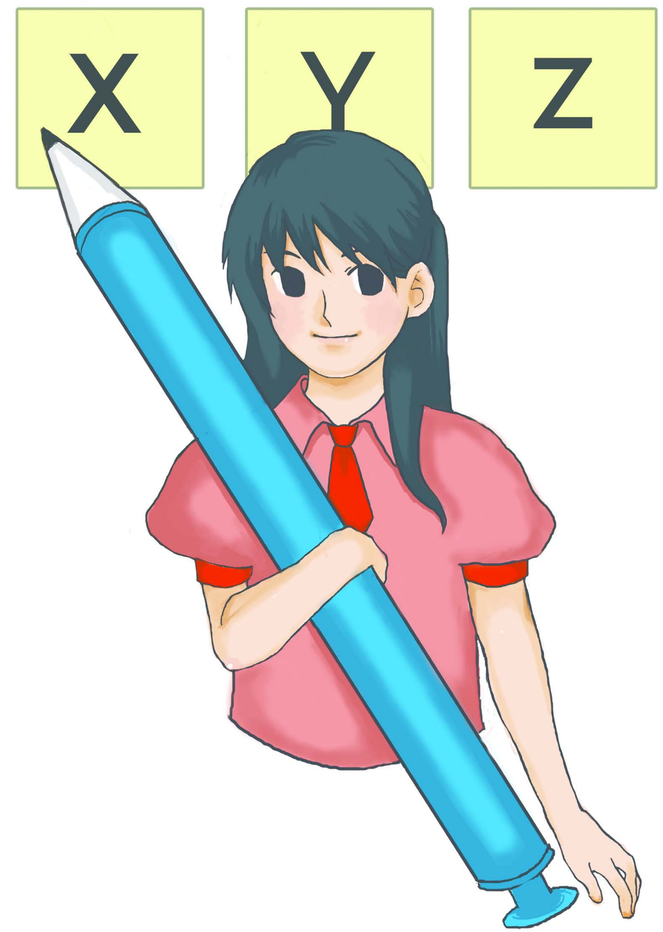
國中小數學教材與教學探討

－代 數 篇（一）

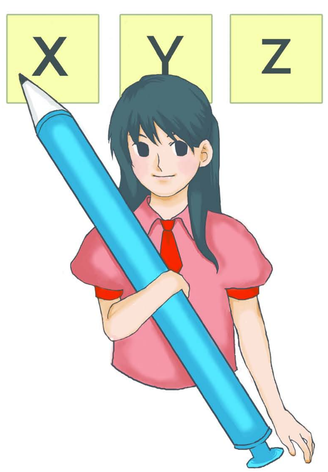


國家教育研究院籌備處　出版

國中小數學教材與教學探討－代數篇（一）　國家教育研究院籌備處出版

統一編號
1009802629

ISBN 978-986-02-0077-5
9789860200775
98.11.1000
定價：　元



國中小數學教材與教學探討
- 代數篇(一)

國家教育研究院籌備處　出版

中華民國九十八年十一月

陳 主 任 序

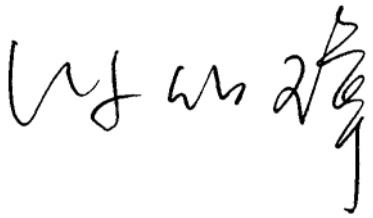
1970 年代以前的教師訓練相當重視學科知識的學習，此後，教學知識的理論和教學方法開始成為教師訓練和授證的重點項目。1970 年代到 1980 年代間的教學研究傾向聚焦於一般的教學技巧，而非教學內容之理解。在這段期間，許多研究對於過程--成果(process-product)、教師行為(teacher behavior)、教學效能 (teaching effectiveness) 作了許多描述，這些研究企圖在不考慮學科知識的情形下，尋求界定足以提升學生學習和促進學術成就的教學因素(Berliner & Rosenshine, 1977; Rosenshine & Stevens, 1986)，這種注重一般教學技巧的師資培育方式，受到許多數學家及數學教育家的批評，Shulman (1986) 便強調教師學科內容知識的重要性，他使用 “Missing Paradim” 一語來形容一般教學研究之盲點在於未能著眼於學科內容知識對於教學行為的影響。此外，許多研究亦指出另一值得關注的方向：許多職前教師對於數學的了解不足，並且多侷限於數學算則的學習 (Martin & Harel, 1989; Ma, 1999; Rowland et al., 2001; Goulding & Suggate, 2001)。

因此，近年來教師的專業成長方面的研究主要在於探討教學的知識庫，提供訓練課程以及專業活動中教學複雜度的示例(Reynolds,1989)。荷蘭的 MILE(multiple interactive learning environment, 2000) 計畫，強調情境式的教學實務，師範生或在職教師透過數位化的教學場景來將現實的教學場景轉化到學習的環境之中，透過進行反思性的對話來建構本身的數學教學知識。

本處周筱亭研究員與劉君毅助理研究員自 91 年度起，即開始進行「現實教學紀錄」對於數學教師專業成長影響之探討研究，以記錄教師們的「教學歷程」為主要的資料蒐集方式，包含以影像資料為主的「教學錄影專輯」、教師於教學前所作的「教學活動設計」以及錄影後所作的「教學後的省思」等三大部分。這個研究的最終目的在於建置一個適合國民中小學數學教師使用的「現實教學紀錄」資料庫，資料庫中擬包含數學內涵、以及數學為主軸的統整課程教學情境。該研究擬定以國中小數學課程中的十個重要領域為主軸，根據該主軸在國民中小學階段的重點教學內涵，結合學者專家的專業以及國中小教師的實務知識，針對活動設計、數學內涵、班級經營、以及學生認知等向度進行分析與整理，來建置教學情境紀錄，以做為教師實務學習的資源，並從中蒐集參與研習教師的反思及改變資訊。

這套叢書「國中小數學教材與教學探討」是前述資料庫內容的呈現方式之一，自93年度起已陸續出版以「長度」、「比例」、「時間」、「小數」、「國小幾何」、「分數」、「整數的乘除」、「因數與倍數」、「整數的數概念與加減運算」及「一元一次方程式」為主題的各冊。今年出版的將以「國中幾何」和「代數」為主題，本書為『代數篇（一）』。每本書都包含該主題的各單元「教學活動設計」、「教學活動實錄」和「教學後的省思」，並附上各單元的教學實錄影音光碟。同時，研究群已展開進一步計畫，將本系列叢書內容(含文本與影片)與歷年來的研究成果逐步數位化，建置成「國中小數學教師專業成長網」(網址為：http://math.naer.edu.tw)，期盼以數位學習(e-Learning on Demand)、教師績效支援系統(Electronic Performance Support Systems)的模式，提供教師們更便利、及時、普及與多元的服務。

在這本書付梓之際，僅以此序向各位參與的人士表達誠摯的謝意，由於他們的專心投入與犧牲週末假日的無私奉獻，讓本處能出版、製作這些教學敘事，作為以學校為基地的數學教師成長學習資源。



於國家教育研究院籌備處

民國九十八年十月

編 輯 要 旨

一、本書為國家教育研究院籌備處預定陸續出版的一系列與國中小數學教材和教學相關的叢書之一，去（97）年出版的兩本書是以「整數的數概念與加減運算」和「一元一次方程式」為主題；今年預定出版的兩本將分別以國中的「幾何」和「代數」為主題，本書「代數篇（一）」，收錄國中一年級至三年級的教學主題單元。

二、出版這類叢書的主要目的在於提供國中小教師欲提升專業能力時，可以參考或共同討論的教學案例。

三、本書分為兩個部分：文本和數位影音光碟(DVD)，前者包括「代數」主題的各單元活動設計、教學實錄、教學說明和教學者教學後的省思；後者則為各單元的教學實況錄影以及擔任教學的教師於教學後所錄製的教學說明。

四、讀者在觀看影音光碟時，可以對照文本中的教學實錄，將更有利於掌握教學細節。

五、本書並未涵蓋國中小數學教材中所有「代數」主題的相關題材，係就參與的老師們當時任教的年級與使用的版本，配合原訂的教材和教學進度，選取與「代數」有關的重要概念，在教授們的指導之下，先設計教學活動，經過反覆的討論與修正，定案後，由本處委外錄製教學實況和教學說明。錄影紀錄皆為自然真實的上課過程，由於採用雙機錄影，影片中呈現的教學實況的畫面已經過剪輯，但音效方面則是教室現場原音重現。

六、由於每位教師的教學風格不同，所教學生的背景、經驗與知識也不盡相同，因而讀者不應將本書的各個案例視為「範例」。

七、基於環保理念，本書將逐年縮減紙本印製量，改採光碟發行，影音光碟部分則維持原形式不變，建議讀者可先將電子版「文本資料」內容載存於電腦硬碟中，再透過瀏覽工具開啟相關檔案閱讀，並可同步搭配觀看影音光碟影片。

八、本書內容(含文本與影片)未來將逐步數位化，以線上課程方式呈現，建置於本處「國中小數學教師專業成長網」(網址為：http://math.naer.edu.tw)，歡迎上網瀏覽最新資訊。

九、本處保留本書及影片內容之著作權及所有權利，讀者若需引用或有任何問題，歡迎逕洽本處。

目　次

一元一次方程式 1

壹、教學活動設計 1
貳、教學實錄 14
參、教學說明 43
肆、教學後的省思 45

二元一次聯立方程式 47

壹、教學活動設計 47
貳、教學實錄 60
參、教學說明 89
肆、教學後的省思 91

提公因式與分組分解 93

壹、教學活動設計 93
貳、教學實錄 115
參、教學說明 136
肆、教學後的省思 138

平方根 141

壹、教學活動設計 141
貳、教學實錄 154
參、教學說明 191
肆、教學後的省思 194

等差數列 197

壹、教學活動設計 197

貳、教學實錄 210
參、教學說明 242
肆、教學後的省思 245

等差級數..... 247

壹、教學活動設計 247
貳、教學實錄 260
參、教學說明 284
肆、教學後的省思 286

一元一次方程式

壹、教學活動設計

一、**教學年級：**七年級上學期

二、**教 學 者：**台北縣福和國中 李進福 老師

三、**教學目標：**

1. 認識一元一次方程式及其解的意義。
2. 能應用等量公理解方程式。
3. 能應用移項法則解方程式。

四、**活動目標：**

活動一：觀察日常生活情境問題，以一元一次方程式記錄該問題，並嘗試以不同的方式找出問題的答案。

活動二：知道解的意義，了解一元一次方程式只有唯一解。

活動三：以代入的方式判別一元一次方程式的解。

活動四：利用圖形及等量公理解一元一次方程式，並記錄解題過程。

活動五：利用等量公理解方程式。

活動六：簡化等量公理的解題過程，使之成為移項法則並解決問題。

五、**教學概要說明：**

本單元介紹一元一次方程式的意義及求解的方法，活動一開始先以實際生活情境導入，讓學生了解列方程式的目的是為幫助我們求出某個未知數。因此，方

程式的解也就是一開始未知數的答案，有了答案之後，原本的問題便得以解決。在【活動一】當中，先假設了一個日常生活情境：「用 100 元買了 3 盒巧克力可找回 13 元，請問一盒巧克力多少元？」，此情境的問題在於巧克力的單價未知，可是經由一些線索可以得知巧克力的單價。問題解決的方式有很多，可以鼓勵學生利用國小學過的舊經驗解決問題。而在本單元我們要介紹給學生的是一種解決問題的新工具，利用文字符號 x 代表未知的巧克力單價，並依情境中的問題列出方程式，再經由解出方程式求出未知數，也可得到問題的解答。

為了讓學生能更明白地了解方程式解的意義，在列出方程式之後，以代入驗算的方式逼近求得答案。在解方程式的過程當中，教師可以先在黑板上給定 x 的值，要求學生求得 $3x+13$ 的答案，並驗證與原問題合不合、太多還是太少？之後再給定另一個 x 的值，再讓學生求一次 $3x+13$ 的答案，然後再驗證。比如說，先以 $x=20$ 代入 $3x+13$，發現其答案比原本預計的 100 小，所以 x 的值應比 20 大；再以 $x=30$ 代入得到 $3x+13=103$，答案大於 100；所以再用小一點的 $x=28$ 代入，得到 $3x+13=97$；再用 $x=29$ 代入得到 $3x+13=100$。於是便得到正確的解答。

之後的教學活動也順便探討了一元一次方程式解的唯一性。以 $3x+13=100$ 為例，在得知此方程式的解為 $x=29$ 之後，再次提問學生是否有第二個答案。利用數列 $x=29$、30、31…或 $x=29$、28、27…依序代入的方式，讓學生觀察代入之後所得到的結果必為從 100 開始往上遞增或往下遞減的等差數列，因此不可能再次代入得到 100 的結果，所以此方程式只有唯一解。

因為嘗試錯誤的方式比較沒有效率，所以教師便可藉此引入利用等量公理解方程式的方法。一開始先將原問題「用 100 元買了 3 盒巧克力可找回 13 元」的情境在黑板上以圖形的方式表示：先畫一個等號，等號的左側畫上 3 盒巧克力加上

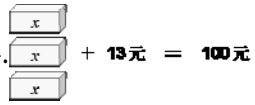
13 元，等號的右側畫上 100 元，在圖形的旁邊也順便將方程式寫下：$3x+13=100$。接著直接在圖形上以等量公理操作：先將等號左側的 13 元刪掉、100 元也扣掉 13 元，剩下 87 元，隨之將剛才的操作以方程式在一旁記錄下來：$3x+13-13=100-13$，$3x=87$。此時等號的左側剩下 3 盒巧克力，而我們只要求一盒巧克力的價錢，所以將等號右側剩下的錢 3 等份，就是 1 盒巧克力的價錢了。因此兩邊都除以 3：$3x\div3=87\div3$，$x=29$。在黑板上呈現的各步驟，就是以等量公理解方程式的解題紀錄。

在等量公理之後，可以從列式中，讓學生觀察出經由式子的省略，看起來好像是某些項可以跨過等號然後變號。比如上述的問題中，將原本以等量公理的方式列出算式：$3x+13=100$、$3x+13-13=100-13$、$3x=100-13$，因為 $3x$ 之後的+13 在解方程式的過程一定會消去，所以 $3x+13-13=100-13$ 這一個步驟可以省略，因此整個過程把第二個步驟省略之後，就變成+13 直接移項到等號的另一側而變成-13。由此，可讓學生了解到解方程式的方法就只有“等量公理”，“移項法則”只是將“等量公理”的步驟省略而已。

六、教學活動設計：

活動一：觀察日常生活情境問題，以一元一次方程式記錄該問題，並嘗試以不同的方式找出問題的答案。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 生活情境引起動機	1. 假設我們今天去買了 3 盒巧克力，付給了老闆 100 元之後，找回了 13 元。如果我想知道一盒巧克力多少錢，可以怎麼算？	• 學生可能回答： $(100-13)\div3$ $=87\div3$ $=29$	• 能以舊經驗解決問題。

・利用未知數的概念列出方程式	2.因為不知道每一盒巧克力的價錢，所以一盒巧克力的價錢是未知數，因此，我們可以利用假設未知數的方法。 3.教師在黑板上繪出圖形表示問題。 4.  	・假設每一盒巧克力 x 元。	・知道可以用文字代表數。
	5.三盒巧克力的錢加上 13 元共 100 元。所以可以如何列式？ 6.當看見 $3x+13=100$ 時，如何才能得到 x 的答案？	・學生可能的回答：$3x+13=100$。	・會依據圖形表徵列出方程式。
・求出未知數的答案	7. x 是多少時，$3x+13=100$？將 $x=20$ 代入 $3x+13$ 看看是多少，$x=20$ 可不可以是我們的答案？	・學生回答：$3x+13=73$，太少，不是答案。	・會將 x 以不同數值代入式子作運算。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>8.列出表格填入對應值。
<table><tr><td>x</td><td>$3x+13$</td></tr><tr><td>20</td><td>73</td></tr><tr><td>30</td><td>103</td></tr><tr><td>28</td><td>97</td></tr><tr><td>29</td><td>100</td></tr></table>
9.若 $x=30$ 代入，可不可以？

10.若 $x=28$ 代入，可不可以？

11.若 $x=29$ 代入，可不可以？</td>
<td>・學生回答：$3x+13=103$，太多，也不是答案。

・學生回答：$3x+13=97$，太少，也不是答案。

・學生回答：$3x+13=100$，可以。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

活動二：知道解的意義，了解一元一次方程式只有唯一解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・方程式的唯一解	1.除了 29，還有別的答案嗎？ 2.我們將 x 以 29、30、31、32…慢慢代入，看看答案如何變化，有沒有機會可以等於 100？ 3.列出表格，學生算	・學生算出表格中的答案。	・會將 x 以不同數值代入式子作運算。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>出答案後再將之填入。
<table><tr><td>x</td><td>$3x+13$</td></tr><tr><td>29</td><td>100</td></tr><tr><td>30</td><td>103</td></tr><tr><td>31</td><td>106</td></tr><tr><td>32</td><td>109</td></tr></table>
4.我們再將 x 以 29、28、27、26…慢慢代入，看看答案如何變化，有沒有機會可以等於 100？

5.再列一個表格，學生算出答案後再將之填入。
<table><tr><td>x</td><td>$3x+13$</td></tr><tr><td>29</td><td>100</td></tr><tr><td>28</td><td>97</td></tr><tr><td>27</td><td>94</td></tr><tr><td>26</td><td>91</td></tr></table>
6.所以我們可以知道，只有 x 等於多少的時候，才可以使得 $3x+13=100$？</td>
<td>・學生算出表格中的答案。

・學生回答：只有當 $x=29$ 的時候。</td>
<td>・會將 x 以不同數值代入式子作運算。

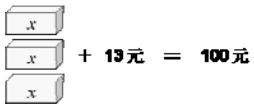
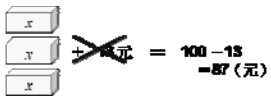
・經由觀察規律，得知本題只有唯一解。</td>
</tr>
</table>

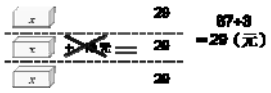
活動三：以代入的方式判別一元一次方程式的解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・介紹方程式（一元一次）	1.將未知數以一個文字代表（例如，假設未知數為 x），並列出一個等式以方便求出未知數的答案，我們稱之為方程式。		
	2.方程式列舉： ①三盒巧克力的錢加上 13 元共 100 元。假設一盒巧克力 x 元，則可列出方程式： $3x+13=100$。 ②有 2 包相同數量的糖果，若拿走 4 顆之後再將所有的糖果分給 3 個人，每人剛好可拿 10 顆。假設每包糖果有 x 顆，則可列出方程式： $(2x-4)\div 3=10$。	・教師布題，列式。	
	3.列方程式的意義，是為了求出未知數的答案。例如： ①$x=29$ 代入方程式 $3x+13=100$ 時成	・$3\times 29+13=100$	

	立，即稱「x=29 是方程式的解」。 ②x=17 代入方程式$(2x-4)\div 3=10$ 時成立，即稱「x=17 是方程式的解」。	• $(2\times 17-4)\div 3=10$	
• 判別方程式的解	4. 下列哪一個數字是方程式$3x-1=8$的解？ (1) 2　(2) 3 (3) 4　(4) 5	• 依序代入： (1) x=2 代入，$3x-1=5$。不是方程式的解。 (2) x=3 代入，$3x-1=8$。是方程式的解。	• 知道「解」的意義，並能代入檢驗。
	5. 如果已找到答案，需要再將 x=4 代入檢查嗎？為什麼？	• 學生可能回答： (1) 因為只有一個解。 (2) 因為再代入會愈來愈大，不可能會再是 8。	• 了解一元一次方程式只有一個解。
	6. 下列哪一個數字是方程式$5-2x=9$的解？ (1) 1　(2) 0 (3) -1　(4) -2	• 依序代入： (1) x=1 代入，$5-2x=3$。不是。 (2) x=0 代入，$5-2x=5$。不是。 (3) x=-1 代入，$5-2x=7$。不是。 (4) x=-2 代入，$5-2x=9$。是。	• 知道「解」的意義，並能代入檢驗。

活動四：利用圖形及等量公理解一元一次方程式，並記錄解題過程。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・等量公理解題	1.三盒巧克力加上13元等於100元的問題，請問每一盒巧克力多少元？ 2.黑板上繪圖  3.列出式子： $3x+13=100$ 4.既然等號兩邊的價錢一樣多，兩邊同時拿走 13 元，是不是一樣多？應該怎麼記？ 5.黑板上繪圖  6.記錄式子： $3x+13-13=100-13$ $3x=87$ 7.由此可得知三盒巧克力是 87 元。如果我想知道其中一盒的價格，是		・將圖形表徵轉換為文字表徵。

	否也把 87 元分成三等份即可？ 8.黑板上繪圖  9.記錄式子： $3x\div3=87\div3$ $x=29$		
・等量公理記錄	10.再重新看一次找出答案的步驟。 11.$3x+13$ 等於 100。所以兩邊同時減掉 13。 $3x+13-13=100-13$ $3x=87$ 12.接下來就是兩邊同時除以 3。 $3x\div3=87\div3$ $x=29$ 13.於是這個過程就是以等量公理解方程式。	・學生觀察原本在黑板上的方程式。	

活動五：利用等量公理解方程式。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・用等量公理解方程式	1.觀察方程式： $2x+4=10$ 兩邊同時除以 2。 兩邊同時減 2。	・教師引導列式： $(2x+4)\div 2=10\div 2$ $x+2=5$ $x+2-2=5-2$ $x=3$	・利用等量公理求解。
	2.觀察方程式： $\frac{2}{3}x=5$ 兩邊同時乘以 3。 兩邊同時除以 2。	・教師引導列式： $(\frac{2}{3}x)\times 3=5\times 3$ $2x=15$ $2x\div 2=15\div 2$ $x=\frac{15}{2}$	
	3.觀察方程式： $\frac{2}{3}x-1=3$ 兩邊同時加 1。 兩邊同時乘以$\frac{3}{2}$。	・教師引導列式： $\frac{2}{3}x-1+1=3+1$ $\frac{2}{3}x=4$ $\frac{2}{3}x\times\frac{3}{2}=4\times\frac{3}{2}$ $x=6$	

	教師提問：為什麼要乘以$\frac{3}{2}$？	・學生發表想法。	

活動六：簡化等量公理的解題過程，使之成為移項法則並解決問題。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・移項法則（移正數項）	1.解方程式： $x+8=-2$	・教師引導學生列式： $x+8=-2$ $x+8-8=-2-8$ $x=-2-8$ $x=-10$	・了解移項法則就是等量公理再省略一個步驟。
	2.如果把 $x+8-8=-2-8$ 的算式省略，就會變成看起來好像直接把等號左邊的「+8」移到右邊，變成「-8」。	・$x+8=-2$ $x=-2-8$ $x=-10$	
・移項法則（移負數項）	3.再解方程式： $x-5=8$	・教師引導學生列式： $x-5=8$ $x-5+5=8+5$ $x=8+5$ $x=13$	・了解移項法則就是等量公理再省略一個步驟。
	4.如果把 $x-5+5=8+5$ 的算式省略，就會變成看起來好像直接把等號左邊的「-5」移到右	・$x-5=8$ $x=8+5$ $x=13$	

	邊，變成「+5」。		
・加減移項結論	5.教師根據前二個例子說明：通常利用等量公理解方程式時，就變成移項變號的樣子，就稱為用移項法則解方程式。		・了解加減的移項法則。
	6.也就是在解方程式 $x+8=-2$ 的時候，可以直接將等號左邊的「+8」移到右邊變成「-8」。	・教師列式： $x+8=-2$ $x=-2-8$ $x=-10$	
	7.在解方程式 $x-5=8$ 的時候，可以直接將等號左邊的「-5」移到右邊變成「+5」。	・教師列式： $x-5=8$ $x=8+5$ $x=13$	
・加減移項解方程式練習	8.解方程式：$x-23=-7$ 將「-23」移項。	・教師列式： $x-23=-7$ $x=-7+23$ $x=16$	・會利用加減的移項法則解方程式。
	9.解方程式：$15+x=3$ 將「15」移項。	・教師引導學生列式： $15+x=3$ $x=3-15$ $x=-12$	

貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：我們今天要上的是一元一次方程式，之前有教過大家 x 吧，那是什麼意思？是不是可以代表一個數字？對了。好，我們來看什麼叫方程式，我先舉一個例子，假設你去 7-11 買了 3 盒巧克力，你拿了 100 塊給老闆，結果他找了你 13 塊錢，3 盒我們買一樣的，價錢一樣，所以 100 塊拿給他，找了 13 塊，所以我們知道，3 盒巧克力的錢加上 13 元，應該就是等於 100 塊，結果你今天很衰，買了之後，人家問你說巧克力多少錢，哇！忘了，這時候該怎麼辦？有很多方法去算吧？
2. 學生：100-13 再除以 3。
3. 老師：沒錯，100 塊，反正你是找 13 塊嘛，然後呢？再除以 3，對喔！剛剛有個同學提出方法來，看發票也可以知道。好，100-13 多少？
4. 學生：87。
5. 老師：87÷3=29，這也是一個方式啦！原來我們知道一盒巧克力是 29 塊錢，然後我們上一次有提到，事實上，有一些數字我們一開始不確定的話，是不是可以先用 x 來代表，對吧！也就是說，我們知道巧克力是 29 塊，根據左邊這樣子來算，3 盒巧克力有 3 個 29 塊，然後再補上 13 塊，它是不是應該會等於 100？
6. 學生：是的。
7. 老師：對不對？如果我說，剛開始我不知道巧克力多少錢，我們是不是就先拿一個數字去代表它，拿一個英文字母來代表它？我們可不可以先說一個巧克力多少錢不知道，就 x 元好了，不信你去買巧克力多少錢，他跟你說這盒巧克力 x 元，哇，怎麼辦？你怎麼付錢？我們來看，根據我們的看法，我

們就知道有買了 3 盒巧克力，所以說，一盒巧克力 x 元的話，是不是有 3 個 x 元，所以就知道 $3x$，然後再補多少？

8. 學生：13。

9. 老師：補 13，就會是多少錢？

10. 學生：100。

11. 老師：100 塊。好，我們把這邊先忘記啦！我們假裝一剛開始最原始的狀況是：巧克力多少錢我不知道，於是我就先假設一盒 x 元，就有 3 個 x 元，再補上 13 是不是 100 塊？現在問題來了，請問巧克力多少錢？也就是說，請問你的 x 到底是多少？好，根據我們以前的話，小學這樣算：[(100-13)÷3=29]，現在到了國中，我們就寫成這樣($3x$+13=100)，再想辦法說：有一個問題，x 不知道多少，可是我知道當它乘以 3 再加上 13 的時候，它應該要等於 100，問題就問說，你的 x 到底是多少？我們有幾個策略喔！也就是說 x 多少？我們就試試看，先假裝不知道 x 多少元，可是我知道它乘以 3 再加上 13 就等於 100，於是我們就先試，搞不好一盒是 20 塊，x 是 20 的時候，3×20+13=73，沒有等於 100，這樣子的話，有沒有巧克力等於 20 塊？不會，人家說 3 盒加 13 是 100，不對，是不是太少了？沒有那麼便宜啦！貴一點點好了，30 塊好了。

x	$3x$+13	
20	73	3×20+13=73
30	103	3×30+13=103
28	97	3×28+13=97
29	100	3×29+13=100

12. 學生：103。

13. 老師：加起來多少？103，沒那麼貴嘛！比它少一點點，28 塊。

14. 學生：97 元。

15. 老師：97，你們算得那麼快，因為偷瞄左邊的答案，是不是？

16. 學生：老師，就 103 減 6 就好了。

17. 老師：來，可以啦！還好不是偷瞄隔壁的，好啦！我們知道 29，為什麼 29？(一直在偷瞄那邊)100 塊，我們是不是就找到我們的答案了？巧克力多少錢？3 盒再補上 13 會是 100，就是 29 塊嘛！好，於是這樣子就找到我們要的答案了，可是問一個問題，我們這樣子慢慢思考，試出來當巧克力是 29 塊的時候，3 盒巧克力再補上 13 是 100 塊，有沒有其它種可能？我這樣試試，搞不好巧克力是別種價錢，100 多塊，然後 3 盒加 13 等於 100，有沒有可能的？可能還是不可能？曾子謙你要不要說說看可不可能？

18. 子謙：可能。

19. 老師：可能，為什麼？

20. 子謙：因為，搞不好有折扣。

21. 老師：沒關係啦！本來很多錢，然後就扣掉回來，是不是？來，郭定恩，換你來算算看，為什麼？

22. 定恩：因為如果 3 盒加起來超過 100 塊，加 13 一定就會超過 100，所以不可能會等於 100。

23. 老師：如果 3 盒不超過 100。

24. 定恩：不超過 100，如果低於 29 的話，加起來就會小於 100，所以就不會…。

25. 老師：所以，如果 3 盒小於 100，加 13 就低於 100。

26. 定恩：沒有，我說如果小於 29 的話，就 1 盒小於 29，乘起來再加 13 就會小於 100，所以答案不是 100，所以就不是。

27. 老師：好，坐下喔。這個觀念沒錯啦，問題是：你沒試，你怎麼知道？好，我們來試試看，好不好？來，第一個郭定恩同學有說到，看好喔，我們剛剛算了，29 塊剛剛好嘛，如果比它多一點點的話呢？比如說：30，31

x	$3x+13$
29	100
30	103
31	106
32	109

，32，這就等於多少？

28. 學生：103。

29. 老師：你們怎麼都算那麼快啊！

30. 學生：剛剛旁邊有。

31. 老師：31。

32. 學生：106，再加上 3。

33. 老師：109，怎麼算的？

34. 學生：加 3 啊，因為它都是乘一個 3 啊，因為 x 多 1，所以乘 3。

35. 老師：來，誰要說？舉手，說一下。來，李乙辰你來說一下，這個乘起來要加 13 啊，可是你一看就知道 106。

36. 乙辰：因為如果 x 多 1 的話，乘 3 就會多 3。

37. 老師：沒錯，很好。因此，下面再繼續寫下去。

38. 乙辰：就一直加 3。

39. 老師：一直加 3，不要忘記我們的目的是幹什麼，不要算得很開心，我們的目的是怎樣？

40. 學生：100。

41. 老師：什麼時候會等於 100，對不對？再下去有沒有可能啊？

42. 學生：不可能，會越變越多。

43. 老師：會越來越多，越來越大，所以不可能。於是我們就知道繼續寫下去 30、31、32、33、34，你寫的只會越來越大，就不可能了，比 29 還要大的不可能，那比 29 還要小一點點的呢？一樣，29 的時候剛剛好是 100；28 的時候是…。

x	$3x+13$
29	100
28	97
27	94
26	91

44. 學生：97。

45. 老師：27 的時候是多少？

46. 學生：94。

47. 老師：可以算這麼快，為什麼？

48. 學生：減 3。越來越多就加，越來越少就減。

49. 老師：這是 91，來，我們的目的是：什麼時候 100？不可能嘛！對不對？所以我們就得到一個很重要的結論，我寫在這邊，$3x+13=100$，3 乘上 1 個數字會等於 100，也就是說，只有 $x=29$ 的時候可以，其它的時候不可以，對不對？因此，我們知道當一個方程式列出來的時候，我們找答案如果有找到一個就可以了，好不好？就不要說，搞不好有別種可能，像剛剛那個打折，那是另外一個情況，所以你不要想太多，好不好？對啊！或者是說我可能是怎樣啊？

50. 學生：發現裡面有蟑螂。

51. 老師：或者是本來是 30 塊，算起來是 103 塊，多拿 3 塊給老闆，然後老闆就說 3 塊錢就算了，那種情況不算啦！

52. 學生：是朋友少算 3 塊，計算太差。

53. 老師：我曾經遇到店員算錯，所以你們出去買東西，你不要以為麥當勞那個人都按好價錢了，不要以為他們按的都正確，店員常常會按錯喔！怎麼那麼多錢？好啦！那是題外話。我們來看，我們從頭到尾做了一件事，回到我們原本的問題，今天去買了 3 盒巧克力，1 盒、2 盒、3 盒，結果我們知道，只要再補上 13 塊，這一些剛好是 100 元，結果，現在發現一件事，什麼事呢？去買完之後，人家問巧克力多少錢？我不曉得。不曉得的話，我們可以怎麼做呢？在數學上我們常常說：當有一個數字已經確定是多少，只是我暫時不知道它是多少的話，我可以先假設它是 x，於是我們就列出一個

式子，就知道 3 個 x 再補上 13 元等於 100，後來，我們就可以透過一些方法找出來巧克力是多少錢？原來它是多少？29 塊，因此，這樣的過程我們叫做列出一個方程式。像這一種 $3x+13=100$，先用一個未知數來代表一個我暫時不知道的數，然後把它列出來，再想辦法去找到那個 x 到底是多少，這樣的過程我們叫做列方程式。你們課本裡面上面會寫一元一次。老師就大致上介紹一下，「元」這個東西叫做未知元，用名詞大致解釋一下，什麼叫「未知元」，就是不知道的東西。多少錢？不知道。那元的話，一個未知元，我只有一個數字不知道而已，就是 x。一次的話，我們之前是不是有學過次方？次方就是擺在 x，x 幾次方，有的時候會擺 2 次、3 次，以後我們再看啦！我們先來看一下這個東西，我們列出來的叫做方程式，目的是幹什麼？我只是暫時不知道，等一下我就知道了，這樣子的話，就叫做列一元一次方程式。然後，你不要忘記你的目的是怎樣？我只是暫時不知道，我想辦法去知道，因此我們會找出 x 的答案，當你知道 x 是多少的時候，比如說：原來 $x=29$ 的時候，這個東西我們稱為：「方程式的解」。這樣子清楚嗎？清楚了。一個數字你不知道，就先假設為 x，可是當你列出一個式子之後，然後想辦法找出來，x 什麼時候會使它等於 100，想出來原來 29 的時候它可以，這個東西是不是我們這個問題的答案？它叫做方程式的解，這樣子可以嗎？可以了。好，比如說：我今天拿了兩包糖果，兩包一樣的糖果，相同數量拿兩包，然後分給同學，我發覺到要分的時候，不能平分得剛剛好，於是我就先拿走 4 顆，然後再分給 3 個人，這個時候每個人剛好拿 10 顆，每個人有 10 顆。先拿兩包糖果來，來分糖果了，結果沒有辦法平分得剛剛好，我先拿 4 顆起來，哇！一個人拿 10 顆，現在問題來了，一包有幾顆？從頭到尾有一個數字我暫時不知道，是什麼東西？

54. 學生：一包糖果有幾顆。

55. 老師：沒錯，一包糖果有幾顆，所以一包糖果有幾顆？暫時不知道，x 顆，幾包？

56. 學生：2 包。

57. 老師：2 包，2 個 x，4 顆是我拿走還是補進去的？拿走的，所以是不是會少 4 顆？因此要怎樣？

58. 學生：-4。

59. 老師：這麼多的糖果到哪兒啦？

60. 學生：分給 3 個人。

61. 老師：所以說是讓它怎樣？

62. 學生：除以 3。

63. 老師：出來是多少？

64. 學生：10。

65. 老師：像這樣子有沒有，一個問題，這樣子分得剛剛好的情況之下，糖果到底有幾顆？ $(2x-4)\div 3=10$ 這個叫做方程式嘛，剛剛有同學講出答案了喔，一包幾顆？

66. 學生：17。

67. 老師：一包 17 顆，也就是說，這個 x 是多少？$x=17$。所以這個叫做什麼？

68. 學生：方程式。

69. 老師：這是不是答案($x=17$)？叫做什麼？

70. 學生：方程式的解。

71. 老師：好，到目前沒有問題了吧？我們來看一下，下列何者是方程式的解？我給你一個方程式，$3x-1=8$，列了四個答案給你，第(1)個答案 2，第(2) 個答案 3

下列何者是方程式的解：
$3x-1=8$
(1) 2　(2) 3
(3) 4　(4) 5

，第(3)個答案 4，第(4)個答案 5，哪一個是？

72. 學生：(2)。

73. 老師：第(2)個答案，有沒有人要跟我說為什麼是第(2)個答案？

74. 學生：就是 8+1…。

75. 老師：來，王邵宗，你要說說看，沒關係，說。

76. 邵宗：因為就是 3×2=6，6-1 不可能等於 8；然後第(2)個答案 3×3 會等於 9，然後 9-1 剛好等於 8。

77. 學生：第(4)個答案是 5。

78. 老師：5。

79. 學生：然後 4 跟 5 都會擴大。

80. 老師：你怎麼知道會擴大？

81. 學生：第(3)個答案 3×4-1=11，第(4)個答案 3×5-1=14，所以就會擴大。

82. 老師：好，我們在試的時候，聽好喔！「解」就是可以的時候，可是我代入第一個、第二個完，就找到答案了，這兩個還要不要算？

83. 學生：不用。

84. 老師：為什麼？

85. 學生：解已經求出了啦！

86. 老師：沒錯喔！只要找到一個就好了嘛，找到一個就好了。好，再來一個，看喔，5-2x=9，一樣列一個方程式，我給你幾個答案，第(1)個 1，第(2)個 0，第(3)個-1，第(4)個-2。

下列哪一個數字是方程式 5-2x=9 的解：	
(1) 1	(2) 0
(3) -1	(4) -2

87. 學生：-2。

88. 老師：你們怎麼知道答案？

89. 學生：直接減 9，(5-9)÷2。

90. 老師：5-9 再除以 2，你來說說看，你怎麼知道 5-9 要除以 2？

91. 學生：因為 9-5 等於 4。

92. 老師：就會是多少？

93. 學生：$2x+9$ 會等於 5 啊，把它反過來 5-9 會等於 $2x$，然後再除以 2 就是 x 啊！

94. 老師：$2x+9$，這個算算看。

95. 學生：移項。

96. 老師：為什麼是移項？

97. 學生：減過去就變加了！

98. 老師：減過去又變加，你怎麼知道減過去又變加？為什麼不是減過去變減，好，坐下。來，有沒有人要跟我說，怎麼樣算的？一個一個代還好吧？就跟我們之前算的，反正四個而已，沒有很複雜，它的答案就試試看嘛！就好比你今天要回家了，結果一個門就拿出來四支鑰匙，都一樣怎麼辦？

99. 學生：把門翹開。

100. 老師：來，有沒有別種說法要說說看的？站起來說說看。

101. 學生：後面一樣移過去。

102. 老師：移過去？

103. 學生：就是兩邊同時減掉一樣的東西，因為 5 在那邊，所以減掉 5 那邊就變 0，然後旁邊就變 4。

104. 老師：來，你來說。

105. 學生：因為等號兩邊都加一個東西的話還是相等，就把 $5-2x$ 加上 $2x$，然後 9 也加上 $2x$，然後 $-2x$ 加 $2x$ 就抵消掉，所以兩個就會相等，所以就會等於下面。

106. 老師：可以了，你要講的就是我等一下要講的，有沒有別種講法？你要講的東西跟我講的一樣，那不厲害，小學的問題啦！5 減多少等於 9？

107. 學生：是-4。

108. 老師：5-(-4)，就這樣子。

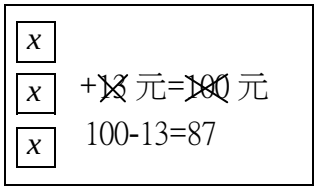
109. 老師：所以不要把它想的太複雜，好不好？你有沒有看到 2*x* 是一個數字？我說的那個 *x* 是阿拉伯數字嘛，為什麼你要寫 2*x*？2*x* 就是一個數不知道乘以 2 是多少，是不是？所以我說暫時寫這樣，那就 5 減哪個數字等於 9，減多少？那就-4 啊，可以嗎？可以。就不要把它想的太複雜，移項，移什麼呢？不要移了，就是小學的問題，5 減多少是 9，5 減(-4)，不管了，我們可以檢驗一下，來，5-2*x*，2 乘以一個數字，5-2×(-2)=9，是不是這樣？可以吧？

110. 學生：-4。

111. 老師：減(-4)，所以是 5+4 等於 9，這樣子清楚了嗎？可以了。好，這部分就是我們提到的方程式，它的解是這樣子。接下來老師要講的就是剛剛講的東西，也就是說像什麼？等量公理，等量公理的話，你們以前是不是學到一點點？可以了？好，我們不管啦！你看這個，這邊我擦掉啦，一樣回到最原始的問題，你去買了 3 盒巧克力不知道多少錢，我知道再補上 13 塊就是 100，剛剛一剛開始，有同學覺得很簡單，100 先減掉 13，因為你是找 13 塊嘛，所以你實際上付給老闆多少錢？

112. 學生：87。

113. 老師：然後，87 塊再怎樣？除以 3，所以是 29，好，那我們來看喔，以前我們在做的事，事實上，我現在的操作是怎麼做的？3 個 *x* 補上 13 是不是就是 100 塊？所以我不要補 13 塊就好了嗎？我這邊 13 就不用，那會是 100 塊嗎？沒有了，所以這裡是多少？100-13=87，87 塊是幾盒的錢？



114. 學生：3 盒。

115. 老師：3 盒嘛！所以說，我要知道 1 盒就好了，接下來是 87÷3=29，也就是說把這裡 3 盒 87 元怎樣？87 塊我們把它分成三份，29 元，是 87 塊把它分成三等份，每一等份都是 29 元，是不是這樣？可以了？來，你看，我們把剛剛做的事寫成式子，把它寫成 x 喔，一剛開始的問題怎樣？在這裡嘛，3 盒巧克力加上 13 等於 100，我們第一步是怎樣？是不是 13 塊就不要，算了，對不對？13 塊不要算，你看，老師這裡是打叉，什麼叫打叉？就是把 13 扣掉了，所以說變成 3 盒巧克力本來要加上 13，我就 13 不要，於是，我是這樣子做，13 不要加了啦，不減行不行啊？

116. 學生：可以。

117. 老師：我們剛剛是不是這 100 也要減掉這 13，所以這也要減掉 13，減完之後，這裡是怎樣？3 個 x，這邊就會等於多少？87。再來呢？我們是不是 3 盒巧克力的錢 87 塊？所以我們接下來做了什麼事？是不是除以 3？所以 3 盒巧克力 $3x$，我把它除以 3，87 塊是不是 3 盒的錢？我再把它除以 3，所以 3 盒巧克力 $3x$ 除以 3，從圖來看一下，除起來就變成多少？

118. 學生：1 盒的錢。

119. 老師：x=87÷3，29 塊，這樣子可以嗎？

120. 學生：可以。

121. 老師：可以了。好，你看，這個過程就是我們解方程式的過程。我們知道以前大家都有學過一點點等量公理了，忘記了，沒關係，我們來複習一下。$3x$+13 就是 100 塊，當這 13 塊扣掉之後，它原本是等於 100 嘛，可是扣掉 13 塊之後，100 塊是不是也要扣掉 13 才可以繼續相等？扣完之後就只剩下 $3x$，最後就是 87，接下來，不要忘記你的目的，老師之前一直強調，

列式：
$3x+13=100$
$3x+13-13=100-13$
$3x=87$
$3x\div3=87\div3$
$x=29$

列式：
$2x+4=10$
$2x+4-4=10-4$
$2x=6$
$x=3$

你解方程式的目的是什麼？x 是多少啊？它是 $3x$，你說怎麼辦？除以 3，3 盒是 87 塊，於是左邊 $3x$ 除以 3，87 是不是也要除以 3？除完之後我們就得到 x 是 29，這就是我們的目的所在，方程式列出來問你 x 等於多少？我算出來了啦！x 就是 29，這樣子行嗎？行了。好，我們再來一題，$2x+4=10$，這是什麼東西？我們來想一下，假設一下，假設是 2 顆糖果好了，2 顆糖果，1 顆多少錢？2 顆的錢加 4 塊等於 10，於是補上 4 塊是 10，可不可以先把 4 塊扣掉？可以，那會等於 10 嗎？不會，兩邊要同時減掉 4，這樣才會一樣，左邊減完，這裡加 4 又減 4，減完之後應該是多少？

122. 學生：$2x=6$。

123. 老師：6，我們是不是要知道 x 是多少？$2x$，所以是不是要除以 2，這裡是多少？

124. 學生：3。

125. 老師：$x=3$ 代表說，剛剛這個是不是它的解，是多少？

126. 學生：3。

127. 老師：不信我們代回去試試看，2 乘一個數字加 4 等於 10，你說等於 3，$2\times3+4$，可以吧，我們知道這個方法是可靠的，可以用的，好，再來，等量公理，我們知道兩邊同時加、同時減、同時除的話，同時你減 4、它減 4 也可以，你除以 2、它除以 2 也可以，可是我可不可以這樣子？看好，$2x+4$，我把它除以 2，10 也除以 2，行還是不行？

列式：
$2x+4=10$
$(2x+4)\div2=10\div2$
$x+2=5$
$x+2-2=5-2$
$x=3$

128. 學生：可以啊！

129. 老師：有人說可以；有人說不可以，有沒有覺得不行的？可以，為什麼可以？為什麼不行？

130. 學生：然後等於。

131. 老師：誰要來說說看？還有沒有男生發言，女生等一下也要有人來說說看，沒有！都那麼害怕啊？

132. 學生：隨便點一個。

133. 老師：黃柏瑋，你要不要講？

134. 學生：他是男的耶！

135. 老師：他是男的喔！

136. 學生：他變性。

137. 老師：那後面那個。

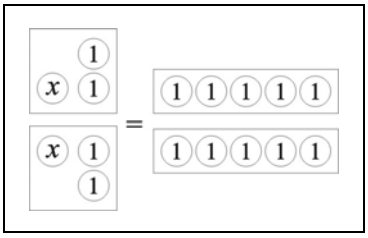
138. 學生：他睡著了嘛！

139. 老師：林子杰，來，跟我說你剛剛夢到什麼？快點啦！行還是不行？不行，站起來說為什麼不行？沒關係啦！為什麼行，為什麼不行？感覺起來怪怪的，是不是？

140. 學生：用猜的。

141. 老師：好啦！你坐下，你看好，到底是行還是不行？我們來看一下，我們剛剛說那個糖果一顆、二顆，一顆多少錢不知道，然後再補上 4 塊錢，它就會等於 10 塊錢。

142. 老師：可不可以兩個同時除以 2？這邊跟這邊一樣，對不對？你這段除以 2 是怎樣？分一半，分一半我們就這樣子，可以嗎？這邊是不是也要分一半？所以就這個等於這個，這個等於這個，



這樣行嗎？除以 2 是什麼意思？是不是就這個意思？所以，可不可以這麼做？當然可以啊！兩邊是不是一樣做同一件事就對了？好，根據左邊的觀察

，$2x+4$ 除以 2 會等於多少？

143. 學生：$x+2$。

144. 老師：對啊！$x+2$。

145. 老師：來，右邊 5。

146. 學生：5-2 等於 3。

147. 老師：來，我們試試這裡多了 2 塊錢，所以說呢？沒錯！我 2 就不要算了，減 2，5 呢？

148. 學生：減 2。

149. 老師：於是在那邊減了就變成 x，3，太好了，我們千呼萬喚終於知道 x 等於多少，x 就等於 3，然後代進去算，代哪裡算就可以了？代這圖形來算，啊！不要再寫 x 了，我知道了，3 加 2 塊是 5 塊，可以嗎？再來，我們看下一題，$\frac{2}{3}x=5$，分數來了喔！我們來想想看一件事情，這個叫做方程式，目的是什麼？

觀察方程式：

$\frac{2}{3}x=5$

$(\frac{2}{3}x)\times3=5\times3$

$2x=15$

$2x\div2=15\div2$

$x=\frac{15}{2}$

150. 學生：未知數的解。

151. 老師：目的是不是 x 等於多少？是不是？對吧。我前面有乘以 $\frac{2}{3}$ 是不是很討厭，對吧？來囉，首先有分數的很討厭，所以可以怎麼辦？

152. 學生：乘以 3。

153. 老師：沒錯，乘以 3，分母就不見了，有沒有漏寫什麼？5 也要乘以 3，前面這裡可不可以約分啊？

154. 學生：可以啊。

155. 老師：為什麼可以？

156. 學生：$\frac{2}{3}x$。

157. 老師：來，有沒有女生要說說看的？之前我講過的，所以有沒有？啊！不知道喔！郭定恩你來說。

158. 定恩：就把它約一約。

159. 老師：廢話！我問你能不能約，你就把它約一約。

160. 定恩：可以約啊！

161. 老師：為什麼可以？

162. 定恩：因為$\frac{2}{3}x$。

163. 老師：然後呢？

164. 定恩：然後乘以 3，就 3 跟 3 約。

165. 老師：好，不錯了，這邊是多少？

166. 定恩：15。

167. 老師：15，分子、分母可以約，所以就變成 $2x=15$。

168. 定恩：7 點 5。

169. 老師：2 乘以多少是 15？7.5，或者說 x 前面乘以 2，怎麼樣可以把那個 2 消滅？除以 2，2 個 x 嘛！除以 2，所以 15 是不是也要除以 2？這樣子可以嗎？

170. 學生：ok。

171. 老師：ok 了喔！好，再來，這題目啊，看好喔，左邊跟右邊差在哪裡啊？所以-1 我不想要的話，怎麼辦？

172. 學生：加 1。

173. 老師：加 1，哪裡加 1 啊？加 1，這個要不要加 1？也要，好，看一下，於是這裡變多少？

174. 學生：$\frac{2}{3}x$。

175. 老師：等於？

觀察方程式：

$\frac{2}{3}x-1=3$

$\frac{2}{3}x-1+1=3+1$

$\frac{2}{3}x=4$

$\frac{2}{3}x\times\frac{3}{2}=4\times\frac{3}{2}$

$x=6$

176. 學生：4。

177. 老師：4。來，我可以乘以多少？

178. 學生：3。

179. 老師：有人說直接乘以$\frac{3}{2}$。

180. 學生：因為這樣可以直接約 2 個就變成 x。

181. 老師：好，這樣比較快，為什麼你知道乘以$\frac{3}{2}$？來，劉應傑，你來講。

182. 應傑：乘倒數的。

183. 老師：沒錯，坐下。

184. 老師：還有沒有同學知道他說什麼啊？之前我們是不是有說過 2 個倒數乘起來會發生什麼事？等於 1 嘛！我們的目的是不是 x 要多少？前面沒寫是乘多少？

185. 學生：1。

186. 老師：1，所以是不是一個隱形的 1 在這裡？可以吧！有些人說 x 已經乘以$\frac{2}{3}$啦，我再乘多少等於 1？我們知道$\frac{2}{3}$跟$\frac{3}{2}$是倒數，兩個相乘就是 1，既然你有$\frac{2}{3}$，我再乘以誰就變成 1？$\frac{3}{2}$，於是，你只要倒數乘起來就 ok 了，太好了，這裡多少？

187. 學生：6。

188. 老師：6，好，來分數了啦，保險起見，我們驗算一下，好不好？你說 x=6 是答案，$\frac{2}{3}$乘以 x？

方程式：
$\frac{2}{3}\times 6-1$
$=4-1$
$=3$

189. 學生：6。

190. 老師：減掉 1，約分，多少？

191. 學生：2。

192. 老師：4 減 1。

193. 學生：3。

194. 老師：好，先這樣，我們下一節課再繼續，下課。

【第二節】

195. 老師：我們剛剛學到的還記得嗎？這樣-3x 等於 63，我們的目的找 x， x 是多少？快跟我說。

方程式：
-3x=63
-3x÷(-3)=63÷(-3)
x=-21

196. 學生：-21。

197. 老師：怎麼辦？來，林峯全你說。

198. 峯全：63 除以-3。

199. 老師：63 除以-3，然後呢？還缺好多東西，今天不是要你們說出是怎麼樣標準答案世界公認的，不用那樣子，漏掉什麼東西，有沒有人可以說？薛紀恆你要不要說說看補些什麼？你說，要補什麼？來，站起來說說看。

200. 紀恆：…。

201. 老師：什麼東西？

202. 紀恆：我沒聽清楚。

203. 老師：有一些東西要補，你只寫這樣子，有些東西要補。

204. 紀恆：是 21。

205. 老師：這樣寫也沒有算錯啦！可是好像跟我們剛剛寫的有點不太一樣，你是用 63 除以-3，可以嗎？可不可以？沒關係，李乙辰要救他，你坐下。

206. 乙辰：英雄救美，x=63÷(-3)。

207. 老師：也沒錯啦！這樣沒錯，我們知道為什麼要除以-3？

208. 學生：因為-3 乘以 x。

209. 老師：因為前面有-3，沒錯，但事實上，這邊你做了什麼事我們就把它寫清楚，我沒有算你錯，我們只是把它寫清楚，原來你是這裡除以-3，所以這個答

案是，正 21？負 21？

210. 學生：-21。

211. 老師：-21，你知道我在說什麼嗎？缺的東西把它補起來，補起來了。x÷7+1=15，所以我們首先是不是可以先怎麼做？

212. 學生：減 1 除 7。

213. 老師：減 1，誰減 1？

214. 學生：15 減 1。

215. 老師：15 要減 1，只有 15 減就好了？

216. 學生：沒有。

217. 老師：兩邊都減 1。

218. 學生：…。

219. 老師：有沒有人會覺得是 x÷8？

220. 學生：先乘除後加減，謝謝，不一定。

221. 老師：多少？

222. 學生：14。

223. 老師：你確定是 14？

224. 學生：98。

225. 老師：怎麼算出來的？

226. 學生：都乘以 7 啦，x÷7 再乘以 7。

227. 老師：所以，我就給它乘以 7，所以說，除以 7 又乘以 7 相當於什麼都沒做，這裡是？

228. 學生：98。

229. 老師：好，沒問題吧！課本翻到 170 頁，170 頁下面是不是有隨堂練習，有 6 題，

現在大家試試看，然後我找幾位同學上來寫。

隨堂練習
解下列各一元一次方程式：
(1) $x+8=-9$
(2) $6-y=-7$
(3) $7x=-105$
(4) $3x=11$
(5) $x\div 6=-18$
(6) $-\frac{1}{4}t=6$

230. 學生：老師，一定要寫算式嗎？

231. 老師：眼睛一看你就寫好，你是怎麼看出來的？老師有沒有跟你說過什麼叫列式？列式就是寫好你的計算，你的計算過程就是說你答案怎麼來的，你要交代清楚，即使今天問你 1 顆蘋果加 1 顆蘋果等於幾顆，你也要寫 1+1=2，你說這麼簡單也要，你也要表達說，我這個答案怎麼算出來的，我抽幾位同學，我隨便抽好了。

232. 學生：14 號，16 號。

233. 老師：你為什麼那麼喜歡，15 號是誰？來，這一題給你，第二個，29 號是誰？

234. 學生：正中目標。

235. 老師：4 號是誰？

236. 學生：吳宗翰，你上去啊。他沒有上去啊！

237. 老師：真的嗎？

238. 學生：不要小看他，好不好？他超強的，老師不要歧視同學。

239. 老師：吳宗翰你可以上來寫嗎？

240. 學生：你跑 800 公尺第一。

241. 老師：試試看，你們不會寫不用害怕啦，沒有說不會寫的要處以極刑。

242. 學生：宮刑。

243. 老師：來，12 號，12 號第(4)題。

244. 學生：快一點，第(4)題太簡單了。

245. 老師：快點啊！王柏勳第(4)題。

246. 學生：對嘛！你寫這樣就好了啦，好難喔！

247. 老師：第(5)題抽了沒？

248. 學生：還沒。

249. 老師：34 號第(5)題。

250. 學生：爽，還有一題。

251. 老師：還有一題。

252. 老師：來，26 號是哪一位？你，好，第(6)題。

253. 學生：26 第(6)。

254. 老師：沒關係，把你想到的寫寫看，不會寫沒關係，本來剛開始學，有的同學很厲害是上小學時，老師有偷跑了，有些現在第一次聽到這個東西，有的同學已經學到滿後面的，沒關係啦！他該怎麼辦呢？

255. 學生：這不會寫。

256. 老師：不會寫啊！你們誰要上去救他？你上去救他好了，第(2)題在哪裡？

257. 學生：…。

258. 老師：沒關係啦！

259. 老師：好，就這樣子了，我們看第(1)題，可以了，為什麼可以？

260. 學生：反過來。

261. 老師：反過來，事實上你是在想…？

262. 學生：x+8-8 就是-9-8。

263. 老師：原本這邊是怎樣？

264. 學生：+8-8。

學生的作法：
(1)x+8=-9
x=-9-8
x=-17

265. 老師：對，你不要忘記了，有些同學，要回到原本的問題，你今天列方程式的目的是幹什麼？要找出 x，所以每一個方程式，最後一定是寫出原來你的 x 是多少，或者是像這一題（第(6)題）一樣。原來這一題還好，剛剛的未知

數是用什麼？t，來看嘛，沒有人說不行喔！好，因此你看，它這裡一剛開始 x 忽然跑出一個 8，因為+8 很討厭，所以把它-8，你的目的，x 等於多少？你要怎麼算？上面不要擦掉，我們來看喔，先看這邊。

266. 學生：反正他寫錯就對了。

267. 老師：然後，我們來看原本這邊，好；我們看他寫的。

268. 學生：他拿的不是他的課本，好強喔！

269. 老師：不要說別人的錯誤了，你要挑，一大堆可以挑，那不是重點。來，我們來探討，我們再回到原點，我們的目的是什麼？x 等於多少？或者是未知數 t 等於多少？你可以看到我們在解方程式，剛剛老師在寫的時候，寫到最後一個是什麼樣子？t 是多少，像這個未知數是 t，就是 t 是多少，像這個是 x，就是 x 為多少，對吧！這是我們最後一步，因此你不要忘記，方程式是幹什麼，我最後要知道 x 是多少。最後它有+8，加了 8 我再把 8 扣掉，是不是就沒了？所以他說 17，他寫出 x，怎麼知道要減 8，因為事實上，你這裡$(x+8)$-8，這裡(-9)也有減 8，於是就得到-9-8=-17，這是哪位同學寫的？好，再來，若你還不曉得你的想法，或許還可以這樣子，以前的話，國小會怎麼做？一個數字加上 8 會等於-9，是多少要減回去？你這樣看也可以，不管怎樣，對了，好，第二步，來，你看第二步跟第一步缺哪裡？

270. 學生：-6y，前面要加一個 y。

(2) 6-y= -7 =6-(-7) =6+7 =13

271. 老師：沒錯。

272. 學生：方程式前面不能寫等於，不然二個等於很快…。

273. 老師：方程式不能寫等於？

274. 學生：前面的那個地方啦！

275. 老師：我們來看，來，是不是這一個式子？方程式的目的是不是這樣？你有未知

數 y，y 是多少？這是誰寫的？徐子婷寫的，是這樣子寫的？還是老師有沒有改錯？還是算了，反正老師改的一定對，你不怕我陷害你啊？

276. 學生：信任老師。

277. 老師：來囉，看好，這樣子嘛，你寫這樣害我不曉得怎麼改，6-(-7)，前面加個 y，y 是不是 13？我看一下，沒錯，你要不要跟我說一下你怎麼知道用 6-(-7)啊，你講錯沒關係，有錯誤的觀念，你們提出來老師才知道你們哪邊沒想好，來，先安靜啦！

