

統一編號
1010003274

國中小數學教材與教學探討 - 代數篇 (三)

國中小數學教材與教學探討 - 代數篇 (三) 國家教育研究院出版



ISBN 978-986-02-9584-9



9 789860 295849

100.12.1000
定價：175元



國家教育研究院 出版

國中小數學教材與教學探討 - 代數篇(三)

周筱亭 劉君毅 主編

吳院長序

1989年3月，美國的The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)出版了Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics，在這份文件中，NCTM仔細地描述了自幼稚園以上至12年級學生所應學習的數學內容，其中，「數學能力」的培養則為學習之重點。「數學能力」的內涵，依NCTM的定義，涵蓋了：對於數學世界探索、猜測和邏輯推理的能力，能解決非例行性的數學問題，以數學語言進行溝通，整合各種不同的數學概念，及能運用數學想法於其他生活領域的能力；「數學能力」也包含個人自信的發展和尋求評估、使用量化及空間資訊解決問題與作決定的能力。另一方面，學生之彈性、持續力、興趣、好奇心和發明能力則會影響到學生數學能力的發展和實現。因此，NCTM強調發展學生的數學能力需要建立一種全新的課程和環境，以供數學教學及學習發生；為了適應這樣全新的課程及教學環境，中小學的數學教師需具備以下能力：

- 能選擇適當的數學活動以引發學生的智慧與興趣；
- 提供學生深化數學理解及應用的機會；
- 能藉由課堂活動協助學生數學思維的成長及數學探索；
- 能協助學生使用科技及其他工具探索數學；
- 能協助學生連結之前所學的數學知識與目前發展中的知識；
- 引導個人、小組和全班的學習工作。

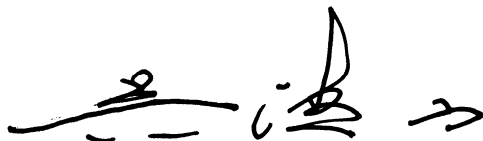
因此，數學教師需具備深廣的數學知識以因應學生數學學習上的需求，即使數學教師僅僅是詢問更進一步的問題，或者是指出一個新的探索方向。

本院周筱亭研究員與劉君毅助理研究員自民國九十一年度起，即開始進行「現實教學紀錄」對於數學教師專業成長影響之探討研究，以記錄教師們的「教學歷程」為主要的資料蒐集方式，包含以影像資料為主的「教學錄影專輯」、教師於教學前所作的「教學活動設計」以及錄影後所作的「教學後的省思」。這個研究的最終目的在於建置我國國中小數學教師適用的「現實教學紀錄」資料庫，資料庫中包含數學內涵以及數學為主軸的統整課程教學情境。該研究以國中小數學課程中的十個重要主題為主軸，根據各該主軸在國民中小學階段的重點教學內涵，結合學者專家的專業及國中小教師

的實務知識，針對活動設計、數學內涵、班級經營、以及學生認知等向度進行分析與整理，來建置教學情境紀錄，做為教師實務學習的資源，並從中蒐集參與研習教師反思及改變的資訊。

這套叢書《國中小數學教材與教學探討》是前述資料庫內容的呈現方式之一，自93年度起已陸續出版以「長度」、「比例」、「時間」、「小數」、「國小幾何」、「分數」、「整數的乘除」、「因數與倍數」、「整數的數概念與加減運算」、「一元一次方程式」、「國中幾何」和「代數」為主題的各冊。今年出版的將以「國中代數」為主題，本書為『代數篇（三）』。每本書都包含該主軸的各單元「教學活動設計」、「教學活動實錄」、「教學說明」和「教學後的省思」，並附上各單元的教學實錄影音光碟。

在本書付梓之際，僅以此序向各位參與的人士表達誠摯的謝意，由於他們的專心投入與犧牲週末假日的無私奉獻，讓本院能出版、製作這些教學敘事，作為以學校為基地的數學教師成長學習資源。



於國家教育研究院

民國一〇〇年八月

編輯要旨

- 一、本書為國家教育研究院陸續出版的一系列與國中小數學教材和教學相關的叢書之一，去（99）年出版的是以「國中幾何」為主題；今年預定出版的是以國中「代數」為主題，本書「代數篇（三）」，收錄國中一年級至二年級的教學主題單元，也是本系列叢書的最後一本。
- 二、出版這類叢書的主要目的在於提供國中小教師欲提升專業能力時，可以參考或共同討論的教學案例。
- 三、本書分為兩個部分：文本和數位影音光碟(DVD)，前者包括「代數」主題的各單元活動設計、教學實錄、教學說明和教學者教學後的省思；後者則為各單元的教學實況錄影以及擔任教學的教師於教學後所錄製的教學說明。
- 四、讀者在觀看影音光碟時，可以對照文本中的教學實錄，將更有利於掌握教學細節。
- 五、本書並未涵蓋國中數學教材中所有「代數」主題的相關題材，係就參與的老師們當時任教的年級與使用的版本，配合原訂的教材和教學進度，選取與「代數」有關的重要概念，在教授們的指導之下，先設計教學活動，經過反覆的討論與修正，定案後，由本院委外錄製教學實況和教學說明。錄影紀錄皆為自然真實的上課過程，由於採用雙機錄影，影片中呈現的教學實況的畫面已經過剪輯，但音效方面則是教室現場原音重現。
- 六、由於每位教師的教學風格不同，所教學生的背景、經驗與知識也不盡相同，因而讀者不應將本書的各個案例視為「範例」。
- 七、基於環保理念，本書已逐年縮減紙本印製量，改採光碟發行，影音光碟部分則維持原形式不變，建議讀者可先將電子版「文本資料」內容載存於電腦硬碟中，再透過瀏覽工具開啟相關檔案閱讀，並可同步搭配觀看影音光碟影片。
- 八、本書內容(含文本與影片)未來將逐步數位化，以線上課程方式呈現，建置於本處「國中小數學教師專業成長網」(網址為：<http://math.naer.edu.tw>)，歡迎上網瀏覽最新資訊。
- 九、本院保留本書及影片內容之著作權及所有權利，讀者若需引用或有任何問題，歡迎逕洽本院。

目次

科學記號.....	1
壹、教學活動設計	1
貳、教學實錄	12
參、教學說明	50
肆、教學後的省思	51
線型函數.....	53
壹、教學活動設計	53
貳、教學實錄	73
參、教學說明	111
肆、教學後的省思	112
因式分解（提出公因數、分組分解）.....	115
壹、教學活動設計	115
貳、教學實錄	137
參、教學說明	171
肆、教學後的省思	172

科學記號

壹、教學活動設計

一、教學年級：七年級上學期

二、教學者：台北縣板橋國中 梁翠玲 老師

三、教學目標：

- 1.能將很大的數以科學記號表示。
- 2.能由科學記號中的指數判斷出此數的位數。
- 3.能將很小的數以科學記號表示。
- 4.能瞭解科學記號中的負指數和小數位數的關係。
- 5.能對科學記號做乘除運算。

四、活動目標：

【活動一】以故事讓學生瞭解利用科學記號表示數的必要性。

【活動二】復習指數律。

【活動三】將很大的數表示成科學記號，並由科學記號中的指數判斷出此數的位數。

【活動四】將很小的數以科學記號表示，並能由科學記號中的負指數說出小數位數。

【活動五】能將生活中用科學記號表示的兩個數，進行乘除運算。

五、教學概要說明：

本單元主要分成五個活動進行，每個活動的教學內容或重點如下：

- 1.先以中國民間故事引起學生的興趣，以太空中牛郎織女星的距離為例，瞭解科

學記號的必要性。

- 2.因為科學記號是指數的記法，所以在教科學記號之前，務必先複習指數律的運算規則，以確保科學記號的教學順暢。
- 3.科學記號的記法，一般老師都是直接介紹，但學生過一段時間後不一定會記得，所以本教案在活動三的部分特別列出各種記法，讓學生比較，當我們把 b 記成 $a \times 10^n$ ，其中 $0 < a < 10$ 的目的是看到 n 就可以知道 b 的位數。
- 4.教到以科學記號記錄很小的數時，學生會覺得十分困難，所以此教案的設計也是讓學生觀察多個例子後，發現將 b 記成 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $0 < a < 10$ 的目的是看到 n 就可以知道 b 的小數位數。
- 5.讓學生透過一些例子，練習科學記號的乘除運算。

六、教學活動設計：

【活動一】：以故事讓學生瞭解利用科學記號表示數的必要性。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<ul style="list-style-type: none"> •引起學習的動機及以科學記號記錄大數的必要性 	<ol style="list-style-type: none"> 1.老師先講一個牛郎織女的故事，以牛郎星和織女星的距離有 16 光年，引起學生的學習動機。 2.告訴學生，光的速率大約是 30,000 公里/秒，請學生算出 1 光年的距離 $=30,000 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 =$ $9,4608,0000,0000$ 	<ul style="list-style-type: none"> •可參考國語日報出版之「中國民俗節日故事 10—牛郎織女」 •若學生以「個、十、百、千、萬、十萬、…」默數出最大位數再唸出此數，老師可以幫助學生以四位一撇的結構報 	<ul style="list-style-type: none"> •能回答：9 兆 4 千 6 百零 8 億公里。

