老師：好，它們的共同因數有：1、2、3、6 這四個數。那麼，最大的公因數是哪一個？

374. 學生：是 6。

375. 老師：有沒有問題？

376. 學生：沒有問題。

377. 老師：現在請看你的學習單，上面有一題是求 30 跟 546 的公因數。老師要問同學，你要如何找出 30 跟 546 的公因數？

378. 學生：短除法。

練習六、請寫出 30 和 546 的公因數與最大公因數

379. 老師：用短除法如何找呢？班長，你先起來回答一下。

380. 班長：把它們兩個的公因數算出來。

381. 老師：公因數算出來？

382. 班長：與找它們的質因數方法一樣。

383. 老師：找出它們的個別的質因數互乘，再求出它們的因數，再把相同的因數挑出來，對不對？

384. 學生：對。

385. 老師：同學會不會寫了？

386. 學生：會。

387. 老師：之前我們有提過求甲數是 2 乘 3 乘 5，乙數是 2 乘 3 乘 7 的所有因數這個問題。在許多問題裡，我們常常是找兩數的最大公因數！請問同學，甲數與乙數的最大公因數是什麼？

388. 學生：6。

389. 老師：6 是 2 乘 3。「6」是這兩數的最大公因數。

390. 老師：這是一個方法叫什麼？

391. 學生：30 的短除法。

392. 老師：這一個方法叫是什麼？

393. 學生：42 的短除法。

394. 老師：這兩個短除法可不可以合併在一起？

395. 學生：可以。

396. 老師：合併在一起的時候，同學們，你有沒有注意到？我們可以用 2 先除，得到 15 跟 21，再用 3 去除，得 5 跟 7。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 30} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 42} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 30 \quad 42} \\ 3 \overline{) 15 \quad 21} \\ 5 \quad 7 \end{array}$$

397. 老師：現在請同學告訴老師，甲數與乙數，它們兩數的最大公因數是哪一個？

398. 學生：2 乘 3。

399. 老師：2 乘 3，其實就是這兩數的最大公因數。有沒有問題？

400. 學生：沒有。

401. 老師：好，班長，喊起立。

402. 學生：起立，立正，敬禮。

403. 學生：謝謝老師！

參、教學說明

今天第一節課的教學目標，是將一個數做成質因數連乘的表徵，讓孩子們利用這個表徵找出這個數的所有的因數。第二節課的教學重點是如何利用數的連乘表徵找出兩個數的公因數以及最大公因數。第一節課，我們做一些練習的時候，我發現到孩子們，在找一數的質因數表徵時，我們比較迫切希望把這個數，變回到它原來的十進位表徵。其實，經過不斷提醒與教導，我發現孩子仍然喜歡將一數變回國小所學的十進

位表徵，他們這種習性，一時還是蠻難改變的。第二節課的時候，我的一個教學目標是希望孩子們能夠找兩個數的最大公因數出來。在第二節課裡，我感覺教學的過程時間比較趕，覺得時間比較不充份，沒有辦法完整的介紹短除法，讓孩子在這一節課裡，能夠很透徹的對短除法做一個了解。經過這一節課的教學，我們可以發現到，在教學的過程中，孩子們對質因數連乘的接受度並不是很高，也就是說，孩子對一個十進位數，表徵成質因數連乘時，他們在操作上並不是那麼的順暢。將來教師們在進行此一單元教學時，應當對此一部分再加強。在這兩節課裡，我觀察到孩子們比較熟悉、比較習慣的求一數因數的操作法則，是將這個數利用小學所學過的，用除的方法，也就是利用整除的觀念，去操作與因數有關的題目。但是這個方法到了國中並不是很恰當，因為如果遇到一個非常大的數字，譬如說，在剛才的教學過程中，遇到了一個 $2 \times 3 \times 17 \times 19$ 這個數字，這個數字是一個很大的數字，如果孩子們還是利用國小所學方式，用整除一個數的方式去求所有的因數，那麼，他們在解題時，速度會非常的慢。國中老師們對於求一個數的因數、公因數這個部份，會比較希望讓孩了解，並體會運用一數的質因數連乘表徵的型態，孩子們漸漸的熟悉這種表徵後，能夠對求一數的因數利用其質因數表徵來操作。如此一來，孩子在以後的學習裡、教師在下一堂課教學的過程當中，或是延伸至高中的學習的過程中，他們會有比較多的助益。以上，是我兩節課教學上所獲得的一些心得。

此份教學活動設計(公因數與最大公因數)感謝謝堅教授在百忙之中抽空撥冗改寫，使得公因數與最大公因數的教學實錄的可讀性、參考性又提昇了許多。教學活動設計是一位教師在教學活動的規劃，有目標、有程序、有步驟，教學上就不會凌亂，按著教學活動設計的流程進行教學，學生在學習上會有清楚的概念，學習目標的達成與否檢驗著教師的教學是否有效，學生的學習是否有意義，優質、卓越的教學是現代教育殷切期望，願此份教學實錄與數學領域的夥伴一起分享，相互切磋，一起成長。

肆、教學後的省思

影片中的學校是桃園縣一所靠近海邊的鄉下學校，這個班級上星期剛學習完如何利用樹狀圖法和短除法將一個數變成其質因數的連乘積，同時也探討一個數的質因數分解式的唯一性，經過評量之後，發現超過 70% 以上的學生能成功的將一個數變成其質因數的連乘積。

當學生擁有「能將一數變成其質因數連乘」的先備知識後，本節課的教學目標是看著質因數連乘積的算式，要求學生直接寫出該數的所有因數。在教學活動中上，教師先布題『 $甲=3\times 5$ ，寫出甲所有的因數』，多數學生的解題策略是先透過 3 乘 5 求出甲數是 15，然後再利用過去國小所學過「整除」的方法來找出甲的因數。接著教師透過分段布題，逐一詢問「1 是不是甲的因數、3 是不是甲的因數、5 是不是甲的因數、 3×5 是不是甲的因數？」後，學生才有能力直接透過『 3×5 』的質因數分解算式，直接寫出甲的所有因數。