278. 學生：6 減剩下的還是會等於原來的。

279. 老師：6 減掉什麼？

280. 學生：就是-7 會等於 y 啊！

281. 老師：你的意思是這樣。對，我是問你，你怎麼知道 6 減這個(-7)會等於 y 呢？知道老師問什麼嗎？y=6-(-7)沒錯啦，你怎麼知道？搞不好是 6+7，也可能是(-7)-6，這麼多種，你為什麼選擇它，不選擇這二個？

282. 學生：因為 y+(-7)=6。

283. 老師：因為 y+(-7)=6，好。

284. 學生：因為他相信自己。

285. 老師：為什麼 y+(-7)=6？

286. 學生：因為它是減掉的，跟剩下的加起來就會等於 6。

287. 老師：你大聲一點。

288. 學生：減掉的跟剩下的就會等於原本的。

289. 老師：喔！沒錯，很好，好，請坐啦！他的觀念很正確，6 去減掉一個數字 y 等於剩下的？所以，到底是減掉多少呢？那就怎樣？那就 6 去減掉剩下的就會是原來的，好，現在變成什麼？負的你可能看不太懂，那我們怎麼看？

假設 6 去減掉 4，剩下多少？

290. 學生：2。

291. 老師：2。所以說，今天我把它蓋掉，6 減多少會變成 2，你會怎麼算？

292. 學生：6 減 2。

293. 老師：可以吧！不錯啦！這很好，來，這對了，不要以為人家寫錯，人家對，只是少寫一個 y 而已。好，這裡（第(3)題）$7x=-105$，所以呢？左邊加 7，右邊除以 7，好不好？

學生的作法：
(3) $7x=-105$ $7x\div7=-105\div7$ $x=15$

294. 學生：不好。

295. 老師：你是那兩點沒點好，是不是？你為什麼要左邊加 7，右邊除以 7 啊？

296. 學生：兩點要點好一點。

297. 老師：我問一個同學，來，你剛剛不太會，我問你，為什麼 $7x$ 要除以 7？不曉得。剛剛都是男生講，李思穎，為什麼我要除以 7？聲音大一點。

298. 思穎：因為倒數。

299. 老師：倒數，你的倒數，沒有啊，哪有倒數？為什麼要除以 7？好，坐下，男生，換你，為什麼要除 7？

300. 學生：因為這樣就等於 $1x$。

301. 老師：沒關係，一樣喔，老師強調了。

302. 學生：他寫錯了，他這是負的，正的會變+105。

303. 老師：我的目的是 x 是多少？你給人家乘以 7，我再把它除以 7，除完才會變成 x 嘛，所以，一開始老師強調了方程式的目的，是要找出 x 是多少，你寫 $7x$ 給我幹什麼？我是要把你的 7 除掉，這樣對不對？

(4) $3x=11$ $3x\div3=11\div3$

304. 老師：對，標準。x 前面乘以 3（第(4)題）再除以 3，這樣對囉，這邊空了好大一格，這個東西，聽好了喔！剛剛你們那個數字很奇怪喔，看到 18 又是 6 沒有除（第(5)題）心裡受不了，漏掉什麼？

學生的作法：
(5) $x\div6=-18$
$=-18\times6$
$=(-108)$

305. 學生：x。

306. 老師：為什麼要寫 x 啊？我剛剛一直在強調一句話，你們都沒聽進去啊！

307. 學生：因為我們現在要算 x 啊！

308. 老師：對啊！我們搞了半天，x 多少跟我講嘛！這樣子可以嗎？行，來，最後一個（第(6)題），這邊啦！他寫對了，前面除以$(-\frac{1}{4})$，所以 6 也去除以$(-\frac{1}{4})$，除起來的話，6 除以$-\frac{1}{4}$變成 6 乘以-4，好，答案-24，這樣正確了，這樣行嗎？可以啦！我們來看一件事，這邊看了這麼多，我們都知道一件事，那就是說，我們的目的是要找出未知數是多少，因此的話，有些同學都會省步驟，像這位同學，反正你加 8 跟減 8，最後一定剩下 x，所以這個東西，看到這個了，$x+8=-9$，直接跳到這裡，事實上我們知道你的減 8 怎麼來的，剩下 x，因為我每次都要剩 x！所以我這一步怎麼樣？中間省略掉這一步，對不對？好，兩邊同時扣掉 8 之後，就變成這樣子，於是我就得到 $x=-17$，你看好了，當我這一步，每次加 8、減 8 寫的無聊啊！直接跳過來之後，看起來是不是好像那個加 8 跑走了，本來 x 再加 8，本來是不是再加 x，結果它跑掉了，不給 x 加了，它跑到哪裡去了？跑到跟這個-9 比較好，跟它做朋友，可是它跑過去之後會變成什麼？減 8，所以說看起來是不是好像是把這個(+8)搬家，跨過這個

學生的作法：
(6) $-\frac{1}{4}t=6$
$-\frac{1}{4}t\div(-\frac{1}{4})=6\div(-\frac{1}{4})$
$-\frac{1}{4}t\times(-4)=6\times(-4)$
$t=-24$

$x+8=-9$
$x+8-8=-9-8$
$x=-9-8$

等號，它順便變性變成-8。

309. 學生：麵線，變性啦！

310. 老師：它就跑過來這邊這樣子，再來看一個東西，不要吵，等一下要給你們機會了，來，這裡我們會怎麼做？以前的話，我們想到說，我們的目的是不是 x 等於多少？你覺得減 3 很討厭，是不是？加上 3 又減 3 就沒了，可不可以只有它加 3，7 不理它？

x-3=7
x-3+3=7+3
x=7+3

311. 學生：不行。

312. 老師：7 要加 3，如果說這一步省略的話，是不是直接變這樣？看起來是不是，你的 3 跑哪去了？是不是跑來這裡了，對不對？對吧！是不是本來 x 是要減 3，結果呢？它就跑來跟 7 做朋友，不只是跑過去而已，而且減的會變成什麼？加的。所以說，我們就可以比較快一點點，x 等於 10，這樣子聽懂嗎？因此的話，2x+1=7，一樣，我們本來是有寫加 1 再減 1，我們寫快一點可以變成 7，跑過來這裡是加 1 減 1 不寫，可是這裡可不可以不寫？不行，這邊減 1，所以說 2x 等於？

2x+1=7
2x=7-1

313. 學生：6。

314. 老師：6。x 等於？

315. 學生：3。

316. 老師：這直接用心算的喔，這樣子有沒有問題？沒有了，等一下老師寫幾題，你們在課本空白的地方練習，我找幾個人上來寫，好不好？

317. 學生：要抄題嗎？

318. 老師：要。

319. 學生：啊！要抄題喔？全部寫出來就好啦。

320. 老師：你們在空白的地方寫，我再看看，29 剛剛有沒有抽過？

題目：
1. 3x-2=13
2. $x+\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$
3. 2x+5=11

321. 學生：沒有。

322. 老師：來，29 號。

323. 學生：沒有，有好不好，沒有抽過，沒有。

324. 老師：好，來，28 號。

325. 學生：明明就沒有。

326. 老師：我隨便抽一個，來，12 號。

327. 學生：隨便抽，同樣的抽過了。

328. 老師：為什麼會一樣的，來，15 號。

329. 學生：抽過了。

330. 老師：9 號。

331. 學生：(有人說)抽過了。(有人說)沒有。(有人說)全部都抽過了。

332. 老師：來，9 號，帶課本幹什麼？

333. 學生：老師，18 號啦！

334. 老師：好啦！18 號啦！

335. 學生：胡佳豪，你寫對了，不愧是我徒弟。

336. 老師：來，這兩個（$x+2=5$、$x+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$）差在哪裡？

337. 學生：沒差，好像沒差耶！再讓我來寫一下，真的嗎？

338. 老師：不用啦！你幹什麼？

339. 學生：你要慢慢走，你要做那特效，加油啊！

340. 老師：好啦！可以了。

341. 學生：AB 人被抓包了，他應該變成 BB 人。

342. 老師：好，安靜了，趕快，這一個很好了喔！-2 還是兩邊同時+2，是不是？你不寫了，就直接搬，直接加 2，於

$3x-2=13$
$3x=13+2$
$3x=15$
$x=5$

是 $3x$ 變成這樣，$3x=15$，3 乘以多少等於 15？5，來，事實上這一題〔第(2)題〕意思一樣嘛，改數字而已嘛，那他有利用到移項法則，看到沒？

$x+2=5$
$x=5-2$
$x=3$

343. 學生：看到了。

344. 老師：這裡呢？$+\frac{1}{5}$ 也一樣嘛，$+\frac{1}{5}$ 把它移過來變成 $-\frac{1}{5}$，變成這樣子，那是不是要移項？那這個先不做，這樣寫，不是說一定要像移項法則，可以吧，移項法則只是說，我這個偷懶少寫一步而已，沒有比較厲害啊！如果沒有保險起見就寫這樣，快跟慢，寫對比較重要，於是這一步看起來 $+\frac{1}{2}$ 再 $-\frac{1}{2}$ 看到右邊這樣子，沒錯啦。好，再來看這一個喔，+5 移過來變-5，好，對了，於是我們再來看一個東西，我們看這個，還記得移項嗎？

$x+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$
$x=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}$
$=\frac{1}{5}$

$x+\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$
$x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}$
$x=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}$
$x=\frac{4}{10}-\frac{5}{10}$
$x=-\frac{1}{10}$

$2x+5=11$
$2x=11-5$
$2x=6$
$x=3$

345. 學生：記得。

346. 老師：+9 是不是可以兩邊-9，對不對？兩邊-9 的話，+9 或-9 都沒了，就不要寫了嘛，-18 再-9，或者是+9 搬過來是-9，事實上是怎樣？少一個步驟嘛！這裡+9-9 就不寫了嘛，是不是這樣？然後，9 可以搬，這個可不可以搬？來，我先把它整理好，-9-18，減多少？

$-4x+9=14x-18$
$-4x=14x-18-9$
$-4x=14x-27$
$-4x-14x=14x-27-14x$
$-4x-14x=-27$
$-18x=-27$
$x=(-27)\div(-18)$
$=\frac{27}{18}$
$=\frac{3}{2}$

347. 學生：27。

348. 老師：27，可不可以搬 $14x$？裡面是 x 耶！

349. 學生：可以啊，因為同樣的。

350. 老師：為什麼可以，有誰要說？

351. 學生：因為 x 的數代表數一定都一樣。

352. 老師：什麼意思，你講對了。

353. 學生：x 它代表數一定都是相同的，因為共同的代表的數。

354. 老師：共同代表的數字一樣。

355. 學生：所以可以移。

356. 老師：所以可以移，那就是說數字不一樣就不行移？好啦，有沒有可能不一樣啊？x 代表一個數嘛，有沒有可能一個是 2，另一個是 3？

357. 學生：它只代表一個數的分身啦！

358. 老師：來，劉應傑，換你說。

359. 應傑：x 是一樣的數，一樣的數可以變結合律結合在一起。

360. 老師：沒有，我現在問你可不可以搬啊，是因為結合律才可以搬？

361. 學生：不是，是一樣的數。

362. 老師：一樣的數才可以搬，好，來，坐下，如果我今天做這件事，$5x$ 可不可以變成 $3x+2x$？

$5x=10$ $3x+2x=10$

363. 學生：可以啊！

364. 老師：可以嗎？可不可以搬過來？

365. 學生：可以啊！

366. 老師：我是問你可不可以，不是麻不麻煩？

367. 學生：可以啊！

368. 老師：好啦，這樣子，對還是錯？

369. 學生：對啊！

370. 老師：來，為什麼對？李乙辰說。

371. 乙辰：因為 x 本身是代表一個數啊，只要數在這裡都可以搬啊！

372. 老師：好，不錯啦，這幾位同學的觀念都很好，其它女生都不發言了。

373. 學生：他的觀念都很好。

374. 老師：我們沉默是金，這邊都是金。那就是可以搬。有沒有同學有不同的看法，它是可以搬，沒錯啦，為什麼可以？你要不要說說看？

375. 學生：為什麼可以搬？

376. 老師：它是 x 啊！

377. 學生：因為它還是一個數啊！

378. 老師：好，好啦，沒錯啦，所以我們知道它看起來雖然是英文字母，但現在也是一個數字，只是還沒算出來而已嘛，跟那個什麼結合律無關，我們看喔，$-4x$ 搬過去，-27 還在，不要亂跑，$14x$ 前面沒寫符號，是正的還是負的？

379. 學生：正的。

380. 老師：那麼，他說正的搬過去會變負的，還記得為什麼嗎？

381. 學生：因為移項法則。

382. 老師：我就是問你為什麼移項法則？

383. 學生：因為那減 $14x$ 才可以消掉啊！

384. 老師：對啊，就略掉這一步嘛，事實上沒有什麼就移項法則是怎樣？那你就減，它也減，然後這一步給它隱形，x 也是可以搬喔，因為它原本是一個數字嘛，所以剛剛我們數字在搬，x 沒有比較特殊，它也是一個數字，好，來，多少 x？

385. 學生：$-18x$。

386. 老師：等於-27，好，那我來問一下康柏揚。

387. 柏揚：等於拿掉。

388. 學生：拿掉啊，你在幹麼？拿掉就是倒過來嘛，你還倒，除以 18，然後另外一邊也除以 18。

389. 老師：又是同樣一句話，我寫了半天，我的目的是幹什麼？

390. 學生：要 x。

391. 老師：x 答案是什麼，你前面有 18 除以多少？

392. 學生：負的 18。

393. 老師：對啦，你這裡除-18，這裡除以-18，不錯，坐下，這個除起來多少？x 是正的還是負的？

394. 學生：正的。

395. 老師：約分開始約，約 9。

396. 學生：3。

397. 老師：好，那剩下的話，我們下一節再繼續啦！

398. 學生：ok！

399. 老師：好，那這樣吧，下課。

400. 學生：起立，立正，敬禮。

401. 學生：謝謝老師。

參、教學說明

大家好，我們這一次上的教材是一元一次的解方程式，解方程式的話，我們教材設計，我在想，跟以前有點不太一樣的是在解方程式的話，學生比較容易落入程序性的操作，學生常會了移項，得到一個 x 答案，可是我們的學生並不曉得自己在做什麼。所以，我針對這一方面的教材做一些更正，一剛開始我是利用情境的舖陳，讓學生了

解到解方程式就是有一個數字不知道，然後假設一個未知數之後，最後的目的是要把這個數字求出來。那我在這一方面做了一個滿長的舖陳，讓學生了解我為什麼要列方程式，然後，列了方程式的話，我到底要做什麼事，接下來，上這個方程式之前，事實上還有一個單元是用文字符號來代表數字，這方面，發現班上滿多的同學事實上學習的不錯，也就是說，他們有一個認知的概念，就是 x 本身實際上是一個數字，它並不是單純一個文字而已，因此，在後面運算方面，我覺得是對學生有一些些幫助的。整體上下來的話，我個人的感覺是我上的變成有一點點快，前面部分的話，我個人是覺得給學生練習的東西有一點點少，就變成從頭到尾我在講，這是我第一次拍影帶。我個人覺得我的缺點可能是中間有一些段落，要給學生上來發言的機會，或者是多聽聽學生的意見。我個人覺得這次我上課的內容，還有需要改正的地方，原本我教材的設計目的是解方程式，後面我是想要全部都把它上完之後，接下來就列個方程式給學生練習，然後，接下來再看看學生有哪一方面是不會的，不過中間有安插一小段，就是用課本的隨堂練習給學生寫，這邊就發現事實上學生的落差是滿大的，也就是上到後來就會發覺，事實上滿多的同學連我們一剛開始強調的為什麼要解方程式？這個方程式我們目的在哪裡？我們練到後來，求出 x 是多少，有些同學還沒有搞清楚。由於班上同學的落差滿大的，這部分當然跟我們課程是有一點點關係，有些同學在小學的時候，其實他這一單元有老師先教過了，有些同學是完全不曉得，所以在課堂上會發現有些同學反應很熱絡，為什麼呢？這些是他以前學過的東西，他現在正好可以表現，而有些同學在下面吵了一頭熱，還不太知道是在做什麼，這個班上的學生程度的差異性相信是很多，基本上都會有狀況，這方面要考慮的是，老師如何掌控教室的進度？如何把會的學生安撫好，讓他依然覺得這堂課跟以前的不一樣，也不是說教的比較難，而是讓程度比較落後的學生依然有辦法跟得上學習，這部分事實上也在考驗老師。因此，在上課的過程當中，我通常去提問學生一些問題，剛開始我就有提到，方程式在

教學過程當中很容易落入程序性的操作而不是在看做什麼，這一批已經學過的學生，他很有可能就是在這樣的情況之下學出來的，因此，老師變成要從最根本的問題去挖出來，比如說，他們知道會移項，移項的話，為什麼正的抓過去就變成負的？這個就是滿值得思考的問題。我們課程的進行是上一堂數學課，因此，數學最主要是教他為什麼，而不是程序性的操作，因此這方面變成是我們上數學課的重點，等到已經舖陳好之後，接下來後續的部分就是，學生如何利用學習到的概念來解題？這變成學生要學習的重點，這樣的話，我們同學的反應就是比較兩極化，班上的同學事實上也是男生非常的熱絡，女生就是比較安靜，因此上課的時候，個人覺得有必要多做一些練習，老師趁機可以下去看看女生的反應是怎樣，以上是我個人對我這兩節課的一些反省與省思。

肆、教學後的省思

這個教學活動的目的在於意義的了解、求解的方法與記錄。雖然整個架構是完整的，但是想要在兩節課內完成，步調卻是快了些。【活動四】的內容重點在於把圖形表徵轉換為文字表徵，雖然學生對於圖形表徵比較容易接受，但是表徵的轉換是本活動的重點。活動設計只有一個例子感覺上太少了，應該再多增加幾個實例，一方面體會等量公理在解方程式上的應用，一方面能把圖形操作的結果轉換為文字列式。【活動五】屬於解方程式的策略，在理解等量公理的操作之後，面對一個方程式，要如何在文字表徵下應用等量公理又是一個教學重點（比如說：應是同時加上多少？還是同時減去多少？）。需要什麼樣的策略才能解題，首先要能明白解方程式的目標在於解出未知數，有了目標才知進行的方向。這麼多的觀念想要在兩節課進行完畢，對於有些學生是負荷不來的，因此【活動四】和【活動五】應再增加一些實例，讓學生慢慢地體會，不能只是一廂情願地把該教的觀念講過一次。若是學生沒有足夠的時間消化與思考，

教師講解得再好也是沒有用的。

本單元拍攝的學校屬於都會區，處於都會區的學生有一個特性，資訊較多、競爭較強。所以很多學生在本教學活動進行之前，有著許多管道可以先行學習過該單元。但是很不幸的，學生看似已經學習完成，實質上只是把解題的規則「背」下來而已。以移項法則來說，『移項要變號』對於學生是一項遊戲規則，而不是一個數學現象。甚至於在經過移項之後所求得的解，給學生的感覺比較像是在某一個遊戲規則下的成果，也不曾檢驗所得的解是否正確。為了幫助處於一知半解的學生能夠理解運算規則的意義，在一開始的教學活動中便再三地強調「方程式」及「解」的意義，讓學生能體會在一連串的運算之後，所得的結果有何意義，甚至於為何要進行如此的操作。

初次參與教學拍攝難免不了有著新手的緊張，心中一直惦記著和指導教授討論多次的教案。教學除了要注重教材的內容，更重要的是幫助學生習得新的知識。教學的過程是一連串的師生互動，在教學的過程當中，除了課程內容的講述之外，注意學生在教學過程中的回應也是重要的。因此，教學之前有一份好的教案和教學之後的省思是同等重要的。好的教案是讓教學的每一個活動片段的學生思維能夠連結，而且整體能夠符合單元目標的系統性；教學後的省思則是補足教學前的設計當中所未料想到的缺失。所以教師除了教學前的備課，也不忘教學後的省思，如此才能使得教學更上一層，也能使得更多的學生受惠。

二元一次聯立方程式

壹、教學活動設計

一、**教學年級：**八年級上學期

二、**教 學 者：**台北縣立錦和高中 陳萩紋 老師

三、**教學目標：**

1. 能列出二元一次方程式並了解其解的意義。
2. 能使用代入消去法解二元一次聯立方程式並記錄解題過程。
3. 能使用加減消去法解二元一次聯立方程式並記錄解題過程。

四、**活動目標：**

【第一節】

活動一：能解決符合二元一次式情境的問題。

活動二：能以有效率的方法找出二元一次方程式可能的解。

【第二節】

活動三：能以代入消去法解二元一次聯立方程式。

活動四：能以加減消去法解二元一次聯立方程式。

五、**教學概要說明：**

學生在進行此單元的教學前，已經學習過「以符號代表數」及「一元一次方程式的解法」，所以我安排的第一個教學活動是早餐店的包子及豆漿為例，讓學生能以 x，y 來代表題目中的未知量並透過表列的方式算出答案。延續活動一，第二個活動主要是要讓學生找出二元一次方程式所有可能的非負整數解，以題目一為例：早餐店包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元，而小如買了四個包子一杯豆漿(10×4+15×1=55)與小健買了一個包子三杯豆漿(10×1+15×3=55)，這兩種不同數量組

合的包子和豆漿數，而總價卻是一樣的，讓學生發現二元一次方程式的解是有許多組的。所以活動二中，學生依情境列出二元一次方程式後，學生能理解此方程式的解並不唯一，所以能嘗試找出許多不同的解，但是一開始先不限定學生的找法，透過幾個對話， 如「你會從 x 或 y 開始找？」、「如何確定已經找完？」、「解的範圍在哪裡？」來讓學生發現最有效率的解題找法。

因為二元一次聯立方程式的解法有代入消去法及加減消去法，為了引導學生自行解題，所以刻意在活動三中加入「豆漿的杯數是包子個數的兩倍($y=2x$)」的情境，預期學生都能以代入消去法解題。學生可以由前面的表格中直接找出答案，也可以透過情境的限制利用代入消去法解出答案。

而在活動四中希望學生能以加減消去法解題，所以活動四重新布題，讓學生列出兩個標準的二元一次方程式，透過加減消去法算出答案。

六、教學活動設計：

【第一節】

活動一：能解決符合二元一次式情境的問題。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・能以 x，y 代表題目中的未知數	1.好好吃早餐店包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元，根據以下幾個同學買的情況將所花的錢列在表格內。	・教師的題目以表格方式出現，並請學生列出算式。	・能列出符合題意的算式及總價。
	・小明買了一個包子，一杯豆漿，請問總共花了多少錢？	・包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元。	・能算出總價。
	・小花買了三個包		・能算出總價。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>子，二杯豆漿，請問總共花了多少錢呢？
・小如買了四個包子，一杯豆漿，請問總共花了多少錢呢？
・小健買了一個包子，三杯豆漿，請問總共花了多少錢呢？
・小強買了 x 個包子，y 杯豆漿，請問總共花了多少錢呢？</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>包子個數</td><td>豆漿杯數</td><td>總價</td></tr>
<tr><td>小明</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>小花</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>小如</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>小健</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>小強</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
・除了以表格列出外，可以再寫出算式：
$10\times1+15\times1=25$
$10\times3+15\times2=60$
$10\times4+15\times1=55$
$10\times1+15\times3=55$
$10\times x+15\times y$
$=10x+15y$
</td>
<td>・能算出總價。
・能算出總價。
・能算出總價。</td>
</tr>
<tr>
<td>・教師布題(複習以符號代表數)</td>
<td>2.練習題：阿光參加數學檢測，題目有選擇題和填充題兩種。分數的計算方式是：選擇題答對一題得 3 分，填充題答對一題得 5 分。結果阿光答對選擇題 x 題，填充題 y 題，那這次數學檢測阿光得幾分？</td>
<td>・此題為練習用，讓學生能以未知數來列式，並說明二元一次式的意義。</td>
<td>・能以 x，y 表示總分：阿光得$(3x+5y)$分。</td>
</tr>
</table>

活動二：能以有效率的方法找出二元一次方程式可能的解。

<table>
<tr><th>教學內容摘要</th><th>主要問題與活動</th><th>說明</th><th>評量重點</th></tr>
<tr>
<td>・以有效率的方法找出二元一次方程式可能的解</td>
<td>1.好好吃早餐店包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元，小強買了 x 個包子，y 杯豆漿，總共花了 120 元，請你依題意列出二元一次方程式。
・並說明他可能買了幾個包子和幾杯豆漿。
・你找出幾組答案？
・你怎麼知道你找出了所有的答案呢？

2.練習題：寫出下列所有符合條件的 x 與 y 值。
1、$2x+7y=50$
（x，y 為正整數）

2、$4x+3y=36$
（x，y 為非負的整數）</td>
<td>・$10x+15y=120$
・學生在寫下答案時，老師可以視情況對學生提出下列問題：
1、兩樣東西都要買嗎？
2、x，y 的範圍限制？
3、如何將可能的結果都列出？如何確定已經窮盡了呢？
4、引導學生發現從y的解來找會比較容易。
<table><tr><td>x</td><td>12</td><td>9</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr></table></td>
<td>・能列出符合題意的二元一次方程式。

・能以表列的方式找出方程式的可能的解。</td>
</tr>
</table>

活動三：能以代入消去法解二元一次聯立方程式。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・依題意列出二元一次聯立方程式 ・透過式子規律的觀察，以代入消去法解二元一次聯立方程式	1.好好吃早餐店包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元，小強買了 x 個包子，y 杯豆漿，總共花了 120 元，而且豆漿的杯數是包子個數的兩倍，他可能買了幾個包子和幾杯豆漿呢？ ・你可以從上題中列出的所有解中找出答案嗎？ ・請你試著將題目的敘述列成方程式。 ・可以從這兩個方程式中找出題目的解嗎？	・先提醒同學，可以從上題列出的所有解中找出與題目條件敘述相符合的答案。 ・將本題列出兩個方程式： $10x+15y=120$ $y=2x$ ・再從觀察兩個式子之間的關係，老師帶領學生作解題，保留解題的痕跡，利用 $y=2x$ 的關係，將第一式的 y 以 $2x$ 代替，再解出 x。 ・最後再將完整的解題過程重新寫一次。 $\begin{cases} 10x+15y=120\ldots\ldots(1) \\ y=2x\ldots\ldots(2) \end{cases}$ (2)代(1)式 $10x+15\times(2x)=120$ $10x+30x=120$ $40x=120$ $x=3$ $y=2x=3\times2=6$	・能從表列出的所有解中，找出符合題意第二項條件中的唯一解。 ・能將解題步驟記錄下來。 ・能理解代入消去法的意義。
	2.練習題：利用活動三的方法解下列二元一次聯立方程式。		・能利用代入消去法解題。

	1. $\begin{cases} y=-3x \\ 2x+y=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=y-1 \\ 3x+y=13 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+6y=x+41 \\ 3x+4y=39 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x+5y=-10 \\ 5x-3y=6 \end{cases}$		

活動四：能以加減消去法解二元一次聯立方程式。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・依題意列出二元一次聯立方程式 ・透過式子規律的觀察，以加減消去法解二元一次聯立方程式	1.最近學校附近又新開了一間真便宜早餐店，因為剛開幕，所以所有產品都以特價賣出。小華買了 5 個包子和 2 杯豆漿花了 64 元，小玲買了 2 個包子和 2 杯豆漿花了 40 元。 ・請你依照題意列出聯立方程式。 ・求出真便宜早餐店中所賣的包子一個多少錢？豆漿一杯多少錢？	・在黑板上將題目的條件以圖片表示。 =64 =40 =24 =8 =24 =12 ・將學生寫出的方程式列出並約定解題過程的寫法。	・能依題意列出二元一次聯立方程式。 ・能觀察出式子的規律。 ・能將解題過程記錄下來。

	2.練習題：利用以上解法解下列題目： (1)夜市中有撈魚和用飛鏢射氣球的遊戲，小翰玩了四次撈魚和五次射氣球的遊戲，付給老闆160元；小閔玩了兩次撈魚和兩次射氣球的遊戲，付給老闆70元。請問兩種遊戲玩一次的費用各是多少錢？ (2) $\begin{cases} 5x-2y=-4 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 25x-30y=-20 \\ 3x+4y=9 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=-1 \\ \frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y=\frac{1}{4} \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+2y=64\ldots\ldots(1) \\ 2x+2y=40\ldots\ldots(2) \end{cases}$ (1)式-(2)式 $3x=24$ $x=8$ 代入(2)式 $16+2y=40$ $2y=24$ $y=12$	

・代入消去法的命名	3.歸納活動三這種解二元一次聯立方程式的方法，我們稱為代入消去法。	【代入消去法的步驟】 1.先將二元一次聯立方程式，化簡為一元一次方程式。 2.再解一元一次方程式，求一未知數之值。 3.再代入原關係式，求另一未知數之值。	
・加減消去法的命名	4.歸納活動四這種解二元一次聯立方程式的方法，我們稱為加減消去法。	【加減消去法的步驟】 1.將聯立方程式中兩個式子的一個未知數係數透過同乘某數變成一樣。 2.將兩個式子相減(同號）或相加（異號）後使得式子只剩一個未知數，解未知數。	

附錄：學習單

二元一次聯立方程式學習單　　二年____班____號　姓名_____

◎認識二元一次式

【題目一】

好好吃早餐店包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元，根據以下幾個同學買的情況將所花的錢列在表格內並將你的算式寫在表格下方空白處。

1、小明買了一個包子，一杯豆漿，請問總共花了多少錢？
2、小花買了三個包子，二杯豆漿，請問總共花了多少錢？
3、小如買了四個包子，一杯豆漿，請問總共花了多少錢？
4、小健買了一個包子，三杯豆漿，請問總共花了多少錢？
5、小強買了 x 個包子，y 杯豆漿，請問總共花了多少錢？

請將下列空格填滿：

包子一個 10 元　　豆漿一杯 15 元

總類 / 姓名	包子個數	豆漿杯數	總價
小明	1	1	
小花			
小如			
小健			
小強			

請將算式寫在下方：

小明：

小花：

小如：

小健：

小強：

【練習一】

阿光參加數學檢測，題目有選擇題和填充題兩種。分數的計算方式是：選擇題答對一題得 3 分，填充題答對一題得 5 分。結果阿光答對選擇題 x 題，填充題 y 題，那這次數學檢測阿光得幾分？

◎二元一次方程式的解

【題目二】

好好吃早餐店包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元，小強買了 x 個包子，y 杯豆漿，總共花了 120 元。

1、請你依題意列出二元一次方程式。

2、說明他可能買了幾個包子和幾杯豆漿，將你的方法寫下來。

【練習二】

寫出下列所有符合條件的 x 與 y 值

1、$2x+7y=50$

（x，y 為正整數）

2、$4x+3y=36$

（x，y 為非負的整數）

◎解二元一次聯立方程式

【題目三】

好好吃早餐店包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元，小強買了 x 個包子，y 杯豆漿，總共花了 120 元，而且豆漿的杯數是包子個數的兩倍，他可能買了幾個包子和幾杯豆漿呢？

1、你可以從上題中列出的所有解中找出答案嗎？

2、請你試著將題目的敘述列成方程式。

3、可以從這兩個方程式中找出題目的解嗎？

【練習三】

請利用剛剛的解法解下列聯立方程式

1. $\begin{cases} y=-3x \\ 2x+y=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=y-1 \\ 3x+y=13 \end{cases}$

【題目四】

最近學校附近又新開了一間真便宜早餐店，因為剛開幕所以所有產品都以特價賣出。小華買了 5 個包子和 2 杯豆漿花了 64 元，小玲買了 2 個包子和 2 杯豆漿花了 40 元。

1、請你依照題意列出聯立方程式。

2、求出真便宜早餐店中所賣的包子一個多少錢？豆漿一杯多少錢？

【題目五】

解下列聯立方程式

1. $\begin{cases} 4x+3y=-5 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+6y=-9 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$

【練習四】

請利用剛剛的解法解下列聯立方程式

1. $\begin{cases} 5x-2y=-4 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 25x-30y=-20 \\ 3x+4y=9 \end{cases}$

◎代入消去法

1.利用聯立方程式中兩未知數的關係代入另一式，消去一個未知數後，化成一元一次方程式。
2.再解一元一次方程式，求一未知數之值。
3.再代入原關係，求另一未知數之值。

這種解二元一次聯立方程式的方法，我們稱為**代入消去法**。**如題目三**

◎加減消去法

1.將聯立方程式中兩個式子的一個未知數係數透過同乘某數變成一樣。
2.將兩個式子相減（同號）或相加（異號）消去一個未知數後化成一元一次方程式，求出一未知數的值。
3.再代回任一個方程式，求另一未知數的值。

以上這種解二元一次聯立方程式的方法，我們稱為**加減消去法**。**如題目四、五**

【練習五】

1.請以代入消去法解 $\begin{cases} 2x+5y=-10 \\ 5x-3y=6 \end{cases}$

2.請以加減消去法解 $\begin{cases} x=270-7y \\ 2x+9y=490 \end{cases}$

貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：你們看一下手邊的第一張講義，今天老師要講的是解二元一次聯立方程式，但是在講解二元一次聯立方程式的解法之前，我們要先看一下什麼叫做二元一次方程式。請你先看一下【題目一】(P.55 學習單)，等一下老師要問你題目在問甚麼。它下面有問了五個問題，老師帶著你們一起看，好好吃早餐店包子一個 10 塊錢，豆漿一杯 15 塊，請你根據以下幾個同學買的情況將所花的錢列在表格裡面，並且把你的算式寫在下面，你看一下題目下方有一個空白表格，請你在表格下方填上算式，我們先看第一個情況：第一個同學小明買了 1 個包子，1 杯豆漿，請問他總共花了多少錢？我們來寫寫看他的算式應該要怎麼寫，1 個包子多少錢？10 塊錢，對不對？他買了幾個？1 個，然後豆漿 1 杯多少錢？15 塊。他也是買了 1 個，這樣加起來是多少錢？25 元，請你在你的表格填上小花、小如還有小健的用法，請你把它們的算式列下來，然後把答案填在表格內，小強的待會再寫喔，老師要請三個同學上來幫我寫一下算式，好，你們都寫好了嗎？寫好了，等一下上來之後，第一個同學把你的算式寫這邊，第二個寫這邊，第三個寫這邊，好，第一個請曾韻儒上來幫老師寫；然後第二個請陳奕志上來；第三個請蔡庭瑀上來幫老師寫一下；好，謝謝他們。然後呢？你看一下他的算式跟你們寫的有沒有一樣？有，你看一下這邊三個同學有一個人算式不太一樣。第三個，第三個他是什麼？他是先把數量寫在前面，對不對？其實這樣也是可以的，因為乘法有什麼律？交換律，以前

小花：10×3+15×2=60
小如：10×4+15×1=55
小健：1×10+3×15=55

我們都會先把單價寫在前面，對不對？乘以它的數量，不過乘法有交換律，所以你這樣子交換也是可以的。現在把我們的表格填滿，你們填了沒？填了。這邊小花包子 3 個，豆漿 2 杯，總共花了 60 塊；然後小如包子 4 個，豆漿 1 杯，他花了 55 塊；小健包子 1 個，豆漿 3 杯，他花了 55 塊。結果你有沒有發現這三個人的總價中，雖然他們買的東西不一樣，可是有兩個人的價錢是一樣的，誰跟誰？小如跟小健，所以你有沒有發現，我買的東西不一樣，但是我得到的總價會不會一樣？會，會一樣。好，我們來看一下最後一個，前面 4 題老師都有給你數字，對不對？都給你數量，那你看第 5 題它變成小強，小強他是怎麼樣呢？他說他包子買了 x 個，好，我們先把這邊的表格填上去，小強買了 x 個包子，然後買了 y 杯的豆漿，那他的總價要怎麼表示比較好？我們仿照上面的算式，包子單價是不是 10 塊錢，然後他幾個？x 個，所以乘以什麼？x。然後豆漿 1 杯 15 塊，他有幾杯？y 杯，所以乘以 y，好，答案寫這樣子好不好？$(10\times x+15\times y)$不好，我們以前有學過乘號可以怎樣？省略，除了省略乘號，我們還可以用什麼表示？一點（•），對不對？但是這邊我們要寫最簡的方式來表示它，所以我們就寫 $10x+15y$，所以這邊填上 $10x+15y$，x 是不確定的數字，對不對？這個 x 跟這個 y 是不是可以改變呢？舉例說，我今天買 2 個和買 3 個的話，總價會不會一樣？就不會。剛剛小如和小健你發現他們買的東西不一樣，對不對？小如是買 4 個包子，然後 1 杯豆漿；小健是 1 個包子，3 個豆漿，可是二個人加起來總價卻都是 55 塊，所以有沒有可能不同的 x 跟不同的 y 總價會一樣？有沒有可能？有嘛！對不對？聽得懂老師在講什麼嗎？我再講一次，小如跟小健他們買的包子跟豆漿的數量是不一樣的，對不對？可是呢？最後他們算總價的時候價錢竟然會一樣，所以也就是說，如果這邊的 x

跟這邊的 y 代表的數字不一樣的時候，最後這個總價算出來會不會一樣？會，會一樣。這樣聽的懂嗎？好，那接下來我們看一下第 2 頁，上面有一個【練習一】(見學習單 P.56)，我們來看一下題目，他說，阿光參加數學檢測，題目有選擇題和填充題二種，分數的計算方式是選擇題答對一題得 3 分，填充題答對一題得 5 分，結果阿光他答對選擇題 x 題，填充題 y 題，那這一次檢測他得幾分？好，你可不可以把算式列一下，然後把答案化簡。等一下老師一樣也是找一個同學站起來回答這一題。寫好了嗎？寫好了，好，溫宗盛你來唸一下你的算式給老師聽，他選擇題一題得幾分？3 分，他答對幾題？x 題，所以你的算式是什麼？3 乘以 x 加上？

2. 學生：5 乘以 y。
3. 老師：5 乘以 y，好，那你最後答案要怎麼寫？
4. 學生：$3x+5y$。
5. 老師：好，請坐，老師問你喔，如果它是一個計算題的話，你最後寫答，這一題要不要加上單位？要，它的單位是什麼？分，好，$3x+5y$，寫這樣好不好？不好，那要怎麼樣？要加括號比較好，因為這兩個是合在一起的，所以你這個要加括號，然後記得寫上單位，好，他這樣列的算式，對不對？對了。寫對的舉手，幾乎都可以，好，放下。你看，老師在講聯立方程式之前，你會發現有時候我們是數量不知道，有時候是單價不知道，但是不管如何，我們是不是都可以用 x 跟 y 來代表那個東西的總價或總和？我們用兩個未知數，然後用加跟減，還有乘跟除合起來的，我們就叫它做是二元一次式，所以樣子像 $3x+5y$ 的這種東西，我們就叫它是二元一次式，元的意思是代表什麼？以前你應該有學過，元是代表什麼？對，元是代表未知數，那次呢？次是代表什麼？誰的次方？

6. 學生：未知數。

7. 老師：對，未知數的最高次方，所以你檢查一下它是不是兩個未知數，然後最高次方都是一，所以它叫做二元一次式。我們先把它的名稱定下來，它叫二元一次式，接下來我們來看一下，好，你看一下下面老師的標題是什麼？「二元一次方程式的解」,「二元一次式」跟「二元一次方程式」有沒有一樣？不一樣，對不對？二元一次式是用未知數表示出它的總和，但是並沒有辦法解出 x 跟 y。我們看一下怎麼解二元一次方程式。好，還是一樣，我們看【題目二】(見學習單 P.56)，還是在早餐店喔，早餐店包子 1 個 10 元，豆漿 1 杯 15 元，小強買了 x 個包子，y 杯豆漿，總共花了 120 元，請你看黑板回到這個表格(見學習單 P.55)，小強總共花了 120 元，你看一下這一欄，剛剛我們是不是已經把小強的總價表示出來了，對不對？好，120 元在哪裡？跟哪一格是一樣的？「總價」這一格，所以 $10x+15y$ 會等於多少？

8. 學生：120。

9. 老師：對，120。所以這題呢？我們可以列出來的方程式就是這樣子 $10x+15y$，到這邊是二元一次式，可是他今天說總價是 120 塊，所以我們是不是把等號跟 120 塊加上去，這樣子的式子就叫做二元一次方程式。現在，請你在這一題的第一個答案，它是不是請你列出二元一次方程式？好，你就把老師上面寫的這一個式子寫上去，這個其實就是加後面這個等號還有這個 120 塊($10x+15y=120$)；再來第 2 題，老師要請你想一想，第 2 題你看，他有可能買了幾個包子跟幾杯豆漿？請你把你的方法寫出來。你現在找找看，他的 x 跟 y 可以是多少？你可以跟前後左右的同學討論一下，說說看你的找法，你怎麼找？好，老師提示你一下，你剛剛有沒有發現老師這邊相等的

55，你在找的時候有沒有發現他的包子跟豆漿數量不一樣，找的方法不一定只有一種喔！這一題好像大家花比較多的時間，你找出 x 跟 y 代進去會等於 120 的答案，沒有啊？你想想看，x 是包子的數量啊，所以把它可以的數量乘進去，然後加起來要等於 120 的。你找的方法，那個 x 跟 y，你可以想一下，x 是不是代表包子的個數，y 是杯數，我剛剛下去看的時候，有些同學不知道怎麼找，老師問你，那個 x，y 要先從什麼東西來找比較好？0，然後你有沒有發現 x 跟 y 有沒有一些限制？如果我今天是小數的話，可以嗎？

10. 學生：不行。

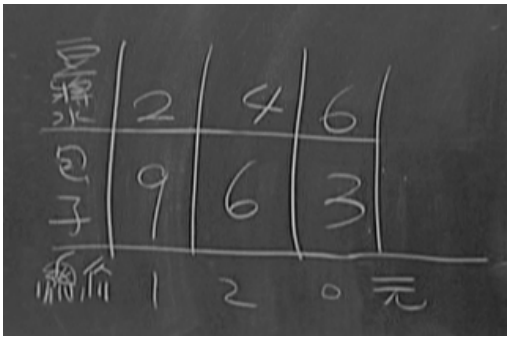
11. 老師：那如果是分數的話，可以嗎？

12. 學生：不行。

13. 老師：還有什麼也不行？負數，為什麼不行？因為個數不可能是負數、分數跟小數，好，我也看了好多種找法，有的人不知道怎麼找，他的問題就在於說，他不曉得那個 x 跟 y 要怎麼跑出來，但是老師在旁邊提醒他，把可以的 x 代進去隨便舉一個，然後呢，乘完之後再去找那個 y，因為這兩個合起來要是多少？只要合起來是 120 就好。我找幾個同學上來寫上你們的方法，好，我找三個同學上來寫，把你講義上面寫的方法寫下來，第一個文家玲，你把你的方法寫下來，寫在黑板上；第二個，陳彥廷，寫在這邊，這邊就好了；然後第三個，來，游子瑩，你寫這邊；老師再找一個好了，第四個吳承皓，你寫在最左邊，把你的方法寫下來。你覺得寫好了就回去沒有關係，好，謝謝。你有沒有發現黑板上四個同學寫的方式都不太一樣，老師要請那個寫的同學稍微講一下你是怎麼找的，用你自己的話講，老師點到你，你站到台前來講一下自己是怎麼做的，跟大家講一遍。好，因為吳承

皓剛才寫完，對不對？先讓他休息一下，來，文家玲，你先上來告訴同學你這個怎麼找的，你為什麼會這樣寫？上來講，站在你寫的寫法旁邊，要大聲一點喔！面對同學。

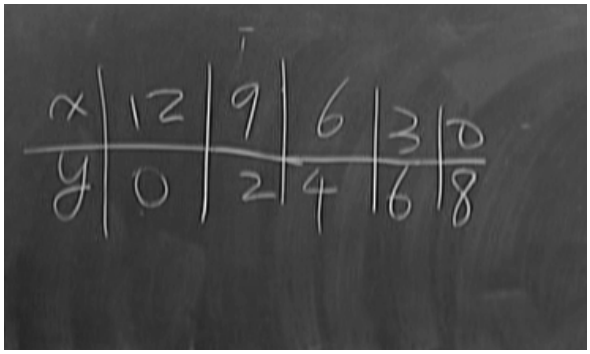
文家玲的作法：



14. 學生：因為 x+y 總共要等於 120 元。
15. 老師：x+y 總共要等於 120 元。
16. 學生：就是豆漿跟包子，包子跟豆漿，然後加起來要 120 元，所以就用那個格子去找，因為豆漿兩杯就是 30 元，然後 120-30 等於 90，然後包子就有 9 個，然後就這樣去找。
17. 老師：所以，你是先從豆漿開始找，是不是？豆漿每一個是 15 塊，老師寫在這邊，這邊每一個是 15 塊，這邊每一個是 10 塊，所以你先找豆漿，對不對？你是不是先找豆漿？面向同學，然後 2 乘以 15，30，然後再用 120 回去扣 30，剩下的再除以 10 就對了，那你中間有沒有發現有除不盡的？
18. 學生：有啊，如果豆漿是奇數的話。
19. 老師：豆漿是奇數的話。
20. 學生：就沒有辦法除以 10。
21. 老師：很好，謝謝你。再來，第二個方法是陳彥廷的方法，好，陳彥廷麻煩你站在你解題的過程旁邊跟同學解釋一下你怎麼算的。

22. 學生：就是先求出第一個，先設為 0。

陳彥廷的作法：



23. 老師：那你是先假設誰為 0？

24. 學生：y 為 0。

25. 老師：好，你假設 y 為 0。好，繼續。

26. 學生：然後 *x* 就是 12，然後就求出下一個，*x*=9，y=2，接下來依序，因為 12 到 9 是減 3。

27. 老師：你講慢一點，你說 12 到 9 減 3，少 3 是不是？

28. 學生：然後 0 到 2 是加 2，所以依序下去。

29. 老師：所以你找到它的規律是：y 每一個會隔？

30. 學生：會隔 2。

31. 老師：會隔 2，*x* 會隔多少？隔 3，好，謝謝，你是從 y 開始找，對不對，陳彥廷？對，你是從 y 開始找。再來，這個第三個是游子瑩，是不是？好，游子瑩也站到你寫的算式旁邊跟同學講一下是怎麼找的？然後你寫那個「不合」是什麼意思？解釋給我們聽聽看。

32. 學生：我是一個一個慢慢找，先設一個 0，然後…。

33. 老師：你講慢一點，然後講大聲一點。

游子瑩的作法：

34. 學生：我先設 x 為 0，然後不合就是除不盡。

35. 老師：不合就是除不盡，它可能是分數了，對不對，然後呢？還有，你找到 3，那你後面為什麼不找了？

36. 學生：因為這樣太多了。

37. 老師：什麼意思太多了？

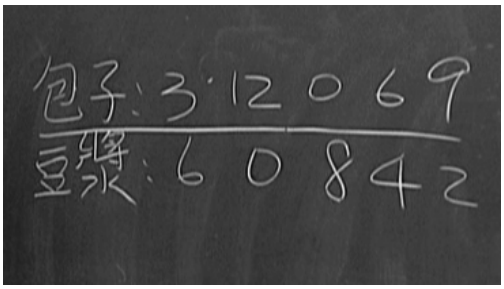
38. 學生：因為我是一個一個慢慢找，如果繼續找下去就很多。

39. 老師：你有沒有辦法確定你都找完了呢？你怎麼確定你找完了，還是你不確定，你列出幾個就寫幾個，是這個意思嗎？所以你後面沒有繼續找了，那如果後面還有怎麼辦？不知道，所以你是從 x 還是從 y 開始找？

40. 學生：從 y。

41. 老師：你不是從 x 開始找嗎？好，謝謝妳，最後一個吳承皓已經準備好了，吳承皓，來站在你算式旁邊講一下你怎麼找的，面向同學然後大聲一點。

吳承皓的作法：



42. 學生：……

43. 老師：等一下，你講的太快了。沒有他們講的詳細，你的列法跟人家比較不一樣，你是先從包子找起，還是豆漿找起？

44. 學生：一起啊！

45. 老師：一起找，你是隨便抓一個數字嗎？

46. 學生：對啊！

47. 老師：所以你這邊是先寫 3，對不對？老師要問你一個問題，你這邊寫到 3，為什麼找到 12 之後又回去找 0？

48. 學生：突然想到。

49. 老師：突然想到，所以，你沒有按照從包子找還是從豆漿找，對不對？對，那我問你，你覺得你找完了嗎？

50. 學生：找完了。

51. 老師：你怎麼知道你找完了？分不出來是什麼意思？大聲一點。

52. 學生：就沒有了。

53. 老師：什麼東西沒有了？

54. 學生：那個數字。

55. 老師：數字沒有了，是不是？喔！好，謝謝你。我們是不是給他們幾個掌聲一下，他們講的這幾個都不錯，老師稍微歸納一下他們幾個人的講法，你們有沒有發現老師每次都會問他們說：你們從誰開始找，有沒有？你有沒有發現大部分都是從什麼開始找？從 x 還是 y？

56. 學生：x。

57. 老師：你用 x 找的舉手，好，放下。你用 y 找的舉手？y 反而比較少，放下。好，為什麼，你們覺得 x 比較親切嗎？所以你們 x 跟 y 就這兩個來講，有的人

從 x，有的人從 y，那 x 跟 y，你們挑數字大部分是不是都從 0 開始找？對不對？好，老師問你，這一題 x 跟 y 可以是 0 嗎？

58. 學生：可以。

59. 老師：你怎麼知道可以呢？因為他題目上面是不是說至少要買一種？有沒有講到這件事，沒有，所以你 x 跟 y 可不可以有一個是 0？可以，所以可以。然後第二個老師會問，你找完了嗎？那你看一下黑板上有四種找法，有沒有人找完了？有，誰跟誰找完了？吳承皓跟陳彥廷找完了，那陳彥廷，老師再問你，怎麼知道你找完了？因為剛剛吳承皓有點緊張，所以回答的不是非常的仔細。

60. 學生：因為 y 為 0 及 x 為 0，已經是最低的兩個數了，再找下去就會變成負數了。

61. 老師：你的意思是說，若再繼續找下去，比如說，y 如果是 10 的話，x 開始變成什麼數了？對，開始變成負數了，好，變成負數的話，x 的數量有沒有可能是負數？不可能，所以你就確定通通都找完了。那 y 如果往小的地方找時，就是要用-2 了，可是如果你用-2 的話，那就跟這個題目的意思不符合，它的情境上不可能會有負數的，對不對？所以你可以知道你找完了這件事情。好，那你有沒有發現這四個同學他們有好多種寫法，有的人喜歡用國字寫，有的人用表格，但是表示方法都不一樣。在數學上，用這一個來表示是比較適合的：因為我們會用 x 跟 y 來表示未知數的理由，就是以符號來表示是比較簡便的。剛剛游子瑩是唯一從 x 開始找的，我們來看一下她找完了嗎？還沒。如果要繼續找，下一個 x 應該寫多少？4，對不對？所以你檢查一下 10×4+15y。15 乘以 y，要等於 120，其實不用乘，你這邊寫 120 就好了，所以 40+15y 會等於 120，120-40=80，80 除以 15 除的盡嗎？除不盡，所以 y 不是一個整數。好，再

x	12	9	6	3	0
y	0	2	4	6	8

來他接著找 5 可不可以？不行，也不合，那你有沒有發現，他每隔幾個就會不合？原來游子瑩是從 x=0 開始，依序增加 1 慢慢找，發現 x 是 1 跟 x 是 2 的時候是不合的，但是到 x=3 的時候，y 會有整數解，好，那下一個 x 可以是多少呢？

62. 學生：6。

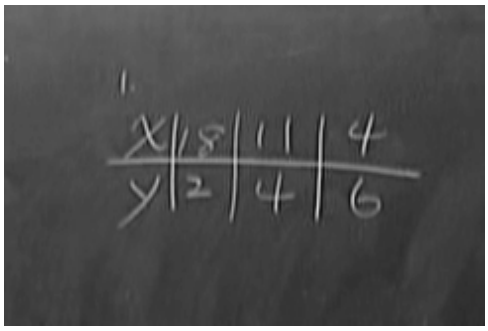
63. 老師：對，下一個 x=6 就可以算出來了，那下一個呢？9，好，所以你有沒有發現 $10x+15y=120$ 的式子中，係數有點大，你可不可以讓它係數變小一點？用多少來約呢？5 嗎？那我們就通通除以 5，所以化簡成 $2x+3y=24$，你有沒有發現剛剛老師說 x 是不是每隔 3 個會碰到一次，為什麼，你知道嗎？因為這個 x 它要跟 2 乘，如果你剛好要讓另外一個未知數 y 除的盡的話，一定要是幾的倍數？3 的倍數，所以他才會每隔幾個會遇到一次？3 個，所以同理喔，如果你從 y 找的話，應該每隔幾個會遇到一個合的，2 個，因為 x 的係數是 2，所以你是不是要碰到 2 的倍數，你才可以減完並讓前面這個係數 2 可以整除？所以才可以發現，y 的話要每隔 2 個會遇到一個適合的，像陳彥廷這個是不是每隔 2 個就找到了？老師問你：是從 x 這樣一個一個找比較快找完？還是 y 比較快找完？y。為什麼？好，你們都舉手的很踴躍，老師找一個同學起來回答好了，有沒有人知道的？徐家襄，為什麼從 y 開始找會比較快找完？

64. 學生：因為它的係數比較大。

65. 老師：因為它的係數比較大，好，請坐。他的意思就是說 y 的係數比較大，所以它很快會到多少？120，是不是就會找完了，所以 x 跟 y 的找法，這樣子老師講一遍之後你會不會找了？會了。現在 56 頁的【練習二】有兩題練習題，我們來看一下它的題目，先看第 1 題，$2x+7y=50$，好，老師這邊的 x 跟 y

有沒有限制？我上面有沒有寫 x、y 要是什麼東西？正整數。你看第 2 題喔，第 2 題是 $4x+3y=36$，老師的 x 跟 y 的條件是什麼？它要的是什麼？非負的整數。好，老師先請你想一下這兩個有什麼不一樣，正整數和非負整數，這兩個有什麼不一樣？你先不用回答我，老師要請你們把第一題所有可能的 x 跟 y 列出來。老師也是一樣要請三個同學幫我列出第一題所有的答案，記得喔，老師上面寫的是所有符合的 x 跟 y 喔，所以你要確定你都找完了，要都找完，不可以只找一、二個而已。第一個請何偉晟上來寫，第二個請苗中韋上來寫，把你講義上面的內容寫上去就好，寫錯沒有關係，第三個請陳彥如上來寫。因為苗中韋不會，那第二題老師再找一個同學上來寫，第二題請吳家珉上來寫，結果他們三個很一致，找出來都是 3 組，還是一樣，老師再請同學上來講一下你怎麼找的，何偉晟，你上來講一下你怎麼找的，站在你算式的旁邊：

何偉晟的作法：



66. 學生：加起來等於 50，就找。

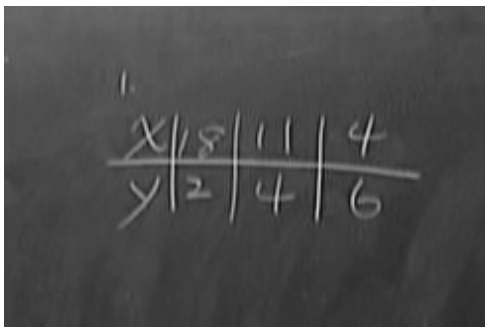
67. 老師：什麼東西加起來等於 50？$2x+7y$ 加起來等於 50，你是從誰開始找？y，為什麼？

68. 學生：因為它的係數比較大。

69. 老師：然後你選擇從 y 最小的開始找起，對不對？好，謝謝你。再來第 2 題是吳

家珉，好，吳家珉麻煩你講一下你怎麼找的？

吳家珉的作法：



70. 學生：就因為他說 x、y 為正整數，然後 0 它是一個整數，它不為正也不為負，所以就沒有從 0 開始找啊，然後為什麼從 y 找，是我喜歡就好。

71. 老師：你喜歡 y，是不是？

72. 學生：對啊！

73. 老師：還有呢？

74. 學生：因為如果 7 乘以奇數的話也會等於奇數，所以 2 會除不盡，所以要從偶數開始找，如果乘到 8 的話會超過 50 啊，所以就不用做到 8。

75. 老師：好，他剛講的有好幾個重點喔！太好了，第一個，他說沒有從 0 開始找的原因是什麼？我想很多同學沒有聽的很清楚。你再講一次好不好？

76. 學生：因為 0 只是一個整數，它不為正也不為負。

77. 老師：它不是正整數也不是負整數，所以 0 不可以找，對不對？好，接下來你剛剛講一個很好，7 一定要乘以什麼東西？

78. 學生：7 要乘以偶數，2 才會除得盡。

79. 老師：所以你才會找 y 並從偶數開始挑，對不對？好，那最後你說你發現已經找完的原因是因為：如果 y 是 8 的話？

80. 學生：會超過 50。

81. 老師：會超過 50，那 x 就會變成什麼了？

82. 學生：負數。

83. 老師：負數，對不對？這樣就不行了。好，講的很好。第三個是陳彥茹，來講一下你在做這一題的時候，你是怎麼寫下這些數字，你有沒有遇到什麼困難？你先從哪一個開始找？

84. 學生：從 y 先找。

85. 老師：你從 y 先找。

86. 學生：跟前面講的一樣。

87. 老師：跟誰講的一樣？吳家珉講的一樣，是不是？好，他講的那三個東西你都有想到嗎？比如說第一個不可以從 0，然後 y 要跟它搭配的是要偶數，y 如果是 8 的話就會超過，都是這三個嗎？是不是？他也寫的很好，謝謝他。看來你們已經知道怎麼樣找最好、最快的方法。那這一題有沒有人從 x 找？從 x 找的舉手，還是有吃苦耐勞型的，老師並不是說從 x 找不好，只是我們從 y 找的話會讓我們的速度變的比較快；但是你在找的過程當中，要知道就像剛剛我們得到的第一個結論，你不能用的數就不能夠找，再來你要知道什麼時候已經找完，找完你才可以確定這是你最後的答案。所以我們看一下這題 $2x+7y=50$，剛剛吳家珉他講了一個重點：這個 y 一定要是偶數，因為 7 他本身是奇數，你乘以上一個偶數之後，用 50 減才會變成偶數，因為 $2x$ 一定是偶數，這樣 x 才會是整數。好，再來你們看看第 2 題，經過老師這樣講，還有同學歸納之後，你有沒有比較快可以找的出來老師要的條件？注意第 2 題的題目中 x、y 的要求是非負整數喔。好，老師先讓你自己寫看看，請你把所有可能的都列出來。如果你覺得有問題的，可以跟旁邊的同學討論一下。

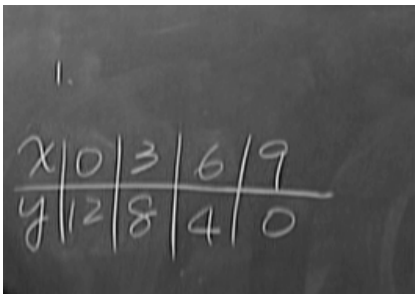
88. 學生：老師，它是不是也可以當正整數？

89. 老師：題目中「非負的整數」，它的主詞是整數，所以你要找的是整數中不是負的。好，我們先休息十分鐘。

【第二節】

90. 老師：三個同學上來寫，然後等一下你寫完之後還是一樣，老師會請你上來解釋一下，你為什麼會這樣子做。第一個黃佳媛，第二個徐家襄，第三個黃偉軒。好，我們可以看到他們三個同學寫出來的好像都差不多，可是他們可能在算這一題的時候有不同的想法，老師還是請三個同學上來講一下你怎麼找的，請你把那個細節都講出來。請黃佳媛到台上來，講一下你是怎麼樣找出這幾個數字，好，面對那邊：