	公里，請學生唸出這個數字。 3.這麼大的數字，容易寫錯，也容易唸錯，常常就會多寫或少寫一個0，數學家就利用指數的記法，發明了「科學記號」來記錄很大或很小的數。	讀。 • 引出科學記號的必要性。	
--	----------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------	--

【活動二】：復習指數律。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 復習指數律	1. 老師提問： (1) 1000,0000,0000,0000,0000,0000 0 是 10 的幾次方？ (2) $\frac{1}{1,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000}$ 是 10 的幾次方分之一？又可以寫成 10^{\square} ？ 2. 復習指數律： $a^m \times a^n =$ $a^m \div a^n =$ $(a^m)^n =$ $(a \times b)^n =$	• 教師可斟酌需要複習 10 的次方和 0 的個數之間的關係。 • 教師可斟酌需要複習負指數律的意義。 • 若學生不會時要再舉例解釋。 例如： $2^3 \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^{3+5} = 2^8$	• 學生能回答： 10^{23} • 學生能回答： 10^{32} 、 10^{-32} • 學生能說出 a^{m+n} (相乘指數相加) a^{m-n} (相除指數相減) $a^{m \times n}$

	<p>練習：</p> <p>(1) $10^3 \times 10^6 = \underline{\quad}$。</p> <p>(2) $10^{-2} \times 10^{-4} = \underline{\quad}$。</p> <p>(3) $10^{-3} \times 10^7 = \underline{\quad}$。</p> <p>(4) $(10^3)^{-2} = \underline{\quad}$。</p> <p>(5) $(10^2 \times 10)^4 = \underline{\quad}$。</p> <p>(6) $10^6 \div 10^2 = \underline{\quad}$。</p> <p>(7) $10^{99} \div 10^{-11} = \underline{\quad}$。</p> <p>(8) $10^{-6} \div 10^{-8} = \underline{\quad}$。</p> <p>(9) $(2.5 \times 10^{12}) \times (3 \times 10^5) = \underline{\quad}$。</p> <p>(10) $(4 \times 10^{-4}) \div (2 \times 10^{-6}) = \underline{\quad}$。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 先由學生作答 5 分鐘，再由學生舉手逐題回答。 第(9)、(10)小題較難，不管學生會不會老師都要加以說明：乘法有交換律、結合律，除法沒有。 	<p>$a^n \times b^n$</p> <ul style="list-style-type: none"> 學生能答： (1) 10^9 (2) 10^{-6} (3) 10^4 (4) 10^{-6} (5) 10^{-4} (6) 10^4 (7) 10^{110} (8) 10^2 (9) 7.5×10^{17} (10) 2×10^2
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

【活動三】將很大的數表示成科學記號，並由科學記號中的指數判斷出此數的位數。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<ul style="list-style-type: none"> 將很大的數表示成科學記號 	<p>1.老師提問：</p> <p>(1) $800 = 8 \times 100$ $= 8 \times 10^2$</p> <p>(2) $8000 = 8 \times 1000$ $= 8 \times 10^3$</p> <p>(3) $80000 = 8 \times 10000$ $= 8 \times 10^4$</p> <p>(4) 800000 $= 8 \times 100000$ $= 8 \times 10^5$</p> <p>觀察上面的式子，你發現了什麼？</p>	<ul style="list-style-type: none"> 若學生不能發現關係，或不會表達，可將每一個式子的位數和指數分別寫出，讓學生做比較。 	<ul style="list-style-type: none"> 學生能回答： (1) 0有多少個，指數就是多

	<p>0 的個數和指數有什麼關係？</p> <p>這個數的位數和指數有什麼關係？為什麼？</p> <p>2.老師提問：</p> $9,4600,0000,0000$ $=946 \times 10^{10}$ $=94.6 \times 10^{11}$ $=9.46 \times 10^{12}$ <p>這三種表示法要如何計算它們為幾位數？</p> <p>老師做結論：每一個數的位數除了觀察指數，還要看前面的數是幾位數，不夠方便。所以為了讓大家統一能由指數就觀察出這個很大的數是幾位數，我們就將每個數字留一位數在小數點前，並將這種寫法稱為科學記號。</p>	<p>少。</p> <p>(2) 因為在0的前面還有一個數字，所以位數要加1。</p> <p>(3) 位數 - 1 = 指數 指數 + 1 = 位數</p> <p>• 學生能回答： 10 + 3位數 11 + 2位數 12 + 1位數</p> <p>• 此佈題的用意是希望學生能接受科學記號中 $1 \leq a < 10$ 的用意。</p>	
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

	<p>3.介紹科學記號的定義： $a \times 10^n$，$1 \leq a < 10$，n 為整數</p> <p>4.例題 1：在天文學上，地球到太陽的平均距離稱為 1 天文單位。已知此距離約為 1,500,0000 公里，以科學記號來記錄為多少公里？</p> <p>例題 2：<u>王永慶</u>到底有多少財產？目前沒有一個準確的數字。據《福布斯》雜誌統計，<u>王永慶</u>身價高達 2203 億新台幣，是台灣僅次於國泰金控<u>蔡宏圖</u>家族的第二富豪。請將 2203 億以科學記號表示。</p> <p>5.練習 1： 將下列各數改寫成科學記號 (1)80000 (2)120000 (3)7350000</p>	<p>• 例題1、例題2的用意是讓學生熟悉科學記號的記法。教師可讓學生先思考再講解。</p> <p>• 先由學生在學習單上作答2~3分鐘，再由學生上台完成。</p>	<p>• 學生能回答： $1,500,0000 = 1.5 \times 10^8$</p> <p>• 學生能回答： $2203,0000,0000 = 2.203 \times 10^{11}$</p> <p>• 學生能回答： (1)8×10^4 (2)1.2×10^5 (3)7.35×10^6</p>
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

	(4)20360000000000 6.練習 2： 請將下列各數乘開 (1) 1.2×10^4 (2) 8.26×10^7 (3) 4.592×10^{11} (4) 7.38×10^9	• 先由學生在學習單上作答2~3分鐘，再由學生上台完成。	(4) 2.036×10^{13} • 學生能回答： (1)12000 (2)82600000 (3)459200000000 (4)7380000000
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

【活動四】將很小的數以科學記號表示，並能由科學記號中的負指數說出小數位數。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
• 將很小的數表示成科學記號	1. 因為 $0.1 = 10^{-1}$ 所以 $0.3 = 3 \times 0.1$ $= 3 \times 10^{-1}$ $0.03 = 3 \times 0.01$ $= 3 \times 10^{-2}$ $0.003 = 3 \times 0.001$ $= 3 \times 10^{-3}$ 10^{-n} 中的 n 和 3 所在的小數位數有什麼關係？ 2. $0.52 = 5.2 \times 0.1$ $= 5.2 \times 10^{-1}$ $0.052 = 5.2 \times 0.01$ $= 5.2 \times 10^{-2}$ $0.0052 = 5.2 \times 0.001$ $= 5.2 \times 10^{-3}$	• 若學生不知道 $0.1 = 10^{-1}$ ，老師應再幫學生複習。 • 若學生對小數的乘法不夠熟悉，教師應先複習小數的乘法：兩個小數相乘，小數位數要相加。	• 學生能回答： n 是多少， 3 就在小數點後第幾位。

	<p>若是5.2×10^{-n}，那麼小數點後第n位，和5.2中的5還是2有關係？</p> <p>3.結論：很小的數寫成科學記號時，小數點後第幾位出現數字，就記為10的負幾次方。</p> <p>4.例題1：冠狀病毒的變異種是造成「嚴重性呼吸道症候群」SARS的元凶，這種病毒的長度約為0.00000008公尺，請以科學記號來表示此種病毒的長度。</p> <p>例題2：腸病毒是一群RNA病毒，大小僅0.0000023公分。以血清分類，可分出67種。雖名為腸病毒，人類感染後卻很少出現腸道症狀。請以科學記號來表示腸病毒的長度。</p> <p>例題3：小芬用500倍顯微鏡觀察某細胞，測得在鏡中</p>	<p>• 例題1、例題2、例題3的用意是讓學生熟悉將很小的數記為科學記號。教師可讓學生先思考再講解。</p>	<p>• 學生能瞭解：5.2×10^{-n}中的小數第n位恰好是5。</p> <p>• 學生能回答：8×10^{-8}公尺</p> <p>• 學生能回答：2.3×10^{-6}公分</p> <p>• 學生能回答：6.4×10^{-5}公分</p>
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

	<p>細胞之長度為 0.032公分，請問此細胞真實大小為多少公分？(結果以科學記號來記錄)</p> <p>5.練習1： 以科學記號記錄下列各數 (1)0.0000001 (2)0.000035 (3)0.00000813 (4) 0.00000000578</p> <p>練習2： 請將下列各數乘開 (1) 1.2×10^{-4} (2) 8.26×10^{-7} (3) 4.592×10^{-11} (4) 7.38×10^{-9}</p>	<p>•先由學生在學習單上作答2~3分鐘，再由學生上台完成。</p> <p>•先由學生在學習單上作答2~3分鐘，再由學生上台完成。</p>	<p>• 答案： (1)1×10^{-7} (2)3.5×10^{-5} (3)8.13×10^{-6} (4)5.78×10^{-9}</p> <p>• 答案： (1)0.00012 (2)0.000000826 (3)0.0000000004592 (4)0.00000000738</p>
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