能看著一數質因數分解的算式，直接找出該數所有的因數，是利用質因數分解法或短除法求最大公因數或最小公倍數的先備經驗，但是多數國中老師都在學生沒有這個先備知識的條件下，直接引入質因數分解法或短除法求最大公因數或最小公倍數，導至學生只會程序性的算出答案，但是無法理解解題的意義。

第二節課，教師布題『 $甲=2\times 2\times 3$ 、 $乙=2\times 3\times 3$ ，甲和乙的公因數有哪些？』，部份學生可以藉著第一節課所學過的方法，分別找出甲、乙兩數的因數後，再找出其公因數。也有部份學生先透過乘法求出甲、乙兩數，再利用短除法求出兩數的最大公因數後，再透過最大公因數找出兩數所有的因數，但是卻無法說明解題的意義。教師採小組發表的方式讓學生發表其作法，並從旁引導，澄清觀念，讓兩種解法的學生都能受益。

最後我要說明是：在教學的過程中發現教材順序合理的安排與陳述的鋪陳，學生

在學習上比較能夠達到效果，除此之外學生以前學過的舊經驗能夠延伸至所要教授的教材裡，讓學生新舊經驗結合，如此學生在學習上才會感到有趣，學習才能投入，學生的學習才會有意義。

組別：_____ 姓名：_____ 座號：_____ P1

練習一、請從下列選項中選出$2 \times 3 \times 5$的因數 (1)1 (2)5 (3)7 (4)2×3 (5)2×5 (6)$2 \times 3 \times 5$ (7)$2 \times 5 \times 7$	練習二、下列選項中的那些是 $3 \times 5 \times 17 \times 19$ 的因數 (1)2 (2)3 (3)18 (4)23 (5)3×5 (6)3×19 (7)5×17 (8)17×19 (9)$2 \times 32 \times 7$ (10)$3 \times 23 \times 19$ (11)$3 \times 5 \times 17 \times 19$
練習三、求甲$=2 \times 7 \times 31$ 乙$=7 \times 13 \times 17$ 丙$=5 \times 7 \times 13$ 第五組、第六組與第七組求甲的所有因數 第三組與第四組求乙的所有因數 第一組與第二組求丙的所有因數 各組答案寫於右邊	

組別：_____ 姓名：_____ 座號：_____

P2

練習四、丁=60，戊=154，庚=273 第五組、第六組與第七組求丁的所有因數 第三組與第四組求戊的所有因數 第一組與第二組求庚的所有因數 各組答案寫於右邊	
練習五、下列四個選項中，請選出互質的兩數 (1)49，35 (2)8，21 (3)12，15	練習六、請寫出 30 和 546 的公因數與最大公因數

組別：_____ 姓名：_____ 座號：_____

P3

練習七(1)求甲$=3 \times 7 \times 19$，乙$=3 \times 7 \times 23$的公因數與最大公因數 (2)求甲$=182$，乙$=2 \times 3 \times 7$的公因數與最大公因數 (3)求甲$=42$，乙$=78$的公因數與最大公因數 第五組、第六組與第七組作第一題 第三組與第四組作第二題 第一組與第二組作第三題 各組答案寫於右邊	
練習八、求甲$=154$， 乙$=210$的最大公因數	

組別：_____ 姓名：_____ 座號：_____

P4

練習九、欲將一張長為 385 公分，寬為 231 公分的長方形紙剪成若干張一樣大小的正方形，裁剪時紙張全部用完，且每一個正方形的邊長均為整數（單位：公分），則所裁剪的正方形邊長可以是多少公分？有多少張？	補充一：有 2、2、3、17 這四數 (1)任挑兩數出來相乘的情況是什麼？ (2)任挑三數出來相乘的情況是什麼？ (3)任挑四數出來相乘的情況是什麼？ (4)任挑五數出來相乘的情況是什麼？
補充二：求甲$=2\times3^2\times17$， 乙$=3\times17^2\times19$ 的公因數	

國中小數學教材與教學探討. 因數與倍數篇 / 趙曉燕, 林宜靜, 楊椿作.

-- 初版. -- 臺北縣三峽鎮 : 國家教育研究院籌備處, 2007. 11 面 ; 公分

ISBN 978-986-01-1029-6 (平裝附光碟片) . --

1. 數學教育

2. 中小學教育

523.32

96018714

國中小數學教材與教學探討---因數與倍數篇

主 編：周筱亭 劉君毅 陳明月

教學指導：謝 堅 朱建正 鍾 靜 周筱亭

作 者：趙曉燕 林宜靜 楊 椿

發行人：何福田

出版機關：國家教育研究院籌備處

地 址：台北縣三峽鎮三樹路 2 號

電 話：(02) 8671-1111 轉 教育資源中心

網 址：<http://www.naer.edu.tw>

出版年月：中華民國 96 年 11 月

版 次：初版

國中小數學教師專業成長網網址：<http://math.naer.edu.tw>

工 本 費：新臺幣 185 元

印 刷 者：

地 址：

電 話：

展 售 處：政府出版品展售門市

地址及電話：

1. 國家書坊台視總店：台北市八德路三段 10 號

TEL: (02) 25781515 轉 643

2. 五南文化廣場：台中市中區柳川東街 32 號 3 樓

TEL: (04) 22210237

GPN : 1009602658

ISBN : 978-986-01-1029-6

國家教育研究院籌備處保留本書及附件影片資料之著作權及所有權利。