黃佳媛的作法：



91. 學生：我是找出它的規律性，先找出兩組，然後 0 到 3 是加 3，然後後面就會一直加 3，然後這裡是扣 4，所以後面都是扣 4。

92. 老師：她是先找到它的規律，大家有聽到她講什麼嗎？有，她在找 x 時，先找兩組；發現 0 跟 3 之間差 3，然後也是一樣，她發現兩個 y 之間差 4，對不對？那你為什麼會從 0 開始找，題目寫的「x、y 為非負的整數」你怎麼解釋它？

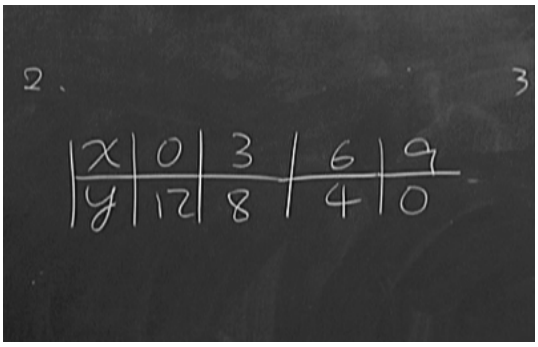
93. 學生：非負的整數就是有包含整數，非負的下去做。

94. 老師：非負的其它整數都有，所以你這邊沒有找小數跟分數嘛，謝謝她。再來，第二個是誰上來講？請徐家襄上來。

95. 學生：我剛開始是因為…。

96. 老師：來，你面對這邊再開始講。

徐家襄的作法：



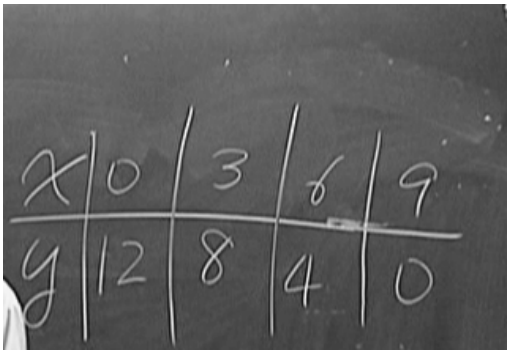
97. 學生：我剛開始是用 x 代 0，然後 y 就等於 12。之後 x 再以 2 代入，發現 2 不合。然後用 3，我就找出 y=8，下一個我就發現它的規律找到 6，然後 y=4，下一個就 9，最後 y 就等於 0。

98. 老師：好，所以你是從 x 開始找，是不是？不是從 y 開始找，好，那你的原因是什麼？

99. 學生：我沒有原因。

100. 老師：沒有原因。好，謝謝你，第三個是黃偉軒，來，你站這邊然後面向那邊。

黃偉軒的作法：



101. 學生：$4x+3y=36$，然後 x 代 0，y=12。

102. 學生：x 代 3。

103. 老師：繼續算下去嗎？你的找法跟他們差不多囉，是不是？好，謝謝你。老師剛剛在聽你們討論的時候，你們對於老師寫的這一句話好像討論很久，對不對？我有聽到一些爭論，好，你剛開始看到老師寫這句話你會覺得你的 x 跟 y 要有什麼限制？

104. 學生：負數。

105. 老師：是負數，那剛剛有人問我小數可不可以？不可以的原因是什麼？

106. 學生：因為題目要的是整數。

107. 老師：對，這句話老師講的是非負的整數，所以我的條件是要限制在什麼數？整數，非負的話有可能是什麼？正的跟 0，所以他們三個都找對了。都從 0 開始找，所以都有找 0，而且找的都是整數。另外他們都是從 x 開始找，你們有沒有發現？因為 $4x+3y$ 中，誰的係數比較大？x，所以你從 x 開始找是不是會比較快找完？所以都從 x 開始找起，然後 y 再緊接著。好，那這樣算 x 跟 y 所有可能的找法，你們會了嗎？會了。

108. 老師：接下來，我們再看下一個要來教什麼。第一個我們來看一下，請你翻到學習單第二張【題目三】(P.57)的地方，我們來看一下這一個題目。他說：「好好吃早餐店包子一個 10 元，豆漿一杯 15 元，小強買了 x 個包子，y 杯豆漿，總共花了 120 元，而且豆漿的杯數是包子個數的兩倍，他可能買了幾個包子和幾杯豆漿呢？」前面跟【題目二】的敘述都一樣，可是後面老師加了一句話喔，「豆漿的杯數是包子個數的二倍」，老師要問你：他有可能買了幾個包子跟幾杯豆漿？好，現在你把你的第一張講義放到旁邊看一下，剛剛 $10x+15y$，我們列出來的答案總共有五組，然後你有沒有發現這個題目又多了一句話，豆漿的杯數是包子的二倍，有沒有人可以幫老師把這句話用

x 跟 y 表示出來，豆漿的杯數是 x 還是 y？

109. 學生：y。

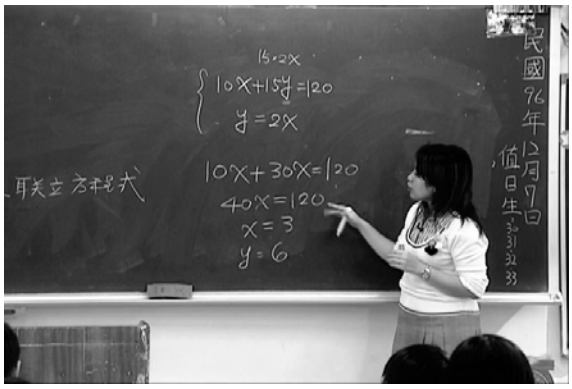
110. 老師：y，所以 y 會等於什麼？$2x$。好，那你找一下，這五種買法中有沒有豆漿的杯數是包子個數的二倍的，哪一個？

111. 學生：3 跟 6。

112. 老師：3 跟 6，你有沒有發現這一組，因為老師又多了一個條件，y 要等於 $2x$，對不對？結果只有這一組 $x=3$、$y=6$ 符合。你會發現剛剛我們在找 $10x+15y=120$ 的答案有幾組呢？答案會有五組。如果老師今天再加上另外一個條件就是「$y=2x$」的話，你有沒有發現答案變成幾組？一組。所以你有沒有發現：兩個方程式就會有兩個條件限制，所以答案就會變成只有一個。

113. 老師：我們在寫的時候會用大括號的方式把它寫出來：$\begin{cases} 10x+15y=120 \\ y=2x \end{cases}$，這個跟只有一個方程式的不同，老師再講一次，只有一個方程式的時候，你的答案可能不只一種，可是如果你加了另外一個限制之後，你的答案就會變成只有一種，所以這種用大括號把兩個方程式聯合起來的意思，就是說我的 x 跟 y 條件受到兩個式子來限制，第一個就是 $10x+15y=120$，第二個就是 $y=2x$，所以我同時受到這兩個方程式的限制的話，我的答案就會變多還是變少？會變少。而且會變成只有一組，所以這個就是我們今天另外一個重點。兩個二元一次方程式若要同時成立，記得這邊我們是要稱聯立方程式，只要我們用兩個方程式去限制它的 x 跟 y，我們就說它是二元一次聯立方程式。但是如果每次我都要把第一個方程式寫出來，然後所有的答案列出來，再去看哪一組的答案符合第二個方程式，這太麻煩了，對不對？所以我們可以想一下，有什麼方法可以幫助我們解這個方程式會比較快一點，我們來看一下這個方程式怎麼樣解？我們以前有學過一元一次方程式，用等量公

理來解。那有兩個未知數我要怎麼來解？我們從第二個方程式來看，y 是不是 x 的二倍，所以我只要看到 y 的話，我就把它當作是多少就好了？$2x$，所以這邊本來是 15 乘以 y，我就變成 15 乘以什麼？$2x$，所以你看一下第一個式子是不是就沒有 y 了，對不對？所以第一個式子最後會變成什麼？來唸給老師聽，$10x+30x=120$，好，所以這兩個合起來是幾個 x？$40x=120$，所以 $x=3$，好，那 y 呢？y 是多少，y=6，因為 y 就是 x 的二倍。這個方法老師不用一個一個找出來，然後再挑出跟第二個方程式條件符合的答案，是不是就可以直接把它解出來了？現在這題下面是不是有一個地方要寫，請你跟老師一起寫下詳細的解法。因為我們要寫解法，寫解法是要跟人家溝通，讓別人理解這一題要怎麼算的。首先，因為題目有兩個式子，我就將上面這個叫第一式，下面這個叫第二式。剛剛老師是不是把 $y=2x$ 的關係帶到第一式中，將 y 以 x 表示，所以 15y 中的 y 是和 $2x$ 一樣，所以 15y 就會變成 $30x$。所以 $10x$ 加 $30x$ 會等於 120，$40x=120$，x 就等於 3。那 $x=3$ 代回去第二式，y 就等於 3 乘以 2，y=6 就算出來了。



$$\begin{cases} 10x+15y=120\ldots\ldots(1) \\ y=2x\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

(2)代(1)式

$10x+15\times(2x)=120$

$10x+30x=120$

$40x=120$

$x=3$

$y=2x=3\times2=6$

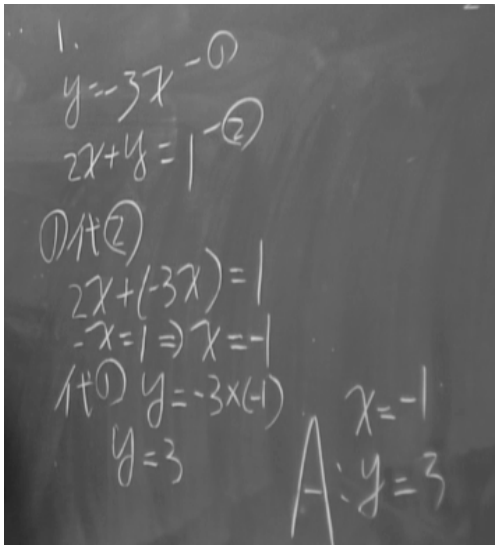
當然，你這一題在寫答的時候，要記得你的 x 跟 y 分別代表的是什麼。記得要把單位寫一下，x 是什麼東西？包子的個數，所以包子幾個？3 個；然後豆漿幾杯？6 杯，這樣子你是不是就把這個問題解決了。老師歸納一下：這題的方式，老師是先看兩個數字之間的關係，結果你發現 $y=2x$，然後我再利用這個關係把它代到另外一個式子，讓另外一個式子變成幾個未知數？1 個，變成 1 個未知數你就可以用等量公理解出，解完之後再怎麼樣？代到剛剛那個關係求出另外一個數字。

好，那【題目三】(P.57)下面有兩題類題，請你用老師剛剛教你的這個方法來解出答案。老師請兩個同學上來寫，第一個請陳奕志，然後第二個請鄒蕙禪上來寫，要抄題目。同學，你們看一下跟你們寫的有沒有一樣？

114. 學生：有。

115. 老師：有，可是他們的算式中間有一點點不一樣，請陳奕志來說說看你的解法。

陳奕志的解法：



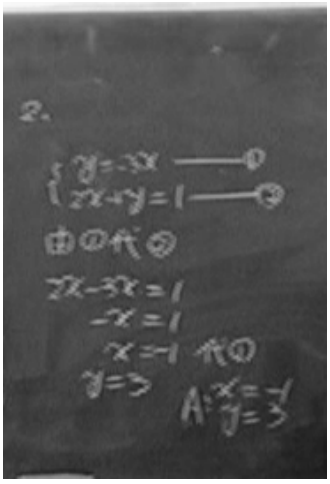
116. 學生：因為第一式 $y=-3x$，所以看到 y 就代 $-3x$，所以 $2x+(-3x)$ 就等於 1，然後 $-x=1$，所以 x 就等於-1，再代回去第一式。

117. 老師：代回去第一式，是不是？

118. 學生：然後 x=-1，所以 x 就代-1，y 就等於-3 乘以-1，y 就等於 3。

119. 老師：講的很好，謝謝你，鄒蕙禪，請你上來講一下。

鄒蕙禪的作法：



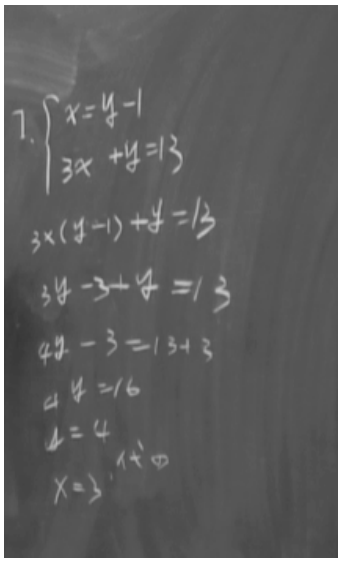
120. 學生：y=-3x 為第一式，2x+y=1 為第二式，由第一式代第二式，所以 2x-3x=1，然後-x=1，那 x 就等於-1，再把它代回去第一式，然後 y 就等於 3，這就是答案了。

121. 老師：謝謝你，講的很好。你們是不是也跟他們算的是一樣的答案？這一題跟剛剛老師講的例題很像，所以你看到題目中有兩個方程式，其中第一式直接就寫出 y=-3x 的關係了，所以就先用第一式代到第二式。接下來還有第 2 題，對不對？第 2 題跟第 1 題又有一點點不太一樣，因為第 1 題它直接寫出 y 跟 x 的倍數關係，可是第 2 題你有沒有發現 x、y 好像不是倍數關係，可是，可不可以代呢？好像也可以，你試試看，也是一樣，老師要找兩個同學上來寫，寫好了嗎？第 1 題苗中韋上來寫一下，然後第 2 題請涂芳瑜上來寫。

122. 學生：寫在哪裡？

123. 老師：寫在這裡啊，這裡有 1 啊！好了嗎？好，苗中韋，你就留在這裡，來，你跟同學講一下你怎麼解這一題的？剛剛你有問老師，所以你前面算對，你講講看，你會挑哪一個式子代進去？哪一個？

苗中韋的解法：



124. 學生：那個 x=y-1 嘛，所以我就把那個 y-1 代到 3x。

125. 老師：把 y-1 代到哪個地方？

126. 學生：3x。

127. 老師：3x 的地方，好，所以你這個式子是在寫：3 乘以 x，把 x 用 y-1 代入，是不是？好，接著呢？

128. 學生：然後再把這兩個合在一起。

129. 老師：把什麼？你講清楚一點。

130. 學生：就把 y-1 乘出來。

131. 老師：3 怎麼樣？把 3 怎麼樣，乘進去對不對，接著呢？

132. 學生：變成-3+y 啊，然後就把這兩個加起來。

133. 老師：變成 4y，然後…。

134. 學生：4y 減掉這個 3，然後再用那個 4y-16。

135. 老師：等一下喔，你走太快了，老師看不懂你這個式子耶(4y-3=13+3)。

136. 學生：老師，我這個寫錯了。

137. 老師：你這個式子應該要怎樣寫比較好？他就是想的太快了，他在同一個式子上面怎麼樣？一起做等量公理，那對不對？不對啦！你要把那個擦掉會比較好一點，你剛剛是不是已經加 3 了，對不對？你剛剛為什麼要加 3？

138. 學生：不知道。

139. 老師：不知道，因為這個是-3 啊，所以是不是用移項法則過去？所以你這個-3 怎麼樣，移過去之後還有-3 嗎？所以誰要擦掉？

140. 學生：所以-3 要擦掉，正確的是 4y=13+3。

141. 老師：麻煩你擦掉一下，同學，他是不是這個地方寫錯了？好，請你再繼續說。

142. 學生：然後變…。

143. 老師：4y=16，然後呢？

144. 學生：然後把 4 移過去變減掉，所以呢？不是，不是！

145. 老師：變減？

146. 學生：把 16 除以 4，所以變成那個。

147. 老師：y=4。

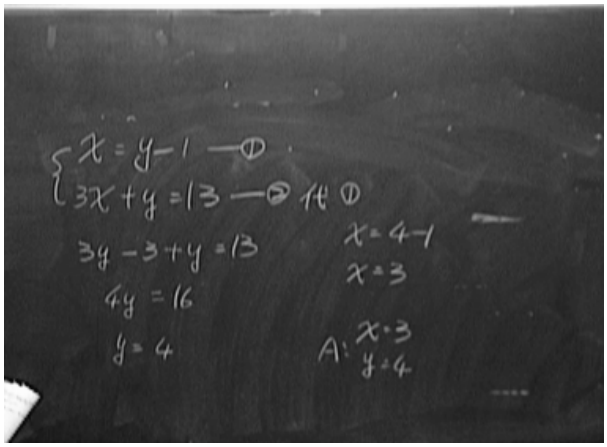
148. 學生：然後再把它代入第一式去，所以 x=3。

149. 老師：好，你先等一下。你的第一式在哪裡？

150. 學生：第一式在這邊。

151. 老師：他有沒有告訴我們第一式是哪一個？所以哪邊要寫第一式比較好？上面這個是不是要寫第一式？然後下面的要寫第二式，講的還不錯。再來請涂芳瑜說說看。

<u>涂芳瑜</u>的解法：



152. 學生：就是 x=y-1 就把它代進去，然後 3y-3+y=13，4y=16，然後 y 就等於 4，然後再代第一式，然後 x=4-1，x=3。

153. 老師：好，你報告的很快，你剛剛上來有做了一個小動作，他做了什麼事？把那個第二式補上去，為什麼你要補寫第二式？可是你的算式中沒有第二式啊，你剛開始沒有寫第二式的原因是因為第二式不需要辨別它，對不對？所以他才沒有寫，但是如果你在告訴人家第二式的需要性的時候，你要在哪邊要寫出第二式？

154. 學生：3y-3+y 的前面。

155. 老師：你要不要去補上去？你應該寫在哪裡？他這樣上來補那個第二式才有意義嘛，好，謝謝你，也回答的很好。用這樣子的方法再歸納一次喔，你可以先找到兩個式子裡面有一個有 x 跟 y 的關係，然後利用這個關係怎麼樣？代到第二個式子。那個關係有時候是出現在第二式，有時候是出現在第一式，但是重要的是你要把關係找出來，如果說有些題目它沒有關係的話，你就要自己化簡變成有關係。

156. 老師：好，請翻到學習單第四頁(P.58 學習單)，【題目四】，也是請你看一下題目，

我們還在早餐店，可是這一次好像有另外一間早餐店開幕了，看發生什麼事情，它又要叫我們解決什麼問題？好，我們一起來看：最近學校附近又新開了一間真便宜早餐店，因為剛開幕，所以它所有產品都以特價賣出，小華買了 5 個包子和 2 杯豆漿花了 64 塊，小玲買了 2 個包子和 2 杯豆漿花了 40 塊。第 1 題請你按照題目的意思列出聯立方程式。請問你，我們剛剛一直到第三題，哪一個是我們的 x？包子還是豆漿？包子，對不對？豆漿是我的 y，所以你先看小華，小華的話，他總共花了 64 塊，你怎麼列出方程式？老師找個人來幫我列一下好了，來，葉靜方，5 個包子跟 2 杯豆漿花了 64 塊，麻煩你站起來，然後回答大聲一點，$5x+2y=64$。再來第二個，小玲買了 2 個包子和 2 杯豆漿花了 40 塊。游竣翔，麻煩你列一下第二個式子：$2x+2y=40$。好，請坐。根據剛剛的寫法，你看這兩個怎麼找關係，$\begin{cases} 5x+2y=64 \\ 2x+2y=40 \end{cases}$ 有沒有哪一個式子 x 與 y 有關係？看起來好像都沒有，對不對？那你看一下這一題，我們要怎麼樣來解才可以解出來，有沒有人有什麼想法？這一題要怎麼解？好，文家玲，請你說說看。

157. 學生：2y 跟 2y。

158. 老師：你說這邊有 2y，這邊有 2y，所以我可以用？

159. 學生：就是消掉然後變成只有 x。

160. 老師：用什麼方法消？用相減的，對不對？是不是？相減的方式把它消掉，好，請坐，還有沒有其它同學，來，吳承皓。

161. 學生：第二式 $2x$ 代另外一邊。

162. 老師：第二式的 $2x$ 移到另外一邊，所以你的意思是說：它變成 $2y=40-2x$ 是不是？代進去第一式，所以你這個 2y 要用 $40-2x$ 代進去的意思，是不是？好，這

是第二種，請坐，還有沒有其他方法？還有沒有哪一種算法？剛剛我們有聽到兩種算法，對不對，哪一種是你比較熟悉的？剛剛老師才教過的？這一個對不對，而且這一個你有沒有發現，如果我這邊是 2y，剛好跟這一個 2y 是怎麼樣？一樣的，所以我的第一式可以變成什麼？5*x* 加上這邊，2y 就是後面這個 40-2*x*，40-2*x* 是不是等於 64？跟剛剛那個方法一樣，你看這個式子剩下幾個未知數？1 個，那是不是就可以把 *x* 解出來了。好，這個方法你已經很熟了，對不對？可是老師比較好奇的是剛剛文家玲講的另外一個方法，好像跟這個不太一樣，剛剛文家玲怎麼講？他說這兩個因為都是 2y，所以它們兩個代表的數字不管 y 是多少，只要 2y 的話，它們兩個的數字是不是都是一樣？所以他就用第一式減掉第二式，就直接拿掉來看，所以這邊 5*x* 同樣的扣了 2*x* 剩下幾個 *x*？3 個 *x*，那這邊要不要減？64 跟 40 要不要減？要，其實這個就是一種等量公理，因為這兩邊相等，所以這兩個式子，相等減相等還會不會相等？會，所以文家玲的講法就是，第一式減第二式，因為第一式的 *x* 比較大，所以它就是第一式減第二式，所以前面是不是剩下 3*x*，後面 64-40 就是多少？24，好，所以 *x* 算出來是等於多少？8，好，那我還要算 y，y 要代哪一個比較好？第二式還是第一式？

163. 學生：第二式。

164. 老師：你們都很討厭計算，因為第一式的數字很大，所以代第二式。好，代進去 8 乘以 2 是 16，加上 2y 就等於 40，所以 2y 就等於 40 減掉 16，等於多少？24，所以 y 就等於多少？12，然後這一題就解出來了，包子是 8 個還是 8 元？

165. 學生：8 元

$$\begin{cases} 5x+2y=64\ldots\ldots(1) \\ 2x+2y=40\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

(1)式-(2)式
$3x=24$
$x=8$ 代入(2)式
$16+2y=40$
$2y=24$
$y=12$

166. 老師：8 元，那豆漿呢？多少錢？12 元，老師要問你，你覺得這一個，用我們先前的那個方法找關係，然後代進去，然後還有這個是直接兩個式子相減，如果是這一題的話，哪一個方法比較好算？

167. 學生：第二個。

168. 老師：哪一個比較好算？第二個方法比較好算，對不對？因為你看這個第一個代入的話，你這邊是不是還要再重新整理？整理一次後還要再移項，可是如果透過直接相加或相減，你會發現有一個未知數很自然就不見了，所以會覺得後面這個方法是比較好用的。下面一樣有兩題類題，你看【題目五】(P.58)的第 1 題 $\begin{cases} 4x+3y=-5 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$，可不可以用同樣這種方法來做？你看一下這兩個式子，你有沒有發現它的 x 跟 y 的數字都不一樣，如果我要用剛剛老師教的那個方法，要直接用減或直接用加的好像還要經過處理一下。你先看一下 x 這個係數是 4，下面這個式子 x 的係數是 2，對不對？然後 y 的話，上面係數是 3，下面係數沒有寫是代表什麼？1，我剛剛相減的時候，它的數字要怎麼樣才可以相減？相同，那 x 的係數分別是 4 跟 2，y 的係數是 3 跟 1，你是不是要選擇一個讓它是相同的，你要讓哪一個相同，x 還是 y？x 好了，x 要相同的話，誰要變一下？第 2 式，第 2 式要通通乘以 2，所以你這邊寫第 2 式通通乘以 2，它會變成什麼？$4x+2y=-6$，好，這一個是新的一個式子，所以我們叫它第 3 式。所以第 2 式其實跟第 3 式是一樣的，但

是它的係數被我變動，用倍數的方式變大了，那你是第 1 式減第 3 式，還是第 3 式減第 1 式？第幾式減第幾式比較好？還是用加的？第 1 式減第 3 式，所以第 1 式減第 3 式，這邊 x 的地方就沒有了，因為減掉了，對不對？好，那 y 的部分呢？3y-2y，y，所以 y 等於多少？-5-(-6)，這兩個也是要相減，這邊有負號你要小心，-5-(-6)，所以它就會變成-5+6 就會等於多少？1。接著你要算 x，算出來的 y=1，你要代到哪一個式子？對了，代第 2 式，y=1 代到第 2 式，$2x+1=-3$，所以 $2x=-4$，所以你的 x 算出來就等於多少？-2，你的答還是一樣 $x=-2$，y 等於多少？1，好，這一題跟剛剛那一題不太一樣的地方就是你這邊 x 的數字不一樣，所以你要通通乘以 2 讓它變成一樣的，然後再相減。那第 2 題又不太一樣囉！你看一下第 2 題 $\begin{cases} 3x+6y=-9 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$，這題你要把 x 改成一樣，還是把 y 改成一樣比較好？

169. 學生：y。

170. 老師：y 改成一樣，為什麼？

171. 學生：因為它乘以 2。

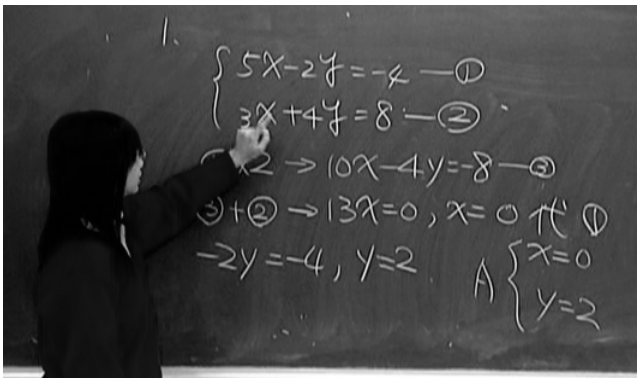
172. 老師：對，乘以 2。因為 y 的係數第 1 式是 6、第 2 式是 3，所以只要第 2 式變一下就好了，為什麼不要用 x， x 的話你第 1 式要怎麼樣？乘以 2，第 2 式要乘以3，對不對？你要它變成一樣的話，兩個式子都要乘比較麻煩，所以你就第 2 式乘以 2，可是你有沒有發現這個符號一個是加、一個是減，那我怎麼樣讓這兩個消掉，還可以用減嗎？

173. 學生：相加。

174. 老師：對，相加才能讓一正數一負數抵銷，對不對？所以就是第 2 式乘以 2 倍，變成 $4x-6y=16$，好，這個是第 3 式。記得喔！這邊是加，這邊是減，所以

你就是第 3 式跟第 1 式相加，相加的話 $4x+3x$ 就變成 $7x$，等於 7，x 就等於多少？1，好，$x=1$ 代回去，代第 2 式好像數字比較小，對不對？2-3y=8，所以-3y=6，對不對？所以 y 等於多少？-2，答案為 $x=1$，y=-2，所以用這個方法好像有比較多不一樣的解法。記得係數一定要讓它怎麼樣？一樣，你要變成係數一樣時，你是挑那個比較好乘的，但是如果當你看到四個都不太好乘的時候，那你就要選擇一個未知數去消掉，然後兩個式子都要乘以某些倍數。另外，同號的話，要用什麼方法讓未知數抵銷？相減；異號的話呢？相加。好，然後下面請你先寫第 1 題，【練習四】(P.58)的第 1 題，你看可不可以用剛剛老師教你的方法解出。第一個請王渝評上來寫，好，第二個請林晏正上來寫，第一題請王渝評講一下：

王渝評的解法：



175. 學生：就是這個 2y。

176. 學生：然後這是-2y，這是 4y，然後把它變成-4y。

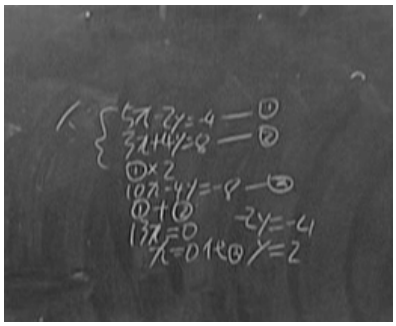
177. 老師：所以你是要消掉 y，對不對？

178. 學生：對，然後乘以 2，它這樣就會變成-4y，然後把它變成第 3 式加第 2 式，它們的 y 會消掉，然後就可以求出 x。

179. 老師：好，你是用加還是減把它消掉？加，對不對？好，謝謝他。好，再來林晏

正，講一下吧：

林晏正的解法：



180. 學生：第 1 式乘以 2。

181. 老師：第 1 式乘以 2，然後呢？

182. 學生：然後變成第 3 式。

183. 老師：變成第 3 式？

184. 學生：然後第 1 式再加。

185. 老師：加第 2 式，還是加第 3 式？

186. 學生：差不多啦！

187. 老師：差不多？你的第 2 式是上面那一個耶，那相加跟你的結果不一樣啊！

188. 學生：對啊。

189. 老師：好，然後呢？第 3 式加第 2 式。

190. 學生：然後再代第 3 式。

191. 老師：好，那你 x 跟 y 就解出來了，是不是？謝謝他。第 2 題我們就沒有時間再寫了，我們今天的課就上到這邊，謝謝各位同學，可以下課了。

參、教學說明

我今天教學的單元是二元一次聯立方程式，我設計的內容是這樣子：因為剛開始

他們對於二元一次方程式的認識還不是這麼樣的透徹，所以我先從二元一次式的名詞開始介紹，然後透過題目上面的情境讓他們可以很自然的從算式中，發現用 x 跟 y 來代表某一個題目所要代表的意思，教了二元一次方程式及列出方程式之後，我還讓他們看出二元一次方程式的解可能不只一個。接著在不只一個解的狀況之下，透過加入另外一個方程式的限制，讓他們找出兩個未知數的解只有一組的可能，之後我就進入這次教學的主題，解二元一次聯立方程式。

二元一次聯立方程式在國中的教學來講，主要的解法有兩種，一個是代入消去法，一個是加減消去法。剛開始的題目情境是從代入消去法先解起，但是在我解的過程當中並沒有跟同學講這個是代入消去法。我的教學設計是代入消去法講完之後，希望他們可以看到，會以代入消去法來解的二元一次聯立方程式的特性是：其中有一個方程式是可以直接表示 x 與 y 的關係的，從兩個未知數的關係代到另外一個方程式中，讓它消去一個未知數，然後再進行二到三題的練習題。而在代入消去法解釋完之後，緊接著我再設計另外一題能以加減消去法解出的情境題目，讓他們從有對稱性的二元一次聯立方程式題目中，以加減消去法消去一個未知數，而剩下一個未知數，去解出 x 跟 y 的值，之後也是一樣，我安排了兩題的練習題，題目中有 x 跟 y 的係數是不一樣的，也有 x 跟 y 的係數是異號的。然後藉此讓他們可以理解，如果要進行加減消去法的解法時，需要透過式子之間達到係數一樣，才可以解出它的未知數，今天我所設計的教學的流程大概是如此。最後，我本來還有一個代入消去法及加減消去法的命名活動，但是因為時間的關係並沒有進行到這個部分。

另外，這個班級的表現部分，這個班是二年級，其實他們在一年級的時候已經有學過相關的一些概念，比如說，他們已經學會未知數的式子化簡，然後等量公理也已經學過了，用兩個未知數來表示題意，這個他們也已經熟練，所以今天我在前半段的

地方會進行的比較快。又由於這一次主題的重點是在解聯立方程式，所以我前面的部分會進行的比較快，後面的部分會進行的比較慢一點。我的這個班是屬於比較活潑的班級，所以他們在發表的部分都沒有問題，但是今天在找出二元一次方程式的所有可能解的時候，透過孩子的發表讓他們自然的發現找到所有的解的有效率的方法，這個部分是我覺得這一次教學過程當中比較有收獲的部分。另外還有一個地方比較特別的是：當我在用加減消去法解第一個題目的時候，因為已經教過代入消去法，結果有學生提出來還是用代入消去法的解法，這點讓我很意外，當然，還好有另外一個學生有提到一個式子的相加相減，他有看到這個部分，然後我請同學們比較哪一種方法比較適合的時候，他們很自然的選擇了加減消去法，這個是我設計教學之前所沒有預想到的一件事。

在後續教學的部分，我會建議老師的是：由於這一次只有兩節課的時間，並沒有辦法把代入消去法跟加減消去法中比較應用的題目放入這次的教學，所以我建議之後的老師如果在教相關單元的時候，可以再多安排二節到三節的時間，前二節可以有一些比較特殊題型的方程式讓同學來練習，讓他們分辨用什麼方法來解比較適合；另外一類是有關於這個二元一次聯立方程式的應用問題的部分，也可以安排一堂課讓學生透過題目的情境列出方程式，然後甚至從方程式裡面解出來的答案，可以發現一些不合情境的答案，然後可以做一點思考。最後就是解二元一次聯立方程式的題目中有特殊解的情況：比如說有無解和無限多解的題目，這些放在最後一堂課的時候再跟同學提，就可以算是比較完整的教學。

肆、教學後的省思

本次的教學單元為二元一次聯立方程式，課程時間為兩節課（共九十分鐘），中間

並有十分鐘的休息時間。教學單元預計分四個活動進行，先由學生的生活情境-買東西的例子布題，由於教學年級為國中二年級，學生已經於國一學習過此單元，並且已經能熟練一元一次方程式的解法，所以他們在進行活動一時較無問題，但在請學生找出一元一次方程式的可能解時，發現雖然學生已經學習過，但是對於解的限制及是否已經找完會感到困難。但是在呈現過所有同學的找法及讓同學自行發表自己的找法後，他們很快的就接受了從係數較大的未知數開始找的方法。另外在進行活動三及活動四時，不先將解法的名稱告訴學生，而讓學生從聯立方程式($\begin{cases} 10x+15y=120\ldots\ldots(1) \\ y=2x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$) 及 ($\begin{cases} 5x+2y=64\ldots\ldots(1) \\ 2x+2y=40\ldots\ldots(2) \end{cases}$) 的特徵中發現前者以代入，後者以式子的加減的方式消去一個未知數，再以一元一次方程式的解法解出另一個未知數。兩種解法學生都能熟練後再說明兩種解法的名稱。

而本次的教學活動單元主題為二元一次聯立方程式，但由於完整地學習活動還可以包含以特殊解法解聯立方程式的題目、矛盾及相依的情形，所以還需要二到三堂課，所以這兩堂課主要是讓學生能列出二元一次聯立方程式及理解代入消去法及加減消去法解題的初步引導，相關的練習則安排在往後的 2 到 3 堂課的教學中。

教學的班級為教學者在學校中的導師班，平常即訓練學生在課堂上踴躍發言，所以該班學生在此兩堂課的上課反應頗能配合教學者的帶領。

提公因式與分組分解

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級上學期

二、教 學 者：台北縣中山國中 林信宏 老師

三、教學目標：

1. 能利用分配律提出公因式作因式分解。
2. 能利用兩次分配律反向分組作因式分解。

四、活動目標：

【第一節】

活動一：兩項式的因式分解法，如 $ab+ac=a(b+c)$，$ab-ac=a(b-c)$。

活動二：三項式的因式分解法，如 $ab+ac+ad=a(b+c+d)$。

活動三：能利用相反數概念將$(b-a)$記為$-(a-b)$，並解決相關因式分解問題。

【第二節】

活動一：四項式的分組分解法，如$(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$

活動二：六項式的因式分解法，如$(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)=x(a+b+c)+y(a+b+c)$

$=(a+b+c)(x+y)$

活動三：二次三項多項式的因式分解法，如 $x^2+3x+2=(x^2+x)+(2x+2)=$

$x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x+2)$

五、教學概要說明：

1. 第一節課依據教學活動與學習單設計希望能達成：

   (1) 學生已學過分配律「$a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$」展開的觀念，在此利用分配律的分解「$ab+ac=a(b+c)$，$ba+ca=(b+c)a$」引導學生理解提出公因式觀念與方法，並能反向檢驗分解結果是否正確。

(展開)

$$a(b+c)=ab+ac$$

(因式分解)

(2) 利用生活中的情境問題，說明提出公因數簡化問題的技巧。

(3) 藉由活動、操作使學生理解當多項式的某一項全部提出來時，其係數變為 1。「例如：$ax+x=ax+1x=x(a+1)$而不是 $ax+x=x(a+0)$」

(4) 說明公因式的意義，藉由活動使學生理解提出公因式的方法。提公因式時應注意將所有的公因式(包含係數的公因數)都提出。

(5) 利用乘法對減法分配律的分解提醒同學括號前面有減號時，應注意變號。

(6) 利用 $a(b+c+d)=ab+ac+ad$ 的展開與分解說明三項式提公因式的分解法。

(7) 利用相反數概念將$(b-a)$記為$-(a-b)$，進一步理解「當 n 為奇數次時，$(a-b)^n=-(b-a)^n$，當 n 為偶數次時，$(a-b)^n=(b-a)^n$」，並能利用上述變號法解決相關因式分解問題。

2. 第二節課依據教學活動與學習單設計希望能達成：

(1) 透過兩次分配律的展開與反向分解，使學生了解以分組分解法作因式分解的方式，並思考分組分解時，分組的方式並不是唯一，進而能嘗試各種分組方式，找到適合且正確的分組法。

例如：

(提出公因式)

$$\begin{aligned}&(a+b)(c+d)\\&=a(c+d)+b(c+d)\\&=(ac+ad)+(bc+bd)\\&=ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$

(分組分解法)

(2) 藉由活動、操作使學生理解分組分解的原則，分組後每組內可以提出公因式，各組提完公因式後，組和組之間又有公因式可以提出。

(3) 藉由學習單例題演練使同學能觀察各項間係數的比例關係或公因式形式，將四項式兩兩做合適的分組，並注意括號的寫法與變號。

(4) 藉由活動、操作使學生理解六項式是兩項乘以三項的結果，因式分解六項式時可以兩兩分組或三三分組，分組時應先觀察各項有無公因式與係數比例關係。

(5) 藉由活動、操作使學生理解 x 的二次三項式的分解，可將原來的三項之中的

x 項拆成前後係數成比例的兩項，再做分組分解。

六、教學活動設計：

【第一節】：能利用分配律提出公因式作因式分解。

活動一：兩項式的因式分解法，如 ab+ac=a(b+c)，ab-ac=a(b-c)。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 利用分配律說明提公因式的概念	1.利用乘法對加法的分配律展開與分解說明提公因式的概念。 (1)展開 a×(b+c)=？ (b+c)×a=？	• 老師提問，同學回答。	• 能回答： a×(b+c)= a×b+a×c (b+c)×a= b×a+c×a
	(2)看著(1)展開的結果，想想看 a×b+a×c =(　)(　　)， b×a+c×a =(　)(　　)	• 請同學上台發表同學可能寫出。 b×a+c×a= (a)(b+c)，此時老師可強化同學乘法交換律的觀念。	• 能利用分配律的分解提出公因式，其中共同的因式即為公因式。 • 知道乘法具有交換律。
	(3)展開 a×(b-c)=？ (b-c)×a=？	• 老師提問，同學回答。	• 能回答： a×(b-c)= a×b-a×c (b-c)×a= b×a-c×a
	(4)看著(3)展開的結果，想想看 a×b-a×c =(　)(　　)，	• 說明 a 是 a×b 的因式，a 也是 a×c 的因式，所以 a 是 a×b 和 a×c 的公因式	• 能回答： a×b-a×c= (a)(b-c)， b×a-c×a=(a)(b-c)

	b×a-c×a=(　)(　　)	(共同的因式)，將 a×b+a×c 提出公因式 a 後寫成 a×(b+c) 乘積的形式，就稱為**<u>因式分解</u>**。 • (展開) a(b+c)=ab+ac (因式分解)	• 能理解展開與因式分解的關係。
• 所提公因式為單項式	2.a×b+a×c=a×(b+c)，a、b、c 為數字的應用 (1)<u>佳佳福</u>大賣場在星期天推出新款護眼檯燈和新式省電燈泡特價販售，當天賣出 47 個護眼檯燈，每個護眼檯燈特價 899 元，且已知新式燈泡共賣得 4747 元，則星期天<u>佳佳福</u>大賣場的護眼檯燈和新式燈泡共賣得多少元？ 3.a×b+a×c=a×(b+c)，a 是數字，b、c 為文字或數字加	• 老師提問，同學上台列算式。(不要求算出來) • 同學可能回答 47×899+4747，老師可提問：『好不好算？』『有沒有簡便的算法？』若同學仍不會，再提問：『能不能利用前面教過的 ab+ac=a(b+c) 來算，4747 是多少乘以多少？a、b、c 分別是多少？』 • 請同學上台發表。 • 老師提問，同學回答，並提醒同學注意分配律。	• 能理解提出公因數可簡化計算的技巧。

	文字。 (1)展開 $3(x+2y)=$？	・同學可能直接回答 $3x+6y=3(x+2y)$，老師可再補充： $3x+6y=3\times x+3\times 2y=3(x+2y)$ ・因式分解時，係數的最大公因數也可提出。	・能回答： $3(x+2y)$ $=3x+3\times 2y$ $=3x+6y$
	(2)看著(1)的結果，因式分解 $3x+6y=$？		・能回答： $3x+6y=3x+3\times 2y$ $=3(x+2y)$
	4.$a\times b+a\times c=a\times(b+c)$，a、b、c 為文字或數字加文字。 (1)因式分解 $ax+3x=$？	・請同學上台演練。 (1)同學若不會，老師提示看著 $ab+ac=a(b+c)$，想想看 a、b、c 分別換成什麼？	・能正確的將所有公因式，包含係數的最大公因數提出。
	(2)因式分解 $ax+x=$？	(2)可能有同學寫成 $ax+x=x(a+0)$，老師可提醒同學利用分配律展開反向檢驗。	・能理解當多項式的某一項全部提出來時，其係數變為 1。
	(3)因式分解 $x^2+5x=$？	(3)提示同學 x^2 就是 $x\cdot x$， $x^2+5x=x\cdot x+5x$ $=x(x+5)$	
	(4)因式分解 $6ax^2+4ax=$？	(4)可能有同學寫成	

		$6ax^2+4ax$ $=a(6x^2+4x)$或 $ax(6x+4)$，此時老師可提問：『還有沒有其他的公因式？係數有沒有公因數，可不可以提公因數？』	
・所提公因式為多項式	(5)因式分解 $x(x+3)+x(x+2)=$？	・同學若無法理解，提示同學看著 ab+ac=a(b+c)，想想看 a、b、c 分別換成什麼？ ・若再想不到，將 x 圈起來寫 a，$(x+3)$ 圈起來寫 b，$(x+2)$ 圈起來寫 c，想想看接下來怎麼做？	・能以代換方式理解提出公因式方法。
	(6)因式分解 $(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)=$？	・老師可提示同學看著 ab+ac=a(b+c)，想想看 a、b、c 分別換成什麼？ ・若再想不到，將 $(x+1)$圈起來寫 a，$(x+2)$圈起來寫 b，$(x+3)$圈起來寫 c，想想看接下來怎麼做？	

	(7)因式分解 $x(x+2)-x=$？	・同學若無法理解，老師提示同學看著 ab-ac=a(b-c)，想想看 a、b、c 分別換成什麼？ ・若再想不到，將 x 圈起來寫 a，$(x+2)$ 圈起來寫 b，1 圈起來寫 c，想想看接下來怎麼做？	・能正確提出公因式並了解提出後剩餘因式的合併處理。
	(8)因式分解 $x(2x+3)-x(x+2)$ $=$？	・同學若無法理解，提示同學看著 ab-ac=a(b-c)，想想看 a、b、c 分別換成什麼？ ・若再想不到，將 x 圈起來寫 a，$(2x+3)$ 圈起來寫 b，$(x+2)$ 圈起來寫 c，想想看接下來怎麼做？ ・同學可能寫成 $x(2x+3)-x(x+2)$ $=x(2x+3-x+2)$，此時老師提醒同學括號必須存在，去括號時記得變號。	・能以代換方式理解提出公因式方法。
	(9)因式分解 $(2x+1)^2(x+3)-(2x+1)(x+3)^2=$？	・同學若無法理解，老師請同學先思考因式分解	

		$a^2b-ab^2=$？想想看 a、b 分別換成什麼？ 若再想不到，將 $(2x+1)$ 圈起來寫 a，$(x+3)$圈起來寫 b，想想看接下來怎麼做？	

活動二：三項式的因式分解法，如 ab+ac+ad=a(b+c+d)。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 三項式的因式分解	1.三項提公因式 (1)展開 a×(b+c+d)=？ (2)因式分解 a×b+a×c+a×d=？	• 乘法對加法分配律的延伸。 • 同學若無法理解，請同學看看(1)的結果反推回去。	• 能正確地回答。
	2.ab+ac+ad=a(b+c+d)，a、b、c 為文字或數字加文字。 (1)因式分解 $3ax^2+3ax+3a=$？	• 同學可能寫成： (1)$3ax^2+3ax+3a$ $=3a(x^2+x)$，老師可請同學用分配律展開反向檢驗並說明三項分解後為一項乘以三項。 (2)$3ax^2+3ax+3a$ $=3ax(x+1)+3a$ 老師可提問：『什麼叫因式分解？』	• 知道三項分解後為一項乘以三項。

	(2)因式分解 $x^2y+2xy-3x=$？	・同學可能寫成 $x^2y+2xy-3x$ $=xxy+2xy-3x$ $=xy(x+2)-3x$ ，老師可提問：『因式分解應該要寫成什麼形式？』，提醒同學寫成連乘積才是正確的因式分解。	・知道因式分解要將每一項的公因式提出寫成兩項或多項的連乘積。

活動三：能利用相反數概念將(b-a)記為-(a-b)，並解決相關因式分解問題。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・透過變號如： (b-a)=-(a-b)，找出公因式。	1.需變號題型 (1)因式分解 $a(x-2)+b(2-x)=$？ ・$(x-2)$和$(2-x)$有什麼關係？ ・$(2-x)$的相反數是什麼？ ・兩數互為相反數有什麼特徵？ ・所以，如何因式分解 $a(x-2)+b(2-x)=$？	・請同學思考： (1)有公因式嗎？ (2)$(x-2)$和$(2-x)$一樣嗎？ ・教師可提問： $(2-x)+$_____$=0$ $\because (2-x)+(x-2)=0$ $\therefore (2-x)=-(x-2)$ ・回到原題： $a(x-2)+b(2-x)$ $=a(x-2)+b(-(x-2))$ $=a(x-2)-b(x-2)$ $=(x-2)(a-b)$ 有沒有公因式了？	・知道 a、b 兩數互為相反數，則 a+b=0。 ・會利用變號法提出公因式作因式分解。

		接下來會不會做？是不是和之前的一樣？	
• 透過變號如：$(b-a)^2=(a-b)^2$，找出公因式	(2)因式分解 $(x-y)+(y-x)^2=$？ • 有公因式嗎？ • 如果把$(y-x)^2$形式轉換成$(x-y)^2$形式，如何轉換？	• 注意：$(y-x)^2=(y-x)(y-x)$。同學可能寫出 $(y-x)^2=(y-x)(y-x)$ $=(-(x-y))(-(x-y))$ $=(x-y)(x-y)=(x-y)^2$	• 知道$(y-x)^2=(x-y)^2$
	• 所以，如何因式分解$(x-y)+(y-x)^2=$？	• 同學可能會寫： (1)$(x-y)+(y-x)^2=$ $(x-y)+(x-y)^2=$ $(x-y)(1+(x-y))$ $=(x-y)(x-y+1)$	• 能利用變號法提出公因式作因式分解。
	• 如果把$(x-y)$形式轉換成$(y-x)$形式如何轉換？	(2)$(x-y)+(y-x)^2=$ $-(y-x)+(y-x)^2=$ $(y-x)(-1+(y-x))=$ $(y-x)(y-x-1)$ • 此時老師請同學思考 $(y-x)(y-x-1)$ 與 $(x-y)(x-y+1)$相不相同？	

【第二節】：能利用兩次分配律反向分組作因式分解。

活動一：四項式的分組分解法，如$(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 利用兩次分配律說明分組分解概念	1.利用兩次分配律展開$(a+b)(x+y)$與反向分解說明分		

	組分解概念。 (1) 展開 (a+b)(x+y) 可得到什麼式子？	• 老師講演兩次分配律。 (a+b)(x+y) =a(x+y)+b(x+y) 提公因式 =ax+ay+bx+by 分組	• 能將(a+b)(x+y)以兩次分配律展開並反向思考分解方法，以理解分組分解法。
	(2)看著(1)反向思考如何因式分解 ax+ay+bx+by=？ •『總共有幾項？』	• 同學可能會回答『四項』。	
	• 這四項有沒有公因式？ • 沒有，那麼怎麼將 ax+ay+bx+by 寫成 a(x+y)+b(x+y)？ • 同學若仍不會，老師提問：『ax+ay 有沒有公因式？』，『bx+by 有沒有公因式？』，	• 同學可能會回答：『沒有。』	• 能理解四項式通常是兩兩分組提出公因式。
	把 ax+ay+bx+by 寫成 (ax+ay)+(bx+by) 可不可以？	• 同學可能會寫： ax+ay+bx+by =(ax+ay)+(bx+by) =a(x+y)+b(x+y)	• 能理解組和組之間又有公因式可提出。
	• 再來有沒有公因式？ 是不是和上一節課教的提出公因式法一樣了？		

	・如果將$(a+b)(x+y)$展開寫成$(a+b)x+(a+b)y$可不可以？展開後會得到什麼？	・同學可能的回答： $(a+b)(x+y)$ $=(a+b)x+(a+b)y$ $=ax+bx+ay+by$	・能理解不同的展開方式。
・探討不同分組方式的分解方法	・想想看$ax+ay+bx+by$還有沒有其他的分組方法可以作因式分解？	・同學可能回答： $ax+ay+bx+by$ $=(ax+bx)+(ay+by)$ $=x(a+b)+y(a+b)$ $=(x+y)(a+b)$	・能理解分組分解的分組方式不是唯一的。
	・$(a+b)(x+y)$和$(x+y)(a+b)$相不相同？為什麼？		・能回答乘法具有交換律。
	(3)因式分解 $ax-by+ay-bx=$？ ・可以怎麼分組？ ①有a的一組，有b的一組，請一位同學上台。 ②有x的一組，有y的一組，請一位同學上台。	・請同學觀察分組方式：同學可能寫成 ①$ax-by+ay-bx$ $=(ax+ay)-(bx-by)$ 老師可提示利用分配律展開回去檢驗發現錯誤。 ②$ax-by+ay-bx$ $=(ax-bx)+(ay-by)$ $=x(a-b)+y(a-b)$ $=(a-b)(x+y)$	・能回答： $ax-by+ay-bx=$ $(ax+ay)-(bx+by)$ $=a(x+y)-b(x+y)$ $=(x+y)(a-b)$
	・①和②的結果相不相同？為什麼？		・能回答結果相同因為乘法具有交換律。

	2.觀察係數的比例關係或觀察公因式形式兩兩分組。 (1)因式分解 $x^2-2x+ax-2a=$？ 如何分組？ ①有 a 的一組，請一位同學上台。 ②有 2 的一組，請另一位同學上台。	請同學觀察分組方式： ①$x^2-2x+ax-2a$ $=(x^2-2x)+(ax-2a)$ $=x(x-2)+a(x-2)$ $=(x-2)(x+a)$ ②$x^2-2x+ax-2a$ $=x^2+ax-2x-2a$ $=(x^2+ax)+(-2x-2a)$ (注意分組時括號的寫法) $=x(x+a)-2(x+a)$ (提出公因數(-2)記得變號) $=(x+a)(x-2)$	・能正確地因式分解。

活動二：六項式的因式分解法，如

$$(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)=x(a+b+c)+y(a+b+c)=(a+b+c)(x+y)$$

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・利用兩次分配律說明分組分解概念	1.六項式的分組分解法。 (1)因式分解 $ax+bx+cx+ay+by+cy=$？ ・總共幾項？ ・六項怎麼來的？	・請兩位同學上台演練發表： ①有 x 的一組 $ax+bx+cx+ay+by+cy$ $=(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)$ $=x(a+b+c)+y(a+b+c)$	・能回答：六項。 ・能回答：六項是兩

		$=(a+b+c)(x+y)$ ②有 a 一組；有 b 一組;有 c 一組， $ax+bx+cx+ay+by+cy$ $=ax+ay+bx+by+cx+cy$ $=(ax+ay)+(bx+by)+(cx+cy)$ $=a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$ $=(x+y)(a+b+c)$	項乘以三項的結果。
・探討不同分組方式的分解方法	・可以怎麼分組？		・因式分解時六項可兩兩分組分解或三三分組分解。 ・分組時能注意項的移動；提出負號時能注意變號。
	2.觀察係數的比例關係或觀察公因式形式兩兩分組或三三分組 (1)因式分解 $6ax-3bx+9cy+6ay-3by+9cx=$？ ・如何分組？	・可分為： ①有 x 的一組： $6ax-3bx+9cy+6ay-3by+9cx$ $=6ax-3bx+9cx+6ay-3by+9cy$ $=(6ax-3bx+9cx)+(6ay-3by+9cy)$ $=3x(2a-b+3c)+3y(2a-b+3c)$ $=(2a-b+3c)(3x+3y)$ $=3(2a-b+3c)(x+y)$ ②係數 3 一組；係數 6 一組；係數 9 一組： $6ax-3bx+9cy+6ay-3by+9cx$ $=(-3bx-3by)+(6ax+6ay)+(9cx+9cy)$ $=-3b(x+y)+6a(x+y)+9c(x+y)$	

		$=(x+y)(-3b+6a+9c)$ $=3(x+y)(2a-b+3c)$	

活動三：二次三項多項式的因式分解法，如

$x^2+3x+2=(x^2+x)+(2x+2)=x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x+2)$。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 利用拆項說明兩次三項式的分組分解概念	1. x 的二次三項多項式的分解 (1)利用兩次分配律展開 $(x+1)(x+2)=$？	• 同學的可能作法如下： ①將 $x+1$ 拆開，$(x+2)$視為 A： $(x+1)(x+2)$ $=x(x+2)+1(x+2)$ $=x^2+2x+1x+2$ $=x^2+3x+2$ ②將 $x+2$ *拆開*，$(x+1)$視為 B： $(x+1)(x+2)$ $=(x+1)x+(x+1)2$ $=x^2+1x+2x+2$ $=x^2+3x+2$	• 能利用兩次分配律的展開與分解，將 x 的二次三項式拆成四項做分組分解。
	(2)因式分解 $x^2+3x+2=$？ 請同學觀察(1)	• 請兩位同學上台演練發表： ①x^2+3x+2	

	展開的方式，反向思考如何分解？	$=x^2+2x+1x+2$ (教師可問：係數間有什麼關係？) $=(x^2+2x)+(1x+2)$ $=x(x+2)+(x+2)$ $=(x+2)(x+1)$ ②x^2+3x+2 $=x^2+1x+2x+2$ (教師可問：係數間有什麼關係？) $=(x^2+1x)+(2x+2)$ $=x(x+1)+2(x+1)$ $=(x+1)(x+2)$	

附錄：學習單

提出公因式做因式分解　學習單

台北縣中山國中　　八年___班　　座號：_____　　姓名：_____

活動一：

◎利用分配律展開與分解

1.(1)利用分配律展開 a×(b+c)=_____，(b+c)×a=_____

(2)利用(1)，a×b+a×c 可寫成哪兩個式子的乘積？b×a+c×a 可寫成哪兩個式子的乘積？

a×b+a×c=(　　)×(　　)

b×a+c×a=(　　)×(　　)

兩式的結果有沒有一樣？_____。

為什麼？說說你的想法並寫下：_____

(3)利用分配律展開 a×(b-c)=_____，(b-c)×a=_____

(4)利用(3)，a×b-a×c 可寫成哪兩個式子的乘積？b×a-c×a 可寫成哪兩個式子的乘積？

a×b-a×c=(　　)×(　　)

b×a-c×a=(　　)×(　　)

※我們知道 a 是 a×b 的因式，a 也是 a×c 的因式，所以____是 a×b 和 a×c 的公因式(共同的因式)，將 a×b+a×c 提出公因式 a 後寫成 a×(b+c)乘積的形式，就稱為_____。

◎a×b+a×c=a×(b+c)，a、b、c 為數字的應用

2.佳佳福大賣場在星期天推出新款護眼檯燈和新式省電燈泡特價販售，當天賣出 47 個護眼檯燈，每個護眼檯燈特價 899 元，且已知新式燈泡共賣得 4747 元，則星期天佳佳福大賣場的護眼檯燈和新式燈泡共賣得多少元？

由題意可列出算式：

如何計算最簡便，說說看你的想法並寫下：

◎a×b+a×c=a×(b+c)，a 是數字，b、c 為文字或數字加文字。

3.(1)展開 $3(x+2y)$=_____

(2)因式分解 $3x+6y$=_____

◎a×b+a×c=a×(b+c)，a、b、c 為文字或數字加文字。

4.(1)因式分解 $ax+3x$=_____，說說看你的想法並寫下：

(2)因式分解 $ax+x$=_____，說說看你的想法並寫下：

(3)因式分解 x^2+5x=_____，說說看你的想法並寫下：

(4)因式分解 $6ax^2+4ax$=_____，說說看你的想法並寫下：

5.(1)因式分解 $x(x+3)+x(x+2)$=_____，說說看你的想法並寫下：

(2)因式分解$(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)$=_____，說說看你的想法並寫下：