【活動五】能將生活中用科學記號表示的兩個數，進行乘除運算。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>•科學記號的乘除運算</p>	<p>1.例題 1：已知 1 天文單位約為 1.5×10^{11}公尺，試回答下列問題：</p> <p>①若木星與太陽的平均距離為 7.8×10^{11}公尺，則木星與太陽的平均</p>	<p>•教師應注意題目盡量取材自科學上學生容易了解的實例，讓學生明瞭科學記號做乘除運算的必要性。</p> <p>•學生對應用問題較難理解，教師可對題目稍加解釋，或以圖示讓學生更</p>	<p>• 學生能回答： ①5.2 個天文單位。</p>

	<p>距離為幾個天文單位？(以四捨四捨五入法求到小數第一位)</p> <p>② 若火星與太陽的平均距離為 1.5 天文單位，則火星與太陽的平均距離是多少公尺？(請用科學記號表示)</p> <p>例題 2：奈米口罩的織布縫隙是 10^{-9}m，而霉菌長度是 5×10^{-7}m，則霉菌長度是奈米口罩縫隙的多少倍？</p>	<p>容易瞭解。</p> <p>•用科學記號表示的兩個數，進行乘除運算時需用到乘法交換律及結合律，在活動二的練習中已有復習。</p>	<p>②$2.25 \times 10^{11}$公尺</p> <p>• 學生能回答：500 倍</p>
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------

附錄：學習單

概念一、科學記號表示法 1—很大的數

練習 1：請以科學記號記錄下列各數

- (1) 800000 (2) 120000 (3) 7350000 (4) 20360000000000

練習 2：請將下列各數乘開

- (1)
- 1.2×10^4
- (2)
- 8.26×10^7
- (3)
- 4.592×10^{11}
- (4)
- 7.38×10^9

概念二、科學記號表示法 2—很小的數

練習 1：以科學記號記錄下列各數

- (1) 0.0000001 (2) 0.000035 (3) 0.00000813 (4) 0.00000000578

練習 2：請將下列各數乘開

- (1)
- 1.2×10^{-4}
- (2)
- 8.26×10^{-7}
- (3)
- 4.592×10^{-11}
- (4)
- 7.38×10^{-9}

貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：好，我們現在要開始上課了，那我們今天要講什麼呢？第一個，我們先講一個故事，牛郎織女的故事有沒有聽過？
2. 學生：有。
3. 老師：有喔！那就不用講囉！
4. 學生：要…。
5. 老師：好。很久以前，在中國大陸南陽城的地方，有一個牛家莊，有一個善良又忠厚的小伙子，知道小伙子喔？父母早亡，然後他就跟著哥哥嫂嫂過日子，那嫂嫂姓馬，所以我們就叫她馬氏。她為人很狠毒，經常虐待他，要他做很多的事情，所以有一年秋天，那嫂子就逼他去放牛，可是只給他 9 頭牛，卻要他帶幾頭牛回來？
6. 學生：10 頭。
7. 老師：10 頭耶！你說可能嗎？
8. 學生：不可能。
9. 老師：不可能，可是牛郎很忠厚老實，他就想：嫂嫂這麼說，就只好這麼辦吧！然後牛郎就一個人趕著牛，進了山，心想不知道什麼時候才能趕著 10 頭牛回來。這個時候，有一位頭髮都白的老人出現在他面前，知道他的遭遇以後，就對他說：「在伏牛山裡有一頭病倒的老牛，你去餵牠，等老牛病好了以後，你就可以趕著牠回家了」。然後牛郎找到那頭有病的老牛，就開始餵牠吃草，一連三天，老牛才告訴他說：我是灰牛大仙，因為觸犯了天條，被貶下來，摔壞了腿，無法動彈，我的傷要用百花，100 朵花的露水洗一

個月才能好。牛郎就不畏辛苦，細心照料到老牛病好了以後，才很高興的趕著 10 頭牛回家。牛郎回家以後，嫂子還是對他不好，好幾次都想要害他，可是老牛都會去救他，所以嫂子最後還是很生氣，惱羞成怒，就把牛郎趕出家門，牛郎只說：「我要那一頭牛跟著我就好了。」然後他們就到山裡面過自己的活啦！結果有一天，天上的織女還有很多仙女就一起下凡來玩，到河裡洗澡，牛郎就在老牛的幫助之下，認識了織女，兩個人互生情意，織女就偷偷下凡，來到人間，做了牛郎的妻子。織女還把天上帶來的天蠶分給大家，教大家養蠶、抽絲，織出又光又亮的綢緞。牛郎和織女結婚以後，男耕女織，情深意重，就生了一男一女，結果這時候，過的很幸福，可是被誰發現了？被天帝知道，王母娘娘就親自下凡來，把織女帶回天上，這麼恩愛的夫妻被拆散了，牛郎很難過，老牛就告訴牛郎說：「我死了以後，你可以用我的皮做成皮鞋，然後你就可以飛上天了。」牛郎就真的等老牛死了以後，把它做成皮鞋，然後就拉著自己的兒女飛上天，就快要追到織女了，可是呢？王母娘娘把頭上的金簪拔下來一揮，一道波濤洶湧的天河就出現了，牛郎和織女被隔在兩岸，只能相對的哭泣，他們的忠貞愛情感動了喜鵲，那些喜鵲就飛來搭成鵲橋，讓牛郎跟織女可以走上鵲橋相會。王母娘娘也很無奈，就說：「好吧！你們每年只能 7 月 7 日的時候，在鵲橋相會。」從此以後，每到農曆的 7 月初 7，他們就會相會，所以古時候，女孩子就會來到花前月下，看著星星，找牛郎星跟織女星，希望看到他們相會，然後祈求上蒼：「希望我也像他們一樣，那樣的心靈手巧，可以找到一個很好的老公。」這就是我們的七夕情人節的由來。可是你們知道嗎？其實就天文學上來看，牛郎星跟織女星的距離有 16 光年，什麼是光年你知道嗎？就是光走的速度。那也就是說，他們如果用光速來回急奔，

剛剛我們看這個在跑，跑了 3 趟，他要跑 16 光年才可以跑到，所以 18 歲的織女跟牛郎，如果要相會 3 次，相聚一次要 16 年，3 次要幾年？

10. 學生：48 年。
11. 老師：48 年。再加上他原來 18 歲，請問他變幾歲了？
12. 學生：66 歲。
13. 老師：就變成老婆婆了，對不對？所以呢？這其實是一個很浪漫的傳說，但是可能發生嗎？不太可能，對不對？那我們講到光年是什麼意思？它是一個距離的單位，什麼樣的距離呢？就是光連續跑 1 年的距離，光行走 1 年的距離，光行走 1 秒鐘的話是多少公里（30,000 公里/秒）？
14. 學生：30 萬公里。
15. 老師：30 萬公里。老師那個逗點，是用我們中國的，我們傳統都是 4 位，對不對？萬，然後呢？億、兆，都是 4 位，所以老師的逗點不是用外國的，我們是用中國的方式去講的，所以這裡 30 萬公里，是 1 秒鐘，那 1 光年呢？30 萬公里是 1 秒，一年有幾天？
16. 學生：365 天。
17. 老師：365 天。再來，一天有？
18. 學生：24 小時。
19. 老師：24 小時。1 小時有？
20. 學生：60 分鐘。
21. 老師：60 分鐘。1 分鐘有？
22. 學生：60 秒。
23. 老師：60 秒。然後呢？這樣乘起來最後會有多少公里（一光年 = 光連續跑一年的時間 = 30,000 公里 × 365 天 × 24 小時 × 60 分 × 60 秒 = 9,4608,0000,0000 公

里)？大不大？

24. 學生：大。
25. 老師：大，對不對？你會不會唸？9兆……？
26. 學生：9兆4千6百零8億公里。
27. 老師：很大，對不對？所以呢？這麼大的數據，科學家常常會忘記，少寫一個0，或者多寫一個零，因為數字很大或很小的時候，是不是會出現很多0？所以科學家就利用指數的簡便，發明了一種方法，我們把它叫做「科學記號」。好，那我們來看看，例如說這裡(1000,0000,0000,0000,0000,0000)，你看一下，那到底是10的幾次方？數一數，幾次方？老師有幫你用逗號喔！
28. 學生：23。
29. 老師：23。對嗎？好，23。然後呢？那這個($\frac{1}{1,000,0000,0000,0000,0000,0000,0000}$)呢？我們要怎麼紀錄？這裡有幾個0？
30. 老師：好多個0，對不對？
31. 學生：32。
32. 老師：32。好！所以呢？我們就會記成10的32次方分之1($\frac{1}{10^{32}}$)。可是老師說過，如果要把它寫上來變成分子的話，要寫成什麼？寫成什麼？
33. 學生：(-32)次方。
34. 老師：(-32)次方。所以呢？我們看到這樣子，我問你，你覺得是這一種方式(10^{-32})比較容易看，還是這一種方式($\frac{1}{1,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000}$)比較容易看？後面還是前面？
35. 學生：後面(10^{-32})。
36. 老師：後面。一看就知道1的後面有幾個0？(老師問的是 10^{23})
37. 學生：23。