6.(1)因式分解 $x(x+2)-x$=_____，說說看你的想法並寫下：

(2)因式分解 $x(2x+3)-x(x+2)$=_____，說說看你的想法並寫下：

(3)因式分解$(2x+1)^2(x+3)-(2x+1)(x+3)^2$=_____，說說看你的想法並寫下：

活動二：

◎三項提公因式

7.(1)展開 $a\times(b+c+d)=$_____

(2)因式分解 $a\times b+a\times c+a\times d=$_____

◎$ab+ac+ad=a(b+c+d)$，a、b、c 為文字或數字加文字。

8.(1)因式分解 $3ax^2+3ax+3a=$_____，說說看你的想法並寫下：

(2)因式分解 $x^2y+2xy-3x=$_____，說說看你的想法並寫下：

活動三：

◎需變號題型

9.(1)因式分解 $a(x-2)+b(2-x)=$_____，說說看你的想法並寫下：

(2)因式分解 $a(x-2)^2+b(2-x)^2=$_____，說說看你的想法並寫下：

(3)因式分解 $a(x-2)+b(2-x)^2=$_____，說說看你的想法並寫下：

三、因式分解下列各題，並寫出計算過程：

1.因式分解 $3x^2+5x=$_____

2.因式分解 $3bx^2-6b^2x+9bx=$_____

3.因式分解 $-4x(x+1)+(x+1)=$_____

4.因式分解 $(2x-1)^2+2(2x-1)(x-1)=$_____

5.因式分解 $(x+y)(x+2y)^2-(x+y)^2(x+2y)=$_____

6.因式分解 $(x-1)(x+y)+(x+1)(y+x)=$_____

7.因式分解 $(x-3)^2-(x+2)(3-x)=$_____

8.因式分解 $2(2x-5)^3-(x+3)(5-2x)^2=$_____

計算過程：

分組分解法做因式分解　學習單

活動一：

◎利用兩次分配律展開 $(a+b)(x+y)$ 並反向分解

1.(1)展開 $(a+b)(x+y)$ 可得到什麼式子？

①　　②

(2)看著(1)反向思考如何因式分解 $ax+ay+bx+by=$_____，說說看你的想法並寫下過程：

①　　②

(3)因式分解 $ax-by+ay-bx=$_____，說說看你的想法並寫下過程：

①　　②

◎觀察係數的比例關係或觀察公因式形式兩兩分組

2.因式分解 $x^2-2x+ax-2a=$_____，說說看你的想法並寫下過程：

①　　②

活動二：

◎六項式的分組分解法

3.因式分解 $ax+bx+cx+ay+by+cy=$_____，說說看你的想法並寫下過程：

①　　②

◎觀察係數的比例關係或觀察公因式形式兩兩分組或三三分組

4.因式分解 $6ax-3bx+9cy+6ay-3by+9cx=$_____，說說看你的想法並寫下過程：

①　　②

活動三：

◎x 的二次三項多項式的分解

5.(1)利用兩次分配律展開$(x+1)(x+2)$=_____，說說看你的想法並寫下過程：

(2)因式分解 x^2+3x+2=_____，說說看你的想法並寫下過程：

二、因式分解下列各題，並寫出計算過程：

1.因式分解 $x^2+3x+x+3$=_____

2.因式分解 $4x+2x^2-ax-2a$=_____

3.因式分解 $xy-8+4x-2y$=_____

4.因式分解 $mx-2nx-my+2ny+mz-2nz$=_____

5.因式分解 $3a^2-6ax-5ac+4ab-8bx+10cx$=_____

6.(1)利用兩次分配律展開$(x-1)(x+2)$=_____

(2)因式分解 x^2+x-2=_____

7.因式分解 $2x^2+5x+3$=_____

8.因式分解 $3x^2+7x+2$=_____

9.因式分解 $x^2-3x-10$=_____

10.因式分解$(a-b)^2-ac+bc$=_____

11.因式分解 $2(xy-2)-(8x-y)$=_____

計算過程：

貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：班長。
2. 學生：起立，立正，敬禮，老師好。
3. 老師：好，同學好，請坐。我們今天要上 3-2 這個單元，這個單元就是利用提出公因式做因式分解。你們之前有學過分配律，對吧！還記得吧，分配律那時候有說到，a×(b+c)，乘開會等於什麼？
4. 學生：ab+ac。
5. 老師：對，使用分配律，括號去掉的時候要記得分配，對不對？對嘛！所以會變成 a×b+a×c，你們剛剛說的是將乘號省略，所以變成 ab+ac，對不對？可以，好，這個步驟就是我們利用分配律把它乘開來，好，如果是(b+c)×a 的話，一樣，分配的話，會得到…？
6. 學生：(有人說)ab+ac，(有人說)ba+ca。
7. 老師：好，有同學說 ba+ca，剛剛有同學說 ab+ac，有什麼差別？沒差，為什麼沒有差別，因為什麼？具有交換律。乘法具有交換律，對不對？所以剛剛有同學說，本來應該 ba+ca，因為交換律，所以它也是 ab+ac，可以嗎？可以啦！好，現在反過來我們來看，反過來請問你，ab+ac 我可以寫成什麼乘以什麼？
8. 學生：a×(b+c)。
9. 老師：a×(b+c)，好，所以它可以寫成 a×(b+c)，因為 3-1 我們之前也上過，我們說，其實 a 是不是 ab 的因式？是，對不對？a 也是 ac 的因式，這個它(ab)有 a 這個因式，它(ac)也有 a 這個因式，所以 a 其實就是 ab 和 ac 的公因式，對吧！公因式，我們現在是不是把共同的公因式做一個動作，對不對？是不

是把它提出來，所以叫做提出公因式，這樣懂嗎？叫做提公因式，所以我們現在要把這個 a 提出來了，那剩下的在哪裡？剩下的就是剩下 b+c 懂嗎？所以就叫提出公因式做因式分解，因式分解就是把一個像 ab+ac 這個式子提出 a 之後，分解成兩個相乘，分解成 a×(b+c)相乘，我們把這個動作稱之為因式分解，有沒有問題？沒有。我們看一下，來，在我們的學習單的第 2 題有一個題目(見 P.109 學習單)，大家一起看，它說：「佳佳福大賣場在禮拜天的時候，推出了兩種東西做特價，一個是護眼檯燈，還有一個是省電燈泡，當天賣出了 47 個護眼檯燈，每一個護眼檯燈的特價是 899 元，先想一下這個情境，然後新式燈泡總共賣了 4747 元，在禮拜天，佳佳福大賣場的護眼檯燈和新式燈泡總共賣多少錢？」我要你列出算式，算式列出來就好了，好不好？先把算式列出來，等一下我請一個同學上來，把算式列給我們看。總共賣多少錢，你要怎麼列出它的算式？兩種東西，你的算式應該怎麼列？總共賣多少錢？我們找個同學上來列式看看，來，34 號，你把你的算式列在黑板上。你跟我們說明一下你的算法，好不好？

10. 學生：就是它說，一個是 899 元，它賣了 47 個，所以就是 47×899，然後它說新式燈泡共賣，所以就是全部的錢賣這樣4747，那就又把4747等於就是47×101，它有共同的 47 嘛，就把它提出來，那就剩 899+101，899+101 等於 1000，所以 47×1000 等於 47000。(見圖一)

學生的算式：
47×899+4747
=47×899+47×101
=47×(899+101)
=47×1000
圖一

11. 老師：好，同學，掌聲鼓勵一下，好，同學有沒有問題的？

12. 學生：沒有。

13. 老師：沒有，好，所以你看這個情境裡面，它告訴我們的就是，它總共賣的錢，

我們可以列出這個算式，對不對？你直接計算的話，47×899 是不是不好算？對吧！所以我們利用了剛剛這個動作，就是把 4747，那就是同學的觀察力，她有觀察到，4747 可以分解成 47×101，然後 47 就是我們的共同的因數，對不對？把 47 拿出來，所以是不是利用上面的概念就可以做？對吧！好，現在我們來看一下後面，第 3 題(1)(P.110)它說展開，我們現在要展開 3×(x+2y)，利用分配律的話，應該是 3×x+3×2y，對不對？然後就變成 3x+6y，可以吧！好，那(2)呢？我現在因式分解 3x+6y，你怎麼把剛剛這個式子寫回去因式分解？同學試試看，好不好？寫下你的思考過程，想想看，你怎麼利用我們今天教的概念去做這個動作？這邊同學有的都做到後面了，我們找個同學上台，來，11 號同學來。

14. 學生：就是你看這裡都有 3x，還有這裡有 3，然後 6y 它是 2×3，它們都有 3 這個公因式，就把它提出來，就會變成這個【3(x+2y)】，這樣有人沒有理解嗎？(見圖二)

學生的算式： 3x+6y =3×x+3×2y =3(x+2y)
圖二

15. 老師：你把你的過程寫在學習單上那個(2)因式分解 3x+6y=，那個題目下面好不好？好，你這個過程已經是把 3 看成是公因數了，是不是？
16. 學生：對啊！
17. 老師：對啦，所以其實它是中間那個動作，中間有個動作，對不對？中間的動作就是【3×x+3×2y】，好，同學，有沒有問題？
18. 學生：沒有。
19. 老師：好，我們掌聲鼓勵。所以其實你們了解的，它可以直接這樣子做，因為我們這是第一堂課，所以我希望同學去了解中間這個過程，你知道其實我們是提出 3 這個動作，好不好？這個 6y 其實就是 3×2y，然後它(3x)有 3，它

(6y)有 3，對不對？3 提出來，好不好？就跟這個概念是一樣的，可以嗎？好，那後面我們就來做第 4 大題，這 4 小題，同學先思考一下怎麼做，待會我們就一次請四位同學上來演練說明給大家。我們找四個同學，上來以後把你的想法跟我們大家分享，第一個 33 號、來，6 號、41 號、最後一個你幫我抽，36，好，36 號，來，你們四位上來，先把你們的過程寫下來，然後待會兒一個一個跟我們分享一下，你中間的那個，好，那你先，你要用麥克風嗎？不用，好，那你直接講。

20. 學生：ax+3x 可以看成 a×x+3×x，然後就可以再等於 x(a+3)，懂嗎？(見圖三)

學生的算式：
4.(1)ax+3x =a×x+3×x =x(a+3)
圖三

21. 老師：好，有沒有問題？有沒有問題問她？沒有，好，謝謝。第二位，來。

22. 學生：ax+x 就等於 a×x，然後 x 可以分解成 1×x，所以就是 x(a+1)。(見圖四)

學生的算式：
4.(2) ax+x =a×x+1×x =x(a+1)
圖四

23. 老師：好，所以那個 x 其實是 1×x，對不對？所以你不要以為 x 拿出來以後，那個東西就不見了，有些同學都誤解了，他認為那個位置 x 拿出來以後，那個位置就沒有東西了，其實它是 1×x，那個 1 是被我們省略了，記得嗎？所以他現在要先還原那個 1，這個同學先還原那個 1，有沒有，然後提出來之後那個 1 還在，可以嗎？來，那第 3 題。

學生的算式：
4.(3) x^2+5x =x×x+5×x =x(x+5)
圖五

24. 學生：就是 x^2，就是 x×x，然後 5x 就是+5×x，然後就等於 x(x+5)。(見圖五)

25. 老師：好，有沒有問題？

26. 學生：沒有。

27. 老師：好，我們最後的，來，第四個同學。

28. 學生：6 和 4 的公因數是 2，所以就 2 的 ax，2×3 等於 6，所以就是×3x，然後 2×2 就是 4，所以 2ax×2，那就是這樣【2ax(3x+2)】。(見圖六)

學生的算式： 4.(4)$6ax^2+4ax$ $=2ax\times3x+2ax\times2$ $=2ax(3x+2)$
圖六

29. 老師：好，這一題你寫的跟她答案不一樣的舉手，好不好？跟她答案不一樣的，現在大家都不承認了。剛剛我下去看了一圈，明明很多人跟她的答案不一樣，跟她的答案不一樣的請舉手，快點，好，你們那個，你的答案是？

30. 學生：$ax(6x+4)$。

31. 老師：$ax(6x+4)$，對不對？她的答案是這樣，好，請坐。你寫這個答案的舉手，好不好？寫這個答案，還滿多的，還有沒有其他，這兩個答案以外的有沒有？跟這兩個答案不一樣的有沒有？有沒有，做出來的？沒有，就這兩組是不是？好，請問你，這兩組實際上有沒有一樣？有，我們其實上一節有講，3-1 我們也說過了。3x+2 是不是它的因式？那 6x+4 是不是它的因式？是啦，對不對？也是，那只是說，因為我們希望的是，數學上希望大家做溝通，所以數學是個溝通的語言，當然這兩種形式，我們都不能夠說它有錯，但是我們希望是說，最後大家統一的語言一樣的話，我們就會要求最後括號裡面可以再提出來的，希望你再提出來，所以這個 6x+4 有沒有共同的因數？有嘛，這個 6 是 2×3，這是 4，是不是 2×2？是不是大家都有 2 這個因數，對不對？所以就把 2 再提出來以後，就變成上面這個形式了【2ax(3x+2)】，聽懂了嗎？所以這個形式的話，它就是一個唯一性了，對不對？如果你把該提出來的都能夠提出來的話，那麼大家所做出來的最後的結果就會一樣，是不是就會一樣，懂意思嗎？就不會說，好像每個人做的都不一樣，因為我們上一次也說過了，它的因式其實有無限多組，對不對？對嘛，如

果你現在變成很多答案都不一樣的話，大家沒辦法溝通，所以我們最後希望的就是說，在能夠提出來的全部都提出來之情況下，大家最後的答案就會一致，懂意思嗎？可以，所以你寫這個答案【$ax(6x+4)$】時，你就思考一下，這個 $6x+4$ 可不可以再提？可以再提的話，再把 2 提出來，這時候我們就會得到這個，這個答案就會是一致的，這樣子懂嗎？可以啦，好，所以這是第(4)小題。再來，那第 5 題，同學，我們再思考一下第 5 題了，有兩小題(見 P.110，5.(1)、(2))，一樣，我們請同學先思考，你去思考一下，你這個前面都會嘛，對不對？對啊，那我們現在思考一下，需要乘開，乘開的話，就會得到什麼？你這個為什麼不乘開，你是不是用這個提出來的？對啊，那你這個可以用這個方法，你為什麼這個沒想到？

32. 學生：這是提出來就行了。

33. 老師：對啊！我們找兩個同學上來試試看，好不好？把你的想法寫出來，我們再來一起看看大家的想法怎麼樣，第(1)題，4 號，第(2)題，抽一個，抽到自己，18 號，來，18 號。上來。

34. 老師：好，來，第(1)題先跟我們講解一下。

35. 學生：就先把這兩個乘開，然後這個變成 x^2+3x，然後這個變成 x^2+2x，然後加起來變成 $2x^2+5x$，它們有共同的 x，所以就把它往外移，然後剩下 $2x+5$，然後答案就出來了。(見圖七)

學生的算式：
5.(1) $x(x+3)+x(x+2)$ $=x^2+3x+x^2+2x$ $=2x^2+5x$ $=x(2x+5)$
圖七

36. 老師：那你第(2)題怎麼做的，你第(2)題做了嗎？第(2)小題你做了沒有？還沒有是不是？你第(2)小題會用乘開的方式嗎？

37. 學生：不知道。

38. 老師：不知道，是不是？好，有沒有同學對這個方式有問題的？它這樣寫有沒

有疑問的？沒有，你也是這樣做的舉手。你也是把它乘開來，然後再用剛剛的方式，先合併再提出來的，有沒有？也滿多的，你們剛剛舉手的，你們第(2)題做了沒有？你們第(2)題也是乘開嗎？沒有是不是？好，你回去思考一下第(2)題怎麼做，好不好？你寫完了嗎？寫完了，你跟我們同學講一下，我們聽第二位同學。

39. 學生：就這個 $x+1$，就把它提出來，這個 $x+2$ 和 $x+3$ 把它括起來，$(x+2)+(x+3)$，把它加起來，就等於 $2x+5$。(見圖八)

學生的算式： 5.(2) $(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)$ $=(x+1)(x+2+x+3)$ $=(x+1)(2x+5)$
圖八

40. 老師：好，你可能要稍微站過來一點，因為我們後面的同學可能會被你擋到。剛剛他講的時候，有沒有同學聽到？有沒有聽到？有啦，有聽到，後面的同學有聽到嗎？一點點，那你可以再大聲一點，好不好？我們後面同學沒有聽到你講的。

41. 學生：這有兩個 $x+1$，就把它提出來，就剩下 $x+2$ 跟 $x+3$ 把它括起來，就等於 $(x+1)(x+2+x+3)$把它加起來，就等於 $2x+5$。

42. 老師：好，聽到了，有沒有問題？有沒有同學要發問？剛剛我們第(1)小題乘開的同學，你們第(2)小題，現在聽這個同學這樣子講，有沒有感想？好，我的意思是說，第(1)小題你用乘開的方式可不可以做？

43. 學生：可以。

44. 老師：可以做，對不對？因為很明顯的，剛剛這個同學都做出來了嘛，他把它乘開以後變成 x^2+3x+x^2+2x，然後合併後 $2x^2+5x$，然後跟前面一樣提出公因數 x，裡面剩下 $2x+5$，可以完成嗎？可以，對不對？可以，可是，如果你都是這樣的思考方式，就是說遇到題目就把它乘開的話，那你第(2)小題乘開，怎麼辦？對啊！乘開以後，後面不太會了，對不對？所以乘開以後，後

面能不能做呢？我們還是可以做，只是還沒有教到，對不對？所以我們現在要看一下，如果能夠不乘開來做的話，我們直接完成就好了，對不對？所以這個題目他是不是這樣子做？有沒有看到，對不對？你看，x+1 提出來。同學，你先回去。我們先給他掌聲鼓勵。你發現了沒有？它這個題目就是利用 ab+ac，是不是剛剛提到的，有沒有？這整個(x+1)就是 a 啊，這整個(x+2)是 b 啊，對不對？這個(x+1)是 a 啊，這個(x+3)是 c 啊，對不對？ab+ac 不是可以把公因數 a 提出來，對不對？裡面剩下什麼？b+c，對不對？可以啦，剩下 b+c，不過這邊的寫法上面，我還是希望你中間有一個步驟，因為 b 是什麼？x+2，對不對？c 是什麼？x+3，對吧，所以我們要寫成這樣【(x+2)+(x+3)】，好不好？中間(x+2)+(x+3)，然後加法去括號，沒差嘛！對不對？所以最後是 2x+5，這樣可以嗎？可以啦，好，那這個題目如果不用乘開的方式，可以怎麼做？剛剛那個同學，剛剛做第(1)題的同學，你上來，如果你不乘開的話，可以怎麼做？你上來寫看看好不好？(見圖九)好，有沒有問題，看得懂嗎？可以啦，我們給他掌聲鼓勵一下，好，我們看到這邊，他剛剛採用了乘出來的方式算出來，對不對？然後現在他採用的就是 ab+ac，他提出 x，對不對？裡面剩下合併，是不是一樣的結果？一樣的結果，可是這種有沒有比較簡潔？有。當然，你採用不同的方式都可以解出來，沒有說哪一個方式一定是對的，只是我希望去了解這個概念，好不好？你要去了解這個概念。好，再來，我們看一下第 6 大題(見 P.110 學習單)，來，第 6 大題的部分，分配律的部分你看一下，a×(b+c)不是會等於 a×b+a×c 嗎？如果這邊【a×(b-c)】是減的呢？這邊【a×b-a×c】就會是減的，對不對？這邊【ab-ac】就是減的，所以這邊【ab-ac】是減的

學生的算式：
5.(1) $x(x+3)+x(x+2)$ $=x(x+3+x+2)$ $=x(2x+5)$
圖九

話，這邊【a×(b-c)】就會是減的，可以，好，所以是一樣的概念。所以你去想一下，那第 6 大題(P.110)怎麼做？剛剛有同學很小聲跟我說：「老師，可不可以讓同學自由上來？」我想說，有沒有同學志願的？來，這三題，很好，那就剛剛(1)、(2)、(3)，那你第(1)題、第(2)題、第(3)題，可以嘛！上台。

45. 學生：這個就不要動，然後-x，就是 x×1，然後因為同樣都有 x，所以 x，x×1，然後這個同樣也有 x，x 提出來，然後就 x+2，然後這剩 1，再-1，答案就是這個。(見圖十)

學生的算式：
6.(1) $x(x+2)-x\cdot 1$ $=x(x+2-1)$ $=x(x+1)$
圖十

46. 老師：好，有沒有問題的？有沒有？

47. 學生：沒有。

48. 老師：沒有，你們都 ok 嘛，沒有問題，只是剛剛加的跟減的而已嘛，一樣的概念，來，第二個。

49. 學生：就是這一串嘛，然後把 x 提出來，x 提出來，然後就在這邊，然後把這邊給它用括弧括起來，還有這邊，就變成這樣子，然後把這邊算出來，這邊要變號嘛，所以這邊就變負的，2x-x 的話，就等於都是 x 了，然後 3-2 的話就等於 1，所以這樣用起來的話就等於 $x(x+1)$，就是這樣。(見圖十一)

學生的算式：
6.(2) $x(2x+3)-x(x+2)$ $=x((2x+3)-(x+2))$ $=x(x+1)$
圖十一

50. 老師：好，第三個。

51. 學生：這邊有 2x+1，這邊也有 2x+1，把它提出來，後面這邊也有 x+3，這裡也有 x+3 把它提出來，兩個提出一個還有一個，然後這裡是兩個提出還有一個，所以這個(2x+1)-(x+3)，減完之後變成 x-2，然後這兩個提下來，那個沒有共同，再

學生的算式：
6.(3) $(2x+1)^2(x+3)-(2x+1)(x+3)^2$ $=(2x+1)(x+3)((2x+1)-(x+3))$ $=(2x+1)(x+3)(x-2)$
圖十二

提下來，然後答案等於這個。(見圖十二)

52. 老師：有沒有問題？來，好，同學，都講得很詳細，所以老師其實沒有必要再多說，我只是要去強調這個部分，對不對？這個部分就是剛剛我們看到的，剛剛是加法，對不對？剛剛在加法的狀況之下，有同學是不是直接用這個加這個，沒有加括號，對不對？如果你在減法部分，你把括號漏掉的話，就會忘記變號這個動作，所以你看這個同學都記得，對不對？這個就是我們的 ab-ac，a 提出來之後，有沒有？b-c，b 是整包，對不對？這個整包是 b，這個整包是 c，所以減的時候一定要加括號，對不對？去括號的時候，他說要記得變號，有沒有？這就出來了，可以嘛！好，那第(3)題，剛剛老師在下面巡的時候，有同學對第(3)題比較有問題，第(3)題的部分，這個其實是 a^2，b 有沒有，如果把這個$(2x+1)$看成 a，這不是 a^2嗎？這$(x+3)$是 b，對不對？然後減掉，這個就是跟這個一樣，是不是 a，這個跟這個一樣，還有平方，對不對？是不是 b^2？對吧！a^2b 就是 $a\times a\times b$，ab^2就是 $a\times b\times b$，所以公因式是什麼？共同的是不是一個 a、一個 b，對不對？共同的提出來之後，裡面剩下 a-b，對不對？所以一樣的，如果你不太熟悉的，可以中間多一個步驟，$(2x+1)^2$，就是兩個$(2x+1)$乘起來，有沒有？再乘$(x+3)$，對不對？然後這個就是$(2x+1)$，這個$(x+3)^2$ 就是$(x+3)\times(x+3)$，你要注意的是這個都是整包的，所以你整包不能拆，好不好？除非乘開才能夠拆，對不對？沒有乘開之前，你不能把那一包拆開，好不好？所以我們現在共同的是什麼？它有$(2x+1)$、$(x+3)$，對不對？它有$(2x+1)$、$(x+3)$，所以共同的公因式拿出來，對吧！剩下什麼？然後這個去括號、合併，那就出來了，這樣懂嗎？可以啦，好，我們休息一下，我們下一節還有一堂課。

【第二節】

53. 老師：我剛剛那個字會不會太小？後面的同學，剛剛上一節課的字看得到嗎？可以，好，那我們上一節課有沒有問題？上一節課講的內容，有沒有同學有問題的？那些例題還有我們講的概念，有沒有問題的？沒有。好，所以上一節課，我們主要的概念就是告訴你，兩項的因式分解的部分，你可以用 ab+ac 提出公因式 a，可以寫成(b+c)，對不對？對吧！兩項的，那另外兩項的話，其實是一項乘兩項嘛，對不對？現在我們來看一下，那三項呢？三項提公因式，一樣，譬如，a×(b+c+d)，我們是不是可以展開變成 ab+ac+ad？可以，就是一樣，利用分配律，是不是把它乘開，對不對？這個動作叫展開，我現在要因式分解的話，一樣，這個是不是有三項，對不對？加法分開嘛，ab 一項、ac 一項、ad 一項，可以，好，這一項有 a、有 a、有 a，對不對？所以我們可以寫成什麼？a(b+c+d)，所以用這個概念，我們是不是也可以來因式分解三項的？可以。我們思考一下，來，第 8 題(見 P.111 學習單)，請同學思考一下這個怎麼因式分解，好，同學思考看看，我找兩位上來。來，有沒有上一節課沒有上來而你自願上來的？這麼多要猜拳的，好，剛剛那個同學先舉手的，你先上來寫，第一題，我找個男生好了，來，你上來，好，第(1)題，來。

54. 學生：就是 $3ax^2$ 可以分成 $3a\times x^2$，然後 $3ax$ 可以記成 $3a\times x$，然後 3a 就變成 3a×1，同樣都有 3a，就把 3a 提出來，變成 $3a(x^2+x+1)$。(見圖十三)

學生的算式： 8.(1) $3ax^2+3ax+3a$ $=3a\cdot x^2+3a\cdot x+3a\cdot 1$ $=3a(x^2+x+1)$
圖十三

55. 老師：有沒有問題要問她的？沒有，好，沒有，第(2)題。

56. 學生：x^2y 就是 $x\times xy$，然後 $2xy$ 就是 $x\times 2y$，這也是一樣，一樣都有 x，所以這樣。(見圖十四)

學生的算式： 8.(2) $x^2y+2xy-3x$ $=x\cdot xy+x\cdot 2y-3\cdot x$ $=x(xy+2y-3)$
圖十四

57. 老師：好，有沒有問題？沒有，我們掌聲鼓勵。所以你看到的是三項的分解，對不對？三項可以分解，如果可以分解的話，它就是分解成一項乘以三項，對不對？好，所以這個部分一樣。同學，你們上來都已經會主動把它寫成公因式拆開之後，提出共同的，所以這兩個同學寫得很清楚。好，沒有問題吧！沒有的話我們要來思考下一道題型了(見 P.111 學習單 需變號題型)，來，下一道題型我們先想想看。下一道題型要分解的是：$a(x-2)+b(2-x)$，請同學看這邊，請問你，提出公因式，有沒有公因式？

58. 學生：沒有。

59. 老師：怎麼辦？

60. 學生：變號。

61. 老師：怎麼變？

62. 學生：+變-，-變+。

63. 老師：好，我們請同學上來寫給我們看，上一節課沒有上來過的，有沒有？你啦，好不好？你上一節課沒上來過，你上來寫看看。你跟同學說明一下。

64. 學生：就是這個不要動，這個放下來，然後這個變-的，後面這個就放下來，變成$(x-2)$，它也有$(x-2)$就放下來，然後就$(a-b)$？(見圖十五)

學生的算式： 9.(1) $a(x-2)+b(2-x)$ $=a(x-2)-b(x-2)$ $=(x-2)(a-b)$
圖十五

65. 老師：有沒有同學有問題的？看得懂的舉手，這麼厲害，好，手放下，好，我們先思考一個問題，首先，剛剛同學已經告訴我們了，這兩個有沒有公因式？沒有。剛剛有同學嘗試把它乘開，對不對？我剛剛看了一下，同學嘗試把它乘開，可是乘開之後呢？下一步他又卡住了，因為乘開以後，後面他還是想不到用這個概念來解，對不對？我們現在來想想看，請問你，3 的相反數是什麼？

66. 學生：-3。

67. 老師：-3，對不對？可以，好，-5 的相反數是什麼？

68. 學生：5。

69. 老師：+5，請問你，x-2 的相反數是什麼？2-x，2-x 怎麼來的？2-x 就是把原本的加一個負號，對不對？你看到沒有，3 的相反數是把原本的多一個負號，對不對？-5 的相反數是把原本的-5 減一個負號，對不對？所以呢？x-2 是不是這樣【-(x-2)】？對不對？這樣以後呢？有同學說它變成這樣【-x+2】，才是你們說的 2-x，可以。好，所以我們來看一下，這個 2-x 跟這個 x-2 有什麼關係？相加等於 0，對不對？互為相反數，剛剛同學有說了，相加是不是等於 0？因為它們兩個不是互為相反數嗎？對不對？所以相加會等於 0。所以移過去會等於什麼？是不是變成這樣(見圖十六)？看得懂嗎？可以嗎？可以，所以這個同學，從這裡變到這裡，他是不是中間其實還有一個步驟，對不對？它中間其實是這樣【a(x-2)+b（-(2-x)）】，有沒有看到，對吧！是不是先把這個 2-x 換成-(x-2)，可以，好，一換了之後呢？這個負號拿到前面來，是不是可以變號了？所以有同學變號是這樣，對吧，這邊變號，然後這邊就變成了 x-2，你變了之後有什麼好處啊？本來上面有沒有公因式？沒有，你交換了以後，這兩個有沒有一樣？有啊，可不可以用上一節課教的來做？可以了嘛！對不對？那我就利用上一節課教的來做了。x-2 拿出來，剩下，那就解決了，聽懂嗎？可以啦，好，所以這個部分就是同學說的變號。平方的怎麼辦？看第(2)個(P.111)，一樣，來，要因式分解這個題目【a(x-2)^2+b(2-x)^2】，來，先觀察。有沒有公因式？有沒有一樣？

(2-x)+(x-2)=0 (2-x)=-(x-2)
圖十六

70. 學生：沒有。

71. 老師：沒有，那怎麼辦？

72. 學生：變號。

73. 老師：變號，怎麼變？來，同學思考一下，好，剛剛我們是不是一次的部分這樣處理，對不對？一樣喔，你就要思考一下，如果我要用同樣的提出公因式的方法，那麼有什麼關係？為什麼一樣？好，你上來寫給我們看，為什麼一樣？怎麼弄出一樣？

74. 學生：就是如果-2 的話，平方就是等於 4，2 的平方就是 4，然後你看就少一個嘛，然後-(2-x)就會變成 x-2，它是相反數的相加，所以-跟+，然後平方的話都會等於 4，所以它們相加。

75. 老師：好，同學有沒有問題要問他的？他講的你有聽清楚了，聽懂的舉手。還是有幾個同學沒有聽到，手放下。有沒有同學可以把他講的部分補充說明，說明更清楚一點？有沒有同學要嘗試上去說明？你上去說明一下。

76. 學生：就是你把它乘開來看就好了，這個就等於 a 的平方，然後-2ab，然後+b 的平方，然後這個也是一樣 a^2，然後-2ab，然後+b^2，然後它這個是，是這個跟這個對調，這個跟這個對調而已，就是相反數的話都會一樣，因為它平方，所以沒差。

77. 老師：好，我們鼓掌，謝謝，好，同學都講的很清楚了，對不對？你們乘法公式有概念嘛，對不對？$(2-x)^2$，利用乘法公式展開，是不是等於這一串？a^2-2ab+b^2，對吧！然後$(x-2)^2$，你用乘法公式展開，是不是 x^2-4x+2^2，對不對？然後這個只是交換律，他說的對不對？這個交換位置而已，所以這兩個一樣不一樣？這兩個會一樣，所以這兩個也會一樣，對不對？所以它就得到$(2-x)^2$會等於$(x-2)^2$，可以嗎？可以。剛剛第一位同學，他有跟我們講，他的意思是說，這兩個是不是差一個(-)，平方以後負負得正，對不對？意思

就是什麼呢？你可以把你的意思寫給我們看，對，你怎麼推導出來$(2-x)^2$會等於$(x-2)^2$？

78. 學生：我是這樣看，可能跟剛剛有點類似，就變成（$-(x-2)$）^{2}，然後就跟剛剛說的一樣，負負得正，所以它就會跟它一樣。

79. 老師：好，你把最後那個寫出來，好不好？最後等於那個寫出來，好，看得懂嗎？這樣是不是更清楚了，對不對？剛剛同學其實那個概念，都講的清楚，不過你們要像這樣子寫的完整，好不好？寫的完整，就是數學的一個思考的過程，整個過程你要學會把它完整的寫出來，像這樣把它完整的寫出來，好不好？這個就是我們數學證明的部分，因為證明部分就是要完整的流程，剛剛同學講的這個部分，它有說到這兩個塞一個負號，對不對？所以$(2-x)^2$，他給它寫成（$-(x-2)$）^{2}，負負得正嘛，所以變成$(x-2)^2$，這兩個是一樣的，這樣懂嗎？可以。好，這樣的話，我請問你，這一題怎麼因式分解呢？有沒有同學自願？位置夠嗎？

80. 學生：夠。

81. 老師：夠啦。

82. 學生：就這樣，然後就是剛剛老師還有同學所講的，就是這一塊【$(x-2)^2$】，就等於【$(2-x)^2$】，因為有平方，所以就直接把它寫成這樣【$(x-2)^2$】，然後因為這個是它們的公因式，所以把它提出來變成這樣，然後變成 a，再加上 b，就會變成這樣。(見圖十七)

學生的算式： 9.(2) $a(x-2)^2+b(2-x)^2$ $=(x-2)^2(a+b)$
圖十七

83. 老師：有沒有問題，好，你看，如果你這個部分知道它跟它，其實是一樣的話，是不是可以寫成，這邊$(2-x)^2$，不就可以等於$(x-2)^2$嗎？這邊是不是可以寫成$(x-2)^2$？對吧！這個不是共同的部分嗎？要提出來啊！這樣就解決了，對不

對？運用上一節的概念，所以這個題目就可以解決了，懂嗎？可以，好，那我們進入第(3)題挑戰題了。來，第(3)題(P.111)，好，我們看一下，第(3)題 $a(x-2)+b(2-x)^2$，這個怎麼辦？同學思考看看。

【以下 84～98 為老師在台下指導學生的對話】

84. 老師：因為我這樣子，不知道你的問題出在哪裡，你要一步一步來，來，你先告訴我，有沒有公因式？

85. 學生：有啊。

86. 老師：公因式是什麼？

87. 學生：還沒變號。

88. 老師：對，那你要變，好不好？你要變，你先變給我看。

89. 學生：所以這邊一樣是-。

90. 老師：它就會變正的，所以就不用變了，懂嗎？

91. 學生：所以是+。

92. 老師：不對，你要先$a(x-2)$，對不對？$a(x-2)$先做一個變號的動作，對不對？這也可以不用變嘛，它等於它嘛，再來有沒有一樣的？拿出來。

93. 學生：老師，那為什麼 b 不用變？

94. 老師：沒有啊！這裡本來就是 b 啊，所以這個 b 沒有變啊。

95. 學生：不是，為什麼它的負號不用變？

96. 老師：它已經變了兩次了，$(2-x)^2$，它不是有平方嗎？

97. 學生：可是它平方之後，它不會等於 $x-2$ 啊，它平方之後，它是 2^2-4x+x^2。

98. 老師：對啊，我們說$(2-x)^2$，是 2^2-4x+x^2，$(x-2)^2$也是啊，x^2-4x+2^2，所以$(2-x)^2$，跟$(x-2)^2$是一樣的，你為什麼要變？這個平方跟這個平方不是一樣嗎？所以這裡如果變號的話，不就是它的負號就不一樣，聽懂嗎？一次才要變，因為一次

有一個負號，兩次就變兩個負號，兩個負號負負就得正，這樣你懂我意思嗎？所以兩次以後又變回來了，本來加的還是加的，因為又變回來了，聽懂嗎？不對，你想想看，這是兩次喔，你提出來，你只提了一個，還有一次，對，那怎麼辦？寫哪裡？差不多了嗎？你這個寫法要稍微注意一下，它是這三個相乘嗎？你提出這個，對不對？剩下什麼？這兩個要寫在一起啊！你要寫這個加這個乘這個才對啊，懂嗎？好，這個題目，來，有沒有同學要上來嘗試看看的？沒有上來過的好了，來，你好了，你上來看看。

【以下 99 至 110 為教師在台下與另一學生的對話】

99. 老師：你是提出(x-2)，對不對？提出來以後剩下什麼？你這邊變減的話應該是不會兩個都變喔，你這邊是(2-x)變(x-2)，它變它的時候要不要變號？

100. 學生：要。

101. 老師：它變它的時候要不要變號？

102. 學生：應該也要。

103. 老師：對，你這個變了兩次，原來這個變一次是減的，這個又變一次又變成…？

104. 學生：加的。

105. 老師：對，所以你變了兩次，這裡還是加的。你就變成這裡是加的。

106. 學生：就是這邊先減，然後這邊平方先不管它，這邊先提出來之後，就是把它變成兩個，變成兩個之後再出來這樣，所以還是加的。

107. 老師：對，所以這邊本來就是加的，對不對？你說提出(x-2)，那後面怎麼看？我們是這樣，這個式子跟這個式子，這邊就是(ab-ac)，對不對？我們是提出(x-2)，剩下什麼東西？你可以慢慢看。這個看了就是這樣，對不對？提出這個剩下什麼？

108. 學生：剩下這個和 ab 啊！

109. 老師：就寫到這邊，懂嗎？對啊，加的，加的才對。好，有沒有問題？

110. 學生：沒有。

111. 老師：沒有嘛，你們看得懂。好，這邊的這個同學的作法就是(見圖十八)，前面這邊(x-2)，對不對？她沒有動，那後面的部分本來沒有公因式，所以她現在把$(2-x)^2$，一樣，仿造剛剛第(2)題，對不對？把$(2-x)^2$變成$(x-2)^2$，我們剛剛已經說明過了，所以這邊$(2-x)^2$會等於$(x-2)^2$，這裡還是加的，對不對？剛剛有同學對於這個還是有質疑，還是有同學寫成減的，你要注意的就是，其實它是變號變了兩次，好不好？我這邊再說明一下，如果你把它看成是$(2-x)(2-x)$，我們現在不是要把它變成$(x-2)$嗎？如果變成$(x-2)$的話，事實上應該是這個變$(x-2)$是不是要變一次，這個變$(x-2)$是不是也要變一次，所以變了兩次嘛，兩次以後負負就得正，那就變成$(x-2)^2$，所以還是回到原點，本來加的這裡還是加的，因為它變了兩次，這樣懂意思嗎？可以。所以你這三種看法都可以，不過你一定要了解，好不好？一定要了解這個部分，變了兩次，所以負負又變正的，本來加的，變兩次還是加的，不用變號。好，現在他把$(2-x)^2$變成$(x-2)^2$之後，就有公因式了，公因式提出來之後剩下什麼？這個中間，其實你可以這樣看，因為有些同學對於可能提出來之後還剩下什麼，還不是很了解的話，我們可以這樣做，這邊有 $a(x-2)$，這個 $b(x-2)^2$就是 $b(x-2)(x-2)$，對吧？然後提出公因式，提出來之後，$(x-2)$大家都一樣，對不對？提出來以後，剩下什麼？剩下$[a+b(x-2)]$，對不對？剩下的部分把它括起來，因為有小括號了，所以這邊就用中括號，對不對？然後再去掉小括號，這個已經不能夠再分了，對不對？這三個沒有公因式了吧，這三個還有公因式嗎？沒有了，

學生的算式：
9.(3) $a(x-2)+b(2-x)^2$ $=a\cdot(x-2)+b\cdot(2-x)^2$ $=(x-2)[a+b(x-2)]$ $=(x-2)(a+bx-2b)$
圖十八

所以沒有的話，這邊就已經最後結束，這樣就是分解好了，了解嗎？可以。有沒有同學嘗試是前面變號的，有沒有？剛剛在做的同學有沒有？你剛剛做的，有沒有同學是把前面變的，有沒有？沒有。好，那你也可以選擇前面，對吧！因為公因式，這邊是不是(2-*x*)，你可不可以把這個變(2-*x*)，可不可以？可以，也可以選擇，不過好像大部分同學還是選擇用這個。好，我們再來看後面學習單第四頁，這個部分是回家作業，提公因式的部分(見 P.112 學習單 三、)，我們回家作業，回去請你思考一下。我們看一下四項式怎麼做因式分解，例如，我現在要分解的是這個題目，a*x*+ay+b*x*+by，要怎麼分解？從第一堂課，我們不是教你提出公因式嘛，對不對？它有幾項？四項，有沒有共同的因式？觀察一下，有沒有？有沒有四項共同的因式可以提出來的？它(a*x*)有 a，它(ay)有 a，它(b*x*)沒有 a，它(a*x*)有 *x*，它(b*x*)有 *x*，它(ay)沒有 *x* 啊，它(by)沒有 *x*，對不對？所以四項都有的，有沒有？沒有，對不對？沒有的話怎麼辦呢？因為要提公因式，應該是每一項要提出來，對不對？共同點全部拿出來，沒有的話怎麼辦呢？我們先思考一下，我們看一下，我現在要乘開(a+b)(*x*+y)，怎麼乘？也可以利用分配律來乘，我可以這樣乘，你看，我把這整個(*x*+y)當作一項，然後這個(a+b)拆成兩項，是不是可以用分配律乘開？是不是可以寫成 a(*x*+y)，看得懂嗎？再加上 b(*x*+y)看得懂嗎？可以嗎？分配律對不對？這整個當作一項，所以是不是 a 乘以(*x*+y)，b 乘以(*x*+y)，是不是變成這樣【a(*x*+y)+b(*x*+y)】？對不對？然後再一次分配律，這樣叫兩次分配律，可以嘛！再一次分配律就變成什麼了？a*x*+ay，再來+b*x*，再來+by，好，有沒有發現這個是幾項？兩項，對不對？a+b 嘛，是不是兩項？這個，兩項，兩項乘以兩項得到四項，對不對？所以，同樣四項分解出去的話呢？四項分解出去有可能是一項乘四項

，1×4，或者是兩項乘兩項，可以，好，我現在就要請你們看這個【(a+b)(*x*+y)】跟這個【a*x*+ay+b*x*+by】有沒有一樣？你現在要怎麼樣？這個動作我們就要做展開，對不對？乘開來嘛，我們現在反回來，對不對？反回來，你把這四項利用這個動作寫成這樣子，我們叫做因式分解，你怎麼寫回來呢？觀察剛剛這個流程，好不好？請你思考看看，你怎麼把這個寫成上面這樣，怎麼寫回去，讓它可以順利的因式分解？同學思考看看，好不好？這個怎麼利用這個流程寫回去。有沒有同學自願的？你上來看看。

112. 學生：把它拆開來，這裡 a*x*+ay 會有 a，它們的公因式是 a，所以把 a 提出來，然後中間是+，所以 *x*+y。再來 b*x*+by 公因式是 b，提出來，然後剩下 *x*+y，所以就括號。再來它們 a(*x*+y)+b(*x*+y)，(*x*+y)是公因式，所以把(*x*+y)提出來，中間 a+b，所以 a+b 提出來。(見圖十九)

學生的算式： a*x*+ay+b*x*+by =a(*x*+y)+b(*x*+y) =(a+b)(*x*+y)
圖十九

113.老師：好，有沒有問題，看得懂嗎？可以，來。好，所以整個流程你可以看一下，剛剛四項沒有共同的，對不對？這四個大家都有的？沒有嘛，沒有的話，我們看到剛剛那個同學有講到，他說這兩個都有 a，所以我把這兩個提出 a，剩下(*x*+y)；這兩個都有 b，所以把這個 b 提出來，剩下(*x*+y)，變成這個式子了以後，你有沒有熟悉？跟上一節講的有沒有一樣？有嘛，對不對？是不是跟上一節講的就一樣了，這兩個(*x*+y)、(*x*+y)是不是公因式？再提出公因式之後，剩下(a+b)，這樣懂嗎？是不是就是這個流程？現在反過來寫。所以我們可以發現，事實上這個我們叫做分組分解法，因為你把這兩個提出 a，意思就是把這兩個當作一組，然後這兩個提出 b，就把這兩個當作一組，對不對？同一組的可以提出來公因式，同一組的提出公因式之後，這一組跟這一組是不是又有公因式可以再拿出來？對吧！所以重點在這

邊，分組完之後，提出公因式，這兩組之間一定要還有能夠提出來，如果你分好組之後，這個提出來，這個提出來，這兩個沒有公因式的話，那就卡住了，就不能繼續做下去了。所以提出來之後，這個一定還有公因式可以提，提完之後就可以順利的寫成因式相乘，這樣才叫做因式分解，這樣懂嗎？可以啦！好，有沒有同學思考到，除了這樣子分組以外，有沒有其他的方式？剛剛那個同學是說 a 提出來，對不對？那邊是 b，b 提出來嘛，有沒有其他的方式？有沒有人願意上來嘗試的？來，舉手一下？有沒有？那位同學，有沒有？沒有，來，好，那你上來。對，題目也要抄，寫這邊。

114. 學生：先把 ax 跟 bx 合在一起，因為它們兩個裡面都有 x，所以 x 提出來就變成(a+b)，然後這兩個，剩下這兩個同樣都有 y，所以就把 y 提出來變成(a+b)，這兩個都有(a+b)，所以(a+b)提出來，就剩下(x+y)。(見圖二十)

學生的算式：
ax+ay+bx+by =x(a+b)+y(a+b) =(a+b)(x+y)
圖二十

115. 老師：好，有沒有問題？

116. 學生：沒有。

117. 老師：沒有，我們給她鼓掌。所以，其實同學有沒有發現，結果有沒有一樣？有。分組的方式有一樣嗎？

118. 學生：沒有。

119. 老師：沒有，所以分組的方式其實是不唯一的，對不對？對。所以，你可以去嘗試，這時候要嘗試，你要去嘗試看看，你是用什麼方式去分組的，這個同學是把 a、a，這兩個都有 a，所以提出 a，這兩個都有 b 提出 b，這樣就一組，對不對？這個的話是這兩個都有 x，所以她是把 x 提出來，然後剩下(a+b)，對不對？這兩個都有 y，y 提出來剩下(a+b)，結果大家都有(a+b)的公因式，提出來以後順利解決了，對不對？所以你只要去嘗試，就是說你去嘗試

一下，怎麼樣分組其實不是唯一的，重點就是在嘗試的過程當中你要記得，分組提出公因式以後，組跟組之間一定要有公因式可以提，提完之後，最後才能夠順利的分組成括號，括號，也許是三個括號，這樣懂意思嗎？可以，時間的關係，我們回家作業就先把第四頁活動一(P.112)做完，還有呢？第五頁活動一(P.113)的第(3)題，同學回去試試看好不好？今天就上到這邊，有問題的等一下下課留下來問，我們下課。

120. 學生：起立，立正，敬禮，謝謝老師。

121. 老師：好，下課。

參、教學說明

我今天教學的單元是國二的課程，3-2 提出公因式跟分組分解法，這個單元的教材部分，我本身的教學設計是這樣的，原則上來講，提出公因式法，我把它分成兩項式的提出公因式，兩項式的部分的話，我主要是利用分配律的展開跟分解這個概念來上的，也就是說 ab+ac，我把它提出公因式 a，然後變成 a(b+c)，利用這個方式來做分解的動作，這樣的動作就是希望學生可以利用舊的經驗，他已經學過分配律的展開了，透過分配律展開，反過來思考，怎麼樣做因式分解的過程。再來，我就提到三項式的因式分解，再來就是需要變號的題型，我把它加進來，加進來之後，讓同學去思考，沒有公因式，怎麼樣可以把它變成有公因式的形式？那就透過變號的方式，變號當然有一項式的變號，還有平方項，有平方式的變號，平方式的部分的話，就是同學的部分，他也可以透過負負得正這樣的概念，知道平方項變號就變了兩次，等於沒變。再來就是另外分組分解法的部分，分組分解法的部分我設計一個是四項式的分組分解，然後再來是六項式的分組分解，最後有提到的就是 x 的二次三項式的分組分解，就像 x^2+3x+2，這樣子的一個分組分解的方式，這個方式的話，我是透過展開$(x+1)(x+2)$，乘

開之後它會變四項，所以在反過來要去做分組分解這樣動作的時候，他必須把中間的 $3x$ 拆成 $x^2+2x+x+2$，再透過分組分解的方式來做。這是我原本主要教學活動設計的一個過程，不過今天的教學的部分，我花了比較多的時間在做第一個動作，就是提出公因式的方式，所以今天兩節課我只教到了分組分解的四項式的分組分解法。今天整堂課的部分，學生的反應，我是覺得滿超乎我預期之外的，因為這個班級我是從國二開始帶，國一的時候是另外一個老師帶的；國一時的教學方法，大部分就是老師上課，學生就是在台下，可能就是聽課，然後做練習，這樣的一個方式。我今年帶了以後，給他們做了一些不同的嘗試，包括我一開始的嘗試就是，講義的部分讓他們上台講解給同學聽，我在教畢氏定理這個單元的時候，我讓他們分組，回去上網做報告，然後做 power point 上台，每一組要上台跟同學做報告，透過這個方式之後我發現，今年一開始，他們在上台的時候，事實上，第一，他們寫的不是很完整，第二，他們可能也不太敢講。不過從 9 月份到現在，我覺得他們慢慢有在進步當中。今天的反應，我覺得滿意外的，就是同學們上台講的非常順，他們寫的也算是非常完整，這個部分學生的反應，我是覺得他們的表現真的很好。相對於我自己的部分，我是第一次拍攝這樣的教學錄影帶，所以我自己在第一節課的時候，其實比學生還要緊張，那時候我的想法，事實上有點趕，我自己現在回想也覺得說，有一些部分，那個動作也是滿趕的，趕著把它講完；另外一方面就是，我在這之前有想過，學生可能卡住了之後，我要怎麼引導學生去把那個題目做出來，但是我現在思考的就是說，我其實沒有想到的是，學生如果很順利的做出來，而且他跳步驟的時候，我怎麼去引導學生把整個步驟可以詳細的再跟大家去做分享，或是大家可以互相的討論，這個方面我倒是沒有想到，所以當學生那個變號的部分，有一個學生一上來，他直接就把 $(2-x)$ 寫成了 $-(x-2)$，那時候我就不太知道後續我應該要怎麼去讓他把那個部分跟同學講，這個部分就變成我自己上台做了一個教學，我現在想一想，其實這個部分也可以再找另外的學生上來補充，那時

候我其實是有點趕，另外也沒有想到，其實應該可以讓同學在這個部分再加強，然後再有同學上來做分享，更多的激盪和更多的討論，也許同學的印象會更深刻一點。然後，另外一部分就是，我建議要使用這一套教材的老師，在這一方面，我們大致上可能就學生方面有的問題，可以稍微去想：他們會的話，我們要怎麼去帶他們？他們不會的話，我們要怎麼去引導他們？可能這兩方面都要先去思考一下。題目的墊步的話，我覺得以目前這一套教材，我後來問他們的反應，他們都覺得一步一步的由淺到深，他們覺得是 ok 的。有這樣的機會可以拍攝教學錄影帶，對我來講，成長滿多的，因為我今年在學校是第五年任教，我其實有兩年行政的一個經歷，所以我真正教學投入的，就是教比較多班級的，其實是只有三年不到的時間，做行政的話，大概就是教一個班左右，所以我很感謝有這樣的機會，也感謝這些教授、這些老師，給我那麼多指導，這個教案從一開始到現在的呈現，它中間其實經過了很多很多的修正，也經過很多很多的討論，感謝給我指導的老師跟教授，謝謝。

肆、教學後的省思

以前在教「因式分解」這個單元時，多採用讓學生記憶式地將因式分解分成許多不同的方法教學，告訴學生因式分解有(1)提出公因式法(2)分組分解法(3)乘開後再分組法(4)變號法(5)利用乘法公式分組法(6)十字交乘法，甚至加上(7)先提公因式再分組法(8)先分組再十字交乘法等各種方法讓學生記憶，但學生無法瞭解這些方法之間的關係，也無法真正理解如何作因式分解，程度好的學生只是將方法記憶下來，記憶力較差的學生根本沒有機會學習。

經過這次教學設計，與教授及老師們討論後，從學生的先備知識--分配律反向思考，並設計學習單讓學生自己察覺如何分解，這樣的學習方式以學生為主體，讓學生

經由學過的知識來理解因式分解的意義，比起記憶背誦式的學習確實有效且有趣多了，而且利用兩次分配律概念來說明分組分解法，以同一概念就可以讓學生學習分組分解，學生容易接受且知道各種方法之間的相互關係，使因式分解法能以最簡單的分配律概念學習，不需記憶一大堆不同方法而顯得困難。

透過典範例的題型教學，讓學生由淺入深的學習，是我這次收穫最多，感想最深刻的一點，以往教學時總害怕自己教的題型不夠多，學生無法學會，於是不斷的給學生很多題目，也造成上課時間不夠，一直趕課的情形。但透過選擇典範例的題型說明教學重點，讓學生有足夠時間思考，進而類化到其他相同題型的題目上，才能使學生真正學會，所以，老師的任務其實不是教一堆題目給學生，而是將題型分類後，選擇最佳的典範例讓學生思考學習。

學生在課堂上有充足的時間思考、討論後，與老師的對話才能讓老師發現學生的問題，進而解答問題，澄清迷思概念，老師在課堂上只需引導學生進一步思考、理解問題，並能讓學生有完整的思維，因此，讓我瞭解到教學並非老師教、學生學，以往以老師為教學主體的方式，我也嘗試改變為以學生為主體的方式。

在本單元中原本設計以 789×1001=？及 789×969+789×31=？來引導學生應用分配律，產生需求的概念，後來經過教授分析，上述兩題彼此之間沒有關係，而且也看不出需求，後來改成日常生活應用問題，賣場賣出護眼檯燈及省電燈泡問題，讓學生觀察總共賣出的錢 47×899+4747 中，47×899 不容易計算，透過分配律將 4747 寫成 47×101 再利用分配律計算，如此就產生需求，而且容易讓學生理解，因此在題目設計時，選擇適當的題目可以讓學生更容易思考學習。

其次，在本單元「變號法」的學習中，是學生最不容易理解學習的部分，這次的教學設計有些要改進的部分，在提出問題－因式分解 $a(x-2)+b(2-x)=$？後，先問同學「有沒有公因式？」，在學生回答『沒有』後，應讓同學「觀察$(x-2)$和$(2-x)$」有什麼關係？有沒有辦法以等號連結兩式說明關係？再引導變號法的說明與討論，如此在教學上會比較順暢，但在這堂課中，一開始就先叫一位同學上台寫，雖然這位同學寫對了，但對於變號的過程及原因講解不清，老師臨時要拉回主題講解變號法，反而變的不順暢了。

在這兩堂課的教學設計中，原本要在第一堂課教兩項式提出公因式法和三項式提出公因式法及變號法，第二堂課教四項式分組分解法、六項式分組分解法和三項式拆成四項式分組分解法，但第一節課提出公因式法用了相當多時間講解，並請學生上台試作討論，因此沒有足夠時間講解、討論變號法，第二節只能將變號法和四項式分組分解法教授完，其餘內容就要再一節課才能教完，因此這份學習單的設計應改為三節課的教學，在教學時間上才不會太趕，最後，留給學生思考與討論的時間會較充足。

總結，這次 3-2 單元從教案、學習單設計到會議中提出與教授、老師討論與修正，再到課堂上實際教學，教學後檢討、反思，讓我深刻體會到整個教學設計應以學生為主體，才能有效地達成教學成效。

平方根

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級下學期

二、教 學 者：台北縣中山國中 陳春男 老師

三、教學目標：

【第一節】

1. 能藉由活動、操作理解平方根的意義及概念，並認識各種不同平方根式的表示法。

【第二節】

2. 藉由圖形操作，了解同類根式的意義，並熟練同類根式的四則運算。

四、活動目標：

活動一：利用邊長與面積的關係，引入根式的概念。

活動二：能理解平方根的意義及表示法，並能說出平方根的近似值及解簡單平方根的計算。

活動三：能利用基本單位的概念，定義根式的加減法運算並能正確表徵根式運算後的結果。

活動四：能利用乘法的交換律及結合律，定義根式的乘除運算，並能正確表達根式運算後的結果。

活動五：透過操作與觀察，能將根式化簡成為最簡根式，並了解其意義。

活動六：能根據已給的條件與先備知識，完成同類根式的加減運算。

五、教學概要說明：

1. 學生們在國小已學過面積與邊長的關係，在國中七、八年級已學過「正負數的

四則運算」的觀念，在此階段除複習面積與邊長的關係之外，希望透過活動、操作理解平方根意義及概念，並藉由活動及圖形的操作，理解同類根式的意義和同類根式的四則運算及運用。

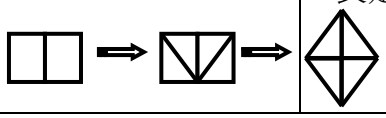
2. 第一節課能藉由活動，透過操作來理解平方根的意義及概念，並認識各種不同平方根式的表示法。
3. 第二節課能藉由活動，透過操作來了解同類根式的意義，在處理同類方根的加減運算時，著重於概念的理解與實際的認知，而不是只有運算方式的記憶。最後，在處理根式化簡的問題時，能以圖像的方式瞭解根式化簡的意義及運用。

六、教學活動設計：

【第一節】：能藉由活動，透過操作來理解平方根的意義及概念，並認識各種不同平方根式的表示法。

活動一：利用邊長與面積的關係，引入根式的概念。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 透過正方形面積與邊長的關係，了解平方根的意義	1.只要知道正方形的邊長，就可以知道一個正方形的面積嗎？請舉出一些例子。	• 同學可能是先舉出簡單的例子。	• 能舉例說明邊長與面積的關係。
	2.大家舉出那麼多的例子，能不能說出這些例子的特徵？如何用數學的語言說出邊長與面積的關係呢？	• 學生可能的回答如下： (1)面積為 1 時，邊長為 1。 (2)面積是 x^2 時，邊長是 $\lvert x \rvert$ 。	• 能說出例子的特徵。 • 能列出邊長為 x 時，面積為 x^2 的一般式。
	3.反過來說，如果知道一個正方形的面		• 能知道正方形面積與邊長的對應關

	積，可不可以求出它的邊長？ ・是不是一個面積一定可以對應出一個邊長？怎麼列出式子？ ・如果面積是 1，邊長是多少？如果面積是 4，邊長是多少？如果面積是 x^2 時，邊長是多少？		係。
・老師透過圖形的操作布題，讓學生解題，並觀察、操作及發表來理解平方根的近似值	4.當正方形的面積是 2 的時候，邊長是多少？可以算的出來嗎？	・學生可能是先亂猜或是直接說出 $\sqrt{2}$。教師可以追問 $\sqrt{2}$ 是什麼意思？代表多少？近似值是多少？等相關問題，以引導出無理數的概念及表示法。並在適當的時機引入十分逼近法的概念，但不一定要有十分逼近法的名詞。	
	5.你相信有面積為 2 的正方形嗎？我們嘗試來拼拼看。 	・教師可用事先準備好的圖形讓學生理解並猜測這個圖形的邊長是多少。並說明認為圖形的邊長是多少的理由。 	・能拼出面積為 2 的正方形，並能說出此正方形邊長的表示法及近似值。

		・教師也可利用電腦及 power point 展示圖形並讓學生猜測邊長為多少，透過計算機檢驗答案的正確性，導出十分逼近法的概念以及說出$\sqrt{2}$的近似值。	

活動二：能理解平方根的意義及表示法，並能說出平方根的近似值及解簡單平方根的計算。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・老師布 x^2=a 的題型，學生回答並歸納出一般性 x^2=a，引導出 $x=\pm\sqrt{a}$ 的表示法	1.將活動一的結論加以整理，寫出 x^2=2 的式子，引導出 $x=\pm\sqrt{2}$ 的解及建立平方根的觀念並能說出其近似值。	・利用幾何與代數的轉換，理解平方根的意義。並能以正確表示法表達出一個正數的兩個平方根，並知道 0 的平方根是 0，負數沒有平方根。	・能理解 x^2=2 的解為 $x=\pm\sqrt{2}$ 並知道一正數有兩個平方根。
	2.當某數 x 的平方等於 3 時，x 是多少？怎麼表示呢？它的近似值是多少？	・教師引導學生解這個問題。	・能說出 x 的解為 $\pm\sqrt{3}$，並能說出正確的近似值。
	3.當某數 x 的平方等於 4 的時候，x 的解為多少？是不是會有兩種答案？表示	・教師引導學生了解當 x 的平方為完全平方數時，x 有兩種表示法及其表示的	・能說出 x 的解為 $x=\pm\sqrt{4}=\pm2$ 等兩種不同表示法。

	什麼意思呢？	是一個實際值。	
	4.當某數 x 的平方等於 35 的時候，x 的解為多少？它的近似值是多少？		・能正確列出 35 平方根的表示法為 $\pm\sqrt{35}$，並知道一個數有不同的表示法。$x=\pm\sqrt{35}\fallingdotseq\pm5.916$
	5.接下來，要看看同學們是否真的懂平方根的意義。如：$\sqrt{81}$ 的平方根是多少？等問題，以澄清學生的迷思概念。	・這裡需要多布一些題，讓學生寫出平方根式的一般表示法，並了解其數值的意義及說出其近似值。	・能寫出一般根式的表示法，並說出其正確的近似值。
	6.完成學習單(P.151)上的問題。		・能完成學習單的例題。

活動三：能利用基本單位的概念，定義根式的加減法運算，並能正確表徵根式運算後的結果。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・理解同類根式的加減運算	1.教師引導學生利用代數的基本概念來定義同類根式的加法運算、減法運算，並將結果以正確方式表示出來。	・學生可能會以口語化的方式表達，如：兩個 $\sqrt{2}$，教師可藉機引導作答。	・能以代數的觀念完成同類根式的運算。

	・如：老師可提問：『如何將 $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ 表示出來？』或是『如何將 $3\sqrt{5}-\sqrt{5}$ 』表示出來？ 2.歸納出問題的解法並與代數的運算結合。 3.完成學習單(P.152)上的問題。	・程度較好的學生，能以同類項的觀念來作答。 ・有些學生可能會利用單位量的觀念來完成學習單的問題，老師可以引導、歸納出一般性的根式加減法運算。	

【第二節】：藉由圖形操作，了解同類根式的意義，並熟練同類根式的四則運算。

活動四：能利用乘法的交換律及結合律，定義根式的乘除運算，並能正確表達根式運算後的結果。

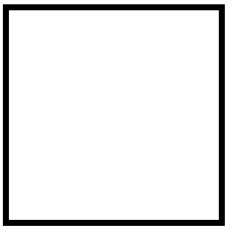
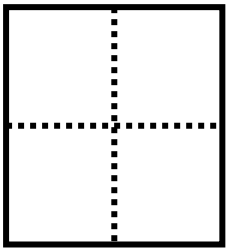
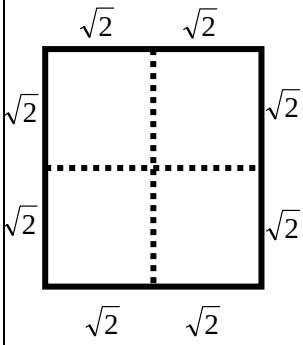
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・理解根式的乘除運算	1.定義根式的乘除運算。例如：一個長方形的長是 $\sqrt{3}$ ，寬是 $\sqrt{2}$ ，那麼這個長方形的面積是多少？	・學生可能會回答：面積為『長乘以寬』等於『 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 』，這時候老師應該要適時予以鼓勵，並繼續追問：$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 可否表示成一個數？	・學生能嘗試回答。

	2.如果 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 可以表示成一個數，那麼 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 應該表示成多少？為什麼？	・學生可能會說出正確的答案 $\sqrt{6}$，但是不知道真正的原因，透過教師引導與追問，讓學生能理解乘法運算的規律性。	
・透過操作與規律的觀察，回答根式乘除的運算結果	3.若是一般的根式乘法運算，能不能找出它的規律性？ ・透過乘法的交換律與結合律，說明根式乘法運算的一般通則。也就是 $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2$ $=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})(\sqrt{a}\times\sqrt{b})$ $=(\sqrt{a}\times\sqrt{a})(\sqrt{b}\times\sqrt{b})$ $=a\times b$；又 $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=a\times b$ ；因此推導出 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$	・一般運算規則的推導，不一定由老師來說明呈現；也可以經由互動或者是學生自己的發現來呈現。	・能說出根式乘除運算的一般通則，並能正確表示。
	4.反過來說，如果知道一個長方形的面積是 $\sqrt{15}$，長是 $\sqrt{5}$，寬應該是多少？怎麼算？ ・透過乘法的交換律與結合律，說明根式除法運算的一般	・學生可能會說出『$\sqrt{15}\div\sqrt{5}$』或是正確的答案 $\sqrt{3}$，但是不知道真正的原因，透過教師引導與追問，讓學生能理解除法運算的規律性。	

	通則。也就是 $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2=(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})\times(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})$ $=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{a}{b}$；而 $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2=\frac{a}{b}$；因此推得 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 5.歸納結論： (1) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ (2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$		・能將上述兩種運算規則加以歸納，作成結論。

活動五：透過操作與觀察，能將根式化簡成為最簡根式，並了解其意義。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・理解最簡根式的運算	1.在樣式與規律的觀察中，找出構成圖形的最小單位，並看出邊長的不同表示方法與彼此之間的關係。 (如：能知道為什麼 $\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{2}$ $=2\sqrt{2}$)	・學生可能以乘法的運算來說出答案，這邊的教學重點在於讓學生相信，推導出的規則是正確的，而且這樣的情形確實存在。	・經由老師說明之後，學生能自行解題。
	2.面積是 8 的正方形，邊長是多少？	・老師以最小單位的方法，引導學生看	・能透過圖形的分割，找出圖形的樣

		出邊長的表示法就是根式的運算方法。	式與規律，理解 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 。
	3.有沒有其他的表示法？當變成這樣的時候，每一小塊的面積是多少？邊長怎麼表示？ 	・經由圖形的呈現，讓學生了解如何將一個根式化成最簡根式。	・能透過圖形的表示，將數與量跟代數、圖形連結，理解 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 。
	4.這樣的邊長表示法，跟剛剛的第一個表示方式有什麼關係？等式要怎麼列出？ 		・能發現根式化簡的一般性規則。也就是說：當 a，b＞0 時，$\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$

活動六：能根據已給的條件與先備知識，完成同類根式的加減運算。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・理解同類根式的加減運算	1. $\sqrt{2}+\sqrt{8}=$？會不會等於 $\sqrt{10}$ ？ ・$\sqrt{8}$ 利用剛剛的觀念可以寫成 $2\sqrt{2}$ ，像這樣 $2\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{2}$ ，我們就定義說它們是同類根。	・希望學生以各種不同的想法說出答案，對於根式的理解將會有更進一步的思考。	・能理解同類根式的意義。 ・能寫出正確的答案。
	2.請舉出其他的同類根式。 3. $\sqrt{3}+\sqrt{27}=$？ 4.完成學習單中的問題。	・引導的過程可以在圖形與數的運算來回操作，以求學生能真正理解其意義並會運算求出正確答案。	・能欣賞各組的答案並提出看法。

附錄：學習單

平方根學習單

北縣中山國中　　八年_____班　　座號：_____　　姓名：_____

一、正方形邊長與面積之關係：

1.每邊長是 2 公分的正方形，它的面積是_____平方公分。
每邊長是 3 公分的正方形，它的面積是_____平方公分。
每邊長是 x 公分的正方形，它的面積是_____平方公分。

2.面積為 1 平方公分的正方形，它的邊長是_____公分。
$1^2=1$，稱 1 的平方是 1，1 是 1 的平方根。
面積為 4 平方公分的正方形，它的邊長是_____公分。
$2^2=4$，稱 2 的平方是 4，2 是 4 的平方根。
面積為 16 平方公分的正方形，它的邊長是_____公分。
4^2，稱 4 的平方是 16，4 是 16 的平方根。還有沒有其他數也是 16 的平方根？
你認為應該是多少？_____。

3.完成下列問題：
(1)求 36 的平方根。我認為答案是：_____。理由：_____。
(2)求 169 的平方根。我認為答案是：_____。理由：_____。

二、『有沒有面積是 2 的正方形？』

1.將同學們操作後的結果畫出來：

2.如果此正方形的邊長為 x，面積為 2，怎麼列出等式？_____。
此時，我們將 x 以 $\sqrt{2}$ 表示。$\sqrt{2}$ 的近似值約為_____。(取到小數第三位)

3.表示法：
如果 b 的平方等於 a，_____=_____，稱_____是_____的平方根。
如果 b 是 a 的平方根，則_____。
所以一個正數會有_____個平方根，兩根互為_____。
0 的平方根是_____。理由：_____。
負數：_____。理由：_____。

4.用根號『$\sqrt{\ }$』表示 9 的平方根，可表示成$\sqrt{9}$及$-\sqrt{9}$，其中$\sqrt{9}=$___，$-\sqrt{9}=$___

5.求$\sqrt{81}$的平方根。_____。

6.若$(2x-1)$的平方根是±4，則 $x=$_____。

三、根號的加減運算：

1.$3x+2x=$_____；當以$\sqrt{2}$為單位長時，$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=$_____。

2.$5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=$_____；$4\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{3}+3\sqrt{5}=$_____。

四、根號的乘除運算

1.長是$\sqrt{3}$，寬是$\sqrt{2}$的長方形面積怎麼表示？_____。你能說出理由嗎？

反過來說，如果知道一個長方形的面積是$\sqrt{15}$，長是$\sqrt{5}$，寬應該是多少？怎麼算？

2.透過乘法的交換律與結合律，說明根式乘法運算的一般通則。

也就是$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})=(\sqrt{a}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{b}\times\sqrt{b})=a\times b$

又$(\sqrt{a\times b})^2=a\times b$；因此推導出$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

3.透過乘法的交換律與結合律，說明根式除法運算的一般通則。

也就是$(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2=(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})\times(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{a}{b}$；而$(\sqrt{\frac{a}{b}})^2=\frac{a}{b}$；因此推得$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

五、同類根式的運算

根據下列圖示的操作，寫出運算的結果：

1.面積是 8 的正方形，邊長是多少？有沒有其他表示法？

2.當變成圖 2 的時候，每一小塊的面積是多少？邊長怎麼表示？

3.這樣的邊長表示法，跟剛剛的第一個表示方式有什麼關係？等式要怎麼列出？

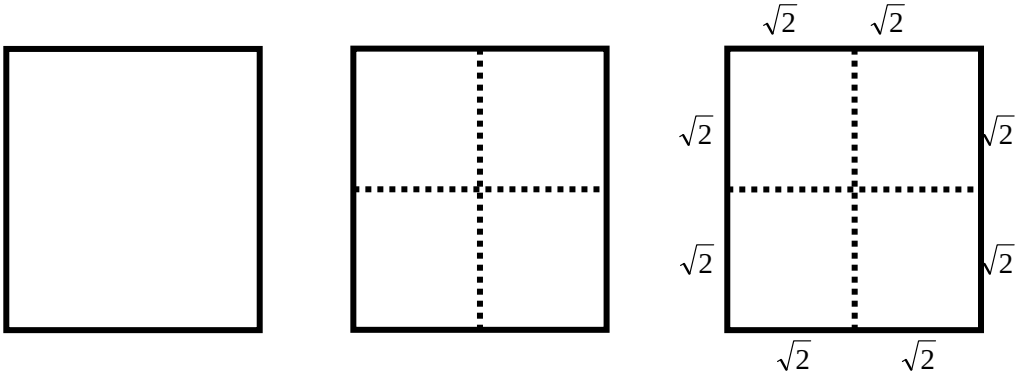


圖 1　　圖 2　　圖 3

4.寫出你的結論：

5.將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{48}=$　　(2) $\sqrt{50}=$　　(3) $\sqrt{192}=$

(4) $\sqrt{4\frac{1}{4}}=$　　(5) $\sqrt{720}=$　　(6) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=$

六、根式的四則運算

化簡下列各式，並將過程及結果寫出來：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{27}=$

(2) $\sqrt{18}\times\sqrt{12}=$

(3) $\sqrt{\frac{2}{5}}\div\sqrt{\frac{8}{125}}=$

(4) $(\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{4})^2=$

(5) $13\sqrt{2}-\sqrt{8}=$

(6) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}\div\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}}=$

(7) $7\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6\sqrt{2}+8\sqrt{2}=$

(8) $6\sqrt{6}-3\sqrt{5}-4\sqrt{6}+8\sqrt{5}=$

(9) $\sqrt{12}-2\sqrt{9}+\sqrt{27}-\sqrt{81}=$

(10) $\sqrt{65^2-25^2}=$

貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：各位同學，今天我們要上的單元，就叫做『平方根』，平方根從以往到現在的學習過程來講，它是新的東西，跟我們舊的、所學過的，到底有沒有相關？有。今天我所引入的概念非常簡單，你在國小的時候一定都學過，一開始的講法就是，正方形的邊長跟面積之間的關係，再簡單不過了。我舉個例子來講好了，你可以看學習單(P.151)的第一大題「正方形邊長與面積之關係」，沒有比這個更簡單了，你可以看一看，正方形邊長與面積的關係，我們從這樣的概念出發，記不記得正方形的面積怎麼算？

2. 學生：邊長乘以邊長。

3. 老師：有沒有人不知道？這個夠簡單了吧！所以你們看看學習單的第一個問題(見圖一)，我就這樣問你們了，第 1 題，如果邊長是兩公分的正方形，它的面積是多少？

平方根學習單
一、正方形邊長與面積之關係： 1.每邊長是 2 公分的正方形，它的面積是_____平方公分。 每邊長是 3 公分的正方形，它的面積是_____平方公分。 每邊長是 x 公分的正方形，它的面積是_____平方公分。
圖一

4. 學生：4。

5. 老師：所以回到同一個問題，想想看，今天給一個邊長，假設它的邊長是 2，它對應過來的面積要叫做多少？2×2=4，這個有沒有問題？同樣道理，比如說邊長 3，面積是 3×3=9，在座有沒有人不了解的？志浩，這個會吧？會哦！你不要以為這個很簡單，我們慢慢會把數字變大。比如說，今天邊長是 7，它的面積要叫做多少？7×7=49。如果今天用符號來表示，因為我們是國二

了，顯示我們的程度要比國小的程度微稍好一點點，不能直接在數字上面跑。如果今天邊長是 a，面積怎麼辦？是不是要寫成 a×a，就叫做 a 的 2 次方，你看，有關於「指數律」的概念就進來了。這樣第一個有沒有問題？所以你會發現：有邊長，我就一定可以算出面積，這是第一件事情；第二，我們就會自然而然地想到，有沒有可能是反過來？你可以把學習單的前面三個問題完成。第 1 個，邊長 2，面積是多少？4；再來，第 2 個，邊長 3，面積就叫做 9；第 3 個，邊長 x，面積就叫做 x 的平方。這個有沒有問題？好，我們就開始要定義第二部分了。第二部分就是說，如果我先給正方形面積，你可不可以求出它的邊長？反過來思考。比如說，正方形面積與邊長之間的關係，我們先給一個面積，你可不可以求出它的邊長是什麼？來，第一個想法是這樣，如果正方形的面積是 1，這個最簡單了，面積 1，它的邊長要叫多少？(見圖二)

一、正方形邊長與面積之關係： 2.面積為 1 平方公分的正方形，它的邊長是_____公分。 1^2=1，稱 1 的平方是 1，1 是 1 的平方根。 面積為 4 平方公分的正方形，它的邊長是_____公分。 2^2=4，稱 2 的平方是 4，2 是 4 的平方根。 面積為 16 平方公分的正方形，它的邊長是_____公分。 4^2，稱 4 的平方是 16，4 是 16 的平方根。還有沒有其他數也是 16 的平方根？ 你認為應該是多少？_____。
圖二

6. 學生：1。

7. 老師：1，為什麼？1×1=1，所以你看，面積 1，邊長就叫做 1，我們就這樣寫「1」，面積是 1，對不對？1 是不是就等於 1×1？那 1×1 叫做什麼？「1 的平方」！我們怎麼稱呼？稱呼有兩個觀點，第二個觀點我們等一下再說。反過來思考，如果正方形面積叫做 4，邊長叫多少？邊長是 2，你怎麼知道？因為，

我們可以這樣看：2 的平方等於 4。這裡就有兩個注意的焦點，我們必須要把我們要感受到的東西做一個澄清：第一，你可能談的是面積，這是第一個對象，而第二個對象，我們可能談的是有關於邊長，所以這裡就會有一些稱呼了，我們必須慢慢地把我們要稱呼的「平方根」名詞帶進來。像這樣我們怎麼說它呢？說法是這樣子的，你會了解，就中文的講法，你可以這樣看，稱「4 是 2 的平方」，這個有沒有問題？我們現在稱 4 是 2 的平方，那回到一個問題，我怎麼稱呼 2？這樣了解意思嗎？你就會牽扯到有一個是主角，一個是配角的部分，就好像我們講英文一樣，一個主詞、一個是受詞，可是兩個之間其實是有一些關係，有一些是主動，有一些是被動，相對的，你就必須要做一些名詞上的定義。所以今天我們稱呼「4 是 2 的平方」，那我怎麼稱呼 2？我就稱「2 是 4 的平方根」，這樣平方根的名詞就出來了，有沒有問題？了解哦！可以接受嗎？所以你看第一個有關於平方根的概念，其實它一定跟平方有關係，這樣有沒有問題？

8. 學生：沒有。
9. 老師：第一個，你了解最基本的平方根，大概是從這個觀點開始，從邊長跟面積進來。同樣的道理，我現在稱呼說，A 的面積如果是 16，它的邊長是多少？
10. 學生：4。
11. 老師：邊長叫做 4，面積為 16 的正方形，它的邊長為 4，怎麼去寫呢？我們會這樣表示，叫做 $4^2=16$，那我怎麼稱呼 4？
12. 學生：4 是 16 的平方根。
13. 老師：漂亮！就是這樣，這樣有沒有問題？我們講 16，會說「16 叫做 4 的平方」，那我怎麼去稱呼 4？我們就稱「4 是 16 的平方根」，好，到這裡有沒有問題？
14. 學生：沒有。

15. 老師：確定！好，如果沒有問題，我們就慢慢去思考一些狀況，假設，我今天面積是 36，邊長叫多少？
16. 學生：6。
17. 老師：6，怎麼稱呼 6？「6 是 36 的平方根」，到這裡有沒有問題？以上我們所介紹的其實都在生活中，因為你談到的是面積跟邊長的關係，它必須有一個條件的限制，所以前面最大條件的限制，在於這些邊長一定都是正的。可是如果今天從代數式的概念來考慮的話，比如說，邊長是 a，面積變成 a^2。回到一個問題，如果直接從數的概念去處理，我假設某一個數叫做 x，且 $x^2=16$，你認為 x 會是多少？
18. 學生：4。
19. 老師：4，就沒有了嗎？
20. 學生：-4。
21. 老師：來，哪一個剛剛講有(-4)的？齡文，你為什麼覺得(-4)可以？
22. 齡文：因為負負得正。
23. 老師：因為負負得正，能不能再講得仔細一點，就是說因為(-4)×(-4)等於多少？
24. 學生：16。
25. 老師：16，是不是負負得正的意思？所以-4 也是 16 的一個平方根。你就會慢慢發現一件事情，當一個數平方之後等於一個正數的話，它會有幾個平方根？兩個，一個是正的，一個是負的，這兩個之間有沒有關係？什麼關係？比如說 4 跟-4 有什麼關係？
26. 于寧：互為相反數。
27. 老師：你看，于寧就講對了，4 跟-4 互為相反數的關係，兩個相反數相加會等於多少？

28. 學生：0。

29. 老師：0，如果後面要發展關於根號運算等比較複雜的問題，它就會談到一些運算的規律性，會講一些比較困難的內容。所以我們可以看看，完成下列的問題，你就可以把它寫一寫(見圖二)。第一個，面積是 1 的正方形，它的邊長應該是 1，面積為 4 的正方形，邊長就是 2，可以喔？4 的平方等於 16，稱 4 的平方是 16，4 是 16 的平方根，這樣沒有問題？16 還有另外一個平方根應該是多少？-4 嘛！你會發現我剛剛講的面積是很怪的，為什麼？你剛剛的邊長可以一個、一個對過來，假設邊長是 1，面積就是 1；邊長 2，面積就叫做 4；邊長 3，面積就叫做 9，你會發現為什麼叫做很怪，你今天長度是 1、2、3、4、5、6、7，一個一個連續性的往下對應，對不對？可是當你看它的面積直接從 1 到 4，4 到 9，9 到 16，我們自然而然就會問到一個問題：「有沒有可能面積是 2 的正方形？」各位了解我講的意思嗎？好，面積是 2 的正方形，各位可以用手中的資料，我剛剛給每一組，應該就是四張，四張都是一個單位的正方形，換句話說，你們可能要思考看看，你有沒有辦法拼出來，確定拼出來的是面積為兩個平方單位的正方形？每一位同學，或每一組裡面至少有四張，如果把一個正方形叫做一個平方單位，則兩個正方形叫做兩個平方單位，你想想看，這兩個拼起來其實是一個什麼形？長方形。因為它的長是 1，寬是 2，或者是長是 2，寬是 1，你拼出來的面積是 2，沒有錯，可是這是什麼形？這是長方形，你怎麼讓它變成正方形？來，各組討論一下，我的提示是，你考慮看看我給各位的輔助線，一定有它的功能，這個如果想得出來，你就會發現原來我要這樣定義，是有我的目的在那裡。

(學生練習，教師巡視)

30. 老師：換句話說，來，我舉個例子來看，這樣是不是叫做一個單位？來，綠色的，對，可是你要量量看，能不能量出邊長，為什麼你確定這樣是正方形？這組很快，已經拼出來了，待會兒有空可以上來做一點操作。對啊！你怎麼確定它是正方形？要講理由，正方形有哪些特徵？對，你只有四個邊相等，它可能是菱形，你要跟他說為什麼會這樣？本來是這樣，本來是一個正方形，換句話說，四個邊都一樣長，這條就是它的邊長，這兩個，對，45 度，這樣拼過來，這裡是 45 度，這裡是 45 度，這裡就是多少？再來第二個是，這個跟這個會不會一樣，所以它變成什麼？正方形！所以這個是 ok 的，你們這一組，也拼出來了，真的！有沒有人告訴我，你確定你拼的就是正方形？有沒有辦法說明，為什麼它是正方形？邊長一樣，然後呢？四個邊長一樣，可能是菱形。對，直角在哪裡？你確定這兩個角是直角，有沒有辦法去解釋？我舉個例子說，你本來說這個是，對，來，繼續，所以這個是 45 度，這個也是 45 度，現在如果照你的方式，把它拼出來的話，你去考慮這邊 45 度，這邊也 45 度，加起來多少？90 度，然後，對角線在這裡，這是大家本來「公家」的對角線，等一下還會有更困難，我要定義它的運算，所以翰霖，帥哥，待會就有你表現的空間了。真的，你現在故意把它拼成很奇怪的長相，這個是有關於商高定理，來，有沒有人拼得出來正方形？來，折給我看，你怎麼確定它是正方形？試試看，每個邊一樣就可以叫正方形，這樣講，對不對？90 度在哪裡？你怎麼知道這兩個加起來是 90？有量過，你怎麼知道？你從原來的圖，原來兩個是這樣，這樣拼成一個正方形，耘平，你注意聽，本來這是個正方形，對不對？它們的四個邊有沒有一樣長？有，四個角也一樣，對角線一切下去，這個角要多少？

31. 學生：45 度。

32. 老師：45 度。這個？

33. 學生：45 度。

34. 老師：所以當你把它拼成這樣，如果你拼出來了，你就思考，這邊是 45 度，這邊也是 45 度，所以這個加起來多少？

35. 學生：90 度。

36. 老師：有沒有四個角都 90 度？那四個邊，你怎麼知道都相等？你就思考看看，剛剛那個邊不是從這裡撕的嗎？所以從這裡剪下去，這個邊跟這個邊要不要一樣長？

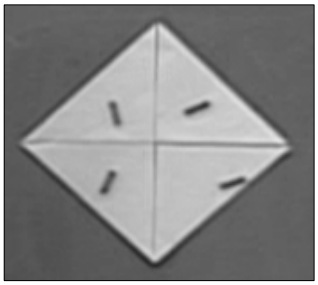
37. 學生：要。

38. 老師：要。這兩個也要，同樣道理，你這個也是，從這裡剪，這兩個一樣，換句話說，這個確定是一個正方形。為什麼？因為第一，它四個邊都一樣；第二，四個角一樣。第二個問題問它的面積是多少？我剛剛不是說以這個單位來講，它的面積是多少？1！那現在有幾塊，兩塊！兩塊，所以面積為 2 的長方形，這是 2，這樣變正方形，這樣有沒有問題？討論看看。來，有沒有人願意上來講解你是怎麼拼出來的，然後你確定兩件事，你要跟大家說明，怎麼相信你拼出來的：第一個，確定是正方形，第二個，怎麼告訴人家說你拼出來的面積是2？因為如果存在一個面積為 2 的正方形的話，我的邊長就會想辦法把它定義出來，這樣了解意思嗎？有沒有人願意上來？德鄰願意是不是？要不要試試看？拿著你的道具上來拼嘛，我們這邊有磁鐵可以貼上去，沒問題，感謝彥儀提供我們這些，這個叫什麼？

39. 學生：磁鐵。

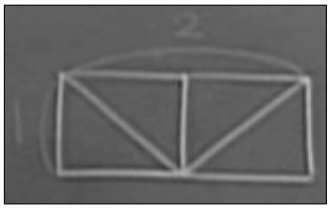
40. 老師：磁鐵，把你拼的結果，用這個把它貼在這邊，然後很大聲的跟大家做個說明。需不需要幫忙？好，來，看著大家。注意聽聽看她講的有沒有道理。

41. 德鄰：它是正方形的原因，(圖三)是因為它四個角都是直角，然後邊長都是相等的，所以它是正方形。然後我怎麼確定它面積是 2，因為原本這個長方形，然後 2×1 是 2，我只是把它拆開而已，把它這個加對角線，然後剪開拼成這個正方形，所以這個面積一定是 2。

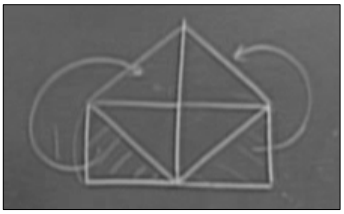


圖三

42. 老師：這樣聽得懂嗎？聽得懂的舉手，好，放下，謝謝，掌聲鼓勵一下。我要炒熱一點氣氛嘛，你可以先把圖形留著嗎？我還有一點用處，待會兒再還你好了，你很厲害哦，謝謝。來，我們這樣子看好了，他的做法我是不曉得他怎麼去處理，以我們數學上來講，比較簡單的方式就是，透過對角線當成拼排的基準，一方面可以這樣畫對角線(圖四)，然後怎麼拼？第一個，既然它是一個正方形，你把對角線一剪，這兩個當然是一定相等的，接下來他拼的方式是，假設我把這一塊剪下來，拼到哪裡去？就數學家來講，他就會這樣做，延長線一拉，然後把這一塊拼到哪裡去？搬到上面去(圖五)。換句話說這一塊搬上來，到這裡有沒有問題？

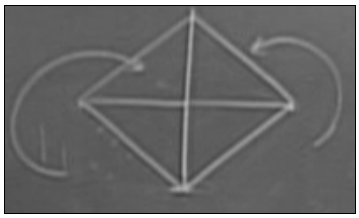


圖四



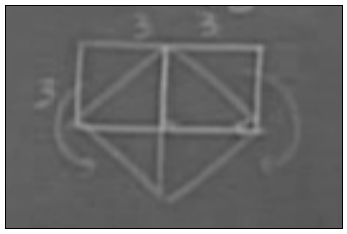
圖五

43. 老師：同樣道理，這一塊，它一樣也可以搬上去，把它連起來，這個圖就變成一個「正方形」(圖五)，它原來的面積會不會有改變？不會。你看，我把這個邊長擦掉，把那個邊長擦掉，面積為 2 的正方形(圖六)。所以本來有人可能



圖六

會懷疑說，你今天邊長 1，面積 1；邊長 2，面積 4，有沒有面積 2 的正方形？會不會存在？會。你會發現，我們這邊運用到一個非常好的技巧，就是你可以用同樣的技巧去處理很多情況。我舉個例子，你可不可以處理一個面積為 18 的正方形？它所用到的觀念跟技巧，基本上是一樣的。稟宸，你要不要上來講，為什麼你認為是一樣，麻煩到前面來可以嗎？試試看，這個人轉得很快，同學們要不要想想看，為什麼我也可以拼出面積為 18 的正方形？要幫忙畫還是你自己畫？直接在上面寫就可以了，不用寫邊長，你告訴大家面積，我畫在這裡，各位可以看一下。繼續，你往下搬了(圖七)，對不對？



圖七

44. 稟宸：之後得到圖形就會和那個一樣，然後那個面積也是 3、6、18，然後是一個正方形。

45. 老師：我問一下，聽懂他在講什麼的舉手，真的，好，放下。智皓，你聽得懂，你要幫他做補充嗎？不用，你確定？若麟，你聽得懂嗎？為什麼，你要不要把兩條線補一下？補的不好沒關係，大概。需要做補充說明嗎？士誠，有沒有問題？

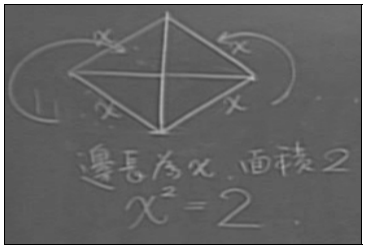
46. 士誠：沒有。

47. 老師：你確定？好，請回座，謝謝，其實你發現最大的特徵在什麼地方？只要它可以切成最小單位是正方形的兩倍，通常我們都可以用這樣的方式，拼出來所需要的一個正方形。因為分割 18 的方法其實很簡單，18 就是兩個 9，那 9 可以把它看成什麼，3 乘以 3，自然就是正方形，只要是正方形，它就可以拼出來，這樣有沒有問題？接下來我們就可以開始下一些定義了(圖

八)，既然長方形可以變成正方形，而且它的面積沒有改變。來，同學，可以看一看，你的邊長要寫成 a 還是 x 隨便你，我們習慣用 x 代表一個數，它是一個正方形，對不對？邊長是 x，這個 x 到底是多少？我一定可以這樣寫：邊長為 x，面積 2 的正方形，它的式子怎麼辦，是不是寫成 $x^2=2$？(圖九)

2.如果此正方形的邊長為 x，面積為 2，怎麼列出等式？_____。
此時，我們將 x 以 $\sqrt{2}$ 表示。$\sqrt{2}$ 的近似值約為_____。(取到小數第三位)

圖八



圖九

48. 老師：你認為 x 是多少？當然有些人會告訴我說，這個已經學過了，我可以下一些定義了。可是，再反過來問，你認為它應該要叫多少呢？為什麼我要用那個很奇怪的符號命名這樣的一個數？剛剛有人私底下很小聲的說，我不曉得各位有沒有聽到，他很小聲的告訴我 x 叫多少？可以，沒問題，你用這樣的符號來告訴我，對不對？還有人說長相怎麼很奇怪，這到底是什麼東西？問題就來了，為什麼我要命名成「$\sqrt{2}$」？「$\sqrt{2}$」到底叫多少？一個新的數就會跑出來。我舉個例子，你可以去試試看，照道理講，1 的平方等於 1，2 的平方等於 4，所以如果某數的平方等於 2，有沒有在兩個中間？有，那它的邊長是不是也是介於 1 跟 2 的中間？今天事先叫你們要帶計算機來，對不對？

49. 學生：對。

50. 老師：在 1 跟 2 的中間，我們再問的更細一點，1.1 的平方叫多少？不知道的就可以試試看，知道的就很快。對於計算機的操作，這邊要記一下，怎麼讓自己計算平方比較快，你們大概沒試過，我現在跟你講，你試試看。你只要

按 1.1，正常的人一定是 1.1×1.1，然後再按=，就出來，對不對？其實你不用這麼麻煩，一般的計算器，它在運算規律上的規則很簡單，我舉個例子來講，你只要按 1.1，然後按兩個「×」就好了，連「=」都不用按，試試看，有沒有？1.1××，不然你再按「=」，這樣有沒有？

51. 學生：有。

52. 老師：有，好，這個是乘兩次，如果你說要 1.1×1.1×1.1，乘三次的話怎麼辦？

53. 學生：再加一個等號(1.1××= = =)。

54. 老師：再加一個等號就可以了，然後再加一個等號就是四次方，這樣有什麼方便性呢？因為用這樣的運算規律，有些人不是去跟銀行貸款嗎？就會有一些有關於，這是另外一個名詞，叫「複利」，複利的計算方式，這個計算方式就會很快。1.1 的平方，你算出來是多少？1.21。那 1.2 的平方，就是 1.2××=，來，試試看，多少？沒有，為什麼？為什麼會這樣，那你一般怎麼做？這樣就可以，你這一台好快，功能太強了。來，1.2 的平方，1.44，再來，1.3 的平方？

55. 學生：1.69。

56. 老師：你是用記的，對不對？1.4 的平方？

57. 學生：1.96。

58. 老師：1.5 的平方？

59. 學生：2.25。

60. 老師：好，問題來了，為什麼？你看它的面積，第一個，1.96 比 2 小，2.25 比 2 大，那換句話說，邊長是不是又要介於 1.4 跟 1.5 的中間？我們就會想辦法，再把 1.4 跟 1.5 切十等份，好，計算機真的要派上用場了。來，1.41 的平方？

61. 學生：1.9881。

62. 老師：佳靜很快，來，1.42 的平方，2.0164。好，又來了，有人跟我講超過了，你看 1.41 的平方，1.9881，1.42 的平方，2.0164。換句話說，2 是不是又藏在這兩個中間？
63. 學生：對。
64. 老師：面積 2，邊長一定介於 1.41 到 1.42 的中間，想辦法再把 1.41 跟 1.42 切幾等份？十等份，好，再來，1.411 的平方？
65. 學生：1.990921。
66. 老師：大聲一點。
67. 學生：1.990921。
68. 老師：1.990921，你看它跟 2 只差 0.01 不到，再來，1.412 的平方？
69. 學生：1.993744。
70. 老師：1.993744，好，再來。1.413 的平方？
71. 學生：1.996569。
72. 老師：1.996569，1.414 的平方？
73. 學生：1.999396。
74. 老師：999396，好，還不到 2，要不要繼續？要，當然要，1.415 的平方？
75. 學生：2.002225。
76. 老師：2.00？
77. 學生：2225。
78. 老師：2225，好，來，問題又來了，這個比 2 小，那個比 2 大，換句話說，2 一定是在裡面，它的邊長一定要介於 1.414 跟 1.415 之間，對不對？要不要繼續切下去，要，再來！有問題嗎？好，1.414 跟 1.415 之間，對不對？那怎麼辦，1.4141 的平方？

79. 學生：1.99967881。

80. 老師：三個 9，然後哩？

81. 學生：67881。

82. 老師：67881，有 1 嗎？一定有 1，你知道為什麼嗎？來，我們從尾數去判斷，1 乘以 1 得多少？

83. 學生：1。

84. 老師：為什麼有些人的不出來？12345678，它只有到 8 位數的計算機，後面那個 1 就不見了，懂我的意思嗎？那有沒有超過 2？沒有嘛！再繼續做下去，1.4142 的平方？

85. 老師：多少？

86. 學生：1.9999…。

87. 老師：四個 9。

88. 學生：6164。

89. 老師：6164，還沒超過 2 嘛，對不對？1.4143 的平方？

90. 學生：超過了。

91. 老師：2.，三個 0，一個 2。

92. 學生：三個 4。

93. 老師：三個 4，一個 9，嚇一跳，超過 2 了，對不對？換句話說你會發現，這邊小於 2，那邊大於 2，要不要再繼續？再試一個！今天只有一個目的，試試看今天各位計算機的功能好不好，不然難得帶來！可以按得很爽快，對不對？平常還不准帶呢！來，試試看，介於 1.4142 跟 1.4143 之間，我們再繼續切，1.41421 的平方？來…

94. 學生：1.9999。

95. 老師：四個 9，一個 8。

96. 學生：兩個 9，一個 4。

97. 老師：超過 2 了沒？沒有，再來！1.41422 的平方。2.……

98. 學生：四個 0。

99. 老師：四個 0，然後哩？

100. 學生：182084。

101. 老師：182084，ok，所以你會發現，為什麼我們必須用新的符號來處理。第一個，確實存在面積為 2 的正方形，但是它的邊長，以我們目前，我舉個例子來講，你用尺量，你可以量得出來嗎？你量出來，只能量出它的什麼值？

102. 學生：近似值。

103. 老師：近似值，它的實際值找不到，所以變成你必須用符號的方式去處理它。我們把這樣的數，用一個長得很奇怪的符號來表示，就把它稱為「$\sqrt{2}$」，這樣有沒有問題？如果你今天相信，它基本上是一個「無理數」的話，「$\sqrt{2}$」代表的是一個實際的值。若以近似值來表示，假設我們只到小數點第三位的話，一般我們都這樣稱，$\sqrt{2}$ 的近似值，近似就多這兩點。如果取到小數點第三位，是介於 1.414 到 1.415 之間，再看它的下一位，因為它介於 1.4142 跟 1.4143 之間，這個 2 也好，3 也好，一定是怎麼樣？捨去的，所以它會叫做 1.414，你懂我的意思嗎？我再強調一次，你不要只告訴我說，介於 1.414 到 1.415 之間，就叫做 1.414，不一定。它若是比較靠近 1.415 的話，用四捨五入法，就要講 1.415，這樣了解意思嗎？那像這個 $\sqrt{2}$ 的近似值，取到小數點第三位，就把它叫做 1.414，這樣有沒有問題？如果你可以接受「$\sqrt{2}$」是一個觀念的話，來，我們繼續把學習單(P.151)的部分完成。我們必須把它寫成一般的表示法來寫囉，正方形的邊長 x，面積 2，怎麼列出等式(圖

八)？這個寫法就寫「$x^2=2$」，可以嗎？這樣的 x，我們剛剛講過以「$\sqrt{2}$」來表示，它的近似值取到小數點第三位，就在黑板上面，沒有問題，好。如果沒有問題，底下的表示法我們就帶進來了，如果 b 的平方等於 a，那它的等式要怎麼列(圖十)？第一個就當然這樣寫了，$b^2=a$，那透過符號操弄，我們說誰是誰的平方根？稱 b 是 a 的平方根，這個有沒有問題？

3.表示法： 如果 b 的平方等於 a，_____=_____，稱 ____是 _____的平方根。 如果 b 是 a 的平方根，則_____。 所以一個正數會有 _____個平方根，兩根互為_____ 。 0 的平方根是 _____。理由：_____。 負數：_____。 理由：_____。
圖十

104. 學生：沒有。

105. 老師：再來，如果 b 是 a 的平方根，則怎麼表示？這邊就有兩個東西可以說明，一樣，你可以寫剛剛的那個式子，叫做 $b^2=a$，我還有另外一個目的，也要讓你知道。這邊可以寫第一個式子，一樣可以寫「$b^2=a$」，但是我還有另外一個目的，可以這樣看，$(-b)^2$，一定也會等於 a，換句話說，只要 b 是 a 的平方根，那麼一般我們也會這樣寫：(-b)也會是 a 的平方根。所以我在做兩件事，一方面讓你知道，一個正數會有幾個平方根？兩個，這兩個數互為什麼數？相反數，就帶出來了。那 0 的平方根是多少？

106. 學生：0。

107. 老師：有沒有自己的平方根是自己的數？有！有幾個？

108. 學生：一個。

109. 老師：確定嗎？自己是自己的平方根，剛才有聽到一個聲音，1 是誰講的？來，大聲一點，0，這是剛剛講的，你這次講 1。來，我現在問一遍，自己是自

己平方根的數有幾個，一個，有人講一個，有人講兩個，還有人講三個的，幾個？

110. 學生：兩個。

111. 老師：正常是兩個，為什麼？因為 1 也是自己 1 的平方根。來，聽清楚我剛剛問的問題，自己是自己的平方根，只要滿足自己是自己的平方根，就是我要的。所以我問這句話，對不對？0 是 0 的平方根，這句話對還是錯？

112. 學生：對。

113. 老師：對，1 是 1 的平方根，對還是錯？

114. 學生：對。

115. 老師：對，那這兩句話有沒有錯？

116. 學生：沒有。

117. 老師：沒有，所以自己是自己的平方根有幾個？兩個，照道理應該是有兩個，再思考一個問題，負數有沒有平方根？

118. 學生：沒有。

119. 老師：有沒有？

120. 學生：沒有。

121. 老師：來，鉅源，負數有沒有平方根，為什麼？因為沒有。

122. 學生：所以沒有。

123. 老師：來，俊宏，你要不要幫它做個說明，補充說明。為什麼負數沒有平方根？對，育齊講對了，大聲一點，所以不管你是正的還是負的，只要平方之後就一定是……

124. 學生：正數。

125. 老師：所以有沒有可能說，x 平方等於-8？你找得到這樣的數嗎？找不到，所以負

數是沒有平方根的。理由就可以照他寫的，因為負數的平方還是正的，這樣有沒有問題？沒有問題，接下來的時間，同學把 5、6 兩題做一做，中間休息一下，待會兒上課我們就繼續。好，下課。

【第二節】

126. 老師：我們看一下，剛剛很多人來問我，我覺得還不錯，因為一開始像第 5 題的部分，這是我故意出的，而且這種問題經常有人錯，可能要找同學們上來玩一下。

127. 學生：不要。

128. 老師：好，我舉個例子來問，它題目一開始這樣寫，很多人沒有把平方根弄清楚，他直接算。舉個例子，看我們第 5 題題目，是求$\sqrt{81}$的平方根，(圖十一)我問一下，會不會有人想答案叫正負 9 的？來，正負 9 舉手，有人講正負 9，來，好，放下。來，佳靜，你為什麼認為它是正負 9？

4.用根號『$\sqrt{\ }$』表示 9 的平方根，可表示成$\sqrt{9}$及$-\sqrt{9}$，其中$\sqrt{9}=$____，$-\sqrt{9}=$____。 5.求$\sqrt{81}$的平方根。_____。
圖十一

129. 佳靜：因為負數乘以負數等於正數。

130. 老師：然後呢？

131. 佳靜：然後，那(-9)乘以(-9)就等於 81。

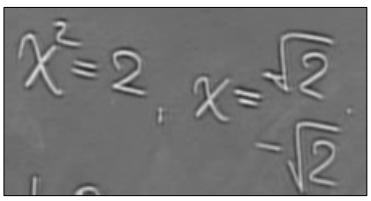
132. 老師：(-9)乘以(-9)等於 81，(+9)乘以(+9)也是 81。現在題目求的是 81 的平方根，還是$\sqrt{81}$的平方根？

133. 學生：$\sqrt{81}$。

134. 老師：有一樣嗎？

135. 學生：不一樣。

136. 老師：來，你要不要想想看，你的答案要不要修正？應該是多少？來，我們這樣講好了，某數的平方根，我們慢慢開始進來。舉個例子來說，$x^2=9$，我們會有不同的表示法去表達它，對不對？你可以講說，有兩個數滿足平方會等於 9，一個是叫做 3，一個叫-3。我們也可以這樣說「$x^2=9$」，x 是 9 的平方根，我們開始把表示法代進來，直接代第 5 題。換句話說平方根有兩個，我們剛剛介紹的這個符號$\sqrt{\ }$，我們把它叫做根號，平方根既然有兩個數，就代表它有兩個平方根。換句話說，一個是正的平方根，正的平方根我們就這樣寫，x 等於正的平方根，一個叫正的$\sqrt{9}$ ($x=\sqrt{9}$)，那正的$\sqrt{9}$它到底叫什麼？你剛剛不是知道了嗎？平方等於 9。乃文，多少的平方會等於 9？3！我可不可以寫成這樣，為什麼講這種方式？我們剛剛不是介紹了這個概念嗎？$x^2=2$， x 我們給它記成什麼？$\sqrt{2}$。剛剛是因為面積跟邊長的關係，邊長是沒有負的，可是如果你今天談的是數，某一個數的平方等於 2，一個 x 叫正的$\sqrt{2}$，一個就要叫做負的$\sqrt{2}$。像這個在前面其實是省略掉一個什麼號？正號，這邊是一個負號。(圖十二)所以剛剛才會有同學問我，平方根有兩個數，一個是正的平方根，一個是負的平方根。你現在去了解，平方等於 2 叫做$\sqrt{2}$，那我再問：平方等於 3，x 要怎麼表示？如果是數，不是邊長，有兩個，一個叫正的$\sqrt{3}$，一個叫負的$\sqrt{3}$。數學家通常比較懶，他會寫成一個「±」，我們叫做$\pm\sqrt{3}$。同樣道理，你今天考慮 $x^2=9$，照道理 x 應該等於$\pm\sqrt{9}$。那$\pm\sqrt{9}$要叫做多少？±3！今天要跟各位表達一個重要的概念：有一個正的平方根，$\sqrt{9}$，那是表示多少？



圖十二

137. 學生：3。

138. 老師：就變成 3，那-$\sqrt{9}$，就表示成多少？-3。注意！為什麼要這樣講，剛剛講說平方不會有負的，會不會有可能 x^2=-9 這種東西，會不會存在？不會！為什麼？因為這個數就算是負數，平方之後它還是會變成正的。所以我希望你要記得，不要到時候一個叫正的，一個叫負的，寫的很順，寫出叫做$\sqrt{-9}$，有沒有這種東西？所以你會發現在根號裡，以我們國中所發展的數系來講，根號裡頭有沒有負的？

139. 學生：沒有。

140. 老師：沒有，一定不會這樣寫，這樣寫百分之一百是錯的，一定一個是正的平方根在這裡，一個是負的平方根，裡面一定是正的。這樣佳靜，回到妳的問題，妳剛剛講±9，要不要做修正？±3，來，為什麼？

141. 佳靜：81 的平方根的平方根。

142. 老師：81 的平方根的平方根，來，有沒有人要幫他補充做說明的？俊宏，因為大師今天我看他的狀況…。

143. 學生：不佳。

144. 老師：確定，那你們要支持他，趕快，你講不好，他幫你補充，他已經好轉了。來，要不要站起來對著大家說，然後聲音把它放大一點，會比較清楚。

145. 俊宏：$\sqrt{81}$=±9，$\sqrt{9}$=±3。

146. 老師：來，有沒有人要補充，或者訂正的？來，稟宸。

147. 稟宸：$\sqrt{81}$是等於 9，不是等於±9，然後 9 的平方根才是等於±3。

148. 老師：要不要再大聲一點點，來，俊宏，注意聽一下，他認為你剛剛講的要做修正，來。

149. 稟宸：$\sqrt{81}$不是等於±9，是等於 9，然後 9 的平方根才是±3。

150. 老師：這樣聽得清楚嗎？事實上他在講兩件事情：一個叫做平方根，一個叫做開

根號。開根號我們剛剛表示，你注意聽，剛剛才說過，一個叫做正的平方根，前面沒有正，負的平方根前面要加負。稟宸，你現在談的意思是告訴人家，你剛剛講的，說$\sqrt{81}$叫做 9，不是…。

151. 稟宸：不是±9。

152. 老師：不是±9，差別在哪裡？來，他提到一個問題，同學們，利用那個學習單空白的地方，你就要補充說明上去，否則有人會一直搞不清楚差別在什麼地方。如果題目這樣寫(81 的平方根)，伯容注意看一下，題目如果是這樣寫，81 的平方根，一定是假設那個數不知道，叫做 x 的話，那它意思是在暗示你說，x 平方等於多少(x^2=81)？81 嘛，那你有兩個表達方式，根據剛剛的講法，平方等於 2，就叫$\pm\sqrt{2}$，平方等於 3，就叫$\pm\sqrt{3}$，平方等於 9，就叫$\pm\sqrt{9}$，所以平方等於 81，x 叫做$\pm\sqrt{81}$。又因為 81 是多少的平方？9 的平方，所以我可以寫成±9($x=\pm\sqrt{81}=\pm 9$)。可是如果是這樣，它就在暗示 81 有兩個平方根，一個平方根叫做正的$\sqrt{81}$，一個叫做$-\sqrt{81}$，現在你求的是哪一個？正的平方根！再強調一次，正的平方根！所以只有幾個，一個。好，再強調一遍，如果今天沒有問你正負，他只問你平方根，會有幾個解？正常，正數的話，兩個，有正有負；可是如果只看到開根號，像這個$\sqrt{81}$我們講叫做開根號(圖十一)，它只有幾個解？一個，這個值($\sqrt{81}$)就叫做+9，那個值($-\sqrt{81}$)就會叫做-9，所以俊宏你懂稟宸跟你說的意思嗎？懂了耶！真的喔！所以你會發現$\sqrt{81}$事實上它叫做多少？

153. 學生：9。

154. 老師：+9，所以如果題目這樣出當然很多人都會，求 9 的平方根是不是就很簡單？可是現在故意怎麼出？$\sqrt{81}$的平方根，他就會有一個陷阱在裡面，振豪，你聽的懂意思嗎？要小心喔！不然你會上當。所以就這個題目來講，既然

$\sqrt{81}$就叫做 9，那 9 的平方根($\sqrt{9}$)當然叫做什麼，±3，這樣懂了嗎？來，兩位都上來領一下，好不好？這麼辛苦，其實他錯的很有價值，因為他提醒的是一個非常重要的觀念。俊宏來，你到時候再送給那個精神不太好的人，當大力丸送給他補一補！

155. 老師：我們看一下第 6 題(圖十三)，開始會談到一個觀念，如果你弄得很清楚，要不要互相討論一下？待會兒一組派一個代表上來寫你的算式跟講解，好不好？這一句話(b^2=a，稱 b 是 a 的平方根)很有用喔！要留著，為什麼我捨不得擦掉？因為你在講第 6 題的時候，也會用到這樣的一個觀念，到底誰是誰的平方根？式子要怎麼列？怎樣把算式列出來？來，第 6 題討論一下。你會做耶！那算式咧？沒算式，算式寫一下。

(學習單練習，教師巡視)

156. 學生：想一想。

157. 老師：想一想，怎麼列？因為這是一個計算題，你一定要列一個等式出來。對，宇璇，你不用怕，不會就問問看，怎麼把式子列一列。第 6 題，誰是誰的平方根？對，這樣列，然後把 x 解出來就好了，他會，尚麟會了。來，我講一次，你注意聽一下，回到最原始的想法，他的平方根是這個，換句話這個東西的平方要不要是它？好，那你的式子要怎麼寫？因為你是人家的平方根，根據剛剛的講法不就這樣嗎？b 是 a 的平方根，那不是叫做平方，要等於 a？所以±4 是人家的平方根，±4 的平方要加什麼？要，那你把 x 解一下，怎麼算？對，你馬上解。紹齊，你可以做做看呀，不用緊張，應該是可以做的啦！本來就是呀，什麼時候才要有兩個？那如果我把 $2x$-1 也給它平方呢？這下子就好了，你現在了解意思了沒有？來，我看你的，我要讓你吃個大補丸，讓你精神振奮一下，你這個怎麼求？然後呢？是，哪有

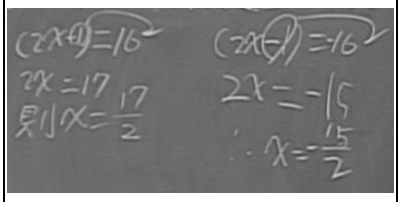
那麼快？你這樣也很快呀！$2x$-1 等於 16，為什麼 $x=\frac{17}{2}$ ？你們兩個程度比較好，問難一點，如果$(2x-1)^2$ 的平方根是±4，怎麼找？那它就有幾個解？所以剛剛班長就問，為什麼有時候會有一個解，有時候會有兩個解？差別就在於題目的難易上。我再說一遍，我的意思是 $2x$-1 的平方根是±4，所以我們根據剛剛的講法，b 是 a 的平方根，那 b^2是不是要等於 a？b 是 a 的平方根，$b^2=a$， b 是誰？現在的 b 是不是±4？±4 的平方要等於它，所以只有一個。可是如果題目是$(2x-1)$的平方根是±4(圖十三)，因為你的式子列出來是±4 的平方會等於 $2x$-1 的平方$[(\pm4)^2=(2x-1)^2]$，所以 $2x$-1 可能等於 4，$2x$-1 可能等於-4。我不會用開根號去開，我的意思是從原始的地方，b 是 a 的平方根，我一定要寫 b 的平方根。所以照原始的式子來列，應該是這樣寫，$b^2=a$，應該是這樣，目前題目是這樣。可是如果題目今天是這樣，$b^2=a$，當 a 是這一項的時候，那就是為什麼有時候只有一個 x，有時候要寫兩個 x，原因就在這裡，這樣聽得懂意思嗎？懂！

6.若$(2x-1)$的平方根是±4，則 x=_____。
圖十三

158. 老師：來，有沒有人願意上來？哪一位？派個代表。你看，我一直看著她，她一直不理我。沒關係，我看一下。來，上來試試看，我把這個擦掉，沒關係，寫對的話，就表示我剛剛講的你有吸收進去。如果你真的有一些狀況，就剛剛那個問題，其實我覺得很好的就是，透過同學跟同學之間的對話，就像他剛剛講的，有人去修正他，會讓其他人了解有什麼地方不一樣。佳靜剛剛也談到一個概念，結果俊宏也談一個概念，稟宸也談一個，後來就是說透過互相探討的過程，我們怎麼樣把這些很抽象的開根號概念，做個清楚的釐清。否則，其實你會發現，很多同學都是會算，但是不曉得為什麼

要這樣算。

159. 老師：(與小組同學講解中)來，他的問題，用鉛筆好了，回到剛剛的問題，為什麼我要留這一句話，因為你的式子一定會這樣列，b 是 a 的平方根，則 $b^2=a$，換句話說，他講的平方根現在是誰？這個，換句話說，這個(±4)叫做 b 嘛，b 的平方要等於 a，是不是這樣子？這不叫 b 是 a 的平方根嗎?這當 b，這當 a，就是這樣寫。為什麼我不鼓勵你寫這樣，因為有時候到後來會變成這樣的情況，你開根號出來不能直接寫，照道理是要這樣，就會有一些更複雜的觀念在裡頭，所以為什麼我不鼓勵你用這樣的方式列，因為這樣列出來的式子很危險，這個才是對的。我會跟你講說，為什麼我會建議你用這個方式，否則你在這裡寫，有人會吐你的槽說：「我怎麼知道 $2x-1$ 是正的還是負的？」如果 $2x-1$ 是負的，你就會扯到一個問題，根號裡面怎麼可以是負的？我懂你的意思，但是我剛剛講一個概念，如果現在改成這樣，這個東西的平方根，±4 的話，這樣的表達方式就會被人家質疑，你怎麼知道 $2x-1$ 是正的。ＮＯ，你沒弄懂我意思，你寫負是負在外面，可是問題是這一個數，你怎麼知道這個數是正數？如果這個數是負數，就會出現問題，列成這種最安全，這種是標準的，就是 b 的平方等於 a，$a=b^2$，這是最標準的，而且超級標準，絕對不會錯。所以我會建議你，如果題目是變成我剛剛講的那種狀況，我還是希望你寫成這樣，這個絕對不會錯，就不會產生根號複雜的狀況，因為有人會質疑：「你怎麼知道裡面確定是正數？」你可以試看看，如果題目改成這樣會有兩個解，會有一個讓 x 變成是負的，就會有問題，這樣了解意思嗎？確定？真的？耘平你聽懂意思，你是假的也沒關係，我待會會說。來，上來吧，若麟，解釋一下，我們看看他講解的對不對？



圖十四

160. 若麟：題目：(2*x*-1)的平方根是±4，則 *x* 等於什麼？然後(2*x*-1)=16，移項過來，變成 2*x*=17，所以 *x* 就等於 $\frac{17}{2}$ (圖十四)。

161. 老師：好，這樣有沒有問題，聽得懂嗎？你本來還要打算寫另外一個解，對不對？

162. 若麟：對啊。

163. 老師：為什麼？

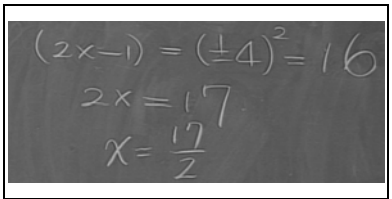
164. 若麟：因為這邊是±4。

165. 老師：那你另外一個解打算怎麼寫？來，我們看看他原始的想法，因為他後來只呈現這樣，是代表你的觀念有修正還是為什麼？好，來，寫一下我們看看。好，($-\frac{15}{2}$)，來，他為什麼會這樣寫？有沒有人可以幫他做個解釋？你為什麼後來把這個部分給去掉了？不知道，怪怪的，不知道哪裡錯？來，有沒有人願意幫他做個說明？來，于寧，你剛剛有解釋，要不要上來幫他做個修正？不行我再來做補充，我當你們的後盾就可以了，沒有問題，好，來，試試看。

166. 于寧：(-4)×(-4)=16，所以不可能會變成(-16)，而且你這樣的話，變成(-16)的根號，答案是無解，所以不可能。

167. 老師：聽懂了嗎？來，了解的舉手，好，放下來。謝謝兩位，都有貢獻，來，麻煩一下，自己挑一個，把錯的擦掉，對的留下來，ok！來，同學要注意看一下，你有沒有發現，透過同學跟同學之間的互動，其實你會澄清很多的概念，否則就會產生一種狀況：我好像會做，可是又好像不太確定。為什麼我們會保留剛剛的講法？來，各位，看黑板的最左邊，我們怎麼稱呼？如果 b 是 a 的平方根的話，式子是不是這樣寫(b^2=a)？b 的平方要等於 a，這

句話有沒有問題？同樣的道理，它的平方根是誰？±4，換句話說，±4 就是我們剛剛講的 b，這個值就是我們剛剛講的 a，$(2x-1)$，可以接受嗎？這個東西的平方根是它。換句話說，就式子來講，b^2要等於 a，所以第一個你的觀點，正常的方式我會建議你這樣做$(2x-1)=(\pm4)^2$，應該是叫做±4 的平方。那就會回到于寧剛剛講的觀念，不管你是+4 的平方也好，-4 的平方也好，一定是叫做多少？+16，會不會有負的？不會，換句話說，$2x-1$ 就會等於 17。



圖十五

168. 學生：16。

169. 老師：16，$2x$ 就會等於 17，你的 x 就會等於$\frac{17}{2}$(圖十五)。這個問題我故意把它弄得比較簡單，你可以補充在旁邊，如果老師今天出得比較困難，這部分我們會利用下次上課的時間來處理。如果題目這樣寫，$(2x-1)^2$的平方根是±4，這時候 x 會有幾個解？就會有兩個了，所以題目可以從很淺到很深。但是它還是利用到一個概念，你的 b 是哪一個？還是這個(±4)，你的 a 變成哪一個？變成這一個$(2x-1)^2$，這個叫做 b，這個叫做 a，還是這樣寫式子，叫做 $b^2=a$ 來列式，就可以把 x 解出來。這個是比較困難，這樣有沒有問題？好，這個問題你可以想一想，下次上課再來處理，ok？