38. 老師：23 個 0，你就知道它很大了，對不對？那這邊(10^{-32})你看(-32)就表示很小，對不對？所以我們再看剛剛的指數律，先複習一下，因為剛剛講到要指數律，所以我們複習一下。來，這還記得嗎？相乘指數相？($a^m \times a^n = a^{(m+n)}$)

39. 學生：加。

40. 老師：再來，相除指數相？($a^m \div a^n = a^{(m-n)}$)

41. 學生：減。

42. 老師：再來，括號指數相？($(a^m)^n = a^{m \times n}$)

43. 學生：乘。

44. 老師：再來，這指數是大家的。OK，這公式記得嗎？($(a \times b)^m = a^m \times b^m$)

45. 學生：記得。

46. 老師：好，慢慢來，我們來看這 10 題（圖一）你會不會算？

47. 學生：會。

48. 老師：會喔！好，找一張紙。練習黑板上的題目。

（學生練習中，教師行間巡視）

49. 老師：好了喔，好！那我們來看答案喔！

50. 學生：好。

51. 老師：第一。等一下，你怎麼通通按出來了？好，第（1）題相乘指數相？

52. 學生：加。

53. 老師：對， 10^9 ，好！第（2）題我要問同學喔！好，第（2）題誰要告訴我？相乘指數相加，所以(-2)+(-4)是不是(-6)？第（2）題對不對？第（3）題誰要告訴我？好，來！你說。

復習指數律

(1) $10^3 \times 10^6$	(2) $10^{-2} \times 10^{-4}$
(3) $10^{-3} \times 10^7$	(4) $(10^3)^{-2}$
(5) $(10^{-2} \times 10)^4$	(6) $10^6 \div 10^2$
(7) $10^{99} \div 10^{-11}$	(8) $10^{-6} \div 10^{-8}$
(9) $(2.5 \times 10^{12}) \times (3 \times 10^5)$	
(10) $(4 \times 10^{-4}) \div (2 \times 10^{-6})$	

圖一

54. 學生： 10^4 。
55. 老師：10 的 4 次方，對不對？
56. 學生：對。
57. 老師：好，答對了！第（4）題，誰要告訴我？平常你們的踴躍跑到哪裡去了？好，你說。
58. 學生： (-6) 。
59. 老師：10 的 (-6) 次方，對嗎？
60. 學生：對。
61. 老師：對。再來第（5）題，括號裡面兩數相乘變成 10^1 次方，再括號 4 次方，所以誰要告訴我？有沒有人？舉手，快點，好，你說。
62. 學生： 10^4 。
63. 老師：10 的 (-4) 次方。好，很好，答對了。好，再來第（6）題。
64. 學生： 10^4 。
65. 老師：10 的 4 次方。為什麼會 10 的 4 次方？用了哪一個口訣？
66. 學生：相除指數相減。
67. 老師：對，相除指數相減。好，很好，第（7）題，班長，回答。
68. 班長： 10^{110} 。
69. 老師：10 的 110 次方。跟他一樣的舉手，好！放下，很好。再來，第（8）題，國文小老師。
70. 學生：有。
71. 老師：好，許新輝，說。
72. 新輝： 10^2 。
73. 老師：10 的 2 次方，跟他一樣的舉手。全班，放下。第（9）題，好，你又要說

了。

74. 學生： 7.5×10^{17} 。

75. 老師：7.5 乘以 10 的 17 次方，跟他一樣的舉手，變少了一點點，好，放下，我們看為什麼會這樣？這不是乘嗎？

76. 學生：對。

77. 老師：乘法有沒有結合律？

78. 學生：有。

79. 老師：有啊！乘法有結合律，所以這是不是先乘起來？對不對？所以 2.5×3 是多少？

80. 學生：7.5。

81. 老師： $7.5 \cdot 10^{12} \times 10^5$ ，相乘指數相？

82. 學生：加。

83. 老師：所以是不是變 10 的 17 次方？

84. 學生：對。

85. 老師：這樣有沒有問題了？

86. 學生：沒有。

87. 老師：好，最後一題。

88. 學生：老師，你寫錯了！（老師誤寫為 10^{16} ）

89. 老師：老師算錯了，對不起，好，17。好，你說第(10)題。

90. 學生： 2×10^2 。

91. 老師：2 乘以 10 的 2 次方。跟他一樣的舉手，更少了，怎麼猶豫，好，放下，為什麼？除法的時候，這裡的 $4 \div 2$ 變成多少？

92. 學生：2。

93. 老師：2。然後再來 $10^{-4} \div 10^{-6}$ ，相除指數相減，所以要變 $(-4) - (-6)$ ，那就變成 $(-4) + 6$ ，所以是不是等於 2？懂意思嗎？所以這是除法，好我們這樣稍微複習一下指數律，還有問題嗎？有沒有哪一題要老師再講解一次？沒有，好，那我們看下面喔！好

$$\begin{aligned} 800 &= 8 \times 100 = 8 \times 10^2 \\ 8000 &= 8 \times 1000 = 8 \times 10^3 \\ 80000 &= 8 \times 10000 = 8 \times 10^4 \\ 800000 &= 8 \times 100000 = 8 \times 10^5 \end{aligned}$$

圖二

，我們就來看剛剛科學記號記錄很大的數，我們要怎麼來記科學記號呢？我問你，800 是不是可以寫成 8 個 100？(圖二)

94. 學生：對。

95. 老師：800 是不是可以寫成 8 個 100？

96. 學生：對。

97. 老師：好，那 8 個 100，100 寫成次方的話就會變幾次方？

98. 學生：10 的 2 次方。(800 = 8 × 100 = 8 × 10²)

99. 老師：你先想一下，如果是 8000 呢？

100. 學生：10 的 3 次方。

101. 老師：對，好，所以呢？我們看到 8,000 就是 8 個 1,000，是不是就可以寫成 8 乘以 10 的 3 次方 (8000 = 8 × 1000 = 8 × 10³)，如果 80,000 呢？

102. 學生：10 的 4 次方。

103. 老師：對，會變 8 乘以 10 的 4 次方 (80000 = 8 × 10000 = 8 × 10⁴)。這個 8 是不是在萬位數的地方？所以就會變 8 個 10,000，所以就是 8 乘以 10 的 4 次方。那如果是 800,000 呢？就會變成？對，800,000 是 8 個 100,000，100,000 是 10 的 5 次方 (800000 = 8 × 100000 = 8 × 10⁵)，所以我們就看到它寫成 8 乘以 10 的 5 次方，對不對？好，再來呢？我們看一看，你有沒有觀察出這裡有

什麼關係式？

104. 學生：2、3、4、5。

105. 老師：剛好2、3、4、5是不是？這個是關係，為什麼會2、3、4、5？為什麼？

106. 學生：多一個0。

107. 老師：尾數一直多一個0，對不對？如果你光看這一個式子呢？這個次方跟那個0有沒有關係？

108. 學生：幾個0就幾次方。

109. 老師：有幾個0就是幾次方。對嗎？後面有幾個0就是10的幾次方，對不對？我

們再看，請問這個次方跟這個位數，請問這 (8×10^2) 是幾位數？

110. 學生：3位。

111. 老師：幾位數？

112. 學生：3位數。

113. 老師：3位數，這個 (8×10^3) 幾位數？

114. 學生：4位。

115. 老師：4位數。這個呢 (8×10^4) ？

116. 學生：5位。

117. 老師：這個呢 (8×10^5) ？

118. 學生：6位。

119. 老師：好，3位數 (8×10^3) ，這裡是幾次方？

科學記號表示法1—很大的數

(1) $800 = 8 \times 100 = 8 \times 10^2$ 3位數

(2) $8000 = 8 \times 1000 = 8 \times 10^3$ 4位數

(3) $80000 = 8 \times 10000 = 8 \times 10^4$ 5位數

(4) $800000 = 8 \times 100000 = 8 \times 10^5$ 6位數

觀察上面的式子，你有沒有什麼發現？

後面有幾個0，就是10的幾次方

次方和位數有沒有關係？

圖三

120. 學生：2 次方。
121. 老師：4 位數(8×10^3)？
122. 學生：3 次方。
123. 老師：5 位數(8×10^4)？
124. 學生：4 次方。
125. 老師：6 位數(8×10^5)？
126. 學生：5 次方。
127. 老師：有沒有關係？
128. 學生：次方加 1 就是位數。
129. 老師：指數要怎麼樣？
130. 學生：加 1。
131. 老師：就是位數，對嗎？有沒有看到？次方加 1 就是位數，對不對？為什麼會加 1？你知道嗎？有沒有人可以講？為什麼不是這裡(8×10^2)直接 2 次方就直接 2 位數，3 次方就 3 位數，4 次方就 4 位數，5 次方就 5 位數，為什麼不是？為什麼要加 1？好，你說。
132. 學生：老師，那個 2 只是那個 0。
133. 老師：2 只是 0，然後？
134. 學生：前面還有一個數字要加 1。
135. 老師：有聽懂意思嗎？
136. 學生：有。
137. 老師：同學答對了，對不對？它為什麼？因為這個次方是代表後面有幾個 0，所以在 0 的前面是不是還有一個數字？所以我們要加 1，可以嗎？
138. 學生：可以。