170. 老師：接下來我們就可以看學習單的第二張，既然你接受根號的概念了，一個正數通常會有兩個平方根，一個是指正的平方根，一個是指負的平方根，平方根號可不可以做運算？我們就開始要慢慢給它下定義了。定義根式的運算，我們就會回想到，當初在介紹有關於文字的代數式，不管是一元一次方程式，還是二元一次方程式的時候，我們提過一些觀念。比如說，一開始最簡單的，這個$(3x+2x)$當送分了，有沒有人願意？肚子餓的，要吃糖果

的，鼓勵一下，這個等於多少？大聲一點。

三、根號的加減運算： 1.$3x+2x=$_____；當以$\sqrt{2}$為單位長時，$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=$_____。 2.$5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=$_____；$4\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{3}+3\sqrt{5}=$_____。
圖十六

171. 學生：$5x$。

172. 老師：剛剛是誰講的，家碩嘛，對不對？家碩站起來，給你機會，給你講，多少？

173. 家碩：$5x$。

174. 老師：有沒有問題？

175. 家碩：沒有。

176. 老師：好，請坐，為什麼它可以合併？文字，三個加兩個，五個，有沒有同樣的東西？有。換句話說，這個 x 是代表一個未知的數，對不對？我可不可以隨便代？我舉個例子，你今天把 x 代成π，再代成什麼？三個π加兩個π，等於幾個π？有沒有可能？有啊。你今天談圓，兩個圓的圓周長，一個圓的直徑是 3，圓周長就叫做 3π；另一個圓的直徑是 2，圓周長就叫做 2π，那兩個圓的圓周長總共是多少？

177. 學生：5π。

178. 老師：那就會有 5π。所以當你今天如果以$\sqrt{2}$為一個單位長的時候，它可以這樣看，三個$\sqrt{2}$加兩個$\sqrt{2}$ $(3\sqrt{2}+2\sqrt{2})$，怎麼辦？

179. 學生：$5\sqrt{2}$。

180. 老師：大師醒了！那它可不可以做定義？可以啊！所以你看，是不是回到我們當初講的所謂同類項的運算，有沒有問題？清楚嗎？可以接受哦！好，如果沒有問題，我們把那個第二張學習單的第三大題的單元完成(圖十六)，談到同類項的運算，總共有幾個題目把它做一做，第 2 題底下還有兩個問題，

把它完成好不好？

181. 老師：(學習單練習，教師巡視)很想找人上來問一問，為什麼？這個是對的，這邊就是同類找同類，試試看嘛！三個加兩個叫幾個？不要這樣嘛！你算對了，你看，連智皓都會寫哦！錯了！為什麼？我待會會做說明，就是用這個例子來說明，我希望今天可以教到這裡。你寫對了，太聰明了，要不要上來？做對了哦！同類找同類，他寫對了，你的呢？你也寫對了！嘉鴻也寫對了，ok，沒有問題！我看看，這個也是對的，幾乎都會，沒問題。換句話說：如果你在同類項合併的問題學得很清楚，這邊大概就是 ok 了。來，我很快跟各位對答案，五個$\sqrt{3}$，減掉兩個$\sqrt{3}$，變成幾個$\sqrt{3}$？

182. 學生：三個。

183. 老師：三個$\sqrt{3}$，答案就出來了，這個還不錯，我剛剛看了一下，都對。再來，$4\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$，有人寫得很清楚，我到目前為止晃了一遍，都很清楚，你會發現要找同類，對不對？哪邊是同類？這個($4\sqrt{3}$)跟這個($2\sqrt{3}$)是不是才是同類？

184. 學生：對。

185. 老師：因為它屬於同樣的一個單位，那這一個($2\sqrt{5}$)跟這一個($3\sqrt{5}$)才是同類，所以我剛剛看過，大概答案就叫做$6\sqrt{3}+5\sqrt{5}$，這兩個可不可以併？

186. 學生：不行。

187. 老師：回到一個問題，大家記不記得我很久以前舉的例子，$3x+2y$ 怎麼辦？可以合併嗎？不行，我剛剛舉的例子是什麼？忘記了，提醒一下，你們家有三個人，加兩條狗，合起來叫多少？

188. 學生：三個人加兩條狗。

189. 老師：有沒有印象？

190. 學生：有。

191. 老師：可不可以併？不可以嘛，所以慢慢去了解這樣的一個觀點，大概就可以對它的加減運算做一個基本的了解。也就是同類項合併的概念，目前為止這樣就 ok 了。好，再接下來定義乘除，我剛剛有看了一下，如果一個長方形的長是 $\sqrt{3}$ ，寬是 $\sqrt{2}$ (圖十七)，我看很多人都這樣寫，面積就叫長乘以寬 ($\sqrt{3}\times\sqrt{2}$)，這個到底要寫多少？我不是講過，從整數到分數的時候，它分數的加法必須要同分母，對不對？現在 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$)，直覺很像是要寫 $\sqrt{6}$ ，第一個問題，對還是錯？來，認為對的舉手，好，放下，你看我們現在就開始在定義它的乘除運算。我們從來都沒有碰過這種運算關係，怎麼去確認它是對的？各位想想看，我們當初講到最簡單的一種觀點，就是說之前學過所謂乘法的結合律跟交換律，我不知道它對還是錯？

四、根號的乘除運算 1.長是 $\sqrt{3}$ ，寬是 $\sqrt{2}$ 的長方形面積怎麼表示？_____。你能說出理由嗎？ 反過來說，如果知道一個長方形的面積是 $\sqrt{15}$，長是 $\sqrt{5}$，寬應該是多少？怎麼算？ 2.透過乘法的交換律與結合律，說明根式乘法運算的一般通則。 也就是 $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})=(\sqrt{a}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{b}\times\sqrt{b})=a\times b$ 又 $(\sqrt{a\times b})^2=a\times b$；因此推導出 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$
圖十七

192. 學生：對。

193. 老師：有人喊對，你能不能提證據？

194. 學生：證據在你後面。

195. 老師：證據在我後面，有，來，講。

196. 學生：就是用計算機去算。

197. 老師：你的意思是，來，解釋的清楚一點。

198. 尚寧：就是計算機上面按$\sqrt{3}$，然後再按乘以$\sqrt{2}$，等於出來那個數，先把它抄在紙上。

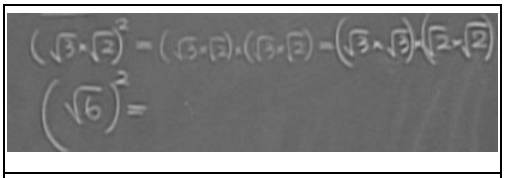
199. 老師：是。

200. 尚寧：再按 6 再按根號，然後再兩個做比較。

201. 老師：比較，發現一模一樣，好，這是一個方法，你認為他的方法對不對？

202. 學生：對嗎？

203. 老師：可能會對，可能會錯，對不對？但是他提供一個很好的方式。我們現在想，能不能在數學的理論上找到一個解答。來，各位想想看，我再提醒一次，根號是因為平方的關係所產生的，所以我怎麼樣讓根號去掉？其實有一個方式，我現在講，你們注意聽。我本來是希望有人能夠上來講解，這個東西等於多少？因為這兩個[$(\sqrt{3}\times\sqrt{2})^2$，$(\sqrt{6})^2$]到底會不會一樣，我不知道，可是如果我有辦法，經由這樣的動作之後，如果兩個數長得一樣，那它會不會就成立了？這樣了解我的意思嗎？好，有沒有人能夠告訴我，什麼叫$(\sqrt{3}\times\sqrt{2})^2$？相同的有幾包？兩包$(\sqrt{3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{2})$，好像有點概念，相同的有兩包，這個叫什麼？我可不可以這樣寫，先把這兩個怎麼樣？交換，可不可以等於$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$，再來一個$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ (圖十八)。因為本來這裡是 2 跟 3，現在把它換成 3 跟 2，是不是可以滿足乘法所謂的交換律，到這裡有沒有問題？



圖十八

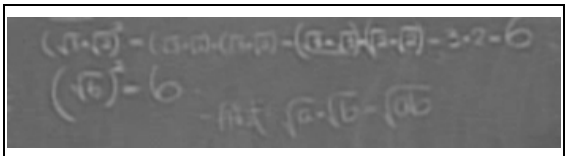
204. 學生：沒有。

205. 老師：透過交換之後，我再把兩個、兩個包起來，這個叫什麼律？

206. 學生：結合律。

207. 老師：結合律，很好！那我怎麼知道它的答案是多少呢？根據最原始的定義，你

想想看，我當初怎麼定義$\sqrt{3}$，是不是$x^2=3$，x就叫做$\pm\sqrt{3}$。換句話說，我要相信$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$會叫做多少？$\sqrt{9}$，不對，你知道$\sqrt{9}$，那就知道它叫$\sqrt{6}$了。回到原始定義，告訴我$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$就是 3，那$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$就是 2，所以平方出來叫多少？6。(圖十九)到這裡有沒有問題？



圖十九

208. 學生：沒有。

209. 老師：最原始的定義，什麼叫做$\sqrt{6}$的平方，一定是滿足$x^2=6$，所以你看這個平方叫多少？6。我們可以透過一些推演的過程，你會發現它平方了以後叫做 6，它平方以後也叫做 6，這兩個數通通都正數，對不對？平方之後又會相等，那我問你們原來會不會相等？原來要不要相等？要，因為原來要相等，平方之後才會相等。這樣有沒有問題？所以我們是不是可以確定$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$，就叫做$\sqrt{6}$，就可以定下來了。這樣有沒有問題？我們就定義它乘的運算可以這樣寫，如果我寫成一般式，你可能就要去思考一下，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$叫做什麼，叫做$\sqrt{a\times b}$，簡稱為什麼？(圖十九)

210. 學生：$\sqrt{ab}$。

211. 老師：這個就成立了，到這裡聽懂的舉手？好，放下！所以這個其實一定要給你定義，隨時要去了解什麼叫$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$，一定是兩個，就是x的平方等於 3，然後$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$，就是x的平方等於 2。所以 3 乘以 2 等於 6，那$\sqrt{6}$的平方就是x的平方等於 6，兩個相乘都是 6，所以這兩個就要一樣，這樣有沒有問題？

212. 學生：沒有。

213. 老師：乘法可以成立，請問一下，除法可不可以成立？

214. 學生：可以。

215. 老師：所以同樣的觀點，我們也是用同樣的方式去處理。本來是說$\sqrt{a}\div\sqrt{b}$，多少？不知道！我們先看它的平方是誰，它的平方是不是等於兩個相同的東西相乘？(圖二十)本來是這樣，兩個相同的相乘，回到乘法的概念去看，根據分數乘法的概念，兩個相乘，分子跟分子乘，分母跟分母乘。這樣的話，什麼叫$\sqrt{a}\times\sqrt{a}$？就回到剛剛的問題，什麼叫$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$？$\sqrt{a}\times\sqrt{a}$，就是 a。什麼叫$\sqrt{b}\times\sqrt{b}$？

3.透過乘法的交換律與結合律，說明根式除法運算的一般通則。 也就是$(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2=(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})\times(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{a}{b}$； ；而$(\sqrt{\frac{a}{b}})^2=\frac{a}{b}$；因此推得$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$
圖二十

216. 學生：b。

217. 老師：就是 b，所以這個值就叫$\frac{a}{b}$。又回到另一個問題，另外一種是長成這樣，(圖二十)這是一個數$(\sqrt{\frac{a}{b}})^2$，對不對？平方叫什麼？平方就叫做$\frac{a}{b}$，因為它就是$\frac{a}{b}$一個正的平方根，所以你看平方有沒有長一樣？

218. 學生：有。

219. 老師：有，所以這兩個要不要相等？要，所以除法一般式也出來了，$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，它就可以寫成$\sqrt{\frac{a}{b}}$的方式就完成了。這樣有沒有問題？所以根式的乘除運算，我們是用這樣的方式去處理的，就是在第二張學習單的第一點、第二點、第三點，到這邊有沒有問題？

220. 學生：沒有。

221. 老師：如果可以理解它，剛剛班長就問了一個狀況，他講一個很好玩的東西，我看今天會講到這個部分就不錯了。他說$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$，叫做$\sqrt{6}$，那加減到底會不會成立？他就問一個問題，$\sqrt{2}+\sqrt{8}$，它到底會不會等於$\sqrt{10}$？第一個當然可以用尚寧的方法，其實你不要以為這個方法是不對的，在我們數學的邏輯推演裡頭，它有兩個思維，你可以試試看。一個就是說：如果你認為它是對的，那麼你要證明；第二個是：如果你認為它是錯的，你要舉例子，只要舉例子發現它不成立就 ok 了。所以你看$\sqrt{2}$跟$\sqrt{8}$加起來，來，有沒有人用計算機算了一下，$\sqrt{2}$多少？

222. 學生：1.4142135。

223. 老師：等一下，等一下，太快了，來不及抄，來。

224. 學生：1.4142135。

225. 老師：好，1.414。

226. 學生：2135。

227. 老師：好，再來$\sqrt{8}$呢？

228. 學生：2.828。

229. 老師：2.828 然後呢？

230. 學生：42712。

231. 老師：427…

232. 學生：12。

233. 老師：$\sqrt{10}$呢？

234. 學生：3.16227766。

235. 老師：7766。好，你看，1.4+2.8 是多少？

236. 學生：4.2。

237. 老師：4.2，會不會等於 3.16？

238. 學生：不會。

239. 老師：所以第一個，你初步認為會不會相等？

240. 學生：不會。

241. 老師：那它到底要等於多少呢？好，我們就來想辦法，跟各位做個說明。你要記住我剛剛跟你講那個拼圖，它本身是很有意義的，今天的重點其實就在兩個拼圖。第一個，你有辦法拼出來邊長是$\sqrt{2}$的正方形了，因為面積是 2，回到一個問題，其實這個是重點，你會就過關了，不會就沒了，就掛了。對，來，根據剛剛的講法，我講面積 2 的正方形，邊長多少？來，想想看，可能因為昨天放假，我看你們今天狀況不是很好，面積 2，邊長要多少？$\sqrt{2}$。面積 8 的正方形比照辦理，邊長應該叫多少？應該叫做根號…

242. 嘉鴻：8。

243. 老師：對，嘉鴻講的是正確的。就直觀來講，面積 2 的正方形，邊長叫$\sqrt{2}$，面積 3 的正方形，邊長叫$\sqrt{3}$，面積 5 的正方形，邊長叫$\sqrt{5}$，面積 8 的正方形，邊長叫$\sqrt{8}$，照道理應該是這樣講吧？

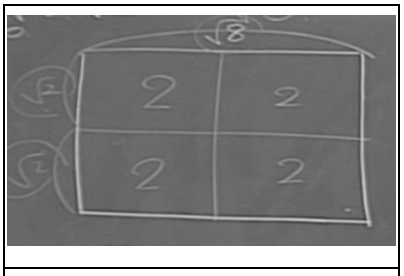
244. 學生：對。

245. 老師：對，那你現在想想看，現在這一塊正方形的面積叫做 8，它的邊長叫做$\sqrt{8}$，對不對？可是 8 是怎麼產生的？如果我這樣切，我把整個的面積切割成幾塊？四塊，每一塊面積要叫多少？每一塊的面積？

246. 學生：$\sqrt{2}$。

247. 老師：來，注意聽，面積 8 就是代表全部是 8，現在切成幾塊，四塊，每一塊面積要叫多少(圖二十一)？這個很簡單， 8 除以 4 就是多少，2，想太多了啦！

面積叫多少？2、2、2、2，是不是正方形？我也知道你很餓。回到一個問題，面積為 2 的正方形，它的邊長應該叫多少？



圖二十一

248. 學生：$\sqrt{2}$ 。

249. 老師：剛剛講叫多少？

250. 學生：$\sqrt{2}$ 。

251. 老師：$\sqrt{2}$ ，在這裡，有沒有？面積 2 的正方形，邊長要叫$\sqrt{2}$ ，那這一段要叫多少？

252. 學生：$\sqrt{2}$ 。

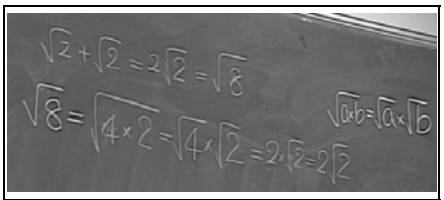
253. 老師：$\sqrt{2}$ ，可是你剛剛講的，這一段叫多少？

254. 學生：$\sqrt{8}$ 。

255. 老師：你們有沒有發現什麼？這一個加這個($\sqrt{2}+\sqrt{2}$)會不會等於這一個($\sqrt{8}$)？它不是個正方形嗎？換句話說，這個邊長跟這個邊長要不要一樣長？

256. 學生：要。

257. 老師：要，然後就來了哦！注意看！我要開始定義了。第一個，$\sqrt{2}+\sqrt{2}$ 剛剛的講法，是不是一個 x 加一個 x，等於幾個 x？兩個 x。換句話說，一個$\sqrt{2}$ 加一個$\sqrt{2}$ ，要叫幾個$\sqrt{2}$ ？兩個$\sqrt{2}$ 。剛剛我們不是叫做$\sqrt{8}$ ，換句話說，我要推導的是，我們怎麼直接把$\sqrt{8}$ ，換成兩個$\sqrt{2}$ 。來，根據剛剛的講法，一塊接著一塊，這種運算的觀念大家要了解。來，我們剛剛不是解釋了嗎？第一個，$\sqrt{a\times b}$ 是不是會變成$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ (圖二十二)這個有沒有印象？



圖二十二

258. 學生：沒有。

259. 老師：沒有，就在這裡，證據就留在這裡，有沒有？$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$，是不是$\sqrt{a\times b}$？

260. 學生：對。

261. 老師：那如果你可以接受這個，$\sqrt{8}$怎麼化簡？$\sqrt{8}$，我自然就可以看成$\sqrt{4}\times\sqrt{2}$，那$\sqrt{4}$叫多少？$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$，叫做多少？$2\sqrt{2}$，不就出來了嗎？(圖二十二)到這裡有沒有問題？

262. 學生：沒有。

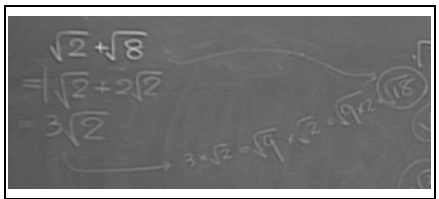
263. 老師：有沒有問題？

264. 學生：沒有。

265. 老師：確定哦！

266. 學生：確定。

267. 老師：如果你可以相信$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，而且你也相信 $2\sqrt{2}$也等於$\sqrt{8}$，你也相信$\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$的話，你看，有沒有等於$\sqrt{4}$？沒有哦，不是 2+2=4，因為剛剛試過了，你用計算機算了半天，有沒有合你要求的？沒有，那這個加法怎麼辦？來，就開始有學問了，對不對？我們怎麼處理它？一般來講，$\sqrt{2}$叫做$\sqrt{2}$，$\sqrt{8}$把它化成兩個$\sqrt{2}$。(圖二十三)像這樣把$\sqrt{8}$化成兩個$\sqrt{2}$，它從根號裡面的東西不能再跑出來的過程，這個式子，我們就把它稱為「最簡根式」，來，學習單裡面沒有，你自己要把它補充進去。換句話說，你今天要定義到它的加減法，必須先化成「最簡根式」之後，才有辦法運算。比如說像這個，一個$\sqrt{2}$加兩個$\sqrt{2}$，會變成幾個$\sqrt{2}$？3 個$\sqrt{2}$，就出來了。這樣有沒有問題？如果你要談得更複雜一點，來，根據剛剛的講法，$3\sqrt{2}$是不是叫做$3\times\sqrt{2}$，對不對？那 3 叫做根號多少？3 是不是叫做$\sqrt{9}$，乘以$\sqrt{2}$，等於$\sqrt{9\times 2}$，叫



圖二十三

多少？9×2=18，有沒有很怪？你看，$\sqrt{2}+\sqrt{8}$，不叫$\sqrt{10}$，它叫根號多少？這樣有沒有很奇怪？

268. 學生：有。

269. 老師：所以我為什麼讓你們了解說，這個圖重要不重要？(圖二十)

270. 學生：重要。

271. 老師：如果你不從這個角度看，你很難相信，為什麼加起來等於這麼奇怪。也不是加，也不是乘，然後又講一個很奇怪的東西，又有減。所以我在這邊再跟各位做一個強調：你會發現正方形面積是 8，邊長是不是要叫做$\sqrt{8}$，原來是這樣(圖二十一)。可是我把它切成四小塊之後，每一小塊的面積是 2、2、2、2，四個面積為 2 的正方形，邊長要叫做$\sqrt{2}$。這個面積是 2，邊長要叫做$\sqrt{2}$，這裡叫$\sqrt{2}$，這裡叫$\sqrt{2}$，那兩段加起來不是變成$\sqrt{2}+\sqrt{2}$，幾個$\sqrt{2}$？兩個。我們剛剛不是有定義同類根式的加法 $x+x$，這裡叫兩個$\sqrt{2}$，你看這裡叫$\sqrt{8}$，所以我們常常講說，$\sqrt{8}$叫做兩個$\sqrt{2}$。怎麼來？你可以從這個角度來看，一個加一個等於兩個；你也可以從這個角度來看(圖二十二)，$\sqrt{8}$叫做$\sqrt{4}\times\sqrt{2}$，$\sqrt{4}$可以變成 2 再乘以$\sqrt{2}$，叫做 $2\sqrt{2}$，這個叫「最簡根式」。你一定要利用「最簡根式」來做加法的運算，所以你看$\sqrt{2}+\sqrt{8}$，我們才會寫成$\sqrt{2}$加兩個$\sqrt{2}$，這樣幾個$\sqrt{2}$？三個。這樣清楚了嗎？

272. 學生：清楚。

273. 老師：有沒有問題？如果沒有問題，我舉個例子來看，化為最簡根式的想法。最簡單，來，舉例來講，那$\sqrt{48}$，你怎麼辦？很多想法哦，有人想成 4 乘以多少？12，也是 48，對不對？還有沒有別的想法，2 乘以 24，問題是 2 出不來。因為根據剛剛的想法，你一定要是一個可以平方的東西，才有辦法跑出去嘛！所以你可以看學習單的第三張(圖二十四)，將下列根式化為最簡

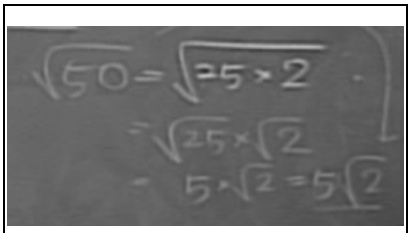
根式的結論，在這邊，有沒有六個例子？

5.將下列各式化為最簡根式：		
(1) $\sqrt{48}=$	(2) $\sqrt{50}=$	(3) $\sqrt{192}=$
(4) $\sqrt{4\frac{1}{4}}=$	(5) $\sqrt{720}=$	(6) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=$

圖二十四

274. 學生：有。

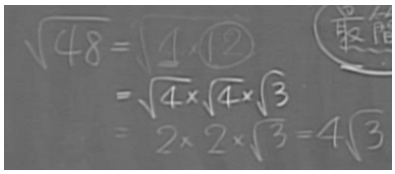
275. 老師：這個部分，我大概會講個兩題，一個 $\sqrt{48}$，一個 $\sqrt{50}$。$\sqrt{50}$ 會比較好看，$\sqrt{50}$ 最容易想，其他的大概要當作業，下次還有時間，我們會繼續往下教。你要認真聽，因為有這樣的東西，你才有辦法去了解，為什麼這種明明是長得很奇怪的數，我要變成新的，我今天還要教到它的運算，這個就比較困難。這邊($\sqrt{48}$)，于寧剛剛說 2 的四次方乘以 3，它是從質因數分解的概念思考。當然有人可能沒那麼快，或許有人會這樣想(圖二十六)，這樣可不可以？可以，來，我問一下，你寫出來是 $2\sqrt{12}$ 的舉手，或者是有人希望從這個 $\sqrt{50}$ 先做也 ok，$\sqrt{50}$ 比較容易想，多少乘以多少？來，大聲一點，25 乘以 2，是不是就這樣？那你會發現說，$\sqrt{25}$ 是多少？$\sqrt{a\times b}$ 不是叫 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 嗎？那你看看 $\sqrt{25}$ 叫多少？5，乘以 $\sqrt{2}$，答案它叫做 $5\sqrt{2}$，(圖二十五)這就是化簡的過程，從這裡到這裡，就叫做它的最簡根式，有沒有問題？



圖二十五

276. 學生：沒有。

277. 老師：聽得懂？好，到這裡聽懂的舉手？好，放下！$\sqrt{4\times12}$ (圖二十六)，為什麼我們不這樣子做，



圖二十六

因為當你這樣寫的時候，會卡到另外一個問題：4 可以跑出去，但是你確定 12 一定是最簡了嗎？12 裡面還能不能拿出 4？多少，4 乘以 3，它可不可以還有東西跑出來？可以，它就可以繼續再往下做。所以你看如果這樣做，$\sqrt{12}$ ，還要繼續寫成這樣，那就回歸到剛剛的定義，什麼叫做最簡根式？最簡單的就是你根號裡面的東西，確實都不能再跑出去。否則你寫一個 $\sqrt{12}$ ，它不是最簡根式，$\sqrt{12}$ 還是可以再跑出去。伯容，這樣你清楚嗎？確定了，那你看 $\sqrt{4}$ 叫多少？2，再乘以 $\sqrt{3}$ ，等於幾個 $\sqrt{3}$ ？

278. 學生：四個。

279. 老師：就會變成四個 $\sqrt{3}$ ，這樣有沒有問題？

280. 學生：沒有。

281. 老師：這樣了解？

282. 學生：了解。

283. 老師：其他的部分，我們就把它當成作業，下次我會繼續上。今天的課就暫時上到這邊，有問題，記得同學要互相討論，然後再來問老師。好，我們今天課就上到這邊，好，下課。

參、教學說明

各位老師大家好，我今天拍攝的單元是平方根，任教的年級是八年級，本來無理數的引入，就國中學生的認知概念發展而言，就是一個比較困難的單元，我事先也預期會碰到一些問題。所以在整個課程的設計過程當中，一開始就計劃弄一些圖形的操作，讓孩子們去理解開根號數的存在，而且基本上很難用他目前所學過的數呈現出來。換句話說，基本上孩子今天學的，對他來講是全新的一個觀念跟想法。在這個過程中，你要做數系的擴充，必須打破學生舊有的認知結構，就是必須把它舊有的基模，做某

種程度的解體，然後再重新建立一個新的基模。所以在整個概念的發展上面，是比較令人頭痛跟傷腦筋的地方，我嘗試用正方形的拼圖，用拼的方式讓他去理解 $\sqrt{2}$ 的存在這個事實。然後第二個我利用電子計算機的方式，讓孩子理解 $\sqrt{2}$ 是很難把它以現有的認知結構，寫成一個可以表達出來的數。換句話說，他目前所寫出來的 1.414，只是 $\sqrt{2}$ 的一個近似值，就這個部分的呈現來講，我覺得孩子吸收的觀念還不錯，他可以接受 $\sqrt{2}$ 是定義出來的一個符號，代表的是一個數。接下來是有關於根號的四則運算定義的部分，我後來發現，如果只是透過定義的方式，讓孩子去了解符號操弄的話，在實際的運算上會碰到相當大的困難。所以我就想：能不能利用面積為 8 的正方形，把它切成四小塊，變成面積為 2 的四個小正方形。透過這樣方式的運算，讓它去跟代數的思維做連結，變成同類根式運算的概念。就今天整體的上課狀況來講，我覺得學生的反應不是很理想，因為跟我預期想像的不太一樣。雖然我事先知道引進無理數的概念，在整個教學上有它實際的困難，但就孩子的認知發展與今天的表現來講，我覺得比我預期中的困難還要多。不過比較可喜的現象是，透過對話的過程，不見得是老師跟學生一對一的對話，而是老師、學生跟學生之間，三方面的對話過程，可以把很多孩子的迷思概念給推導出來。然後再透過對話的過程當中，去澄清他的一些觀念，就這個部分的呈現來講，我覺得在今天的整個教學影像的錄影當中，可以看到確實透過這樣的發表跟互動的過程中，有些孩子的觀念，因為這樣的對話，而做了某種程度的澄清，我覺得這是一個可喜的現象。就整個的進度上來說，我覺得兩節課下來，孩子對於根號，就是無理數的掌握，還不是非常地純熟，仍然有讓他更熟練的空間。這個部分，我想會在接下來的幾節課當中，再給學生更多的引導跟互動，透過這樣對話的機制，讓他們的概念更為清楚。也能夠讓他們了解，這樣一個數系的擴充，到能夠非常熟練地操弄這些符號，我想是需要一段的時間。孩子不可能一下子，直接從定義就進來，然後馬上就能夠接受、馬上能夠熟練。我總是希望能夠透過一個循序漸進的過程，讓

他們去了解：無理數的運算，基本上除了定義之外，也可以透過圖形的操弄。加以理解之後，能夠更加的了解它實際所代表的含意，然後再進一步的推廣它使用的狀況。

就今天的課堂呈現方式，跟上次所拍攝的方式做對比的話，上次因為談的是線對稱的單元，它談到很多關於圖形轉換的概念，所以我就刻意會用資訊融入的方式去處理它，透過 power point 簡報資料的軟體，去呈現有關於數形之間轉換的關係。而這一次因為所談的單元，是有關於平方根的部分，它比較著重於在觀念的澄清跟理解，所以我就故意做一個比對，這一次就不選擇用資訊融入的方式去呈現整個教學的流程，而採用比較傳統，用講解跟問答的方式去處理。一方面也必須去思考，資訊融入的時機跟比較，也突顯出在這兩個不同單元教學之中，不一定為了刻意資訊融入而融入。事實上，老師們在選擇要用何種方式去呈現教學的內容跟單元的時候，有不同的思考點跟不同的呈現方式。今天我所展現的，是希望透過一些圖形的操作然後觀察，讓孩子們去理解無理數的運算跟符號操弄的關係，呈現的部分其實也有很多改進的空間。

最後，也要感謝教育研究院給我這樣的機會，能夠重新去思考自己整個教學的歷程，讓自己有很大的成長跟發揮的空間。也感謝四位教授，在整個教案編寫過程當中，給我相當大的啟發跟指導，盡可能怎樣把教學變得非常、非常地流暢。當然，過程當中，也有很多是超乎我們所預期的。譬如說，像今天拍攝的時間，當初在估計的時候也忘記了，其實昨天是清明節放假的關係，所以今天學生在課堂上精神的表現，就不是非常地理想，以致於在整個進度的掌握跟推動上，覺得不是像上次拍攝那麼地順暢。不管怎樣，這總是一個新的嘗試，期望能夠在這樣操作的過程當中，去連結無理數概念的發展，能夠有不同的發揮空間。也希望各個老師，如果對我的教學有其他不同的意見，能夠給我很大的指導跟指教，謝謝！我今天的教學說明，到此結束。

肆、教學後的省思

雖然在事前知道，這個單元是國中八年級學生所學習的全新內容，對國二學生而言，這不是很容易弄懂的單元。在幾次開會中也跟教授討論了教案中的細節，但是這次實施起來，感覺上，學生對於平方根的概念還是有很多不容易突破的地方。許多的迷思概念仍然存在，值得我們重新思考自己的教學。

整個流程來說，準備上還是有不充分的地方。如：教具的準備、學生反應的掌握等等。我在要不要用 power point 簡報軟體上，作了小小的掙扎。後來的考慮是：如果只是在課堂上呈現『面積為 2 的正方形』這件事情，以及後來『面積為 8 的正方形』可以拼成四個『面積為 2 的正方形』來導出『$\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$』的運算規律，會使得整個分組的活動及教室位置的安排產生困擾，況且在黑板上也可以呈現這樣的效果；再加上平方根這個單元是學生學習的全新內容，重點在於觀念的建立與釐清，因此還是教師的活動會比學生的活動來的多。幾番思量，因此就回歸到傳統的教學模式，而不以資訊融入的方式呈現。在這裡寫出來，是提醒自己以及其他老師，對於資訊融入教學的許多考慮面向，作為課程設計與活動的提醒。

另外，在教學過程中，學生的反應與我事先所預估的狀況有點出入。本以為學生已經比上學期更熟稔，互動方面也一直相處的不錯，應該可以上手才是。忽略了前一天是四月五日清明節，雖然不是星期一，卻仍然有『星期一症候群』，精神方面不是很集中，也造成了教學上一點困擾。

但是因為有考慮到學生可能會犯的錯誤，所以整個教學策略上，以引導學生互相針對同學的回答，來澄清觀念上的迷思，跟傳統老師與學生是一對一的互動模式有所不同。這個部分在關於『平方根的觀念』與『開根號的值』之間的差異，以及後來學

生上台作答所呈現的答案上，有相當的效果。我想這個部分，可以作為其他老師教授這個單元時的參考。

所有的版本對於無理數的教學，都放在八年級下學期，一出現平方根，很快就出現開根號的觀念與符號，其實這兩者之間也正是學生不容易弄清楚的地方。所以，針對整個教材來分析，或許在七年級下學期或是八年級上學期，就可以先將完全平方數的平方根，如：『$x^2=9$，$x=\pm3$，稱±3 為 9 的平方根』這樣的觀念先建立，然後八下再介紹開根號。或許這樣的安排，能夠解決學生的某些迷思概念，能改善如：『求$\sqrt{81}$的平方根』出現『±9』、求『$\sqrt{2}+\sqrt{8}=$？』出現『$\sqrt{10}$』這種標準錯誤答案的機會。

更進一步分析整個平方根的教材，很多版本只到根式的加減乘除基本運算，對於同類根式的運算，以及最簡根式的定義，有許多版本都沒有提到，更不用談到分母有理化因式的化簡了。這個單元的內容及學生對於數系擴充的概念，到高中是很重要的，因此，老師們可能要注意教學內容深淺度的掌握，以銜接學生上高中的需求。當然，教學上必須從學生的舊經驗中找尋相關的概念，而且必須打破學生的舊基模，轉而使用適當的方法建立學生的新基模，是這個單元教學上的重點。如何讓學生對於無理數觀念的掌握更清楚、更能操弄無理數的運算規則，做正確的運算，值得老師們下工夫研究。

還有，因為一直忙於聯繫的工作，以致於上課時手機忘了關機，出現錄影中途手機突然響起的窘境，這都是值得注意與改進的地方。

最後，仍然必須很誠心的感謝參與計畫的指導教授與輔導團夥伴，沒有大家的集思廣益，就沒有讓我有這麼好的成長機會。謝謝大家！

等差數列

壹、教學活動設計

一、**教學年級：**九年級下學期

二、**教 學 者：**台北縣福和國中 施燦宏 老師

三、**教學目標：**

1. 透過觀察，察覺數列前後項間的關係。
2. 認識等差數列，並推出其一般項。
3. 利用三數成等差的電腦軟體【智慧拼球】，熟練等差關係。
4. 能將等差數列應用於生活的實例中。

四、**活動目標：**

【第一節】

活動一：能認識數列的意義。

活動二：能認識等差數列的意義。

活動三：能認識等差中項的意義。

活動四：能推出等差數列的一般式。

活動五：能利用等差數列的一般式解決問題。

【第二節】

活動六：利用三數成等差數列來玩【智慧拼球】電腦軟體，以熟練等差數列關係。

活動七：能解決日常生活中與等差數列相關的問題。

五、**教學概要說明：**

學生已經學過數形關係，對數與數之間的關係有初步的了解，在觀察數的時候，能夠更敏銳。

本教學活動第一節課先介紹數列的意義，讓學生從觀察中察覺前後項之間的

關係，了解每個數列可能有不同的關係，再引入等差數列。透過前後兩項之間的關係，推導出等差數列的一般式，熟悉之後，再利用一般式去解決等差數列的問題。

第二節課利用三數成等差數列的方式，來玩【智慧拼球】電腦軟體，以熟練等差數列關係，進而布日常生活中的相關的問題，讓學生能夠應用等差數列的知識解決問題。

六、教學活動設計：

【第一節】

活動一：能認識數列的意義。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・數列的基本定義	1.介紹數列的樣式及注意要點。 <練習題 1>	・教師可提醒同學，數與數之間並不需要具備特殊關係，都可稱為數列。	・能了解數列的定義。
	2.觀察下面的數列，找出其中的規律，並根據規律，在括號中填上合適的數。 (1) 1,2,4,8,(__), …	・學生可能的解法： (1) $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=2$ ∴(　)=8×2=16 (2) 4(　)=8×8 ∴(　)=16	・能算出(__)=16
	(2) 1,4,9,(__),25,36	・學生可能的解法： $1=1^2,4=2^2,9=3^2,25=5^2$ ∴(__)$=4^2=16$	・能算出(__)=16

	(3) 1,5,9,13,(　),21,25	・學生可能的解法： (1) 1+4=5, 5+4=9 9+4=13, 13+4=(　) ∴(　)=17 (2) 13-4=9， 9-4=5 5-4=1, (　)-4=13 ∴(　)=17	・能算出(　)=17
	(4) 1,1,2,3,5,8,13,(　)	・學生可能的解法： 1+1=2, 1+2=3 2+3=5, 3+5=8 5+8=13, 8+13=(　) ∴(　)=21	・能算出(　)=21
	(5) 64,32,(　),8,4,2,1	・學生可能的解法： (1) 64÷2=32, 8÷2=4 4÷2=2, (　)÷2=8 ∴(　)=16 (2) 1×2=2, 4×2=8 32×2=64, 8×2=(　) ∴(　)=16	・能解出(　)=16

活動二~活動三：能認識等差數列及等差中項的意義。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・等差數列的意義	1.一個數列，若相鄰兩項的後項減前項的差為一個固定數，則稱此數列為等差數列。例如：1，5，9，13，17，21，25，29。	・教師可提醒同學，公差是相鄰兩項的後項減前項的差，順序及位置不要弄錯。	・能了解等差數列的意義，並能判別等差數列。
・等差中項的意義	2.若 a ,b ,c 三個數成等差數列，則： d=b-a=c-b ∴2b=a+c $\Rightarrow b=\frac{a+c}{2}$	・教師可提醒同學，等差中項可想成前後兩項的後項的算術平均數，也可想成是一個有奇數項等差數列的最中間項。	・能了解等差中項的意義，並能靈活運用。
・教師布題，學生解題	<練習題 2> 3.在 6 與 18 之間插入 1 個數，使其成為等差數列，則插入的數為何？	・學生可能的解法： (1) $\frac{6+18}{2}=12$ (2) $\frac{18-6}{2}=6$ 6+6=12	・能算出 $\frac{6+18}{2}=12$
	<練習題 3> 4.若 a ,b ,7 ,c ,e ,f , 27 是等差數列，求 a=？	・學生可能的解法： (1)$e=\frac{7+27}{2}=17$ $c=\frac{7+17}{2}=12$ $\frac{a+27}{2}=12$ ∴a=-3	・能算出 a=-3

		(2)公差=$\frac{27-7}{4}$=5 a=7-(5×2)=-3	
	<練習題 4> 5.求等差數列 6,12, 18, …的第 12 項及第 21 項？	・學生可能的解法： (1) 12=6+6， 18=6+6+6 =6+2×6 a_{12}=6+(12-1)×6 =72 a_{21}=6+(21-1)×6 =126 (2) 6=6×1 12=6×2 18=6×3 a_{12}=6×12 a_{21}=6×21	・能算出 a_{12}=72 a_{21}=126
	<練習題 5> 6.設 2,5,8, …,第 n 項是一等差數列： (1)試求其第 10 項？ (2)若其第 n 項為 50，試求 n 之值？	・學生可能的解法： (1) 5-2=3 a_{10}=2+3×(10-1) =29 a_n=2+3×(n -1) =3n-1 3n-1=50 ∴n =17	・能算出 a_{10}=29 n =17
	<練習題 6> 7.已知一等差數列的首項是 17，第 13 項是-1，求其公差。	・學生可能的解法： (1) d=$\frac{-1-17}{12}$=$\frac{-3}{2}$	・能解出 d=$\frac{-3}{2}$

		(2) $a_{13}= a_1+12d$ $-1=17+12d$ $\therefore d=\frac{-1-17}{12}=\frac{-3}{2}$	
	<練習題 7> 8.已知一等差數列是 33,18,3, …則第幾項是-417。	• 學生可能的解法： (1)假設 $a_n=-417$ $a_n=a_1+(n-1)d$ $=33+(n-1)(18-33)$ $-450=(n-1)(-15)$ $30=n-1$ $\therefore n=31$	• 能解出 n=31

活動四~活動五：能推出等差數列的一般式並利用一般式解決問題。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 等差數列一般式的推導	1.一數列若相鄰兩項的後項減前項的差為一個固定數，則稱此數列為等差數列。例如： 1，5，9，13，17，21，25，29 首項=a_1 公差(d) =後項-前項 $= a_2-a_1$ $= a_3-a_2$ $= a_4-a_3$ =…… 第一項 $a_1=1$ 第二項 $a_2=5=1+d$	• 教師可提醒同學，公差是後項減前項，不能顛倒，a_n 的公式要能熟記，並要能靈活運用。	• 能一步步推導出 $a_n=a_1+(n-1)d$

	第三項 $a_3=9=1+2d$ 第四項 $a_4=13=1+3d$ 第五項 $a_5=17=1+4d$ 第六項 $a_6=21=1+5d$ 第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$ <練習題 9>		
・教師布題，學生解題	2.已知一等差數列的第 2 項與第 6 項之和為 16，又第 5 項與第 9 項之和為 12，求首項、公差及第 25 項。	・學生可能的解法： (1) $a_2+a_6=16$…① $a_5+a_9=12$…② ②-① $6d=-4$ $\therefore d=\frac{-2}{3}$ 代入① $2a_1+6(-\frac{2}{3})=16$ $\therefore a_1=\frac{16+4}{2}=10$ $a_{25}=10+(25-1)(-\frac{2}{3})$ $=10-16=-6$ (2) $2a_1+6d=16$…① $2a_1+12d=12$…② ②-① $6d=-4$ $\therefore d=\frac{-2}{3}$ 代入① $2a_1+6(\frac{-2}{3})=16$ $\therefore a_1=\frac{16+4}{2}=10$ $a_{25}=10+(25-1)(-\frac{2}{3})$	・能解出 $a_1=10$， $d=-\frac{2}{3}$， $a_{25}=-6$

	<練習題 10> 3.設為等差數列 $a_3=8$, $a_8=-7$，求 $a_n=$？	$=10-16=-6$ • 學生可能的解法： (1) $a_1+2d=8$…① $a_1+7d=-7$…② ②-① $5d=-15$ $\therefore d=-3$ 代入① $a_1+2(-3)=8$ $\therefore a_1=14$ $a_n=14+(n-1)(-3)$ $=-3n+17$	• 能解出 $a_n=-3n+17$
	<練習題 11> 4.等差數列的首項為 1，公差為 2，則第 n 項=？第 10 項=？	• 學生可能的解法： (1) $a_n=a_1+(n-1)d$ $=1+(n-1)(2)$ $=2n-1$ $a_{10}=2(10)-1=19$	• 能解出 $a_n=2n-1$ $a_{10}=19$

【第二節】

活動六：利用三數成等差數列來玩【智慧拼球】電腦軟體，以熟練等差數列關係。

活動七：能解決日常生活中與等差數列相關的問題。

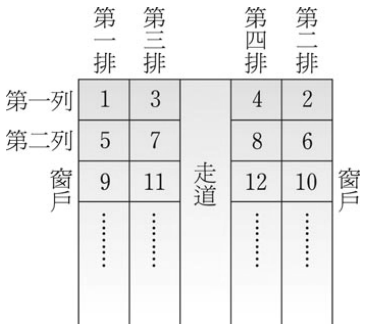
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 運用等差數列玩電腦遊戲『智慧拼球』	1.遊戲規則： (1) 利用電腦鍵盤的左右下三鍵控制球。 (2)只要 3 個或 3 個以	• 教師可提醒同學，3 個或 3 個以上的數排列，只要成直的或橫的一直線，即可得分，但是，斜	• 能利用「智慧拼球」的遊戲，將等差數列的關係，在急迫的時間下，明確判斷，並迅速擺放在

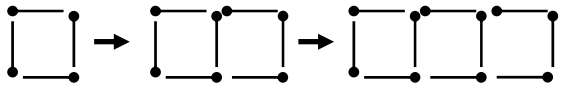
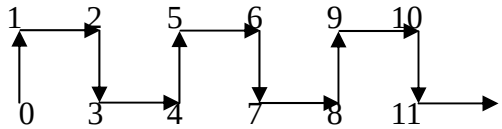
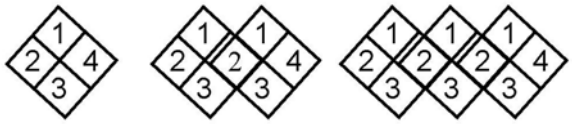
<table>
<tr>
<td></td>
<td>上的球，排成直的或橫的一直線，數字成等差數列，即可消掉畫面上的球，並得分。
(3)時間終了，或畫面的直行排到最頂端，均無法消去，遊戲即結束。</td>
<td>的一直線不能。</td>
<td>正確的位置。</td>
</tr>
<tr>
<td>・解決日常生活中與等差數列相關的問題</td>
<td><練習題 13>
2.附圖為自強號火車，其中一節車廂之座位表，請問座位 50 號、24 號的位置？
<table>
<tr><td></td><td>一</td><td>三</td><td></td><td>四</td><td></td><td>二</td></tr>
<tr><td>窗戶</td><td>1</td><td>3</td><td>走道</td><td>4</td><td>2</td><td>窗戶</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>7</td><td></td><td>8</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>9</td><td>11</td><td></td><td>12</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>13</td><td>15</td><td></td><td>16</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>・學生可能的解法：
(1) 50÷4=12…2
12+1=13
第 13 列右邊靠窗
24÷4=6
第 6 列右邊靠走道
(2)∵d=4
$a_n=a_1+(n-1)d$
$50=a_1+(n-1)(4)$
$n=\frac{54-a_1}{4}$ 要為整數
令 $a_1=2$ ∴n=13
第 13 列右邊靠窗。
又 $24=a_1+(n-1)(4)$
$n=\frac{28-a_1}{4}$ 要為整數
令 $a_1=4$ ∴n=6
第 6 列右邊靠走道。</td>
<td>・能解出：
50 號在第 13 列右邊靠窗，24 號第 6 列右邊靠走道。</td>
</tr>
</table>

・教師布題，學生解題	<練習題 14> 3.利用 1~30 的數字，任選三個數排出不同的等差數列。	・學生可能的解法： (1)公差+4： 9，13，17 2，6，10 35，39，43 (2)公差-4： 17，13，9 10，6，2 43，39，35	・能解出： 給定 a_1，d，能列出三項等差數列。
	<練習題 16> 4.用等長的吸管依次向右排出相連的三角形，如附圖，則第十一個圖形需要幾根吸管？ 	・學生可能的解法： (1)3，5，7… d=5-3=2 a_1=3 ∴a_{11}=3+2(11-1) =23	・能解出： 第 11 個圖形需要 23 根吸管。

附錄：學習單

等差數列學習單	
<練習題 1> 觀察下面的數列，找出其中的規律，並根據規律在括號中填上合適的數 (1) 1,2,4,8,(　　), ……	<練習題 5> 設 2,5,8, ……，第 n 項是一等差數列： (1)試求其第 10 項。 (2)若其第 n 項為 50，試求 n 之值
(2) 1,4,9,(　　),25,36	<練習題 6> 已知一等差數列的首項是 17,第 13 項是-1，求其公差。
(3) 1,5,9,13,(　　),21,25	<練習題 7> 已知一等差數列是 33,18,3,…則第幾項是-417？
(4) 1,1,2,3,5,8,13,(　　)	<練習題 8> 已知一等差數列的第 15 項是-25,第 32 項是-42,求第 24 項。
(5) 64,32,(　　),8,4,2,1	<練習題 9> 已知一等差數列的第 2 項與第 6 項之和為 16，又第 5 項與第 9 項之和為 12，求首項、公差及第 25 項。
<練習題 2> 在 6 與 18 之間插入 1 個數,使其成為等差數列，則插入的數為何？	<練習題 10> 設為等差數列，$a_3=8, a_8=-7$，求 a_n=_____？

<table>
<tr><td><練習題 3>
若 a ,b ,7 ,c ,e ,f , 27 是等差數列，求 a=____。</td><td><練習題 11>
等差數列的首項為 1，公差為 2，則第 n 項=_____，第 10 項=_____。</td></tr>
<tr><td><練習題 4>
求等差數列 6,12,18, ……的第 12 項及第 21 項。</td><td><練習題 12>
等差數列之智慧拼球</td></tr>
<tr><td><練習題 13>
附圖為自強號火車，其中一節車廂之座位表，請問座位 50 號、24 號的位置？
 
</td><td><練習題 21>
某路段朝南的房子的門牌號碼編法為：1,3,5,7,9,11, …；朝北的房子的門牌號碼編法為：2、4、6、8、10、…，則下列何者正確？
(A)朝南第 30 間房子為 57 號
(B)朝南第 30 間房子為 59 號
(C)朝北第 42 間房子為 81 號
(D)朝北第 42 間房子為 85 號</td></tr>
<tr><td><練習題 14>
利用 1~30 的數字，任選三個數，排出不同的等差數列。</td><td><練習題 22>
在 6 與 18 之間插入 2 個數使其成為等差數列，則插入的 2 個數為何？ _____</td></tr>
<tr><td><練習題 15>
有一等差數列的第 n 項為 3n-157，求：
(1)此數列的首項、公差及第 60 項？
(2)此數列的第幾項始為正數?</td><td><練習題 23>
在 6 與 18 之間插入 3 個數使其成為等差數列，則插入的 3 個數為何？ _____</td></tr>
</table>

<練習題 16> 用等長的吸管依次向右排出相連的三角形，如附圖，則第十一個圖形需要_____根吸管。 	<練習題 24> 在 6 與 55 之間插入 6 個數使其成為等差數列，則插入的第 3 個數為？ _____
<練習題 17> 用火柴棒排成正方形，拼法如下圖：則至少需要幾根火柴棒，才能拼成 35 個正方形？	
<練習題 18> n 個邊長為 4 的三角形，以重疊一個邊長為 1 的正三角形，依規律找出周長總和為_____。	
<練習題 19> 已知某路徑是以右圖的形式連續下去，則從 325 到 327 是何種路徑？	
<練習題 20> 如右圖每個正方形上分別標 1,2,3,4,求： (1)用 10 個 2×2 的正方形所拼成的圖形數字總和。 (2)用 n 個 2×2 的正方形所拼成的圖形數字總和。	

貳、教學實錄

1. 老師：各位同學，我們今天開始上等差數列，我這邊有一份學習單，你們先一人一張，有兩面，你看一下是不是有兩面，然後你看到以後，我們待會兒會按照順序講，你看到題目，自己先想看看應該怎麼做，有沒有多的？好，都有拿到，你先不要動筆。還少？來，我們開始第一個問題，看黑板，我們要上等差數列，什麼叫數列？它說，按照一定的順序排列的一列數就叫做數列，反正將數排出來，數與數之間有什麼關係都可以，比如說，1,2,3,4,5,6,常常看到，對不對？我們用什麼把它逗開，逗點對不對？這個是不是數列？
2. 學生：是。
3. 老師：可以，比如說，6,25,4,8,23,32。這個數列呢？
4. 學生：也是。
5. 老師：也是，所以，1,3,-1,-3,1,4。是不是數列？
6. 學生：是。
7. 老師：1,4,2,3,3,8,13,也是。有沒有規定數與數之間一定要有什麼關係才叫數列？
8. 學生：沒有。
9. 老師：沒有，所以，只要我隨便寫，比如說，5,6,7,13,25。這叫數列嗎？
10. 學生：對。
11. 老師：都是，好，來，大家接下來看<練習題1>(見圖一)，如果這一數列，它這樣寫的話，你看一下中間有沒有什麼關係？知道的話，可以把它填上去，我知道它的順序的關係，2 倍，16，為什麼是 16？

<練習題 1> 觀察下面的數列，找出其中的規律，並根據規律在括號中填上合適的數 (1) 1,2,4,8,(　　),……
圖一

12. 學生：對。

13. 老師：為什麼乘上 2 倍？
14. 老師：後項是前項的 2 倍，後面這一個數是前面數的 2 倍，什麼意思？這數乘以 2 就等於它，是不是？這麼剛好，大家都這麼厲害，是，所以下面我如果繼續求的話，它是多少？
15. 學生：32。
16. 老師：32，再來。
17. 學生：64。
18. 老師：64，如果繼續求的話，我隨便問，比如說，它第 13 項等於多少？20 吧，繼續問下去的話，是你要乘滿多的，待會兒我還會告訴你，怎樣做會比較方便，來，你再看下一個，這一個呢(見圖二)？

(2) 1,4,9,(　),25,36
圖二

19. 學生：16。
20. 老師：也是 16，凡是有空格的都填 16，對不對？
21. 學生：對。
22. 老師：對，剛好也是 16，你怎麼知道？
23. 學生：平方。
24. 老師：平方，怎麼看？
25. 學生：1 就是 1 的平方，4 就是 2 的平方。
26. 老師：1 是 1 的平方，4 是 2 的平方，9 是 3 的平方，這數先不看，後面這數(25)有剛好是 5 的平方嗎？
27. 學生：有。
28. 老師：這個(36)呢？
29. 學生：6 的平方。
30. 老師：所以這格應該填？

31. 學生：4 的平方。

32. 老師：為什麼？變成1^2，2^2，3^2，4^2，5^2，6^2，可以嗎？很簡單，好，你再看下一題(見圖三)，你不要再填 16 了，不填 16 就填 17，是 17 嗎？

(3)1,5,9,13,(　　),21,25
圖三

33. 學生：間隔都是 4。

34. 老師：間隔都是 4。

35. 學生：是。

36. 老師：為什麼，它加 4 剛好等於後面的數嗎？

37. 學生：對。

38. 老師：每一數都有這關係嗎？有。如果我假設它是 17 的話，這個加 4 有沒有剛好是 21？

39. 學生：有。

40. 老師：有，如果剛好是 21 的話，所以 17 是沒錯的，好，我們再看下面這題(見圖四)。

(4) 1,1,2,3,5,8,13,(　　)
圖四

41. 學生：21。

42. 老師：21 啊！我找人來講，為什麼？好，盧大鈞。

43. 大鈞：我要上去講嗎？

44. 老師：好，上來講沒關係。

45. 大鈞：就是那個數是前面兩數相加，然後 3=1+2，然後 5=2+3，8=3+5，13=5+8。

46. 老師：好。

47. 大鈞：看到這一項就等於 8+13，所以答案沒問題。

48. 老師：你怎麼知道？為什麼知道有這種規律？

49. 大鈞：就慢慢看，慢慢加出去。

50. 老師：慢慢加。

51. 大鈞：對啊！
52. 老師：如果它中間出來，刪掉一兩項，你可不可以知道？
53. 大鈞：就慢慢推看看。
54. 老師：就比較難了。
55. 大鈞：有的話就是了。
56. 老師：那我再找一個後面的數，繼續往後推好不好？
57. 學生：ok。
58. 老師：這個 21，來，徐崇迪，再推個兩項吧！自己算看看！
59. 崇迪：老師，我不會。
60. 老師：盧大鈞，你剛才講說那規則是怎樣？
61. 大鈞：就是它會等於前面兩項相加。
62. 老師：34 怎麼來的？
63. 大鈞：就相加。
64. 老師：誰加誰？
65. 大鈞：34=13+21。
66. 老師：然後呢？55。
67. 大鈞：然後，21+34=55。
68. 老師：好，再看底下的，這一個題(見圖五)呢？

(5) 64,32,(　　),8,4,2,1
圖五

69. 學生：16。
70. 老師：又是 16，為什麼？我找人來做，莊文揚，他們說 16 啦，那你覺得呢？
71. 文揚：16。
72. 老師：為什麼？除以 2。上來講，對啊！
73. 文揚：32 就是 64 除以 2。

74. 老師：對不對？

75. 學生：我聽不到。

76. 老師：太小聲了。

77. 學生：講什麼，我聽不到。

78. 老師：好，沒關係，他說前項除以 2 會剛好等於後項，這一個我不知道是不是除以 2 等於它，可是我發現，後面也是相同規則，對不對？所以知道這個規則是沒錯的，將 32 除以 2，等於 16 對吧！這個 16 沒錯，我是不是還要再驗證看看？16÷2=8，對吧！那就沒錯。我們再看下一張投影片，我們就來講等差數列：一個數列的相鄰兩項，它的後項減掉前項，如果等於一固定的數，則此數列就稱為等差數列，可以嗎？所以我下面要舉一個例子，這是等差數列嗎(見圖六)？

例如：1,5,9,13,17,21,25,29
圖六

79. 學生：是。

80. 老師：是啊！這兩項(1,5)來講的話，誰是後項？

81. 學生：5。

82. 老師：5 是後項，排在後面那一項叫後項，如果後項減前項，所以 5-1 等於多少？

83. 學生：4。

84. 老師：4，我減了是不是都會等於 4？這兩項的後面兩項，5 和 9 的話，後項減前項是多少，9-5，還是 4 嗎？

85. 學生：是。

86. 老師：沒錯，所以它是不是一個等差數列？

87. 學生：是。

88. 老師：是，好，再來介紹一個名詞叫做「等差中項」，如果知道這個名詞，後面在算題目的時候，會比較容易，來，什麼叫等差中項？如果有三個數 a,b,c 成

等差，中間這個數就稱為等差中項，等差中項是指哪個數？

89. 學生：b。

90. 老師：b 就稱為 a,b,c 這個數列的等差中項，如果以公差 d 來表示，公差是後項減前項，對不對？所以 d 可以寫成誰減誰？後項減前項，b-a 可不可以？

91. 學生：可以。

92. 老師：可以，也可以寫成 c-b，會相等嗎？(見圖七)

d=b-a=c-b
圖七

93. 學生：會。

94. 老師：會，所以這一個式子把它框起來，前面等於 d 先不理它，然後我的 b 移項放在一起可不可以？我把它移到左邊去，移過來後有幾個 b？

95. 學生：2 個 b。

96. 老師：2 個 b 就等於多少？a+c，會發現 b 是中間那一項，等於前後兩項相加，可以嗎？可是要求的是等差中項，是中間那一項，只要 1 倍，現在是 2 倍，對不對？所以我要怎樣？

97. 學生：除以 2。

98. 老師：除以 2，所以就等於多少？$\frac{a+c}{2}$，有沒有覺得很熟悉，是什麼公式？

99. 學生：地形公式，三角形。

100. 老師：地形公式，三角形。還有沒有別的答案？

101. 學生：中線。

102. 老師：中線，好。

103. 學生：平均數。

104. 老師：平均數，對不對？你在算兩數的平均時，是不是將兩個數相加除以 2，等於介於中間那個數，對不對？比如說，6、8，等差中項是誰，中間這數如果是 b 的話？

105. 學生：7。

106. 老師：b=$\frac{6+8}{2}$，多少？14÷2=7，好，等差中項知道了，再試看看這題(見圖八)。

<練習題 2> 在 6 與 18 之間插入 1 個數，使其成為等差數列，則插入的數為何？
圖八

107. 學生：12。

108. 老師：12，我找人上來寫，徐時雨，來。可以再寫大一點，好，對不對？

109. 學生：對。

110. 老師：把它看成什麼數了？

111. 學生：平均數。

112. 老師：它的平均數就是它的等差中項，對不對？題目說 6 和 18 之間插入一個數，使成為等差數列，也可以寫成 6 和 18 中間插入一個數 b，要成等差，所以中間這個數就成為這個等差數列的等差中項，所以我就可以怎樣？$\frac{6+18}{2}$，對，如果我不要這樣算，可不可以用別的方法算？