139. 老師：好，再看剛剛的 1 光年，本來乘起來是 94608？對不對？因為很多數據，後面的數字太小了，我們就會說：約等於 9 兆 4 千 6 百億公里（一光年約等於 9,4600,0000,0000 公里= $946 \times 100,000,0000 = 946 \times 10^{10}$ ）。好，那這個我們要寫，我們剛剛不是說後面有幾個 0 就會寫 10 的幾次方，對不對？所以我們會寫成什麼樣子？是不是會寫成 946 乘以後面有幾個 0？10 個 0，所以我們是不是就寫成 946 乘以 10 的 10 次方？好，那如果這樣子的話，請問它是幾位數？
140. 學生：13。
141. 老師：這樣是 13 位數，對不對？為什麼？
142. 學生：因為後面有幾個 0，它前面的位數…。
143. 老師：對，這裡有 10 個 0，然後這邊呢？
144. 學生：3 位數。
145. 老師：3 位數。所以這樣加起來要？
146. 學生：13。
147. 老師：13 位數。再來，我可不可以把 946 寫成 94.6？
148. 學生：可以。
149. 老師：從 946 變成 94.6 的話，數字變小了，這邊(10^{10})是不是要多乘 1 個 0？就會變成 10 的幾次方？
150. 學生：11。
151. 老師：11 次方。那這樣子(94.6×10^{11})是幾位數？要怎麼算？
152. 學生：11+2。
153. 老師：為什麼加 2？因為小數點前面還有兩位數。所以 11 加上 9、4 這兩位數，再來，我們再進一步寫成 9.46，寫成更小了，所以後面是不是要再多乘以

1 個 0？

154. 學生：對。

155. 老師：所以就會變成 12 次方。那這樣子(9.46×10^{12})你算位數的時候怎麼算？就直接 $12+1$ ，這樣子來說是不是跟我們剛剛前面講的那個 8 百、8 千、8 萬，是不是比較符合？剛好加 1。所有的數字前面一定會有這麼多位數嗎？有沒有可能是 9467 然後 000...？有沒有可能是 94000...，如果我寫成這種形式(946×10^{10} 、 94.6×10^{11})的話，我這裡要加的位數(次方+?)是不是不確定？但是如果統一寫成這樣子(9.46×10^{12})，讓它小數點前面只留 1 位的話，剛好直接加 1 位數就好了，所以呢？我們配合剛剛，次方加 1 就是位數，科學家他們就覺得這是最好的一個方式，所以就把這種方式定義為科學記號，我們就

可以說：
因為次方
加 1 的關
係，那個
加 1 就是
小數點前
面要留 1
位數，然
後，我們

科學記號表示法 1——很大的數

12 位數

一光年約等於 9,4600,0000,0000 公里

$= 946 \times 100,000,0000 = 946 \times 10^{10}$

$= 94.6 \times 1000,0000,0000 = 94.6 \times 10^{11}$

$= 9.46 \times 1,0000,0000,0000 = 9.46 \times 10^{12}$

※次方+1就是位數

圖四

就會看到後面還剩下幾位數？

156. 學生：12 位數（圖四）。

157. 老師：12 位數。所以我們就可以直接寫成 9.46 乘以 10 的 12 次方(9.46×10^{12})，這

樣有看懂意思嗎？為什麼會寫成 9.46？因為要加 1，對不對？所以我們把 1 位留在那裡，所以就寫成 9.46，然後看到後面有幾位數，我們就會寫成 10 的幾次方，這樣懂嗎？

158. 學生：懂。

159. 老師：好，我們看科學記號的定義(圖五)，一律要寫成 $a \times 10^n$ 的 n 次方($a \times 10^n$)，那個 a 前面一定要留 1 位，所以說

科學記號的定義

科學記號的定義： $a \times 10^n$

其中 $1 \leq a < 10$ ，是採用小數記錄的，而 n 為整數

例題1：在天文學上，地球到太陽的平均距離稱為 1 天文單位。已知此距離約為 1,500,000 公里，以科學記號來記錄為多少公里？

圖五

： a 就要大於等於 1 小於 10 ($1 \leq a < 10$)，也就是說它最小最小要寫成 1，最大最大可以寫成 9.999...，然後次方 n 一定要是整數，可以是正整數，可以是負整數，也可以是 0，這樣有沒有問題？我們就來看一個例子。剛剛說，在天文學上，地球到太陽的平均距離，我們把它稱為一個天文單位，因為整個星空是非常非常的大，所以今天什麼東西都要用公里來講的話，那個數字就要拉很長很長，所以就把地球到太陽的平均距離，我們稱為一個天文單位，這個天文單位到底多遠，你知道嗎？多遠？會不會唸？1 億 5 千萬公里，很大的數字，對不對？那你寫的時候，你保證你的 0 都不會掉嗎？會數到頭暈，對不對？所以我們就來用科學記號，科學記號要怎麼記呢？我們看一下，剛剛說前面要留幾位？

160. 學生：1 位。

161. 老師：1 位。所以呢？1 位，1 然後，後面剩幾位數（ $1,5000,0000 = 1.5 \times 10^8$ ）？

162. 學生：8 位數。

163. 老師：所以要寫成 1.5 乘以 10 的 8 次方（ 1.5×10^8 ）。這樣可以接受嗎？

164. 學生：可以。

165. 老師：可以嗎？可

以接受的

舉手。真的

？我隨便

問都不會

問倒喔？

是不是？

好，放下。下一個，例題 2（圖六），王永慶有多少錢？最近王永慶很熱門喔，王永慶有多少錢？

166. 學生：2203 億。

167. 老師：2203 億。好，這 2203 億要怎麼用科學記號表示？誰先？來，按一下，我先把億寫出來，後面幾個 0？（2203 億 = 2203,0000,0000）

168. 學生：8 個。

169. 老師：8 個 0。好，後面有 8 個 0，那你想一下，這要怎麼寫成科學記號？我要叫人了喔！想好了？15 號。要站起來，站起來回答。

170. 欣政：2.203 乘以 10 的 8 次方（ 2.203×10^8 ）。

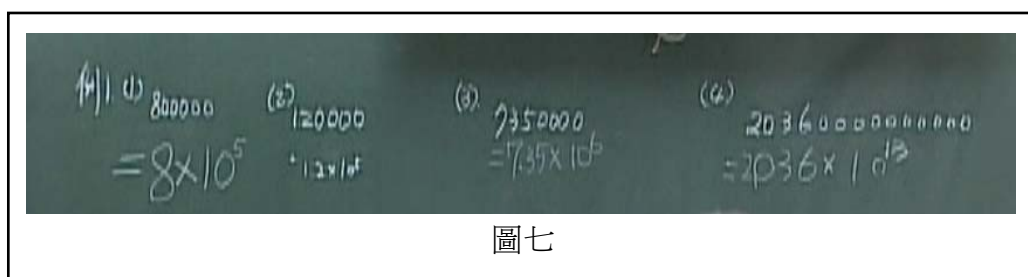
171. 老師：好，我們看到，坐下。2.203 乘以 10 的 8 次方（ 2.203×10^8 ）。對不對？

172. 學生：不對。

例2：王永慶到底有多少財產？目前沒有一個準確的數字。據《福布斯》雜誌統計，王永慶身家高達2203億新台幣，是台灣僅次於國泰金控蔡宏圖家族的第二富豪。請將2203億以科學記號表示。

圖六

173. 老師：來，按一下。好，2 後面有幾位數？
174. 學生：11 位。
175. 老師：好，所以邢欣政你要不要糾正一下你的答案？站起來回答。
176. 學生：2.203 乘以 10 的 11 次方(2.203×10^{11})。
177. 老師：答對了！坐下。他剛剛把它想成 2.203，然後可是你只看到後面有幾個 0，對不對？那我們這樣寫的時候，是不是要寫成 2203 乘以 10 的 8 次方(2203×10^8)？可是我們剛剛說科學記號前面只能留幾位數？
178. 學生：1 位。
179. 老師：1 位喔。所以 1 位數，你這三位通通都沒算到了，對不對？你們都寫對了嗎？
180. 學生：寫對了。
181. 老師：好，寫對了的舉手。好，放下。接下來換你們上台了，所以老師要發學習單(見 P.11 學習單 概念一，練習 1)，然後會請同學上台喔，所以你們趕快寫，有多的往後面傳一下。
182. 老師：好，趕快寫喔！
(學生練習中)
183. 老師：先寫第 1 個例題！老師抽四個號碼上台，22 號，再來 23、32 號、16 號。
別忘了科學記號的定義，是小數點前只能留 1 位。
184. 老師：他們都寫對嗎？(圖七)
185. 學生：對。
186. 老師：第(1)題，寫 8×10^5 的舉手。放下，第(2)題，寫 1.2×10^5 的舉手。都對？你也都對了。第(3)題， 7.35×10^6 。都對？第(4)題， 2.036×10^{13} 。都對喔，真的嗎？



圖七

187. 學生：真的。
188. 老師：今天效果特別好，好，那現在寫例題 2(見 P.11 學習單 概念一、練習 2)，把它反回來喔！我給你的是科學記號，那你可不可以反回來寫出原來的數字？好，我一樣再抽 4 個同學。
189. 老師：來，抽 4 個同學喔！24 號，你好像很無聊喔！15 號，你今天很紅。11 號，17 號。
190. 老師：來，我們看看對不對喔！你們寫好了嗎？
191. 學生：寫好了。
192. 老師：好了嗎？好，第 (1) 個， 1.2×10^4 ，如果我都不要講，請問你這應該是幾位數？
193. 學生：5 位數。
194. 老師：為什麼是 5 位數？
195. 學生： $4+1$ 。
196. 老師：對。因為小數點前面有 1 位，所以是 $4+1$ ，5 位數
197. 老師：所以後面有 3 個 0 ($1.2 \times 10^4 = 12000$)，對的舉手，好，放下。第 (2) 題 (8.26×10^7)這裡應該是幾位數？
198. 學生：8 位數。
199. 老師：為什麼 8？
200. 學生： $7+1$ 。

201. 老師：為什麼要 $7+1$ ？
202. 學生：小數點前有 1 位。
203. 老師：小數點前有 1 位，所以加起來是 8 位數，1、2、3、4、5、6、7、8。所以後面有幾個 0？5 個 0，你們數數看，是 5 個 0 嗎？
204. 學生：是。
205. 老師：是喔！好，答對了。再來，這裡 (4.592×10^{11}) 如果不看這下面，請問是幾位數？
206. 學生：12 位數。
207. 老師：12。為什麼？ $11+1$ 。我們看看它 $(4.592 \times 10^{11} = 459200000000)$ ，這裡 1 位，再來是 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12，對啊，12 位數嘛！對不對？所以這一題也對，所以後面數數看幾個 0？
208. 學生：8 個。
209. 老師：8 個 0，1、2、3、4、5、6、7、8，好，對了。再來這一題 (7.38×10^9) 幾位數？
210. 學生：10 位數。
211. 老師：好，10 位數，那我們數數看 1、2、3 $(7.38 \times 10^9 = 7380000000)$ ，這裡 1、2、3、4、5、6、7，7 個 0 加上 3 位，10 位數，沒錯，對不對？
212. 學生：對。
213. 老師：所以後面有幾個 0？
214. 學生：7 個 0。
215. 老師：好，4 題通通對舉手，好，放下。那都會喔！這是很大的數，如果是很小的數呢？接下來我們看，如果要表示很小很小的數，要怎麼表示呢？，我們來看，第 (1) 個，如果 0.1 我們會寫成 10^{-1} ，這都是我們以前在指數律

的時候就講過的，如果是 0.3 呢？

216. 學生： 3×10^{-1} 。

217. 老師：為什麼？因為這 3 是在小數第幾位？

218. 學生：第 1 位。

219. 老師：小數點後面數的話是第 1 位，對不對？那個整數 0 不能算喔！所以就小數來講，這個 3 是第 1 位，叫做 3 個 0.1，所以我們寫成 3×0.1 ，那 0.1 寫成次方的話是 10^{-1} 。如果是 0.03 的話，這個 3 是小數第幾位？

220. 學生：第 2 位。

221. 老師：第 2 位，所以呢？它應該叫做 3 個 0.01，所以我們寫成 3×10^{-2} 。再來，如果 0.003 呢？3 是小數第幾位了？

222. 學生：第 3 位。

223. 老師：它代表的數值是 0.001，它有 3 個 0.001，所以我們就會寫成 3×10^{-3} ，這樣有沒有問題？（圖八）

224. 學生：沒有。

225. 老師：好，那再來，你們看一下，10 的次方跟那個 3 出現的位數，有什麼關係？

226. 仲辰：次方是多少就在第幾位。

227. 老師：次方是多少就是在小數點後第幾位，是這樣嗎？(-1)次，3 就會出現在小數第 1 位，(-2)次小數就會出現在第 2 位，(-3)次就會出現在第 3 位，那是不是因為我們剛好把這個 3 變整數，所以那個 3 (0.3) 代表的就是 0.1。這

科學記號表示法2—很小的數

(1) $0.1 = 10^{-1}$

(2) $0.3 = 3 \times 0.1 = 3 \times 10^{-1}$

(3) $0.03 = 3 \times 0.01 = 3 \times 10^{-2}$

(4) $0.003 = 3 \times 0.001 = 3 \times 10^{-3}$

圖八

個 3 (0.03) 代表的是 0.01，這個 3 (0.003) 代表的是 0.001，這樣懂嗎？所以它的位數剛好在負幾次方，它就要在小數點後第幾位。我們看到，3 出現在小數點後第 n 位，就會是 10^{-n} (圖九)。再來，如果今天我的題目是 0.52，那我們剛剛不是說 0.52 要寫成科學記號的話，我們前面只能留 1 位(圖十)。

<p>科學記號表示法2—很小的數</p> <p>(1) $0.1 = 10^{-1}$</p> <p>(2) $0.\overset{\square}{3} = 3 \times 0.1 = 3 \times 10^{-1}$</p> <p>(3) $0.0\overset{\square}{3} = 3 \times 0.01 = 3 \times 10^{-2}$</p> <p>(4) $0.00\overset{\square}{3} = 3 \times 0.001 = 3 \times 10^{-3}$</p> <p>10 的次方和 3 出現的小數位數有什麼關係？</p> <p>3 出現在小數第 n 位，就會是 10 的 $-n$ 次方</p>	<p>科學記號表示法2—很小的數</p> <p>(1) $0.52 = 5.2 \times 0.1 = 5.2 \times 10^{-1}$</p> <p>(2) $0.052 = 5.2 \times 0.01 = 5.2 \times 10^{-2}$</p> <p>(3) $0.0052 = 5.2 \times 0.001 = 5.2 \times 10^{-3}$</p> <p>10 的次方和那一個數字的小數位數有什麼關係？</p>
圖九	圖十

228. 老師：所以 0.52 要寫成 5.2 的話，是不是要乘以 0.1，這樣是不是這裡小數 1 位、小數 1 位乘起來才會變 2 位，對不對？好，所以呢？你會看到這裡就變成什麼？5.2 乘以 10 的幾次方？
229. 學生：(-1)。
230. 老師：(-1)次方，對不對？好，再來，如果是 0.052，那我們要寫成 5.2 的時候，這裡是不是小數只有 1 位而已？
231. 學生：對。
232. 老師：那要乘幾位才會變 3 位？
233. 學生：2 位。
234. 老師：2 位嘛，對不對？這裡小數 1 位，小數 2 位，兩數相乘，小數就會變 3 位，小學教的乘法記得嗎？
235. 學生：記得。

236. 老師：所以 0.01 寫成次方的話是 10^{-2} 。再來，再多 1 位喔，小數多 1 位（0.0052），這裡看到了嗎？一樣寫成 5.2，這裡是不是有 1 位？所以這裡就會幾位？
237. 學生：3 位。
238. 老師：這樣乘起來是不是才會 4 位？對不對？好，所以就會變 5.2×10^{-3} 。好，你看一下，請問你有沒有看出這個次方跟哪一個數字的位數有關係？看一下，哪一個？你覺得是哪一個數字？是 5 還是 2 有關係？
239. 學生：5。
240. 老師：是 5 嗎？
241. 學生：對。
242. 老師：是嗎？
243. 學生：是。
244. 老師：這裡是(-1)，所以 5 出現在第 1 位，(-2)，5 出現在第 2 位，(-3)，5 出現在第 3 位。好，那你看，為什麼會這樣？
245. 學生：因為乘法的關係嗎？
246. 老師：因為乘法的關係嗎？是不是？也是跟位數有關，對不對？我們這裡寫成 10 的(-1)次方，是不是代表 0.1 的意思？對不對？那 0.1 的時候，你要看 0.1，1 是不是放在小數第 1 位？所以是不是應該就要看這個 5？那這個 10 的(-2)次方是不是 0.01 的意思？所以你要看 0.01，是不是 1 要寫在這邊？是不是在 5 這個位置？對不對？所以是不是應該要看 5 的地方？懂嗎？所以這個其實好像是說，5.2 個 0.01，就像剛剛前面老師說很大數字的時候，800 是不是說 8 個 100，那個 8 是放在百位數，所以就是 8 個 100，如果是放在千位數，就會說 8 個 1000。那這裡(0.52)就好像是，如果你不要看後面的 2，是不是可以看成 5 個 0.1？對不對？可是它不是 5 個，它是幾個？5.2 個 0.1

；那這邊(0.052)的話，那個 5 是放在這個位數，所以它是不是相當於 5 個 0.01，可是它不只 5 個，它是幾個？5.2 個 0.01，這樣看懂嗎？有沒有看懂？

247. 學生：有。

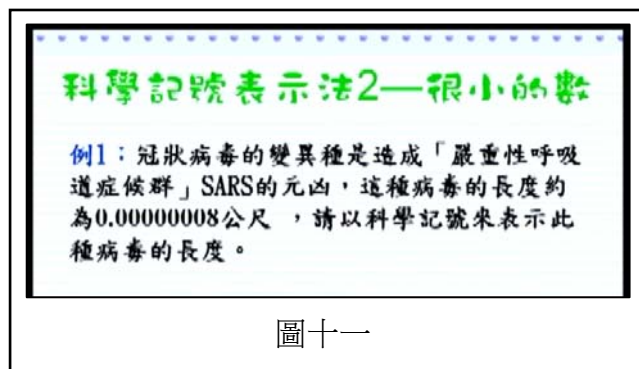
248. 老師：可是呢？這樣子是不是讓你了解，我們其實最後可以歸納出它的結論，就是我們剛剛說的，這個次方和誰有關係？和這第 1 個數字的位置、位數有關係，懂意思嗎？這個次方，(-1)次方你就看，這個 5 是在第一位，就會(-1)次方；這裡是(-2)次方，所以那個 5 就出現在第 2，小數第 2 位；這個是(-3)次方，5 就出現在小數第 3 位。所以我們看的時候，要看哪一個數字？你要看哪一個數字？