113. 學生：相減就是公差。

114. 老師：算公差，公差是多少？

115. 學生：18-6。

116. 老師：18-6，除以 2，為什麼要除以 2？

117. 學生：因為有兩個間隔。

118. 老師：兩個間隔，第一項加一個公差，再加一個公差，所以加了 2 個公差之後，會等於 18，所以我中間到底是差多少？是不是相減，然後再除以 2？因為只要一個，一個公差就等於多少？

119. 學生：6。

120. 老師：6，如果公差是 6，再加 6，6+6 等於多少？

121. 學生：12。

122. 老師：12，所以你會發現不只有一種算法，好，來，我們再往後看這題(見圖九)，來，這題稍微複雜一點，不只可以問 a，是不是還可以問別的數？

<練習題 3> 若 a ,b ,7 ,c ,e ,f , 27 是等差數列，求 a=_____。
圖九

123. 學生：對。

124. 老師：你們先算看看，我找人來寫，你甚至可以算出每一個未知數代表什麼數，對不對？a、b、c、e、f，是不是都可以寫？大家試試看，可以推看差幾個公差，或者你要用等差中項算。好，試看看，我找一個人上來寫，來，白心恩，你直接上來寫，其他人還是繼續寫，沒關係，按照你自己的意思算就好了。

125. 心恩：我可以先算在這邊，然後再寫？

126. 老師：可以啊，都可以。方法不只一種，你可以用自己的方法。好，要不要解釋一下？好，其他人看前面，解釋一下。

127. 心恩：首先算出 e，e 就是 7 到 27 五個數裡面的等差中項，所以，e 就等於 $\frac{7+27}{2}=17$，然後再算出 c，然後 c 也是 7 跟 17 的等差中項，所以 c 會等於 12，那我就可以算出 7，c，e 的公差是 5，那 a=7-2(5)，就等於-3。

128. 老師：聽懂嗎？很好，我覺得很不錯，他一開始不是利用公差去推，而是用等差中項去算，看到已知這兩個數加上中間項，一共有幾個數？1、2、3、4、5，五個數，對不對？最中間項 e，是不是等於兩個相加除以 2，所以他先算出 17，再來 c 又是這兩個數的等差中項，所以這兩個再相加除以 2，12，最接近這兩個數，相差多少？5，在等差數列中，我往後推要加一個公差，對不對？往前就減掉一個公差，減掉 5，所以我可以算出來，我也可以不算 b，直接跳去算 a，對不對？減兩個公差？減 10，所以答案多少？-3。還有沒有人用別的方法算出來，有沒有？沒關係，我們再繼續看，還有沒有別的

方式，來，你再看第 4 題(見圖十)，它說有一個數列 6,12,18,一直下去，不確定有幾項，求第 12 項是多少？第 21 項是多少？想看看，如果有看出規則，你也不用再加什麼也是很快，看你怎麼想，來，林宇德，先算第 12 項，有沒有人跟他不一樣的算法？他是往後加幾個公差，李亞寧有沒有？好，對不對？

<練習題 4> 求等差數列 6,12,18,……的第 12 項及第 21 項。
圖十

129. 學生：對。

130. 老師：他是這樣想，因為他去找最接近的這兩個數，相減是 6，所以知道公差等於 6，對不對？我要往後推的話，第 1 項到第 12 項中間差幾個公差？

131. 學生：11 個。

132. 老師：11 個，你怎麼知道？比如說 a,b,c 三數成等差，第一項和第二項差 1 個公差，第二項和第三項也差一個公差，第一項推到第三項，要加幾個公差？2 個，所以加到第四項的話，就要加幾個公差？3 個公差，加到第 12 項，是不是加它的項數減一個公差，所以第 12 項應該加幾個公差？11 個公差，所以他這邊寫 6+6×(12-1)，所以這樣算出來是 72，第 21 項是不是要往後推 20 個公差，所以等於多少？126，可以嗎？這個觀念會吧!還有沒有別種算法？數學不一定只有一種方法，要用正統的方式算，是一定可以算出來，也許有別的方法，會更好更直接。

133. 學生：我就是說第一個數是 6，第二個數是 12，第三個是 18，等於說是用 6 的倍數在算，所以第 12 個就是 6 乘於 12，等於 72。

134. 老師：就算完了。

135. 學生：然後第 12 個就乘於 6，就不用再算什麼差距乘於多少。

136. 老師：很好，看得懂嗎？他是這樣想的，第一個數 6，第二個數 12，第三個數 18，

對不對？6 剛好是 6 的 1 倍，12 剛好是 6 的 2 倍，那 18 剛好是 6 的 3 倍，所以我要算到第 12 項，應該是 6 的幾倍？12 倍，所以就直接算出 72，對不對？那第 21 項是 6 的幾倍？21 倍，所以就等於多少？126，不錯，這一題用這種方法感覺上更快，但不是每一題都會剛剛好，聽懂嗎？這一題是有一點像特例一樣，好，我們再看下一題，第 5 題(見圖十一)，它也是一個等差數列，現在一直到第 n 項，先求第 10 項是多少？再求如果第 n 項是 50，那這 n 是多少？就是第幾項？

<練習題 5> 設 2,5,8,……,第 n 項是一等差數列： (1)試求其第 10 項。(2)若其第 n 項為 50，試求 n 之值。
圖十一

想看看，第(1)小題應該比較簡單，後面比較麻煩。好，我再找一個人，施羽，好，沒關係，上來做看看，大家一起算看看，還有沒有別的方法，這是他的方法，那個 50 是那個數，不是項數，不是求第 50 項，是第 n 項剛好 50，可以，好，你講一下。

137. 學生：我是說…。

138. 老師：那個，先看前面。

139. 學生：因為第(1)小題我是想說，首項是 2 嘛，然後它的公差為 3，然後它到第 10 項的話，就是 2 加上 3 的 9 倍等於 29，然後第(2)小題，因為它說第 n 項等於 50，它也是首項加上，就是第 n 項的話，有 49 個公差，然後乘於 3，所以就是這樣子。

140. 老師：你可能把題意弄錯了。

141. 學生：他還點頭。

142. 老師：沒關係，你先下去，我排到這一項的時候，後面是不是都加 3、加 3，對不對？這是第 n 項，那第 3 項是加兩個公差，第 n 項加幾個公差？

143. 學生：n-1 個。

144. 老師：n-1 個公差，對不對？公差等於 3，對不對？所以第一項是 2，往後推 n-1 個公差會等於多少？50，所以你現在求成第 50 項的數，我們現在問的是什麼？項數，不是第 50 項，你了解嗎？

145. 學生：會。

146. 老師：解一元一次方程式，很簡單 2+3n-3=50，然後呢？3n 等於多少？移過去。

147. 學生：51。

148. 老師：51=3n，n 就等於多少？

149. 學生：17。

150. 老師：17。17 是什麼意思？

151. 學生：第 17 項。

<練習題 6> 已知一等差數列的首項是 17，第 13 項是-1，求其公差。
圖十二

152. 老師：第 17 項會剛好等於 50，對吧！你算對了嗎？算對的舉手，好，放下，我們再看第 6 題(見圖十二)，一個數列的首項是 17，然後第 13 項是-1，求公差是多少？這題應該很容易，一個人上來，蘇憶媞，可以了嗎？你們算了這麼多題目，應該可以自己慢慢推導，知道怎樣算會比較快，沒關係，照你的意思寫出來就好了，第 13 項是第 1 項往後推，加幾個公差？

153. 學生：12 個。

154. 老師：12 個公差，對不對？那公差可以假設是 d，所以加了幾個 d？12 個 d，17 就加了 12 個 d，會剛好等於多少？-1，d 會算嗎？你先把它列式列出來，第一項 17 嘛，對不對？要加幾個公差，12 個，你就加 12 個 d，是不是直接加在 17 的後面，12 個公差，等於多少？-1，(17+12d=-1)會算了嗎？我們算出來的公差，有沒有規定說一定要是整數？

155. 學生：沒有。

156. 老師：正數？負數？

157. 學生：沒有。

158. 老師：都可以，對不對？

159. 學生：對。

160. 老師：分數可不可以？

161. 學生：可以。

162. 老師：可以，你算出來的答案可以再約分，不懷疑你自己算的好像不是整數，不是整數應該還是對的，除非真的算錯了，好，所以他差算出來，是等於$-\frac{2}{3}$，對不對？

163. 學生：錯。

164. 老師：錯？

165. 學生：老師也不知道，錯，錯。

166. 老師：應該要怎樣？

167. 學生：老師，在下面。

<練習題 7> 已知一等差數列是 33,18,3,…則第幾項是-417？
圖十三

168. 老師：好，沒關係，她已經很努力了，應該同除以多少？同除以 12，我這邊要變成一個公差，對不對？所以一個公差就等於多少？剛好顛倒，是$-\frac{3}{2}$，好，沒問題吧！好，我們再看第七題(見圖十三)，一個等差數列 33,18,3,…，第幾項是-417？林哲立，可以嗎？隨便你，其實後面也有公式可用，我只是覺得，一開始不要套公式，有些題目很簡單，用推的方式就可以推的出來了，有沒有算出來？

169. 學生：有，算出來了。

170. 老師：31，對不對？

171. 學生：對。

172. 老師：好，講一下。

173. 學生：這是第 n 項，然後這是第一項，這是公差，所以依照公式來說是這樣子，然後就是這樣(見圖十四)。

假設 a_n=-417 $a_n=a_1+(n-1)d$ -417=33+(n-1)(18-33) -450=(n-1)(-15) 30=n-1 ∴n=31
圖十四

174. 老師：好，好，下去。

175. 學生：我背公式，只有我知道。

176. 老師：我知道，發言人，我再講一次，你不知道有幾項，就假設有 n 項，對不對？

177. 學生：對。

178. 老師：第 n 項是第 1 項往後推幾個公差？

179. 學生：n-1 個。

180. 老師：(n-1)個公差，對不對？所以，第 n 項是-417，第 1 項是 33，n-1 個。公差是多少？是這樣算來的，所以是多少？

181. 學生：-15。

182. 老師：-15，所以你答案到底對不對？

183. 學生：答案對，中間過程…。

184. 老師：所以這是-15，-15 除過去，$\frac{-450}{-15}$=30，這邊錯了。

185. 學生：資優生就是這樣。

186. 老師：太厲害了，然後 n-1 就等於 30，再將-1 移過去等於多少？31，答案是對，中間過程有些粗心。

例如：1,5,9,13,17,21,25,29
圖十五

187. 學生：這叫高手。

188. 老師：其實大家已經比較熟悉等差數列，如果項數很多的話，就可以用往後推的方式，就是等差數列的一般式的推導，什麼叫等差數列？這是一個等差數列(見圖十五)，剛才那一題對不對？好，來，我們去分析看看，我現在排

在第一個數，我就稱第 1 項，可不可以？第二個數叫第 2 項，第三個數叫第 3 項，所以我現在找 6 項來看，這 6 項的話，中間的關係是什麼？往後+4，對不對？我第 1 項到第 6 項的話，第 1 項+4，就到第 2 項，對不對？第 2 項+4，就到第 3 項，第 3 項+4 就等於第 4 項，是不是這樣子？所以 5 換成 1+4，對不對？9 是前面來的，我把它放進來，1+4 再+4，對不對？

189. 學生：對。

190. 老師：所以 9 是 1 加上幾個 4？2 個，這裡是 1+4+4，是剛才前面的，對不對？

191. 學生：對。

192. 老師：那我就放進來，又+4 了，所以 1 加幾個 4？

193. 學生：3 個。

194. 老師：3 個 4，你會不會再類推，3 個 4 了，對不對？那到這裡的話，我還要再加 4 嗎？又可以 1 加上幾個 4？4 個 4，有沒有感覺了？

195. 學生：有。

196. 老師：什麼感覺？

197. 學生：很棒的感覺。

198. 老師：第 2 項的話，這裡沒寫，代表乘於 1，對不對？第 2 項加一個 4，第 3 項加 2 個 4，第 4 項加 3 個 4，所以第 6 項應該加幾個 4？5 個，對不對？所以第 n 項應該加幾個 4？等於 1+4(n-1)，對不對？

199. 學生：對。

200. 老師：那 4 代表什麼？公差，所以是不是可以把它轉換成一個公式化的式子，後面就是我剛才導出來的，對不對？

201. 學生：對。

202. 老師：每次在寫第幾項，是不是很麻煩，第 1 項、第 2 項、第 3 項，字太多了，

對不對？而且很慢，我乾脆用 a，然後底下寫一個足標，用 a_1 代表第 1 項，類推的話，我底下就寫成什麼？

203. 學生：a_2。

204. 老師：a_2，對不對？再來 a_3, a_4, a_5, a_6，可以嗎？好，所以首項是不是直接 a_1？

205. 學生：對。

206. 老師：公差是不是後項減前項？

207. 學生：對。

208. 老師：所以我的末項，末項就是第 n 項，a_n 的推導就是我剛才講的那一種方式。或者也可以用另一種方式看：公差是 a_2-a_1，對不對？也可以寫成 a_3-a_2，也可以寫成 a_4-a_3，還有很多，對不對？所以 $a_2=a_1+d$，$a_3=a_2+d=a_1+d+d$，對不對？就等於什麼，a_1 加幾個 d？

209. 學生：2 個。

210. 老師：2 個公差，可以嗎？再來的話，a_4 就可以直接推了嗎？反正一直推過去，a_1 加幾個 d？3 個 d，所以一直下來的話，a_n 要 a_1 加幾個 d？(n-1)d，剛才大家是不是幾乎都可以寫的出來這個式子了嘛，對不對？若項數很大的話，用這種方法會比較快，好，來，你們再往後看，第 9 題(見圖十六)，比較複雜一點，有一個等差數列，第 2 項和第 6 項的和是 16，第 5 項和第 9 項的和是 12，求首項，就是第 1 項，第一項又稱首項 a_1，公差 d、第 25 項 a_{25}，算看看，難度增加了，可以嗎？第 2 項用 a_2，第 6 項我用 a_6，剛學的符號，第 5 項 a_5，第 9 項 a_9，可以嗎？$a_2+a_6=16$，對不對？$a_5+a_9=12$，會了嗎？這題要用什麼方式算？

<練習題 9> 已知一等差數列的第 2 項與第 6 項之和為 16，又第 5 項與第 9 項之和為 12，求首項、公差及第 25 項。
圖十六

211. 學生：等差。

212. 老師：聯立方程式對不對？有沒有人要上來寫？錢思翰你上來，寫字要寫大一點，讓大家看得清楚，好吧，那你先停下來好了，我們這一題先上到這裡，待會下一節課我們繼續完成，下一節課的題目，變化性會比較大一點，好，下課！

213. 學生：起立，立正。

214. 老師：好。

215. 學生：謝謝老師。

216. 老師：好，謝謝。

【第二節】

217. 學生：老師好。

218. 老師：好，錢思翰你繼續寫，大家剛才下課有沒有把它完成？

219. 學生：有。

(1) $a_2+a_6=16$…①

$a_5+a_9=12$…②

②-①

$6d=-4$

$\therefore d=\frac{-2}{3}$ 代入①

$2a_1+6(-\frac{2}{3})=16$

$\therefore a_1=\frac{16+4}{2}=10$

$a_{25}=10+(25-1)(-\frac{2}{3})$

$=10-16=-6$

圖十七

220. 老師：還有誰寫完的，也可以上來寫，他是第一次寫那麼整齊(見圖十七)，你們看一下他寫的，滿特別的，如果我來解，不一定會照他的方式去做，也是用聯立方程式，這道式子為什麼是這樣？你們有沒有想過，為什麼第二式減第一式，會等於 3d？

221. 學生：差 3 個公差。

222. 老師：再往後推 3 個 d，這裡差 3 個 d，這裡也差 3 個 d，6d=-4，所以 $d=\frac{-2}{3}$。不錯，因為 a_1 不知道，所以他又把 d 代到第一式子去，所以 $a_2=a_1+d$，$a_6=a_1+5d$，兩項和為 16，到這裡看得懂？

223. 學生：可以。

224. 老師：那這一項怎麼來的？

225. 學生：我代公式。

226. 老師：代公式。

227. 學生：代到第①式。

228. 老師：代到第①式去，對不對？這是代入第①式，$a_2=a_1+d$，對不對？a_6 等於 a_1 再加幾個 d？

229. 學生：5 個。

230. 老師：5 個公差，他令 $a_1=x$，然後 $d=\frac{-2}{3}$，這五個 $\frac{-2}{3}$，再合併同類項，所以 $x=10$，$a_1=10$ 對不對？a_{25} 就是 a_1 加幾個 d？

231. 學生：24 個。

232. 老師：24 個，$10+24(\frac{-2}{3})$等於多少？-6，答案對吧。如果你不這樣算，可以 $a_2=a_1+d$、$a_6=a_1+5d$，對不對？合起來等於 16，再來，a_5 是 a_1 加幾個 d？(見圖十八)

233. 學生：4 個。

234. 老師：4 個公差，a_9 是 a_1 加幾個 d？

235. 學生：8 個。

236. 老師：8 個 d，合起來多少？12。你把它化簡一下，是 $2a_1$ 加上幾個 d？

237. 學生：6 個。

238. 老師：6 個公差，所以多少？16，那這式(第②式)呢？$2a_1$ 加幾個 d？12 個，等於多少？12，到這裡的話，就跟他剛才算的差不多，只是說剛才是看不到 a_1，對不對？a_1 我回頭用第二式減掉第一式，6d 就等於多少？-4，所以 d 就等

(2) $2a_1+6d=16$…①

$2a_1+12d=12$…②

②-①

$6d=-4$

$\therefore d=\frac{-2}{3}$ 代入①

$2a_1+6(\frac{-2}{3})=16$

$\therefore a_1=\frac{16+4}{2}=10$

$a_{25}=10+(25-1)(-\frac{2}{3})$

$=10-16=-6$

圖十八

於多少？$\frac{-2}{3}$，再將 d = $\frac{-2}{3}$ 直接再代入第一式，a_1 就算出來了，再將 a_1 及 d 代入 a_{25}，我是覺得他這個觀念很棒。

<練習題 10> 設為等差數列，$a_3=8, a_8=-7$，求 a_n=_____？
圖十九

來，我們再看下面一題，第 10 題(見圖十九)。

239. 老師：我現在就是把它變成符號了，而且用 a_n 是第 n 項，不知道 n 是多少，可是把這個數變成一般式，求它的一般式是多少，如果 $a_3=8, a_8=-7$，那 a_n 是多少？試看看，鄭毅忠，可以嗎？來，試看看。他是把它先化成一般式，$a_3=a_1+2d$，對不對？然後 $a_8=a_1+7d$，再將它聯立解二元一次方程式，a_1 就可以消掉，大家覺得這種方式找 a_n，對不對？這是一般式，如果知道一般式，隨便要求哪一項，我就直接代入 n 代表的數，是不是會算的比較快？

240. 學生：對。

241. 老師：你先來解釋，大家一起來看(見圖二十)。

242. 學生：就是 a_3，然後 $a_3=a_1+2d$。

243. 老師：再大聲一點。

244. 學生：然後這個是 a_8，$a_8=a_1+7d$，然後用聯立第②式減去第①式，

(1) $a_1+2d=8$…① $a_1+7d=-7$…② ②-① $5d=-15$ $\therefore d=-3$ $a_n=a_1+(n-1)(-3)$
圖二十

就知道公差的值是-3，然後答案是 $a_n=a_1+(n-1)(-3)$。

245. 老師：好，謝謝他，做到這裡知道，d=-3 對不對？$a_n=a_1+(n-1)d$，$a_1=14$ 這地方是不是還可以再乘開，乘開等於多少？14-3(n-1)，-3 乘進來，兩個數都要乘，對不對？然後等於 14-3n+3，對不對？所以最後等於多少？-3n+17，習慣上，會將未知數放前面依降冪排列，所以 $a_n=-3n+17$，若是求 a_{10}，可以往後推兩個 d，也可以直接代 n=10，$a_{10}=-3(10)+17$，所以答案是多少？-13，速度會比較快，所以如果已經將它化成一般式，並將它化簡，可以嗎？

246. 學生：可以。

247. 老師：好，來，我們再往後看，第 11 題(見圖二十一)，這一個應該比較簡單，首項是 1，公差是 2，第 10 項，這題直接代數就好了，對不對？那第 n 項是多少？來，游子賢，可以嗎？

<練習題 11> 等差數列的首項為 1，公差為 2，則第 n 項=_____，第 10 項=_____
圖二十一

248. 學生：我要去代打，我要去代打。

249. 老師：待會兒可以叫李學麟，你可以要玩個智慧拼球，等差數列如何運用呢？以前不是有一個單元叫「數形關係」，去推數形的規則，我後面也有幾個題目是數形關係，從第一個圖形到第二個圖形之間有什麼關係？第一個圖形到第三個圖形之間若有等差的關係，而且知道公差是多少，就可以把它變成等差數列，但是所有的數列是不是只有一種等差數列的關係？

250. 學生：不是。

251. 老師：不只吧，我們現在這一節只告訴你等差數列，對不對，還有沒有別的？例如等比數列，有沒有聽過？另外還有一個名稱叫做級數，等差有等差級數，等比有等比級數，什麼叫級數？

252. 學生：全部加起來。

253. 老師：就把它加起來，數列是用逗點把它逗開，排列成一列，對不對？級數的話，比如說：$a_1+a_2+a_3$，這就是級數，總共加了幾項？3 項，就用 S，總和對不對？三項的總和等於 S_3，這就是級數。你好了嗎？你先來講好了。

254. 學生：n 是項數，然後它是求 a_n，因為 $a_1=1$，然後 $d=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-1+2n$，這就是第 n 項的一般式，然後 $a_{10}=-1+2(10)=19$。

255. 老師：對不對？

256. 學生：對。

257. 老師：對，很好，第 10 項也可以用 a_{10}這樣寫，可以嗎？好，這個沒問題，我們來看下面的題目。

258. 學生：智慧拼球。

259. 老師：終於等到了。

260. 學生：李學麟家裡有，李學麟沒有來。

261. 老師：他是電動高手，對不對？

262. 學生：昨天苦練，就為了今天玩這一個，昨天沒有睡覺。

263. 老師：來，我們來看一下怎麼玩。

264. 學生：珠光銀幕拉下來嗎？

265. 老師：好，拉下來。

266. 學生：李學麟，快一點。

267. 老師：有沒有人要玩？會玩吧。

268. 學生：李學麟、李學麟，老師，李學麟啦。

269. 老師：它怎麼玩，待會兒掉下來的數字球，你只要直的疊成三個或更多球，然後它是成等差，球就會自動消掉，或者是橫的數成等差，也可以。

270. 學生：斜的。

271 老師：斜的不行。

272. 學生：黃金公差。

273. 老師：如果成黃金公差，公差等於規定的數，得分數可能會最高，右下角有累積分數。

274. 學生：李學麟啦，李學麟。

275. 老師：有沒有人要玩？

276. 學生：李學麟。

277. 老師：待會兒控制鍵盤的左右及下，可以哦！

278. 學生：老師，李學麟等今天等很久了，快點啦！李學麟，給你機會。

279. 老師：好，不客氣，我按確定，你控制左右鍵，然後要直接下來，你就按下，好，開始。

280. 學生：有時間限制的。

281. 老師：你要先蹲下來，你可以左右，對，目前看是都還沒有，公差多少？公差？

282. 學生：2。

283. 老師：2，好，運氣太好了。

284. 學生：剛剛是屎到的。

285. 老師：2，6，4，不行，5，5，5，公差多少？公差 0 也可以。

286. 學生：都找相同。

287. 老師：都相同也可以。

288. 學生：連一直線，連一直線，沒有 0，我才沒有 0。

289. 老師：有嗎？越來越高，好，公差還是 0。

290. 學生：他只會找相同的。

291. 老師：下不來。

292. 學生：他只會相同的。

293. 老師：所以成等差。

294. 學生：它只會相同的啦，3，6，9，真的很笨，6，7，8…。

295. 老師：都沒有。

296. 學生：可不可以起死回生，它只會相同的啦！

297. 老師：可是它現在…。

298. 學生：7 跟 9。

299. 老師：對，比較正常一點了。

300. 學生：完蛋了。

301. 老師：5。

302. 學生：你先放在 4 旁邊。

303. 老師：你可以告訴他怎麼放。

304. 學生：他只會相同的！

305. 老師：好吧！待會兒再換一個人。

306. 學生：你怎麼都等相同的？

307. 老師：他得 60 分。

308. 學生：他從頭到尾接在一起，沒有了啊，2，4，6，沒關係，他分數已經及格了。

309. 老師：好，再換一個人，再重玩來一次。

310. 學生：第一次及格。

311. 老師：第一次及格，不要玩。

312. 學生：姬培瑋啦，姬培瑋。

313. 老師：好，林哲立，你來，看會不會好一點。好，我直接按，你先蹲下，看一下，9，公差是 1。

314. 學生：一直線了怎麼辦？找不到了吧！還不是跟李學麟一樣。

315. 老師：0，1，2，3，4，全部連線。

316. 學生：讓他的啦！讓他的。

317. 老師：好，5，5，5，又有。

318. 學生：再來一直線，只有你會玩這個。

319. 老師：2 還有嗎？沒有。

320. 學生：哇！3，6，9。

321. 老師：剛剛好，很難找到 5 的，9。

322. 學生：9，9，9，破百了。

323. 老師：然後 8 掉下去。

324. 學生：100 了，李學麟搞什麼，8，8，8。

325. 學生：老師，再玩一次吧。

326. 老師：人生的機會沒有幾次，要把握！1，2，3，你到 150 分再換一個人。

327. 學生：你怎麼都找一樣的，2，4，6，用黃金公差好不好？太難了，1，5，9，沒有，1、6、10。

328. 老師：1、6、10，有沒有？

329. 學生：1、6，6 先疊。

330. 老師：他後面好像還有十幾的。

331. 學生：要等 10，其他都是 3 以下好不好，沒機會了，好，等一下，要等 10，你 1 再放下來。

332. 老師：有啊…。

333. 學生：老師，沒有黃金公差。

334. 老師：好，再換一個人好了，友華。

335. 學生：你就直接往下按，它就掉很快，直接一條龍比較快。賭神…。

336. 老師：有了，有了，等不到 11。

337. 學生：剛剛有出現，這樣快 180 分，13 耶！

338. 老師：好，來。

339. 學生：12，怎麼會有 11？

340. 老師：公差多少？

341. 學生：5、4。

342. 老師：公差 5，有比較多分數嗎？

343. 學生：沒有。一樣啊！

344. 老師：好，最後一個人就好了。

345. 學生：老師，換女生啦！投票啦！提名啦！

346. 老師：好，再最後一次，最後一個人。

347. 學生：林宜萱，林宜萱一定找那個姬培瑋。

348. 老師：好，有沒有女生要？

349. 學生：姬培瑋。

350. 老師：為什麼要指他呢？

351. 學生：他手指痛。

352. 老師：好，葉錦如，好，來。

353. 學生：地理高手，地理要堆城堡，要把它全部堆滿。

354. 老師：好，趕快，開始，左右。

355. 學生：一定要堆城堡，5，7，9 耶！3，5，7。

356. 老師：所以每次看到掉下來的數字時，是不是心裡就開始在想，到底能和誰可以配對，對不對？

357. 學生：2，5，7 也行，2，5，8，最右邊…。

358. 老師：可以啊，0，1，2，3，好，等 1，4 也可以，不錯，7。

359. 學生：你突然頭昏。7，7，7。

360. 老師：這個等差 0，5，6。

361. 學生：2，3，4，直接疊 2，3，4。

362. 老師：好，那又有了。

363. 學生：我及格了，剛好 2，2，2。

364. 老師：好，他到 100 分左右，我們就到下一個單元。

365. 學生：0，1，2，3，4 堆左邊。

366. 老師：4 有啊！

367. 學生：7，8，9，0 也行。

368. 老師：0 可以啊。

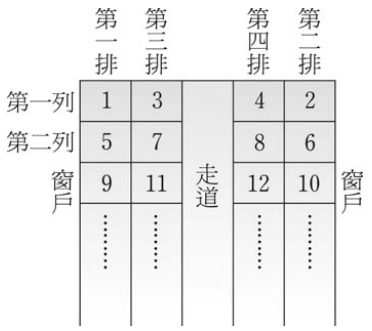
369. 學生：0，0，0 可不可以打開？上面就好，2 的上面。

370. 老師：2，3，ok，差 1。

371. 學生：bye bye。

372. 老師：ok，其實不錯，跟你數學好不好，無絕對關係，好啦，我們繼續看下一個題目，看過嗎？是說有一個車廂，你去坐火車的時候(見圖二十二)，它座位號碼是順著 1，2，3，4 這樣排，遊覽車好像也是這樣子，都是跳著，對不對？1、3、4、2，5、7、8、6，對不對？那 1、2 號都在哪裡？靠窗，3、4 號都靠哪裡？

<練習題 13>
附圖為自強號火車，其中一節車廂之座位表，請問座位 50 號、24 號的位置？



圖二十二

373. 學生：走道。

374. 老師：走道，譬如說，你拿到一張票，你要知道到底坐在哪裡，假設你拿到了是 50，24 號，你會慢慢數，從頭開始走進去，然後每個位子都看，終於沒找到，因為走過去沒看清楚。好，大家想想看要怎麼算，有沒有人要上來寫？我再找一個人算。

375. 學生：姬培瑋啦。為什麼，要叫女生。

376. 老師：叫女生，李亞寧好了。

377. 學生：我鼻子過敏。

378. 老師：沒關係，來。試看看。這題會比較複雜一點，所以你要看一整排，到底有什麼關係，一行對不對？好，按列，橫列直行，其他人可以自己做看看，好了嗎？你站這邊好了，從那邊看。

379. 學生：就是第 1 排有 4 個位子，然後就是 4 的倍數，然後號碼去除以 4 就會餘 1，餘 3、餘 2 或餘 0，就是這樣子(見圖二十三)。

50÷4=12…2 12+1=13 第 13 列右邊靠窗 24÷4=6 第 6 列右邊靠走道
圖二十三

380. 老師：好，然後呢？

381. 學生：就是這樣。

382. 老師：那 50 怎麼解釋？50？

383. 學生：50 就是他 50 號。

384. 老師：50 號。

385. 學生：然後 50 除以，就是一行 4 個，那第 13 行。

386. 老師：第 13？

387. 學生：行。

388. 老師：怎樣叫「行」？

389. 學生：列。

390. 老師：橫列直行。

391. 學生：橫列直行。

392. 老師：橫列直行，所以這是第一列。

393. 學生：是第 13 列。

394. 老師：第 13 列的第…。

395. 學生：第 2 行。

396. 老師：餘 2 會在哪裡？

397. 學生：1、3、4、2。

398. 老師：所以靠右邊的窗戶。

399. 學生：對。

400. 老師：那 24 號呢？

401. 學生：24 整除它，就是第 6 列。

402. 老師：整除，整除會在哪一列？。

403. 學生：第 6 列。

404. 老師：第 6 列的。

405. 學生：這一行。

406. 老師：好，很好，看得懂嗎？只要 4 個就可以坐滿一列，對不對？50 號先坐滿 12 列，最後剩下 2 號，所以他不是 1、2、3、4，他是 1、3、4、2，這樣子，所以第 12 列坐滿了，坐到第 13 列的右邊靠窗。那這一列的話，他是剛好是倍數，有沒有用別種方式算的？你來。

407. 學生：就是。他又要背公式，他背公式。

408. 老師：沒關係，如果公式要怎麼套，寫出一般式嗎？

409. 學生：它每行的公差都差 4，所以是 d 代入 4，然後第 50 號所以 a_n 要等於 50，然後 a_1 不知道，n 也不知道，因為 a_1 一定要是整數，所以 a_1 就是 1 到 4 的 4 個數，然後減出來的數除以 4 要會被 4 整除，所以 a_1 我們代 2 的話，那就會被 4 整除(見圖二十四)。

$\because d=4$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$50=a_1+(n-1)(4)$

$n=\dfrac{54-a_1}{4}$ 要為整數

令 $a_1=2$ $\therefore n=13$

第 13 列右邊靠窗

又 $24=a_1+(n-1)(4)$

$n=\dfrac{28-a_1}{4}$ 要為整數

令 $a_1=4$ $\therefore n=6$

第 6 列右邊靠走道

圖二十四

410. 老師：52。

411. 學生：然後 n=13，所以 50 號就會在第二排的第 13 個窗戶，然後我們用 24 號的話。

412. 老師：不要擦，看得懂嗎？看起來好像怎麼多了一個未知數，對不對？他現在是說，如果直接代，成等差，第二列，對不對？第二個數，到底是哪個我不知道，可是現在是知道是 50 號，然後 a_1 在哪裡？我待會兒再去想，然後公差，其實會發現每個公差都是 4，每一列是不是都是差 4 了，所以 a_1 加上 4，把整個減 4，移過去是 54，那在這一邊的話，我要求 n，對不對？4n 放著，a_1 移過去，那就是 $4n=54-a_1$，那 4 再除過去，就開始討論說，n 一定要是整數，對不對？所以 $54-a_1$ 會是 4 的倍數，比較靠近 54 的 4 的倍數是 52，對不對？所以 $a_1=2$ 代入的話，52 再除以 4，n=13，他除出來剛好是第幾列，有沒有？第十三列，$a_1=2$，我們只看第一列 2 擺的位置就好了，所以它是擺在哪裡？右邊靠窗，聽懂嗎？24 號是不是也可以用這種方式算？還有一種方法，可以先把每一行的一般式寫出來，這行應該是多少？a_n 就等於 $a_n=a_1+(n-1)d$，d=4 對不對？$a_n=1+4n-4=4n-3$，對不對？所以第一行的一般式為 4n-3，那這行的一般式應該是多少？是不是也可以將 50、24 代完之後，看它符合哪一個的一般式，合乎條件的就是那一列的哪一個位置，對吧！好，我們再看下一個題目(見圖二十五)。這題是比較開放式的題目，現在每一組都想看看，待會兒每組派一個人出來，利用 1 到 30 的數字排出不同的等差數列，你大概列個大約 4、5 個數列就好了，不用全部用到 1 到 30 的數，然後你自己去排列，看你可以列幾個，無所謂，好，待會兒 5 組分別把它寫在這 5 個位置。

<練習題 14> 利用 1~30 的數字，排出不同的等差數列。
圖二十五

413. 學生：老師，要列出幾個數？

414. 老師：你不用全部列出來，每組列出 4、5 個數列就好了，看從誰開始，然後往後列出 4、5 個數，最後不一定要 30，只要你從 1 到 30 裡面取幾個數出來，譬如說，你取 5 個數好了，每一個數列都取 5 個數，看要從誰開始，然後往後推，每一組都列大概六個等差數列，好了就可以上去寫。

415. 學生：上不上。

416. 老師：他觀念不錯，對，12，48 嘛，好了就可以上來寫，還是我每組都指定人，你們也可以支援前線。

417. 學生：我先去寫 3 個。

418. 老師：可以啊！好的就趕快，不然這樣子好了，你寫出來的，好啦！

419. 學生：老師，可以加分。

420. 老師：我要等差數列，那不是等差，第一組的人好了就上來。

421. 學生：老師，可以寫小數嗎？

422. 老師：小數！寫整數就好了，寫出 6 個等差數列，隨便寫都可以，那只有一個，對，要六組，你可以先找一個頭，對不對？然後再往後，譬如說，差 1、差 2，你再往後。第三組，好了就上來；第二組寫好的就上來，其他人可以幫忙檢查看看他們寫的對不對？

423. 學生：2,4,6,8,10，所有數字就上來。

424. 老師：只要等差就好了，不要寫成等比。好，一起來看，一個個來檢查，第一個：5,10,15,20,25，可不可以？

425. 學生：可以。

426. 老師：公差多少？

427. 學生：5。

428. 老師：公差是+5，正負有差別哦！

429. 學生：有。

430. 老師：是+5 吧，後項減前項是+5，對不對？那 10,20,30，是+10，對不對？

431. 學生：對。

432. 老師：4,8,12。

433. 學生：4。

434. 老師：+4。9,18,27，是+9。8,16,24。

435. 學生：8。

436. 老師：下一個是+7，對不對？7,14,21,28，如果順序倒著寫的話會怎樣？其實剛才可以偷懶，有沒有？30,25,20,15，我寫一個數列就變兩個了，對不對？這個公差是多少？

437. 學生：-5。

438. 老師：-5 跟+5 不一樣，對不對？你們剛剛沒想到，對不對？所以我比較聰明，好，再來，1,7,13,19，這公差多少？

439. 學生：6。

440. 老師：+6，再來呢？1,5,9 差幾？+4，對不對？2,9,16,23,30。

441. 學生：7。

442. 老師：7，這個 1,3,5,7,9，是+2；這個數列 5,12,19,26，是+7，好，都可以，來，這一個。

443. 學生：仿冒的。

444. 老師：8，+8，這一個呢？

445. 學生：8。

446. 老師：還有沒有想到？

447. 學生：+9。

448. 老師：+9，對不對？

449. 學生：-9。1。

450. 老師：1 對不對？我還可減 3、2、1，對不對？-1，對啊，正的回來，負的回來，是不是都可以，對，第四個呢？+3 嘛，對不對？

451. 學生：-2。

452. 老師：-2，這個呢？

453. 學生：5。

454. 老師：+5，這個呢？

455. 學生：2。

456. 老師：+2。

457. 學生：2 個數列都是+2。

458. 老師：這也是+2。

459. 學生：1。

460. 老師：+1。來，這一個數列？

461. 學生：-5。

462. 老師：-5 對不對？這個呢？

463. 學生：8。

464. 老師：+8，這一個？

465. 學生：6。

466. 老師：+6。

467. 學生：5。

468. 老師：+3。不錯，大家對等差數列比較清楚了，知道如何看它的等差關係。來，

我們來看最後一題就好了，大家看這一題，第 16 題(見圖二十六)，是什麼關係？

469. 學生：等差。

470. 老師：是成等差，這個圖看過嗎？第 1 個圖是幾根吸管？

471. 學生：三根。

472. 老師：三根，第 2 個圖呢？

473. 學生：五根。

474. 老師：五根，第 3 個圖呢？

475. 學生：七根。

476. 老師：七根。

477. 學生：2n+1。

<練習題 16>
用等長的吸管依次向右排出相連的三角形，如附圖，則第十一個圖形需要_____根吸管。

圖二十六

478. 老師：每個圖不一樣的是，第 2 個圖這邊比第 1 個圖多了 2 根，對不對？那第 3 個圖這邊又比第 2 個圖多了 2 根，所以可以寫成 3，5 可以看成 3+2，那 7 可以看成什麼？

479. 學生：4+3。

480. 老師：3+2+2，從圖 1 的 3 開始，加一個 2 到圖 2，再加 2 個 2 到圖 3，所以要求第 11 個圖，就是 3 加幾個 2？10 個 2，寫 a_{11} 好了，3 加 10 個 2，所以答案等於多少？23，如果要求第 n 個圖呢？2n+1，為什麼？

481. 學生：一開始。

482. 老師：$a_n=3+2(n-1)=3+2n-2=2n+1$，所以想求第 21 個圖的總根數，你真的每個都去算嗎？不會吧，可不可以直接代 n=21 到 a_n？可以，所以 $a_{21}=2(21)+1=43$，可以嗎？好，兩節課很快過去了，以後的話，有機會還可以把這後面的題目繼續延伸下去，生活化的題目還有很多，好吧，那我們今天上這個到這裡，

好，下課。

483. 學生：起立、立正、敬禮，謝謝老師。

484. 老師：好，謝謝大家。

參、教學說明

我今天所上的是等差數列，上的班級的是九年級，這個班是一個常態班，這班比較特別就是，學生程度是兩極化的，就是班上好的學生佔三分之一，比較差的學生也佔三分之一，但是中間程度的學生反而量會比較少，所以平常在上課的時候，老師在教材的拿捏上，還有在講解的時候，會是一個滿大的困擾。我今天是將這個單元「等差數列」，讓他們藉著多媒體 power point 的一個方式，讓學生能夠在黑板上直接演算，這也是我的一個嘗試，因為平常使用 power point 時，直接打在曝光螢幕上，會讓老師覺得，在講的時候，學生只是在看我所講解的內容而已，若是老師想要在上面直接演算給學生看的話，而旁邊所剩的黑板空間太小，所以演算不是那麼方便。所以，這一次做了一些調整，讓 power point 直接打在黑板上，黑板上的字就滿清楚了，學生可以直接在黑板上面看到題目並在下面做演算，這種互動的方式，是我們一般寫黑板的老師比較沒辦法做到的，而且很節省抄題的時間，效果也會不錯。

我今天所設計單元，一開始我不說明等差數列的公式，先讓他們用觀察的方式，譬如說，我現在設計了一些數，這些數之間，看起來不一定有關係，我先把數列的定義介紹清楚，然後再給幾個題目來觀察，是有關係的，比如說，它後來是差 2、差 3、差 4，或者說乘以 2 等於後面那個項，或者除以 2 等於後面的數，甚至把前面兩項相加等於後面的數，讓學生能夠觀察了解，其實數和數之間可能會有關係的，讓學生知道，可以藉著自己觀察的結果，知道且找到這些數列之間的規律。第二部分，我設計

在他們知道怎樣推導之後，最後把公式呈現出來，讓學生知道，其實不一定每次都要這麼累，每次都要一個個去推導，也可以利用推出來的關係式，直接就把它代入去算。其中放的第三題，是一個等差數列，這個等差數列比較特別，裡面空了好幾個數，只告訴你 7 和 27，讓你推第一項是多少？我覺得這題在難度上比我之前帶他們算的題目較難了，上來的這個學生，覺得相當不錯，我先告訴他什麼是等差中項，那個學生直覺反應知道，好，7 和 27 當中共有 5 個數，這 5 個數當中，e 剛好是第 3 個數，第 3 個數也可以成為第 1 個和第 5 個數的等差中項，所以就把這兩個相加除以 2，所以，e=17，c 又是 e 和 7，也就是 17 和 7 的等差中項，又把它們相加除以 2，所以 c=12，再利用相近的兩個數，公差是後項減前項，是+5，所以往前推是減 5，往後推是加 5，再減 2 個 5，是不是可以直接把 a 算出來？這個學生所用的這種方式不一定是我先前所預期的，可是他能夠應用聽到的東西，然後就把它直接用出來，他所回饋的，可能比預期的更好。

再來，我把整個公式推導完之後，讓學生知道有 a_n 的一般式，就是 $a_n=a_1+(n-1)d$，就可以直接跳去算任意項，譬如說，我要算第五項、第七項，只要知道它的一般式，我就可以將 n=5, n=7 直接代進去求。其實我們老師在教學的時候，不一定想讓學生先知道公式，否則學生就不會想要去推論，如果學生缺乏了推論的過程的話，往往會比較不敢去思考，也喪失了推導的能力，所以老師在教學的時候，往往是把公式放在最後，把一些演算過程先讓學生了解之後，然後才去告訴他。後面，我放了一個遊戲，就是智慧拼球，這個方式讓教學變得滿活潑，前面上來的幾個同學，像第一個同學，在平常上課的時候，會發現他對數學完全沒有興趣，甚至一上課他就會趴在那邊，覺得數學跟他無關，可是發現藉著這個遊戲，他得先了解等差數列的關係，然後藉著這個遊戲，他在遊戲中知道，什麼球數和什麼球數之間有什麼關係，而且竟然可以把它

消掉，在消掉的時候就得到一個鼓勵，相對的就會在繼續玩的時候，發現可以用什麼方式得到更多分數，所以，我們應用一些電腦軟體也是一種教學的助力。後來發現第二個同學，因為他的數學程度非常好，所以在球下來的時候，可以直覺知道，到底要什麼數及底下已經有什麼數能夠很快就把它組合起來，而且會發現，他消掉的是一些球時，甚至很多學生還沒有想到，他已經想到了。所以這也是一種數感的訓練和發揮，這種教學方式及班上的互動都很好。

最後，我利用自強號火車的座位排列方式，譬如說，我要找到第 50 號和 24 號的座位，這個問題和生活的經驗有關。因為我們一般的火車的座號，根本不是依 1、2、3、4 順序排列，它是跳著的，譬如說，第一排這是 1，這是 2，這是第 3、第 4，然後再來的話，5 是在最左邊，6、7、8，所以發現說 1、2 號是靠窗戶，3、4 號是靠走道，在運算的時候，50 號就不能這樣子一直數下去，這個時候我們就想，到底要用什麼方式來解決問題？所以，融入剛才所學到的等差數列知識，會發現 1、5、9、13 是在同樣一行，彼此之間就有關係，1 和 5 差 4，5 和 9 差 4，9 和 13 差 4，另一行是 4、8、12、16。而不同的學生會想到用不同的方式解決，譬如說，第 1 個學生上台做的時候，50 號就想說 4 個數，就可以滿一列，所以 50÷4=12 餘 2，我已經排滿了 12 列，最後剩下 2 個號碼，這 2 個我到底怎麼排？我就看到第一列，第一列他是 1、3、4、2 方式，餘 2 的話，從第 1 列一直排到第 12 列排完，所以第 13 列的第 2 個，跟第 1 列的順序相同，是在第 2 行的位置，就是右邊靠窗戶；另一個學生，利用代數的方式直接列式求 n，n 代表列次一定要是整數，54 減掉多少再除以 4 要剛好能夠除得盡，他想 54 減掉 a_1 後要是 4 的倍數，所以 $a_1=2$ 的話會剛好符合，就知道要坐在這個位置。不同的學生會有不同的想法，所以要給學生更開放的一些思考的模式，對學生以後在學習數學時，會更加有幫助。最後一個活動，我是利用到 1 到 30 的數字，讓學生自己去推導等

差數列，因為有前面的前置經驗，所以知道什麼叫做等差數列，就可以設定一個數，第一個數是 3，後面的數到底要放多少，可以自己去想，譬如說，我這裡是 3，後面可+2，就知道這邊是 5，然後再+2…，我可以一直推導過去，或者我不要+2，我可以再+3、+3…，或+4、+4…，所以公差不同時，我就可以造出很多種不同數列，甚至有的學生已經想到，譬如說 1,3,5 和 5,3,1，看起來好像是順序不一樣而已，其實它的公差也是不一樣的，公差是後項減前項，那 1-3=-2，而 3-1=2，順序不一樣，公差可以是正的，可以是負的，就可以造出不一樣的等差數列。我今天上課，在跟學生的互動方面，覺得還不錯，因為這班學生平常上課時就滿活潑，雖然未必每個學生的數學都能夠學得很好，可是他們至少對數學的興趣不會被抹滅。在演算的時候，如果跟老師的關係或互動不好的話，有些學生可能會對這位老師所教的東西完全拒絕學習，我不一定要強制學生做到什麼程度，在許可範圍之內，讓學生能夠適度的發表自己的意見，也可以適度地在數學的學習上再做一些調整，所以數學的學習是互動，老師在教學的時候，學生在學習，老師也在學習，所以「教學相長」，老師在教不同的學生，會用不同的方式，學生在學習的時候，相同的老師，不同的學生所學到的東西，可能也不完全相同。所以，希望以後，老師在教學的時候，嘗試用不同的方式去教導學生，然後再適度的去調整，我今天的教學就做以上的說明，謝謝！

肆、教學後的省思

這個班級是學習「國中數學暫行綱要」的一屆，而「等差數列」在暫綱中，卻無明確地列出章節，有些版本將它放在「數形關係」中一併討論，也未列出一般項 a_n 的公式，所以雖然是教授三年級的課程，也能從最基本的數列開始觀察。不過，後來公布的數學正式綱要都已納入課程內容。

首先，從觀察一些數的排列了解數列的定義，再進一步討論其關係，本次教學僅

就「等差數列」部分仔細討論。利用例題的引導，一步步由淺而深的推理方式，讓學生能夠列出 a_n 的一般式。結果發現，有些學生較無耐心推導，想要直接將已知條件代入公式，有人是利用直覺反應，就將答案講出，會減低其他人的注意力。

其次，在黑板上布題，請學生上來演算時，發現自己給學生說明的時間太短，講解完畢就隨即讓學生下台，和學生的對話及互動不夠，雖然是學生講解，可是，實際上大部分都是老師在講解，所以效果上就會打了折扣。

再來，我運用「智慧拼球」的電腦遊戲，藉著遊戲讓學生更有興趣，將剛學會的等差數列的知識應用在遊戲中，在進行時發現，不論數學程度好壞，都能夠在這個活動裡得到成就感和樂趣，不過分數的高低，仍然跟程度的好壞有關。

最後，將「等差數列」實際活用在日常生活的例子中，將它轉化成數學式子，再運用已熟悉的的 a_n 的公式，進而使計算變得更快速、更靈活。雖然，本次上課的學習效果並不如預期的好，但也更清楚自己在教學上的缺點，就是所謂的「教學相長」。

等差級數

壹、教學活動設計

一、教學年級：九年級下學期

二、教 學 者：台北縣立錦和高中 陳萩紋 老師

三、教學目標：

1. 能從等差數列各項和的列式中找出規律並計算其和。

2. 能利用等差數列的一般項表示法推導出等差級數前 n 項的和。

四、活動目標：

【第一節】：能觀察等差數列算式的規律並計算其和。

活動一：從生活情境引入等差數列的和，並從列出的算式中找出算法。

活動二：從等差數列各項和的算式的列出，讓學生體認其規律性。

活動三：能利用算式的規律，推演出等差級數和的計算方法及公式。

【第二節】：能理解並應用等差級數和的公式。

活動四：能熟練等差級數和(已知項數)的算法。

活動五：能瞭解等差數列的相關名詞及一般項表示法，並能推導出等差級數前 n 項的和。

活動六：能應用等差級數和的公式計算較為複雜的問題。

五、教學概要說明：

在學習此單元之前，學生於國小時已學習過簡單等差數列的和，而在國一時曾經學習過數的樣式與規律的相關單元，所以對於數列規律的察覺會有初步的瞭解。另外，在國三時也學習過等差數列及其相關名詞。

第一堂課先以生活情境中的問題(水管的排列)引入等差數列和的計算問題，

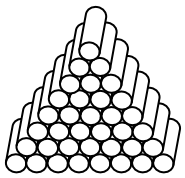
再讓學生從分組討論中找出不同的計算方法，並發現等差數列的和可以用首項及末項的和及項數來計算，接著即引入數學家-高斯的介紹。在做過簡單的歸納之後，讓學生熟悉已知項數的等差級數題目的計算。

第二堂課先進行等差級數的命名活動，然後複習等差數列的相關名詞(首項、項數、公差、第 n 項)。之後再將等差級數以首項、公差及項數的方式表示，並依前一堂課的計算規則推導出等差級數的另一個公式。最後再讓學生練習較為複雜的計算問題。

六、教學活動設計：

【第一節】：能觀察等差數列算式的規律並計算其和。

活動一：從生活情境引入等差數列的和，並從列出的算式中找出算法。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 討論水管鋪排的規律並發現每一層的個數為等差數列	1.以下是某工地水管的鋪排方式,請同學觀察一下他的規律是什麼？ 	• 學生會回答：上下排各差一個水管或是水管的排列成每邊相等的三角柱。	• 能了解題意並能說出排列的規律性。
	• 請你算算看水管的總數？	• 此時可讓學生討論並寫下算法。 • 此處因等差級數的項數較少，所以接受學生的各種算法並加以鼓勵。	• 能算出水管的總數。 • 能想到首項及末項和的規律性。
• 透過各層個數的相加，算出水管總	• 除了將各排個數加起來外，還有其他	• 請學生上台發表不同的算法。	• 能正確算出並發表其答案。

數，並用算式記錄解題活動	的算法嗎？ ・學生演練類似題	・教師總結可能的算法： 1.點數。 2.逐項加。 3.將和式由末項寫起，加上原和式後除以 2。 4.將首項與末項搭配成一組，共有 4 組相加。 ・此題學生若逐項加則會增加計算的繁複度，故鼓勵同學利用找規律的方法算。	

活動二：從等差數列各項和的算式的列出，讓學生體認其規律性。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・嘗試以有效率的方法來計算等差數列 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +…+100 的和	1.1+2+3+4+5+…+100 的總和為多少？	・學生應能初步利用活動一的規律性來算出 1 +2 +…+100 100+99+…+1 ---------- 101+101+…+101 (共 100 組) 共 100×101÷2=5050	・能從等差數列的列式中找出規律。
	・有沒有其他的算法？	・可讓學生討論及發表其他的算法。	・能討論及發表其他的算法。

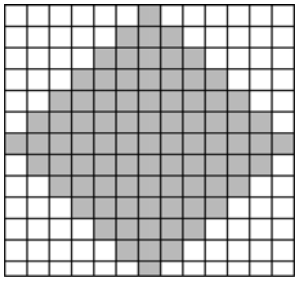
・介紹數學家高斯	2. 德國數學家高斯是在很小的年紀即算出這題的答案，有沒有人能為我們說說他的故事呢？	・從學生答案中引入數學家高斯的介紹，前一堂課請學生先去瞭解高斯的生平。	・能主動發表高斯的故事。
・澄清高斯算法的意義	・以前例「1+2+3+4+5+…+100=」的作法來說明高斯的算法。	・因為等差數列和的計算公式與梯型面積計算公式樣式很類似，學生會將等差級數和的梯形公式視為計算等差數列和的算法，所以在這邊向學生澄清。	
・利用高斯算法計算等差數列的和並介紹「等差級數」的意義	・再來看看這一題：13+20+27+34+41+48+55=？	・學生利用前題規律來算出和 68×7÷2=238	・能利用高斯算法算出正確答案。
	・我們將等差數列的和稱為「等差級數」。		・能認識等差級數的名稱和意義。

活動三：能利用算式的規律，推演出等差級數和的計算方法及公式。

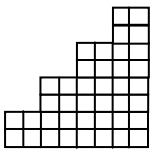
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評 量 重 點
・以首項、末項及項數的一般式來寫出等差數列的和	1.我們試著將這個題目的數字改成我們所學過的首項(a_1)及末項(a_n)來表示，我們可以推演出和的公式嗎？	・學生從具體的等差數列到以代數方式代表各項的表示法或許會有些困惑，但是只要引導學生觀察式子與式子間的關係，他們應該能很容易的察覺出來。 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$ $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1$	・能以代數方式列出等差數列。 ・能理解等差級數和公式的推導方式。
		可以推導出此數列的和為 $\frac{n(a_1+a_n)}{2}$	
・先求出項數再求等差數列的和	2.利用這個公式，請你計算下列兩題： (1)112+107+102+97+92+87=？ (2)(-100)+(-93)+(-86)+…+173+180+187=？	・第(1)題能直接以公式帶入演算，但第(2)題需要先求出項數才能計算，藉由此題讓學生複習已學習過之等差數列項數的計算，為第二堂課等差級數的第二個公式做準備。	・能理解題意並算出答案。

【第二節】：能理解並應用等差級數和的公式。

活動四：能熟練等差級數和(已知項數)的算法。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・鋪排地磚，算出不同顏色的磚塊數	1.一位設計師的客廳地磚設計圖如下，如何算出藍色地磚的塊數呢？ 	・藉由觀察圖形，將數列列出，並求出其和。	・能列出算式並算出答案。
	・如何列式子？ ・觀察列出的式子是否有規律性的存在？ ・如何利用我們已學過的觀念來算出地磚的個數呢？	・此題列出的算式會包含兩個相等的等差級數，故學生在計算此題時應注意到其規律： (1+3+5+…+11+13+11+…+5+3+1	
・觀察特殊圓點的排列並計算其和	2.觀察下列的圖形，並計算出圖(10)中所有的點數。 圖（1） 圖（2） 圖（3）	・此題除了有等差數列外，更有完全平方數的數列。教師可引導學生觀察式子而計算出答案為綠色點的個數和為1+2+3+…+11=66；紅色點的個數和為11^2=121。總共和為66+121=187。	・能列出算式並計算答案。

活動五：能瞭解等差數列的相關名詞及一般項表示法，並能推導出等差級數前 n 項的和。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 解決末項未知的等差數列和問題	1.如圖，有一樓梯，每一階的長度、寬度與增加的高度都相等。有一工人在此樓梯的一側貼上大小相同的正方形磁磚，第一階貼了 4 塊磁磚，第二階貼了 8 塊磁磚，…，依此規則貼了 112 塊磁磚後，剛好貼完此樓梯的一側。請問此樓梯共有多少層？ 	• 此題因沒有說明末項是多少，所以學生在使用 $\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 的方法來算時會產生困難，不過用算式倒列的方式也能算出。教師先不說明計算的方法，讓學生自行討論後算出。 • 引導學生將末項以首項和公差代表後試試看。	• 能了解題意並解決問題。
• 引入等差級數公式 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$	• 上節課所提到的等差級數的公式 $\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 中的 a_n 項，我們可以用首項和公差來表示嗎？ • 所以等差級數和的公式也可以是什麼？此題用這個方法如何解出呢？	• 此相關名詞包含首項、項數、公差及第 n 項的表示方法。 • 引導學生在不知道末項的數字時，可以將第 n 項以 $a_1+(n-1)d$ 表示，並導出 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 。	• 能解出答案並說明解題過程。

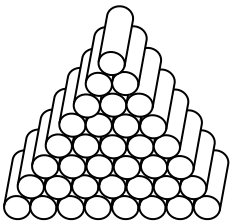
活動六：能應用等差級數和的公式計算較為複雜的問題。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
・應用等差級數公式解決較複雜的問題	1.從以上的幾個活動，我們學會了兩種等差級數和的算法，同學還記得嗎？	・將前面的五個教學活動作一小結，也讓學生對於計算等差級數和的算法做複習及整理。	・能說出等差級數和的算法。
	・現在有一組數是1、2、2、3、3、3、4、4、4、4.....找出他們的規律，並說出第20個數是多少？第30個數又是多少？	・在學生熟悉等差級數和的算法後，以此應用題來讓學生討論。從上面數字中找關係，並列出算式。 1 | 1 | 1 (個) 2 | 22 | 1+2=3 (個) 3 | 333 | 1+2+3=6 (個) 4 | 4444 | 1+2+3+4=10 (個) 5 | 55555 | 1+2+3+4+5=15 (個) 6 | 666666 | 1+2+3+4+5+6=21 (個)，所以第20個數是6 7 | 7777777 | 1+2+3+4+5+6+7=28 (個) 8 | | 1+2+3+4+5+6+7+8=36,所以第30個數字是8	・能找出規律並算出答案：第20個數是6，第30個數是8。
	・現在有一組數是1、2、2、3、3、3、4、4、4、4...，總共排了50個數，問所有數的總和是多少？	・50 個數總共排到 5 個 10，所以總和是 1+2×2+3×3+4×4+5×5+6×6+7×7+8×8+9×9+10×5=335	・能察覺規律並計算出答案。