249. 學生：5。

250. 老師：5 是哪一個地方？小數點前面那個整數值的位置，它是會出現在小數第幾位？這樣有沒有了解意思？

251. 學生：有。

252. 老師：好，那我們來看例題（圖十一），好，來！會出現很小很小的東西是什麼？就是那些細菌、病毒，或是上網查一下，細菌病毒的單位都很小，你看是多少



？0.00000008，如果你跟人家說：「我知道那個 SARS 的病毒，它的大小，那個長度，是 0.0000...，」人家一聽就暈倒了，到底幾個 0 啊？這種東西，如果這樣子講的話，就不是很清楚，所以我們也會用科學記號表示，那

科學記號怎麼表示呢？首先請問，這個 8 是在小數第幾位？1、2、3、4、5、6、7、8，是不是？我們看到這個 8 出現在小數第 8 位。所以你們說，會寫成？

253. 學生： 8×10^8 。

254. 老師：很好，8 乘以 10 的(-8)次方。好，我們再看第 2 個例題（圖十二）

，腸病毒，很恐怖對不對？可是你知道嗎？腸病毒，一般人一看到，那一定是拉肚子的，一定是腸胃不好，可是其實你看，用血

例 2：腸病毒是一群 RNA 病，大小僅 0.0000023 公分。以血清分類，可分出 67 種。雖名為腸病毒，人類感染後卻很少出現腸道症狀。請以科學記號來表示腸病毒的長度。

圖十二

清分類可以分出 67 種，而且最新資料還不一定，雖然命名為腸病毒，可是人類感染之後，卻很少出現腸道症狀，其實都會出現一些什麼？發燒，還有什麼？小兒麻痺、感染等，很多其他的併發症會產生，對不對？所以我們來看一下，它是多少？0.0000023，好，那我問一下，剛剛我們說要看哪一個數字的小數位數？4 號，站起來，你告訴我，剛剛我們說要寫成科學記號，要看 2 還是 3？你不用數，你只要告訴我，要看 2 的小數位數，還是 3 的小數位數？

255. 學生：3 的。

256. 老師：3 的？

257. 學生：2 的。

258. 老師：2 的？到底哪一個？

259. 學生：2 的。

260. 老師：決定一下吧！

261. 學生：2 的。

262. 老師：2 的，所以前面要寫成什麼？科學記號說要寫成誰乘以誰？

263. 學生：2.3。

264. 老師：好，停。2.3，OK！這樣有沒有聽懂意思？坐下。很好。有沒有聽懂意思？我們剛剛說，寫科學記號是不是要留 1 位？留前面那個，是不是？我們剛剛科學記號是不是要寫成 $a \times 10^n$ ？a 是不是小數點前面要留 1 位？所以這裡留 1 位，要留誰？

265. 學生：2。

266. 老師：留 2，所以就要寫成 2.3，所以我們看到，2 出現在小數第幾位？第幾位？1、2、3、4、5、6，所以就要寫成 2.3×10^{-6} ，懂了喔！好，我們先下課，等一下再上，如果不懂趕快問一下同學，等一下要抽籤上來。

【第二節】

267. 老師：好，接下來要繼續上課了，剛剛講小數點是不是有一點迷惑？

268. 學生：不會。

269. 老師：真的嗎？

270. 學生：真的。

271. 老師：了解的舉手，要誠實喔，不然等一下叫上來不會，很尷尬喔！姜炳倫，對，姜炳倫怎麼樣？你不熟悉喔？放下。邢同學呢？你不要緊張啦！等一下講話大聲

科學記號表示法2—很小的數

例3：小芬用500倍顯微鏡觀察某細胞，測得在鏡中細胞之長度為0.032公分，請問此細胞真實大小為多少公分？(結果以科學記號來記錄)

圖十三

一點，好，來，我們開始囉！我們看第 3 個例題（圖十三），小芬用 500 倍的顯微鏡來觀察一個細胞，發現它在顯微鏡裡面的長度是 0.032 公分，這是經過 500 倍放大的數據，所以請問原來的細胞多大？

272. 學生：要除以 500。

273. 老師：要除以 500，所以我們看到第 1 個式子是要先除以 500 ($0.032 \div 500 = 0.0000064$ 這是錯誤的答案)，好，我們請同學來說。再抽一個同學，抽到要站起來，26 號，你要講大聲一點喔！好，你告訴我，這一題如果寫成科學記號，要看誰的位數？

274. 學生：6。

275. 老師：6。那前面會寫成…？

276. 學生：6.4。

277. 老師：6.4 乘以…？

278. 學生： 10^{-6} 。

279. 老師：10 的(-6)次方。好，坐下，好，答對了嗎？

280. 學生：答對了。

281. 老師：覺得她是對的舉手，都會？好，再說一個，為什麼(-6)次方？6 號，誼同學，好，來，上來說一下，為什麼(-6)次方？

282. 學生：(-6)次方，為什麼？因為 1 個 0、2 個 0、3 個 0、4 個、5 個、6 個。

283. 老師：有 6 個 0 嗎？

284. 學生：不是，1 個、2 個、3 個、4 個、5 個、6 個。

285. 老師：6 個什麼？

286. 學生：6 的時候是，6 個小數的位數。

287. 老師：小數第 6 位？

288. 學生：對。
289. 老師：你知道為什麼小數第 6 位就要寫 10 的(-6)次方？
290. 學生：我要怎麼講？因為乘以 10 的多少次方就等於，乘以 10 的負多少次方，除以…。
291. 老師：許新輝同學當機了。
292. 學生：我要開機，又要重新開機了。
293. 老師：好，你說。
294. 學生：你上面為什麼題目寫 0.032，結果你解釋寫 0.0032？
295. 老師：對耶！所以我寫錯了。你都發現了，那我要修正一下嗎？那我改一下題目好了，改 0.0032 了，好不好？
296. 學生：好。
297. 老師：對不起，那請問這裡，誰可以說？誰會說？謝蕙欣同學，你來說。你剛剛為什麼寫(-6)次方？
298. 學生：不知道。
299. 老師：不知道喔！糟糕，沒有人說的出來嗎？游弘宇同學說，來前面。
300. 弘宇：小數點這邊有 1 個，2 個 0、3 個 0、4 個 0、5 個 0，然後這邊還有一個位數，所以要加這個位數，所以等於(-6)，因為它是小數點後面，所以是負的。
301. 新輝：為什麼要這樣？
302. 弘宇：因為是 6 當…，突然想不出來了。
303. 老師：突然想不出來，好，下去，那有誰可以說？快點喔，好，呂仲辰。
304. 仲辰：這邊是後面以 6 為準的 6 個位數，有 6.4 個 0.000001，是嗎？
305. 老師：再講一次。

306. 學生：以 6 為準，就是有 6.4 個 0.000001。
307. 老師：有聽懂嗎？
308. 學生：(有人說) 沒有。(有人說) 有。
309. 老師：你再大聲一點，你們不要笑嘛！再講一次。
310. 學生：我們因為這邊以 6 為準 (0.0000064)，然後這邊就有 6.4 個 0.000001，懂嗎？有 6.4 個 0.000001，懂不懂？
311. 老師：懂嗎？
312. 學生：懂。
313. 老師：好。終於講對了，好，來，這個我們剛剛說科學記號的時候，前面要留 1 位，對不對？所以我們會寫成 6.4 個什麼呢？是以 6 為準，對不對？因為先不要看這個 4 的話，我們是不是說它有 6 個什麼？它的位數是代表什麼？0.000001，所以它是 6 個 0.000001，懂嗎？0.000001 要寫成 10 的幾次方？
314. 學生：10 的(-6)次方。
315. 老師：對。所以(-6)次方就直接看這裡，是第 6 位，就代表它是 10 的(-6)次方，所以就可以寫成 6.4 個 10 的(-6)次方，這樣懂了沒有？
316. 學生：懂。
317. 老師：懂了喔！好，下面例題 2，要寫例題 2 了(見 P.11 學習單 概念二，練習 1)。
318. 學生：寫完了。
319. 老師：寫完啦？這麼快喔！概念 2 也寫完了？你們怎麼都偷跑，真是的！
320. 學生：因為老師叫我們寫概念 1，結果我寫概念 2。
321. 老師：好，那我們再找同學上來寫。

322. 老師：我要抽 4 個人上來寫。

323. 學生：好。

324. 老師：都有把握喔！同學，你幫我抽。

325. 學生：30 號，13 號，9 號，19 號。

326. 老師：呂仲辰，你還帶小抄喔！

327. 學生：寫錯了，他忘記寫小數點了。

328. 老師：我們現在要請同學上來講，一樣，剩下的，全班今天都要上場，來，21 號，好，我們的第 (1) 題 ($0.0000001 =$) 最簡單，來，好，不要害怕，就說為什麼乘以 10^{-7} ？

329. 學生：好緊張喔！

330. 老師：好緊張喔！好，那我們換一個，好，來，14 號，吳斯錚，好，歡迎你上台，大聲一點，所以照剛剛那個誰說的，最後是誰說的？照呂同學說的，它是一個什麼？全班幫他說，大聲一點。