附錄：學習單

等差級數學習單　　三年____班____號　姓名_____

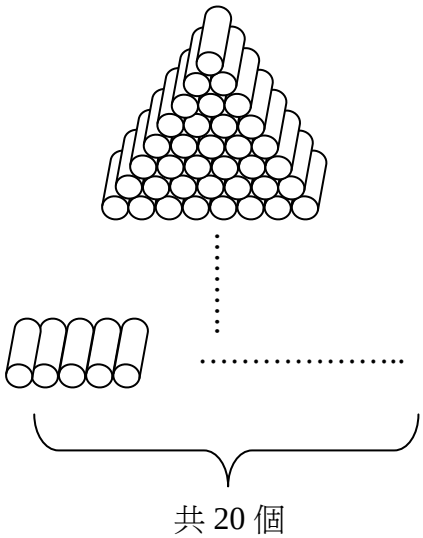
【題目一】我們常常可以在修馬路的工地旁發現，數根水管常是這樣的排列著，並不會滾動，請你觀察一下這樣的排列有著怎樣的規律呢？



、你知道如何算出這裡總共有幾根水管嗎？請你將你的算式寫下來。

、在與同學討論後，有沒有發現和你不同的算法呢？請你把他寫下來。

【練習一】假如以同樣方式來擺放另一堆更高的(最下排水管為 20 個)水管，你能算出水管的總數嗎？



組別：_____

【題目二】計算 1+2+3+4+5+…+100=？

、你知道德國數學家—高斯怎麼算的呢？

	 德國於 1977 年 4 月 19 日發行，紀念高斯的 200 週年誕辰	 德國於 1955 年 2 月 23 日發行，紀念高斯的 100 週年忌辰	

『數學是科學裏的皇后，而數論是數學中的女王。』

【練習二】利用高斯的方法計算 13+20+27+34+41+48+55=？

老師的話：我們將等差數列的各項以「加」號連接稱為等差級數。

等差級數和的算法(一) $S_n=$

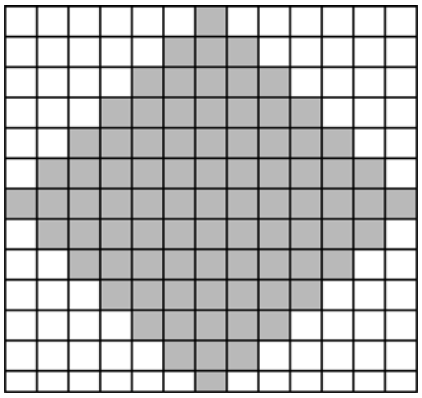
我們試著將這個題目的數字改成我們所學過的首項(a_1)及末項(a_n)來表示，我們可以推演出和的公式嗎？

【練習】

(1)112+107+102+97+92+87=？

(2)(-100)+(-93)+(-86)+…+173+180+187=？

【題目三】一個設計師的客廳地磚設計圖如下，如何算出藍色地磚的塊數呢？



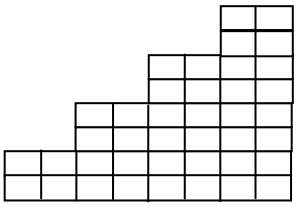
✍、請你將算式列出？觀察列出的式子是否有規律性的存在？

✍、如何利用我們已學過的觀念來算出地磚的個數呢？

【練習三】觀察下列圖形的規律，並計算圖(10)的點數共有幾個？

圖（1）　圖（2）　圖（3）

【題目四】如圖，有一樓梯，每一階的長度、寬度與增加的高度都相等。有一工人在此樓梯的一側貼上大小相同的正方形磁磚，第一階貼了 4 塊磁磚，第二階貼了 8 塊磁磚，…，依此規則貼了 112 塊磁磚後，剛好貼完此樓梯的一側。請問此樓梯共有多少層？



✍、剛剛上節課所提到的等差級數的公式$\frac{n(a_1+a_n)}{2}$中的 a_n 項，我們可以用首項和公差來表示嗎？

等差級數和的算法(二) $S_n=$

✍、那此題用這個方法如何解出呢？

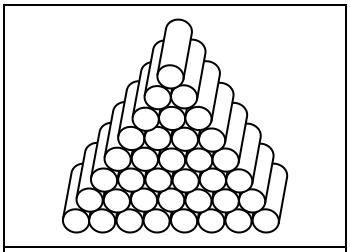
【題目五】現在有一組數是 1、2、2、3、3、3、4、4、4、4……找出他們的規律並說出第 20 個數是多少？第 30 個數又是多少？

【練習五】現在有一組數是 1、2、2、3、3、3、4、4、4、4…，總共排了 50 個數，問所有數的總和是多少？

貳、教學實錄

【第一節】

1. 學生：起立，立正，敬禮。老師好。
2. 老師：好，同學請坐，有沒有曾經在路上看過修水管的工人，他在旁邊是不是會排水管，工人很容易就可以算出來水管的總數。你知道他是怎麼算的嗎？你們現在在組內先討論一下，看一下那個圖形(見圖一)，它有什麼樣的規律？請你們在組裡好好的討論一下，大概討論一分鐘，老師找幾個同學起來發表一下。找到規律的同學，你可以跟其他組的同學講一下，然後把答案寫在第一題(P.255 學習單)那邊，你們可以不用每一個人的答案都一樣。有沒有同學已經找到的？有，好，有沒有人願意上來跟大家講一下？好，佳恆，請你到講台上來，請問你這個圖形的規律是什麼？你對著大家說？



圖一

3. 佳恆：圖形規律？
4. 老師：大聲一點哦！
5. 佳恆：它從最上面排下來，一直排下來，這樣就應該有，這邊是兩根。
6. 老師：好，所以你的意思是說，它每一排，就是下面的都會比上面的多一根水管，是不是？好，謝謝，還有沒有其他發現？老師現在把它拆開來，我就是用橡皮筋綁起來了，你可以看到，看老師這個的側面，其實跟你那個水管是一樣的，對不對？你看一下，它為什麼可以擺這樣子不會掉下來？因為它這邊剛好兩個的中間，你先看最下面那一排，最下面那一排有幾個，你數數看你的有幾個？
7. 學生：八個。

8. 老師：八個，對不對？它再上去的那一排有幾個？

9. 學生：七個。

10. 老師：七個，所以它剛好可以有一個水管的空間，可以讓它支撐的，你可以發現，好，它最下面這一排是不是八個，對不對？八個，然後七個，然後六個，對不對？六個，然後五個、四個、三個，最後這一個，因為它兩個沒有辦法固定，所以老師把它上面這個也擺在一起，你們在那個修水管，就是修馬路的路邊，有沒有常常看到工人這樣子擺？當然，你要知道，那個工人很厲害，他可以馬上算出來這有幾個，其實你們也可以算，我們把式子先列出。今天我要先算它總共有幾根水管。我先從下面的開始，從上面是不是一個，然後兩個、三個、四個、五個、六個、七個、八個，這是它的總和，對不對？我們總共要算它有多少個，好，剛剛佳恆，它的規律是每一個差 1，你還記不記得，老師上一堂課曾經講過什麼東西，等差什麼？對，等差數列。所以你看，它是不是一個跟一個之間都是差 1？我們現在要來算一下，這個等差數列的和要怎麼算？現在你把這個式子列出來之後，就是老師的第二個問題，你把它寫下來，現在請你們也討論一下，這個和要怎麼算？等一下老師希望有兩組可以來回答。老師提示一下，你可以利用那個規律去算它的總和，我發現有些同學有不一樣的寫法，等一下我會請他上來講一下他為什麼是這樣子寫。我看你們好像都已經寫好了，跟老師想像中的答案有一點不太一樣，等一下我請兩個同學上來，寫完之後，請你跟同學解釋一下你的算法，好，沈怡庭上來寫第一個好了，好，還有沒有人要上來寫？

11. 學生：這一個行不行？

12. 老師：都可以，你可以挑一個。好，還有沒有同學可以上來寫？黃燦瑩要不要試

試看，你們那一組討論出來了嗎？討論出來了。來，你寫在這邊，沈怡庭，你先在這邊等我一下。好，同學看一下，他們黑板上寫的跟你寫的有什麼不一樣？好，看起來好像是不一樣的算式。黃燦瑩，麻煩您先回座位，等一下老師再請你寫一次。沈怡庭，你先解釋一下，來，注意看哦！(見圖二)

沈怡庭的作法： 1+8=2+7=3+6=4+5=9 4×9=36
圖二

13. 怡庭：因為 1+8，1+8 等於 9，2+7 也等於 9，3+6 也等於 9，4+5 也等於 9，所以就等於四個九加起來，就等於 36。
14. 老師：有聽清楚嗎，後面聽得到嗎？可以。好，謝謝你，這是一種方法。黃燦瑩，你這個的算法是怎麼來的，你可不可以跟同學解釋一下？對，請你出來一下。(見圖三)

黃燦瑩的作法： (1+8)×8÷2=36
圖三

15. 燦瑩：上底加下底，乘以高除以 2。
16. 老師：你說？
17. 燦瑩：上底加下底，乘以高除以 2。
18. 老師：好，你的上底是哪一個？
19. 燦瑩：8。
20. 老師：上底是 8，下底是？
21. 燦瑩：1。
22. 老師：1，好，那你為什麼會用這個方法算？梯形的面積。很好，謝謝。所以老師大概知道，你們利用梯形來算，對不對？用梯形的面積來算：(上底+下底)×高÷2。那這個梯形的面積，它是怎麼來的？其實跟那個的道理是一樣的，我們先看第一個(圖二)，第一個這個 9，它總共有幾個？四個 9，對不對？它這個 9 是怎麼來，它是這樣子：1 加上 8，這個是不是 9，對不對？然後 2 跟 7 加起來是 9，3 跟 6 加起來是 9，4 跟 5 加起來是 9，所以總共有四組

9，所以它就 9 乘以 4，那另外他(圖三)這個想法是怎麼樣？其實我可以把這個數列重新再寫一次，等一下老師會再寫一次給你看，那這邊我們就先看一下，他這樣子的算法，是不是可以很快就算出來總共的水管有 36 根？好，現在老師要請問你第三個問題：你在跟同學討論之後，有沒有發現跟你不一樣的算法？是用哪一個算法比較多？老師問一下，你用第一個的舉手，你是用第一種的，都沒有嗎？你是用第一種算法的，沒有；你是用第二種算法的，還滿多的。我們現在來看一下，下面這個練習，老師就要請你來練習一下，好，這個題目(見 P.255 學習單【練習一】)不知道你看不看得懂，它說：「如果我用同樣的方式，有另外一堆比較高的水管，最下面一排總共有 20 個水管，請你算這一堆的水管總共有幾個？」好，你看看你可不可以用第一個方法或第二個方法來算，請你們把答案算一下。你們都算出來答案了嗎？算出來了，好像還有幾組還沒有講話，對不對？來，有沒有人願意幫老師寫一下算式，先寫出式子，然後再算。陳正洋嗎？還是你們這一組有誰可以上來試試看？賀廷軒，好，你上來寫寫看，你可以解釋一下，為什麼這樣算嗎？

23. 廷軒：上底，然後加這個下底，然後它高是 20，再除以 2。(見圖四)

賀廷軒的作法： (1+20)×20÷2=210
圖四

24. 老師：好，謝謝，這樣對不對？跟你們的答案有沒有一樣？老師把它的算式補上去，這邊是不是要加到 20，好，再重複一次，你看看，它是不是等差數列？是，它是等差數列。現在我們翻過來，就是另外一面，這個以前你曾經也有聽過，以前有一個很厲害的德國數學家，他不是只算到 20，他可以算到 100，而且他在多短的時間，就是在老師寫完這個等號的時候，他馬上就舉手說：「老師，我知道答案是多少。」這一個偉大的數學家就是高斯，

老師上一節有請你們先回去查一下高斯的生平，對不對？有沒有可以上來跟老師講一下，或者跟同學分享一下高斯的生平，還有他的故事是怎麼樣？我看王曉文好像把資料拿出來了，還是胡先萍要試試看？好，王曉文，你上來講講看好了，挑幾個講就好了，你可以挑幾個講，因為你還要留給後面的同學講。

25. 曉文：我講高斯小時候。

26. 老師：後面的同學聽得到嗎？

27. 曉文：高斯三歲的時候，做水泥工廠工頭的父親，每個星期六都會發薪水給工人，有一次他趴在地板上，暗地裡跟著父親計算該給工人的薪水，他站了起來，糾正錯誤的數目，把在場的大人都嚇得目瞪口呆，高斯常笑著說，他在學講話之前，就已經學會計算，為了大人如果算錯就自己算出來。十歲的時候，他的小學老師穆特納，讓班上同學做一道算術題，就是『1+2+3+…+100=？』穆特納心想，這可難為初學算術的學生，但是高斯卻在幾秒後，將答案寫出來，在老師驚喜中，他解釋如何解題，他利用等差級數的對稱，然後就像求一般等差級數的過程一樣，把數目一對對的湊在一起，相加而得到了答案。

28. 老師：好，謝謝。大家可以聽到，他剛剛講的有一句話，「他發現了等差數列的對稱性」，這個就是老師一直要強調的東西。還有沒有同學要補充的？那老師來講了，因為高斯才十歲，他們的老師就出這個題目給他，因為那個老師帶著很不甘願的心情來上課的，而且這位老師其實跟高斯的年齡不會差很多，大概只有十七歲、十八歲，所以你想想看，他跟高斯的年紀只差七、八歲而已，他去教的時候，當然就是要考一下所有學生，因為鄉下學校的學生一定很笨，所以他就出了一個這樣的題目，他寫完，高斯就寫出答案

了。他們以前上課是每一個小朋友有一個小石板，那時候沒有筆，只有碳筆，所以他們是寫在白色小石板上。高斯就很快地把算出來的答案寫在小石板上面，之後，這位老師就對他刮目相看，甚至這位老師成為以後影響高斯的很重要一個老師。因為你想想看，一位老師，原本非常看不起這邊的小孩，可是自從他講了這樣的答案，而且他在算第一個和的時候，速度是非常快的，原因就是他發現等差數列的對稱性，而且是在他十歲的時候。剛剛王曉文也有提到，他爸爸是水泥工，其實他爸爸年紀很大才生他，大概四十歲的時候才生他，所以他跟哥哥、姐姐的年齡相差很大。他的爸爸當水泥工的時候，常常要跟一些生意人算帳，高斯一下子就發現爸爸算錯總數。所以，每一個人都有他專長的地方，高斯對於數非常有感覺，這是有數感，他一下子才會發現這些數字的對稱性。你看，這個是一個簡單的等差數列，他怎麼樣發現它的對稱性？老師就要講，為什麼你們剛剛一直用梯形公式？可是老師要你們解釋為什麼用梯形的時候，你就講不出來，其實梯形公式是從這邊來的，它並不是叫梯形公式，只是它的樣子跟梯形公式很像，所以老師才會跟你們說，算這個的話用梯形公式來算。好，什麼叫做等差數列的對稱性？你看，剛剛也有同學抓出來，因為它頭跟尾加起來是不是一樣，所以高斯怎麼算？他一下子就看出來了，他就把這個數列顛倒過來列，有沒有，我把它顛倒過來列，好，一直加到最後一個，當然是 1，對不對？如果說，我現在要算這一個數列的總和(P.256 學習單，【題目二】計算 1+2+3+4+5+…+100=？)，對不對？我現在把另外一個跟它一模一樣的，我只是把它顛倒過來，好，你看一下，這樣子你就很熟悉，這個像不像我們在學方程式代入跟加減消去法的時候，兩個加起來，它是不是就是兩倍的和？你會發現，這邊是不是 101？這邊也是 101、這邊也是

101，好，最後當然也是 101。老師要問你，這邊總共有幾個 101？100 個，因為你看，你就會舉這個例子，一個、兩個、三個、四個，一直加到 100，(1+100)×100÷2，你看，有沒有跟剛剛賀廷軒寫的這個很像？所以高斯的公式是這樣子來的，他在十歲的時候發現這個，而且很快就算出來，這個是答案是 5050。高斯除了這一個很著名之外，他還有一個很厲害的地方，就是他把正十七邊形畫出來，而且他在他的墓碑上面，就刻了一個正十七邊形，用尺規做圖做出來，這個是在他之前，沒有人可以畫得出來。你們知道高斯活了幾歲嗎？

29. 學生：七十七。

30. 老師：對，七十七歲，他活了七十幾歲，而且他是在很安詳的當中過世的。他中間發明了非常多的東西，跟我們以後天文、物理，還有當然就是數學很有關係。高斯是德國人，他就讀的那個大學，叫哥廷敦大學，現在還在，我們國內去讀這個哥廷敦大學的人，大概就只有兩、三位而已，因為要去讀這個學校不簡單。這邊有德國為了紀念高斯忌辰一百週年跟誕辰兩百週年發行的郵票。你們有沒有看到，這個就是高斯的圖像，看一下偉大的數學家是長什麼樣子。最後，老師有寫了一句話，可以充分的講到高斯為什麼這麼喜歡數學，他說：「數學是科學裡頭的皇后，可是呢，數論是數學中的女王。」。他自己推崇數學，又看中數學裡面的數論，高斯就是一個很有數感的天才，所以他才會發現這個數字的規律。好，這樣子，你可不可以大概知道，這個梯形公式為什麼會是這樣子，為什麼它是上底加下底？其實簡單來說，它並不是上底加下底，而是首項加末項，老師之前不是有跟你們講過這個一般項的代表方式，所以這個地方不要再講上底、下底，它是首項跟末項相加，最後再乘以，這個 100 就是我們的什麼？項數，老師用

什麼符號代表？是不是就是「高」，然後再除以 2，為什麼要除以 2？因為它是兩個加起來，兩個一樣的東西加起來，我要算一個，所以我要除以 2。好，現在下面這邊練習二(見圖五)，請你利用高斯的方法，計算一下這一組，老師不限制你們用哪一個方法，可以試著用用看，這邊是對稱，這邊跟這邊加起來一樣，這邊跟這邊加起來一樣，這邊跟這邊加起來，所以你就是首項加末項。好，對啊！跟公差當然沒關係，因為它這邊題目已經跟你講項數，你當然不用知道那個項數，再除以 2，然後就是答案。我剛剛下去看，我們的算式應該是都有引號，看你們好像把這個都學會了。你們都寫完了嗎？寫完了。好，有沒有同學願意上來寫給全班看一下，看你們的做法是怎麼樣？佳琪，你上來寫寫看好了，我剛剛看到你的算式還不錯。他這樣寫對不對？(見圖六)

【練習二】利用高斯的方法計算 13+20+27+34+41+48+55=？
圖五

佳琪的作法： (13+55)×7÷2=238
圖六

31. 學生：對。

32. 老師：你們是不是大部分都這樣寫？沒錯，好，剛剛我是不是用了高斯的方法，首項加末項，可是老師第一題跟這一題不一樣的地方在哪裡？我那一題的公差就不是 1 了，而且我不是從 1 開始，可是如果不是從 1 開始，可不可以用？當然也可以用，因為你可以看一下，現在老師把這個 55 顛倒過來寫，你有沒有發現，它加起來都是多少？68，好，所以他就首項加末項，對不對？這邊再寫清楚一點，這邊是一個 S，這個 S 就是和的意思，這是英文的 SUM，你看一下，這邊的話就是首項加上末項(見圖七)，然

老師寫的： 13+20+27+34+41+48+55= 55+48+41+34+27+20+13= 68+68+68+68+68+68+68=7×68 7×68÷2=238
圖七

後它總共有幾個項，要不要數一下？因為老師這邊沒有直接寫給你，所以你是不是要數 1、2、3、4、5、6、7，數七個，好，然後再除以 2，為什麼要除以 2？這是老師剛剛說的，你這兩個加起來，它的和其實是有兩個和，所以你要把它除以 2，就會變成一個和，好，你們計算一下是不是這樣？這邊有一個地方可能要稍微修改一下，緊接著如果你要寫下面的話，你這邊就會變成有兩個式子是分開來了的，你最好是把它寫在同一行，對不對？或者再用等號連接起來，這樣看起來會比較完整，老師再問你，如果我們要再這樣子算的話，我這樣子寫可不可以？(20+48)×7÷2=238 這樣算可不可以？你有沒有發現，它的差別在哪裡？我這個算出來的答案是不是也是 238？一樣，可是你有沒有發現，老師不是抓首項跟末項，我抓第二項跟第幾項相加？

33. 學生：倒數第二項。

34. 老師：對，跟倒數第二項，第二項跟倒數第二項，所以，我不一定要寫首項跟末項，對不對？只是說，題目通常都會給我們首項跟末項，所以你在算的時候，我通常都抓它跟它，其實你要有一個觀念，它只要是對稱的項，第一項我們是不是以前用這樣子寫？a_1，這邊，小小的邊「是$_{(1)}$嗎？」，然後第七項就是這樣子，這是第七項，只要是它的項數，加起來是 8 的，通通都可以，怎麼說呢？你看，這個是不是第二項？這個是不是第六項？你有沒有發現，它尾巴的數字，加起來也是 8，就是 7+1，因為它總共是七項，所以如果它的項數加起來的數字是 6+1 的時候，它兩個加起來的和，也是會等於什麼？首項加末項，因為對稱的項的總和是一樣的。前年的基本學力測驗曾經考過這樣的觀念，所以等差數列的對稱性，不光是只有前面跟後面，還有第二項這樣，還有倒數的第二項，甚至連這邊也是，這個等差數

列有幾項，是不是有七個？(題目：利用高斯的方法計算 13+20+27+34+41+48+55=？)所以這個 34 剛好是中間的那一個，老師上一次是不是有講過，最中間是等差中項的話，它的兩倍剛好就是什麼？前後兩個相加，有沒有發現？34 乘以兩個，有沒有發現？是不是跟括號裡面的數字一樣都是 68，對不對？這邊也是 68，因為它是中間項，所以這個東西的兩倍會等於前後兩個相加，前後兩個對稱的相加，所以老師如果改成這樣寫(34×2)×7÷2，是不是也可以？34(中間項)×7=，答案一定也會對，所以你發現它的對稱性，不要只看前面跟後面，要整個都來看，好，這樣大概知道，這個等差數列的和要怎麼算，這樣有沒有問題？沒問題的話，老師來做一個結論，等差數列和的公式，現在你看一下，利用我們之前教的，所以假如說等差數列，它要這樣寫，第一項加第二項，好，加…好，第 n 項怎麼表示，a_n 對不對？現在我把它顛倒過來寫，a_n，這個你要寫多少？ n 怎麼樣？對， n -1，然後加…最後這個就是 a_1，所以，現在如果把它這兩個通通都加起來的話，你看到，這兩個加起來是不是兩倍的和？你看到老師這邊是不是完全都沒有數字？所以以後你要記，就要記這個。好，第一個是不是有一個 a_1+a_n？一直加到最後一個，也是 a_1+a_n，好，這樣的算法你看得懂嗎？可以。現在老師要問你，這邊總共有幾個 a_1+a_n？有幾個？一個，當然不可能，十個，一百個， n 個啊！為什麼？因為你看，這邊是不是一組？這邊是不是第二組？好，你光看這上面這個 1、2、3、4、5 就好了，它一直到 n ，所以會有幾個？會有 n 個，對不對？是不是總共會有 n 個？ n 個 a_1+a_n，所以它的總和，兩倍的 S 就是等於什麼？ n 個 a_1+a_n，這一個看得懂嗎？可以嗎？老師這邊都沒有數字哦，現在全部都用符號來代表，所以最後，我可以知道這個等差數列的和，好，我把 2 除過來，用等量相除，左右兩邊通通除

以 2，對不對？那這邊會變成什麼？ $n\times(a_1+a_n)$，這個就是我們的第一個公式，在你的學習單第幾頁會有？第三頁的上面(P.257)，請你先寫下來。第一個等差級數和的算法，好，上面是不是有一個空格的地方，你先想一下，然後你試著自己把它寫上去，寫在下面的空位，你試著用老師的方法把它再寫一次，現在你都沒有用數字了，你把它用符號來代表。老師再講一次，第三頁，就是你拿到第二張講義，左上角的地方，它有一個虛線的框框要請你寫，對不對？這個是不是老師最後算出來，你的公式可以這樣子算，就是等差級數的和，這個和是怎麼來的？我把這個數列先列一遍，然後倒過來再列一遍，有沒有？然後兩個相加，這邊是不是有一個加號？所以加起來，這邊有兩倍的和等於什麼？首項+末項，總共有幾個(首項+末項)？總共有 n 個，所以這個和，我就可以用這樣子來算，也就是你們以前熟悉的，這個就是我們的上底，對不對？這個就是下底，這就是我們的高，對不對？我們現在用這個符號來代表，可以懂嗎？如果說它是一個梯形的話，對，上底、下底，這個高剛好就是什麼？它的項數。你寫完之後再看一次，寫在這裡，然後公式你寫在這裡，你先自己試著寫寫看，寫不出來再看老師黑板上怎麼寫的。寫完之後，下面有兩題練習(見 P.257 學習單【練習】)，你可以利用老師剛剛寫出來這個結果來算，好，我們這一節先上到這邊，下一節我們從這邊開始上，你們可以休息一下，等一下準時進來。

【第二節】

35. 老師：老師是不是剛剛請你算那兩題，對不對？我發現有人第(2)題不太算得出來，在這邊老師再講一下，因為我剛剛看一看你們寫的東西，發現這個地方還是有點疑問，這邊老師再解釋一次。老師並沒有把黑板擦掉的原因，你

現在再聽一次，在這邊，老師剛剛是不是說了高斯的故事，對不對？他是用 a_1+a_n 來算這個等差數列的和，你記不記得前幾節，我們在講等差數列的時候，老師第一項是首項是不是就是用 a_1 來表示？所以這一個數列(題目：利用高斯的方法計算 13+20+27+34+41+48+55=？)，這個第一列是 13，我就把它稱做是首項。老師有個問題，現在要詢問的就是，我們用一個符號來代表它，然後一直加，這個就是第二項，這是不是就是第三項？只是老師沒寫出來，一直加到最後，當然，這一題很具體你可以看到，它是加到第七項，對不對？所以你看，老師不知道第幾項，可是老師講過，最末項的話，老師是不是就用 a_n 來寫，對不對？我們剛剛幾項，所以我就寫 a_n，所以我把這個數列列出來，就是 a_1、a_2，然後一直到 a_n，然後再把這個數列，從後面再倒寫一次，你會發現，這兩個加起來，是不是首項加末項？那這兩個 a_2+a_{n-1} 加起來，其實是不是首項加末項？這是第二項加上 n -1 項，這兩個加起來是不是首項加末項的數字，是不是？是啊！老師剛剛是不是有幫助你，這個 13+55，是不是就是 68？然後這個 20 是不是第二項？加 48，雖然數字不一樣，項數也不一樣，可是它們加起來的和，我是不是也可以寫成首項加末項？所以這邊通通都是首項加末項，有幾個？一個、兩個、三個、四個、五個、六個、七個、……有幾個？ n 個，你們一直寫到最後，會有 n 個的原因在這裡，所以老師這邊下面，就是全部都是用符號來寫了，兩倍的 S 是不是有 n 個 a_1+a_n？所以就是 $n\times(a_1+a_n)$，最後我要算一個的和，我怎麼算？是不是把 2 除過去就好了？用等量公理，好，所以我就可以推出來。它只是一個表示的方法，或者我們通常都說它是公式，這個表示方法，這邊都是等差數列的和，如果我知道和的時候，我就可以算項數，對不對？然後有首項跟末項，我是不是就可以算它的和？所以你只要

知道這三個東西，這三個裡面，你有沒有發現，沒有出現什麼東西？我們等差數列還有學一個東西。

36. 學生：公差。

37. 老師：公差，對不對？你會發現，不用知道公差，你只要知道首項跟末項，不需要管公差是多少。你告訴我幾項就好了，我是不是同樣也可以算出來了？好，剛剛老師要請你練習的，是不是有兩題？我們來看一下這兩題，等一下老師要請同學上來，我看你們應該都已經寫完了，你們覺得哪一個比較簡單？都很簡單。

38. 老師：好，我們先看第一題，這一題有沒有同學願意上來寫一下算式，羅思萍，你上來寫寫看好了，試試看，你字寫大一點，羅思萍，你慢慢算沒關係，你可以慢慢算。好了嗎？好，你可不可以稍微解釋一下，你為什麼這樣算，來，老師的麥克風借你，你大聲一點，來，面對著大家，你講一下，那個 112 是什麼？

39. 思萍：112 是首項加末項，然後再乘以它的項數，然後再除以 2，然後答案就出來了(見圖八)。

思萍的算法： (1)112+107+102+97+92+87=？ (112+87)×6÷2=597
圖八

40. 老師：112 是首項，是不是？87 是末項，那 6 呢？

41. 思萍：項數。

42. 老師：好，謝謝，他這樣講對不對？有沒有人要補充的？沒錯，你看一下，老師發現，如果是數字的話，有一題也是算那個和的，你很快就算出來，有沒有？中間我不是教了你這個東西，這個一般項的表示方法，結果後來你們算這個地方的時候，就會有人停住，他就不曉得到底要怎麼算，感覺起來好像被老師這些一大堆的符號搞混了。其實這個地方，就是要告訴你，我們在數學上把一個通則用一個符號來代表，112 就是我們的首項，這個首

項我們都用什麼來表示？a_1，對，很好，87 其實就是 a_n，對不對？可是，其實這個 n 你知道，這一題的 n 是多少？

43. 學生：是 6。

44. 老師：對啊，是 6 啊，懂嗎？所以這一題，如果你要把它用 a_1、a_2 這樣來寫的話，有沒有同學可以幫老師寫一下，你寫在上面，S 等於什麼？陳純源，來，你要不要試試看，你能不能夠回答得出來？你就利用這個 a_1、a_2 這樣子把它列出來，這一題如果我要用這個符號來代表的話，來，你試試看，1 是首項，對不對？你剛剛不是說它是 a_1 嗎？這個 112 就是 a_1，然後呢？加，等一下，你現在是不是在寫這個地方，對不對？老師現在要請你把原來這個題目用一般式寫一下，陳純源，你看一下你的 n 應該是多少？87， n 是 87 嗎？

45. 純源：6。

46. 老師：6，對，那請你改一下。好，同學你們有沒有注意看到，好，這樣就可以了，謝謝。這樣聽得懂老師的意思嗎？有沒有發現，剛剛陳純源第一個寫出來的是什麼？他第一個寫出來是這樣子，$(a_1+a_n)\div 2$，然後乘以 n (見圖九)，沒錯，他是把哪一個地方一般化？把這個東西一般化，對不對？現在要請他把題目，就是我們這一題，這個題目用一般式來代表，要怎麼寫？這個和就是 S，只是一個表示和的符號，這個就是和的意思，就好像你們用 d 來代表公差的意思一樣，所以你看一下，這邊是首項，對不對？然後這是第二項，這是第三項，一直要寫到多少？他剛剛這邊是不是寫 a_n？老師跟他講，這個 n 其實我們要寫 n 沒有關係，我們可以寫什麼？因為我已經知道它的項數，對不對？所以他寫多少比較好？是不是寫

陳純源的寫法： $\frac{n(a_1+a_n)}{2}$
圖九

a_6？好，覺得他這樣子有沒有錯？可是他這個 6 怎麼會突然長大了？有沒有發現，1 再來 2，然後 6 突然長大了，這個就應該在旁邊的地方，好，這樣你知道它的差別了嗎？這個就是 a_1、a_2，一直寫到 a_6，好，接下來第(2)題，老師也要請一個同學幫老師把題目先轉成一般項寫寫看，我先不要你算出來，你現在可以先跟同學討論，因為你不會寫的話，可以馬上問同學怎麼寫。我現在要請你把這個題目，好，第(2)題是這樣(見圖十)，你用一般項幫我寫寫看，知道老師的意思嗎？我們也是一樣，要請你跟當時做同樣的事情，就是請你把這一個幫老師改成一般式來代表。好，我找找看，看誰可以上來練習一下，周思涵，你寫完了嗎？好，你上來幫老師寫成一般式一下，寫寫看，用 a 表示看看，你要跟他一樣，老師要請你把這個寫出來一下，右邊老師是不是同樣的請周思涵跟陳純源一樣，幫我把題目用一般項表示，所以你看，一般項它的 a_1 不一定是 1，也不一定是 2，也不一定是多少，它是一個代表的符號而已，對不對？所以你看一下，我那個雖然是(-100)，對不對？首項是-100，第(1)題的首項是 112，可是它們都是這一個等差數列的首項，對不對？所以我都是用 a_1 表示，你有沒有發現，左右這兩邊，哪一個地方不一樣？他寫出來的地方，哪裡不一樣？這邊是誰，最後一項他寫多少？寫 n ，這一個他寫多少？a_6，所以老師要問你，這兩個題目，哪一個的項數你知道？當然是這一個(1)啊，對不對？因為這一個你可以看得出來，或者你用數的也知道是六項；可是這一題(2)，題目有沒有告訴你它的項數是多少？沒有，所以你沒有項數的話，你怎麼算這一題的和？有沒有人這一題可以上來做一下？好，佳恆，你上來試試看好了，這一題你怎麼算？你要不要解釋一下？好，謝謝，他只列

(2)(-100)+(-93)+(-86)+…+173+180+187=？
圖十

佳恆的算法：
【(-100)+187】×287÷2=
圖十一

出算式，為什麼他沒算出來(見圖十一)？因為他除不盡，來，我們看一下，好，我們不看它的一般項，直接看這個題目來算，這個(-100)是什麼？對，好，我們現在用 a_1 表示，187 是末項，所以這是 a_n，因為我現在不曉得它有幾項，對不對？那它這邊很明顯的，它的項數是不是乘以 n ，對不對？如果是用等差級數的公式，最後要乘以它的項數，它的項數是 287 嗎？

47. 學生：187。

48. 老師：187 怎麼樣？減掉-100，可是你不要忘記，它的公差是 7，所以它不是像剛剛老師那一題(1+2+3+…+100=？)，因為公差是 1，所以項數就可以用末項減首項來算出，這一題不一樣，它的公差是 7(見圖十)，所以這一題，如果我要算它的和的話，我還差一個什麼要先算？項數，對不對？我們現在就要來算這個項數，到底是多少？項數怎麼算，就跟剛剛老師為什麼要請你寫成這樣子有關係，你還記不記得，等差數列的第 n 項，是怎麼樣用首項跟公差來表示，還記得嗎？$a_n=a_1+(n-1)\times d$，好，你看，你會不會覺得看到這個你很熟悉，因為老師在前面三堂課，一直在講這個東西。再複習一次，這個(a_n)是末項，是第 n 項，這個(a_1)是什麼？首項，n 是什麼？項數對不對？等一下，我問你(n-1)是什麼，n-1，為什麼老師要-1？那 d 是什麼？

49. 學生：公差。

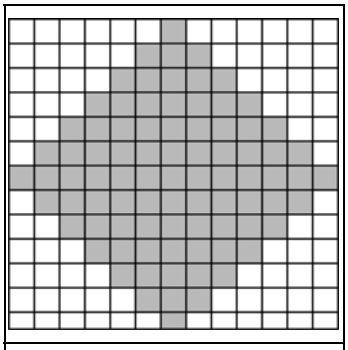
50. 老師：公差，其實我可以算這一題的項數，項數怎麼算？請問你，這一個 a_n，我的數字下面要寫多少？

51. 學生：187。

52. 老師：對，187，會的要回答。好，後面，有沒有同學要上來試試看，來，黃琪珍，你在那邊講，講給老師聽好了，首項是多少？

53. 琪珍：-100。

54. 老師：對，-100，好，加上ｎ-1，ｎ-1 我知道嗎？不知道，所以不知道我就先寫上ｎ-1，公差是多少？7，是 7 還是(-7)？7，公差是後項減前項，對不對？所以是-93-(-100)，所以就是 7，好，這樣對不對？你要記得老師講的，你要先把這個-100 移過來，所以是 287，其實剛剛佳恆寫的這個 287 是什麼？它是首項跟末項的差，可是你的差還要除以什麼？公差，這個才是你的間隔，對不對？好，這個(287)是等於(ｎ-1)×7，好，現在再把兩邊通通除以 7，對不對？這裡到這裡有沒有問題？沒有，好，這裡兩邊通通除以 7，所以 41=ｎ-1，對不對？好，所以ｎ等於多少？42，所以這一題會比較難的地方在這邊，我要先把ｎ算出來，所以ｎ這裡，我就不能寫 287 了，我要寫多少？這樣是不是就可以算出答案了？21×87，好，你再自己算出來答案，好，這樣有沒有問題？老師再重複一次計算步驟，首先，你要先把你的數列用一般項來表示。再來，就是你要算出來它的項數到底是多少？好，這樣有沒有問題？沒有。沒有的話，我們來看一些在生活上，它很像等差數列，可是又不是等差數列的題目，我現在看到第四頁(P.258)上面的地方(見圖十二)，一個設計師，他幫客廳畫的地磚的樣子，你有沒有看見它有一個花樣，就是有藍色地磚跟白色地磚，現在他請你算，這個藍色的地磚，總共會用到幾塊？因為他要叫材料，他總不能叫太多，叫太多不能退，所以你看一下，他當然不可能這樣一個一個數，對不對？如果他的客廳很大的話，他會數到都沒有時間工作了，你看一下，這樣子的藍色的磚塊，我要怎麼樣算，可以把它的總數算出來？第一個，一定是老師很強調的，



圖十二

數學就是你要找規律，對不對？好，你看一下這個的規律在哪裡？你們先把它的個數列出來，這樣你就可以找到它的規律了。等一下賀庭宣上來講你們的做法。你們都算好了嗎？好，你看這個藍色的地磚，它好像是一個一個四邊形貼起來，對不對？它有沒有什麼樣的規律，或者是你是怎麼算的？有沒有人要上來跟老師講，跟大家講一下？好，潘瑩橋，你上來說說看好了，對，把你的算式寫下來，你怎麼算這個藍色的地磚。同學，你們要看一下黑板上面同學寫的。麻煩你講一下，為什麼你這樣算？你不要擋住算式，你的算式要讓同學看，好，你幫我們解釋一下，你那個(13+1)÷2 是怎麼來的？(見圖十三)

潘瑩橋的算法：
(13+1)÷2=7
(11+1)÷2=6
$7^2+6^2=85$
圖十三

55. 瑩橋：13 就是邊長。
56. 老師：同學，你們有沒有看到圖？還是被他擋住了，好，你站這邊，對，好，這樣講。
57. 瑩橋：這個圖就是 13。
58. 老師：你大聲一點。
59. 瑩橋：這個圖就是 13，然後…。
60. 老師：後面聽得到嗎？可以大聲一點。
61. 瑩橋：就是這邊 13，這邊 2…。
62. 老師：哪邊到哪邊？你算那邊的項數，還是總和？
63. 瑩橋：我先算就是…
64. 老師：的什麼？項數，好。
65. 瑩橋：最多的加最少的，然後這個，所以就等於這邊。
66. 老師：瑩橋，你可能說清楚一點，那個項數它為什麼是這樣算？沒關係，不要緊

張，你慢慢說，為什麼會這樣子想？

67. 瑩橋：平均。

68. 老師：平均，好，同學聽得懂嗎？好，林宜君，你要不要上來幫他講一下？好，你上來講講看。

69. 宜君：它的項數就是這個減這個。

70. 老師：哪一個減哪一個？那兩邊，對。

71. 宜君：這邊算就是，就是這邊的項數，這個項數的話，它首項減末項，所以它末項減它的首項是公差…。

72. 老師：你是在說，那它這邊為什麼這樣算？7 的平方加 6 的平方是？

73. 宜君：公式而已。

74. 老師：用什麼公式，實在看不懂，來，你們上來輪流解釋，潘瑩橋，你這個 7^2 加 6^2 是什麼？你剛剛上來講了嗎？好，那你想一下。有沒有人可以幫他補充的？其實他的算法還不錯，如果你光寫這樣，其實同學不知道你為什麼會這樣子算，好，你想一下。有沒有跟他不一樣的算法？好，來，賀廷軒，大家看懂了嗎？為什麼會這樣寫，來，賀廷軒，麻煩你把它解釋一下。

75. 廷軒：這邊 13 嘛，這裡也是 13，全部就是 169 格，然後我再算，這邊有 21 格。

76. 老師：哪邊有 21 格？

77. 廷軒：白色的面積。

78. 老師：白色哪邊，哪一塊？

79. 廷軒：這個四塊。

80. 老師：每一塊嗎？還是總共四塊？

81. 廷軒：每一塊 21 格。

82. 老師：每一塊都是 21，你這 21 是怎麼算的？

83. 廷軒：自己算的。

84. 老師：自己算。

85. 廷軒：然後再乘以 4，就是 84，全部有 169 格，這邊有 84，所以 169-84 就是 85 格。

86. 老師：好，同學聽得懂嗎？

87. 學生：聽得懂。

88. 老師：好，只有他們那一組聽得懂，你最有反應，可以聽得懂他的講法嗎？

89. 學生：可以。

90. 老師：可以，他的方法跟潘瑩橋的，最大的不一樣是怎麼樣？潘瑩橋是直接算藍色的，他根本就不管白色，可是呢，賀廷軒是怎麼樣？他是反過來，他用減的，因為整個它是一個邊長是 13 的正方形，對不對？你先算出它整個的格數，然後再減掉白色，因為他一下就看到白色的，它是四塊一樣的，所以，只要算一塊白色的就好。其實你有沒有發現，這個白色的，我們先光看右上角，因為剛剛一直說這一塊，你就看這一塊，這一塊它這邊 21，老師特別問他 21 怎麼算的，這個好像你就沒有用到老師之前講的，其實這個白色變成是 5、4、3、2、1，它是一個等差數列，對不對？所以，你是不是可以用這個計算出來？當然你數也是很快，好，這樣算的方法聽得懂嗎？可以。好，接下來潘瑩橋已經準備好了，那講清楚一點，來。

91. 瑩橋：就是這邊兩塊，這邊跟這邊…。

92. 老師：你講慢一點，然後對著大家講。

93. 瑩橋：這邊是這邊到這邊，上半邊的藍色就等於 1+3+5+…+13，這邊算起來就是這樣子：(13+1)÷2=7。

94. 老師：好，你到這邊來，讓同學看一下，然後你再把你剛剛講的話講一遍，因為

你剛剛對著黑板講，來，你再講一次。

95. 瑩橋：就是先算上面的，上面的就是 1+3+5+7+9+11+13，這個就是剛剛的公式，就是首項加末項，乘上項數累積的和，然後再除以 2，然後算出來剛好會變成 7×7，就是 7^2，然後再換下面，下面就是剩下來的。

96. 老師：同學要注意看他寫的，好，你第二個再解釋一次。

97. 瑩橋：第二個就是後面的，後面的就是 1+3+5+7+9+11，那這個的公式就是首項加末項，然後乘上項數的 6，除以 2，然後化簡完剛好會變成 6 的平方，所以全部就是 7 的平方加上下面的 6 的平方，所以就等於 $7^2+6^2=85$。

98. 老師：好，謝謝，同學聽得懂嗎？可以，好，老師還是要雞婆一下，解釋一下，因為他突然寫 7 的平方跟 6 的平方，他第一次講，同學好像比較聽不懂，只有他們這一組大概聽得懂。其實他寫這個地方，是因為他算的很快，然後他把這些計算過程省略了，這個地方就是他真的比較厲害的地方，所以老師要特別請他來解釋給同學聽。為什麼他可以直接寫 7 的平方加 6 的平方，他是這樣子的，他先把這個磁磚分成上、下兩個部分，上面這個部分他是算第一個，第一層到第七層的地方，有沒有？他是算第一層到第七層，老師把這邊遮起來，你就可以看到，下面都是一個等差數列，對不對？所以我在算它的個數，是不是 1+3+5+7+9+11+13，對不對？你看，他的第一個算式，現在你們回到右邊來看一下，他這個算式是不是就是(首項加末項)×項數，總共 7 項，除以 2，剛剛好這一題很特別，因為它是一個奇數的數列，所以他今天 1+13，剛好可以被 2 約掉變成 7，就是 7×7，變成 7 的平方，但是只有奇數才會這樣，偶數並不是這樣，只有奇數才有這個規律。他上半部算完之後，就算下半部，下半部這邊是不是 11，然後，9、7…一直到最後 1，對不對？再把這些東西加起來，他就會變成像這樣的算式，

你有沒有發現他這邊寫加到 13，這邊加到 11，這邊小於一下，因為他把那個中間，最長的那一塊，最長的那一段，給了前面去算，所以他後面這邊也是一樣，你有沒有發現 1、3、5、7、11 是不是也是奇數？你看，1+11 就是首項加末數，乘以項數，是不是 6 個？然後除以 2，好，這邊是不是 12 跟 2 來約，就剩下 6，所以 6×6 就變成 6 的平方，所以，他最後才會寫出這樣子的一個算式。這邊他是這樣算的，他有沒有用到等差數列的算法？有，他的算法聽得懂嗎？其實還有另外一種，我剛剛看到，好像第六組的同學都是用老師接下來要說的那個算法，還是第六組有沒有同學可以說一下，還有一種算法，有沒有？潘宜庭，要不要算算看？你在這邊講就好，你是怎麼算的，你是這兩種嗎？好，你可不可以站來跟老師講一下你怎麼算？你是怎麼算的？1+3…。

99. 宜庭：1 加 3 再加 5 再加 7 再加 9 再加 11，最後再算 11+9+7+5+3+1，然後總共有兩組 1+3+5+7+9+11，再加最中間的 13 個(見圖十四)。

宜庭的算法： (1+3+5+7+9+11)×2+13
圖十四

100. 老師：對。

101. 宜庭：然後後面不是有多的，就是，你中間不是有多了？

102. 老師：多了一個？

103. 宜庭：多了一個 13。

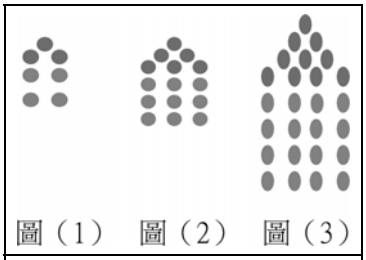
104. 老師：多了一個 13。

105. 宜庭：後面還有寫 11 加上 9+7+5，前面就可以算出 6 的平方。

106. 老師：就一模一樣。

107. 宜庭：然後就用前面那個，就是 1 加上 11，再乘上 6，就等於 72，然後 72 再加上最中間的 13 的就是 85。

108. 老師：很好，謝謝，他講的很清楚，我到這邊都聽得到，你們有聽清楚嗎？這就是老師說的第三種，第三種怎麼算？他把中間這個特別的這一個不要了，這個另外算，他先算第一項到第六項，你有沒有發現，第一項到第六項是1+3+5+7+9+11，中間這個 13 太特別了，因為只有它一個人，然後再往下數，下面是不是 11 開始，9、7、5、3、1，你有沒有發現這一個跟這一個，兩個是怎麼樣？一樣的，對不對？所以我可以把這兩個的和先算出來，這兩個的和怎麼算？它是一個等差數列，對不對？或者是用這一個，全部減掉白色的，都可以算得出來，可是你有沒有發現，這三組算法都脫離不了用什麼來算？等差數列的和，對不對？因為不管你是藍色還是白色，它的排列基本上，都是呈一個等差數列，好，這樣懂不懂？可以。好，如果可以的話，我們再來看下面這一個，也是一樣，它有比較，也不是單純的等差數列。你來看一下，這一題你會怎麼算？好，由於時間的關係，老師請你先討論，你們先討論出規律，然後列出算式就好，不一定要算出答案。我等一下還是要請同學上來唸一下算式，你先觀察，它的第一個圖形(見圖十五)是這樣子：它這邊上面是長得很像三角形的點點，下面是一個正方形，四個點點，這是第一個圖形，這樣的圖形它也是一樣，按照它的規律，可是你發現，它的三角形有變大了，對不對？然後這個正方形也變多了一點；第三個圖形是這樣子，現在你來看它三角形的地方，就是綠色的點點，跟紅色的點點(各圖下面的矩形部分)，它的規律不一樣，現在老師要問你第(10)個圖，好，現在你先幫老師想一下，第(10)個圖，你畫出來應該會像什麼樣子？第(10)個圖，有沒有已經找到了，有沒有？來，柏舟你要不要觀察【練習



圖十五

三】下列圖形的規律，並計算圖(10)的點數共有幾個？要說說看，你先說綠色的好了，好，你要不要上來講？來，怕你音量太小。

109. 柏舟：三角形應該就是，這是 1+2(圖 1)，然後 1+2+3(圖 2)，再下來是 1+2+3+4，然後正方形的圖形是 2×2，然後再來是 3×3，然後是 4×4。

110. 老師：我們時間到了，好，謝謝你。老師把這一個規律講完，鐘響完我們繼續講，再佔用五分鐘的時間。好，現在你看一下，第(1)個圖形，三角形是 1+2，對不對？然後正方形用黃色的筆寫，這個就是 2 的平方；第(2)個圖形是 1+2+3，綠色的三角形，它是不是跟剛剛的那個水管一樣？然後正方形是不是就是 3 的平方；再來第(3)個圖形，上面的是 1+2+3+4，然後下面這個是 4 的平方。現在老師只要請你幫老師講一下，這個第(10)個圖形，老師的算式應該會怎麼寫，三角形會寫到哪裡？1 加到多少？11 還是 10？

111. 學生：11。

112. 老師：對，11，因為老師剛剛開始是從，第(1)個圖形是不是加到 2？第(1)個圖形到 2，第(2)個圖形到 3，第(3)個圖形到 4，所以第(10)個圖形就到 11。我請問你，正方形的個數，應該是用多少來寫？是多少的平方？11 的平方還是 10 的平方？還是 9 的平方？還是 12 的平方？也是一樣，觀察一下，這邊是不是第(3)個圖形，所以它就是多少？4 的平方。所以第(10)個圖形，它是多少？11 的平方。所以它總共點的個數，就是怎麼樣？這一個東西再加上 11 的平方，這樣會不會？側面這個你是不是就用等差提出來算，好，那我們今天就上到這邊，班長，喊一下口令。

113. 學生：起立，立正，敬禮。謝謝老師。

114. 老師：好。

參、教學說明

我今天的教學目標，最主要的是讓學生從等差數列的算式裡面先去找規律，找出規律之後，可以計算已知項數的等差數列的和，接下來再經過符號的轉換，讓學生可以知道首項跟其他項的表示方法，最後再讓學生在算和的時候，可以算出用符號來代表一般項的方式。今天我本來是預計要介紹兩個公式，因為時間的關係，只介紹到一個公式，中間我穿插一些較為複雜或者是比較活潑、應用的問題，是結合等差級數的題目。我今天的教學流程，大概是這樣：先從生活上的問題開始出發，以水管的舖排方式，讓學生可以算出來水管的總數，接下就帶入 1+2+3+...，一直加到 100，這樣子的等差級數的算法，並加入有關於數學史的介紹。在講完具體的數字表示方式的算法之後，接著我就嘗試用一般項的方式，讓學生能夠了解怎麼用一般項來代表等差數列的每一個項。學生在國小的時候曾經學過類似的東西，也就是他們今天剛開始上課的時候，會用梯形公式來算這個等差級數的和。他們在國一的時候，曾經教過樣式與規律，也就是說，他們其實有初步找出數字的規律性的能力，緊接著在國三安排了等差數列的這個單元，因此，他們對於等差數列的一些相關名詞，也有一些粗淺的了解。所以在進行完這三個單元，有了一些前置經驗之後，接著我就來介紹等差級數，順便透過有關於等差數列的一些名詞，讓他們可以導出或者是去理解等差數列的和的公式。今天我首先舉的第一個例子就是：1 加到 100 的例子，這邊可以發現學生的解題策略會有兩種：第一種就是，把同樣的數列從後面再來寫一次，然後利用它的對稱性加出第一項跟最後一項，加起來是 101，總共有 100 個 101，因為是兩個數列，所以再除以 2，這是第一種解題的方法；另外一種是把前項跟後項，就是首末兩個、兩個配成一對，也就是從一個式子裡面，去找兩個、兩個相對的數，然後兩個相對的數總和是 101，總共有 50 個，所以就 101 乘以 50，所以他們在計算這一題的時候，會有這樣子不同的解題策略。我在進行教學的時候，再細問他們為什麼是用梯形公式的時候，我

發現他們並不是很了解，所以我就用高斯的例子來解釋為什麼是用梯形公式來算這個等差級數。在介紹過公差為 1 的這個數列之後，我緊接著就安排公差並不是 1 的等差數列，讓學生去算它的和。我試著讓他們用一般項來表示，發現學生做出來，他可能會有第一項、第二項，一直到最後一項，他會寫 a_n，就是模仿我的寫法，可是這邊的項數，只有六項而已，所以其實這邊這個 n 的地方，是應該要寫 6，所以這個地方，我就特別再對學生做釐清，教這個地方的時候，對於我們來說，好像是一件比較簡單的事情，可是我發現在學生的反應上，學生從具體的數字的排列要進入符號的表示的時候，會產生一個很大的困擾。為什麼我會發現這個現象？因為我在請他寫下來第一個公式的時候，發現他們不知道要寫在哪裡，甚至於他的推演的過程，他也不知道要怎麼寫。所以在第二堂課的前半段，我又撥了一些時間，針對這個地方再做一點加強跟銜接。當然，這邊是他們第一次接觸到等差級數的和的表示方式，所以往後，他們上了高中或者是在學習其他的單元的時候，我會建議老師多做這兩個之間，也就是說具體跟抽象符號之間的轉換，也要試著讓學生來練習，這樣的話可以讓他們對於用一般式來表示數學的方式更熟練，也比較不會發生困難。

今天比較值得提出的地方是這個班級是國三的班級，由於他們平常上課比較少用分組教學的方式，所以在進行發表的時候，會有一些學生比較會害羞，然後比較沒有辦法講出他們的答案，就好像第二堂課，最後一個舖地磚的例子，我下去看的時候，發現有三種解題策略，所以我就安排三個解法的學生上來解釋，第一個解法的學生直接很快就算出 6 的平方加 7 的平方，可是那個對一般學生來講，是沒有辦法理解的，所以我請他自己再釐清一遍，他回去想了之後，又更清楚的解釋。等差數列跟等差級數這個單元在國中的話，在國一，只是以粗淺的樣子跟規律出現，國三有更具體的等差數列的名詞，跟等差級數的和的計算的方式出現，對於往後的高中的部分，甚至以

後對他們數學上的學習，其實是滿重要的。這個地方，我的重心會讓學生從具體的數字的感覺再推演到一般項。

我本來要介紹的第二個公式是，因為之前學過等差數列第 n 項的表示方法，不過因為時間的關係，這個地方，就沒有進行，在往後的教學裡面，應該可以再加強這個部分，因為這兩個公式，有它們不一樣的應用地方，這本來也是我今天最後一個教學的重點，這個地方，其實老師也可以幫學生做一個釐清。

肆、教學後的省思

本次的教學單元為「等差級數」，原本設計的教學活動共有五個。但因為時間的關係，只進行到第四個教學活動。

本次教學活動的對象為國三學生，班上的氣氛略為活潑，平常上課時與老師的互動良好，所以對於老師所提出的問題都會回答。分組教學的目的是為了讓學生之間能有充分的討論，唯以往的座位安排很少採用分組方式，所以學生在同組間的討論氣氛似乎不如預期的理想。另外，學生在回答答案或算法時，都很快速且精簡，請其說理或解釋時，卻又不知所云，可能是之前並不習慣說理的方式，但這卻是一個澄清學生觀念的好機會，學生能從不斷的修正自己的講法後，獲得更清晰的概念。建議老師們能給予學生適當的說理機會。

在活動的進行方面，活動一由生活中的問題引導等差級數的算法，因為此等差級數的數字較簡單，且公差為 1，所以學生能用各種方法算出，包含用累加、前後項相加…等方法，此處有學生提到「梯形公式」，並不理解其意義，但不急於處理，留待活動二再予以澄清。活動二以高斯的故事引導 1+2+3+4+5+…+100 總和的算法，先介紹等差級數各項數字間的對稱性，再澄清「梯形公式」的意義。而在進行活動二時，發現

將等差數列的各項以一般項代表時，由於之前讓學生練習的都是數字，因而他們在數字轉成符號的過渡上出現了很大的困擾，所以在第二節課開始時，就以活動二的練習題做為例子，請學生將數字用一般項表示，學生才稍微清楚一些，建議老師在教學時也應多讓學生練習第 n 項的表示方法，然後再進行等差級數公式的討論。

另外，有兩個教學的方式都可以進行，兩種方法的先後順序並不是固定的，從學生學習的狀態來斟酌自己的教學，先瞭解等差級數公式的意義後，在討論等差級數的公式時，應先從首項(a_1)及末項(a_n)來表示數列，而 a_n 以 $a_1+(n-1)d$ 表示，再利用式子的對稱性歸納出 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 的公式。然後再由這個公式推導出 $\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 的寫法。由於本次教學只呈現了「首項加末項乘以項數除以 2」($\frac{n(a_1+a_n)}{2}$)的算法，對於前述公式($\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$)還沒提到，所以在教學順序的安排上，應該修正為先講 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$，再講 $\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 較為符合學生學習的順序。

最後，要提醒老師的是，本次活動雖然為等差級數，不過這兩節的重點是在於等差級數與公式的歸納和推導，完整的學習還需要讓學生多做練習，並利用兩個公式解決一些複雜的(一元一次、二元一次、一元二次)應用問題，所以，或許還需要再利用兩節課的時間練習，以熟悉等差級數公式的運用。因學生學習此單元時，代數的概念已經完整，所以學生能運用代數的解題及規律的掌握。

國家圖書館出版品預行編目資料

國中小數學教材與教學探討.代數篇 / 李進福等作；周筱亭, 劉君毅主編.
--初版. -- 臺北縣三峽鎮 : 國家教育研究院籌備處, 民 98.11-　冊 ;　公分

ISBN　978-986-02-0077-5（第 1 冊：平裝）
1.數學教育 2.代數 3.教學活動設計 4.中小學教育
523.32　98018278

國中小數學教材與教學探討---代數篇（一）
主　　編：周筱亭　劉君毅
教學指導：謝　堅　朱建正　鍾　靜　周筱亭
作　　者：李進福　陳萩紋　林信宏　陳春男　施燦宏
發 行 人：陳伯璋
發行機關：國家教育研究院籌備處
地　　址：台北縣三峽鎮三樹路二號
電　　話：（02）8671-1111 轉 教學資源中心
網　　址：http://www.naer.edu.tw
出版年月：中華民國 98 年 11 月
版　　次：初版
電子出版品說明：本書籍影片同時登載於「國中小數學教師專業成長網」
網址為：http://math.naer.edu.tw

定　　價：新台幣 290 元
印 刷 者：承印實業股份有限公司
地　　址：（220）台北縣板橋市中山路 2 段 465 巷 81 號 2 樓
電　　話：（02）2955-5282

展 示 處：政府出版品展售門市
地址及電話：
1.五南文化廣場：台中市中區柳川東街 32 號 3 樓　TEL：(04)2221-0237
網址：http//www.wunan.com.tw
2.國家書店松江門市：台北市松江路 209 號 1 樓　TEL：(02)2518-0207
網址：http//www.govbooks.com.tw

GPN：1009802629
ISBN：978-986-02-0077-5
國家教育研究院籌備處保留本書籍附件影片資料之著作權及所有權利。