331. 學生：因為有一個 0.0000001 。

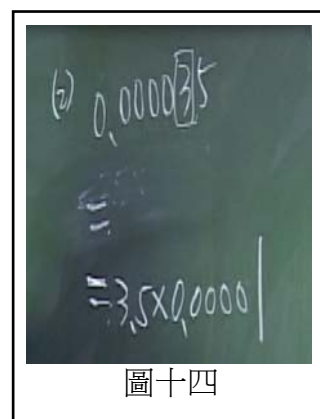
332. 老師：好，這樣對不對？是不是你說的？好，下去，好，因為有一個 0.0000001 ，所以 0.0000001 ，寫成 10 的幾次方？(-7)次方，好，第 (2) 題 ($0.000035 =$)，再找一個同學喔，18 號。

333. 學生：因為有 1、2、3、4、5，5 個 0。

334. 老師：5 個 0。

335. 學生：不是，4 個 0 加 1 個小數點。

336. 老師：4 個 0 加 1 個小數點？以誰為基準？3 為基準，3 是代表什麼單位？ $0.00\dots$ ，幾個 0 啊？0.什麼？以 3 為基準，它代表 0.00001 ，好，下去，這樣對不



圖十四

對？所以你們的過程如果多一個步驟會比較好一點，這邊寫成以 3 為基準，寫成 3.5 的話，它是代表 3.5 個 0.00001（圖十四），所以就變成 3.5×10 的負 1、2、3、4、5，小數 5 位，就是(-5)次方 (3.5×10^{-5})，對不對？

337. 學生：對。

338. 老師：這樣懂嗎？

339. 學生：懂。

340. 老師：好，那再來這一題 ($0.00000813 =$) 呢？25 號，25 號呢？好，那你可以用我的講法去講嗎？

341. 學生： 8.13×0.000001 。

342. 老師： 8.13×0.000001 。幾個 0 啊？0.000001，好，所以 0.000001，小數幾位就是負幾次方，對不對？好，下去，這樣最後一題你們都會了嗎？

343. 學生：會。

344. 老師：好，那我們要反過來喔！下一題(見 P.11 學習單 概念二，練習 2)，下一題要把它乘開來，寫成小數的樣子喔，可以嗎？不能帶小抄囉。

345. 學生：好。

346. 老師：好，簡靖芳再幫我抽號碼。

347. 學生：29 號、12 號、33 號、5 號。

348. 老師：這一個比較難喔，要還原比較難喔。好，第 (1) 題 (1.2×10^{-4}) (圖十五) 誰寫的？你要不要來解釋一下，來，上來，沒有說不要的權利。對不起，你一定要上來。來，你解釋一下，為什麼你會寫這樣？你少寫一個 0 喔！你為什麼發現你少寫一個 0？寫錯了喔！你要講大聲一點，為什麼要這樣多寫一個 0？

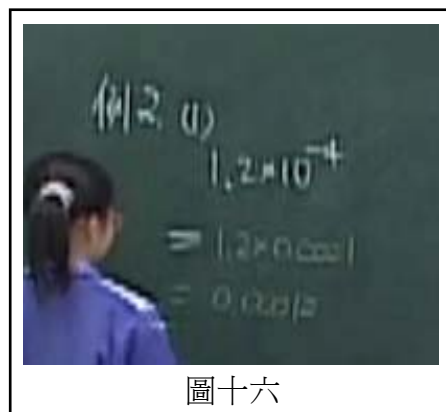
圖十五

349. 學生：這邊是 12×10^{-4} 。

350. 老師：12？明明是 1.2 啊！

351. 學生： 1.2×10 的...， $1.2 \times 0.00\cdots$ 。

352. 老師：你可不可以把那個步驟寫出來？好， 1.2×0.0001 ，好，她說 1.2×10^{-4} 是代表 0.0001(圖十六)，對不對？好，那這樣乘出來會是多少？好，對啦，我知道你的問題出在，這個乘法你的心算不太快，對不對？好，下去。第(2)題 (8.26×10^{-7}) 是誰寫的？來，你說一下，為什麼你會這樣寫，因為小數比較難，所以我們講慢一點。



353. 學生：因為...。

354. 老師：對，很大聲很好。

355. 學生： 8.26×0.0000001 ，所以就是 0.000000826。

356. 老師：可是我發現你們那個步驟都省略耶，為什麼你那個步驟都可以省略？你怎麼想那麼快？因為很聰明。

357. 學生：原本那邊是-7，因為是 7，所以就要寫出 7 個 0，然後這邊再一個小數點，再把 8.26 乘上去就好了。

358. 老師：為什麼你會算 7 個 0 啊，我們這個(-7)次方的時候，前面是看小數第幾位？

359. 學生：沒有，這是另外一種寫法，這種寫法問同學就會了。

360. 老師：真的喔。

361. 學生：真的啊！不知道為什麼。

362. 老師：不知道為什麼，那不知道為什麼的東西你還敢用？那現在我的方法你懂嗎

？不懂嗎？

363. 學生：不懂。

364. 老師：不懂，是不是？你剛剛說因為是什麼？8.26 個什麼？好，你慢慢講。

365. 學生：0.00...6 個 0。(老師以為是 0.0000001)

366. 老師：6 個 0。

367. 學生：再一個 1。

368. 老師：1、2、3、4、5、6 啊，

少一個(原來學生說的是 0.000001)，然後呢？

你看這裡乘法的時候，小數點這樣要有幾位，你站過來一點，小數點幾位？好，這樣小數點

要幾位，1、2、3、4、5、6、7、8，所以 826，小數的乘法，我幫你們複習一下，826 乘以 1，是不是 826，對不對？可是這樣乘起來，應該小數要有幾位？1、2、3、4、5、6、7、8，是不是要有 8 位小數？對，所以這裡要 1、2、3、4、5、6、7、8。(圖十七)

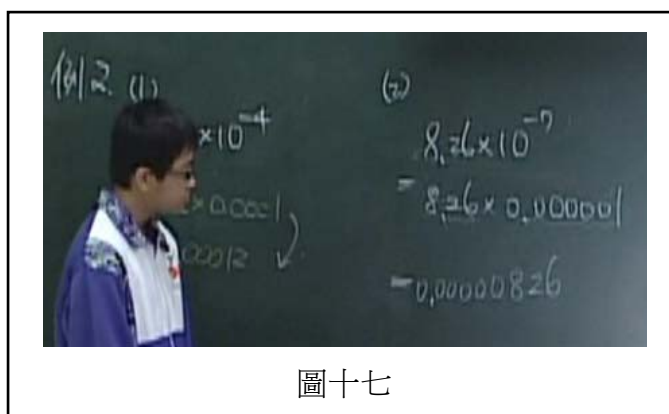
369. 老師：是不是這樣？好，你看跟你剛剛寫的答案不一樣？

370. 學生：不一樣啦。

371. 老師：不一樣啊！所以問題出在哪裡呢？好，下去，誰可以幫他講？來，又是你，你今天表現很棒喔。

372. 學生：講三次錯兩次。

373. 老師：人家國父革命都十次失敗才成功。



圖十七

374. 學生：這個 8.26 要乘以 0.後面要有 6 個 0。

375. 老師：為什麼要有 6 個 0 啊？

376. 學生：因為它這邊是 7，然後它有一個位數要 1，
所以這邊後面要有 6 個 0，這邊要多一個 0
，然後再小數點，然後這邊還要再多 1 個 0
(圖十八)

(b)
 8.26×10^{-7}
 $= 8.26 \times 0.0000001$
 $= 0.000000826$

圖十八

377. 老師：所以這邊也要多 1 個 0。

378. 學生：對。被發現了。

379. 老師：知道問題在哪嗎？

380. 學生：知道。

381. 老師：知道嗎？知道，就是 10 的(-7)次方應該是什麼？(-7)次方應該是小數幾位？
7 位，1、2、3、4、5、6、7 位，所以這樣乘起來，7+2 是不是變成 9 位，
所以 1、2、3、4、5、6、7、8、9，可是好像還是沒有用到老師剛剛的方法
，我們再看下一個，第三個 (4.592×10^{-11}) 是誰寫的？好，換你說，你怎
麼想的？

382. 學生：11 個 0，再點一個 0。

383. 老師：11 個 0，再點一個 0，你跟呂仲宸同學一樣，對不對？你也是 1、2、3、4
、5、6、7、8、9、10、11 個 0，然後點 1 個 0(意即先寫 11 個 0，再於第一
個 0 後面補上一個小數點)。

384. 學生：點一個點。

385. 老師：點一個點，然後就寫 4592，那你跟呂仲宸一樣啊。

386. 仲宸：問題是我講得出來，她講不出來。

387. 老師：好，那你講，你已經講完了，你講完了嗎？你再講一次，我不知道你還要

講什麼？我們在算小數位數的時候，有算前面那個 0 嗎？

388. 學生：沒有。

389. 老師：沒有啊，那為什麼你們老是算前面那個 0 呢？有啊，你剛剛說 11 個 0，1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11，你有算啊。

390. 學生：因為它其實前面那個 0，是有扣掉那個。

391. 學生：這個。

392. 老師：怎麼樣？

393. 學生：乘以，乘以這個(4.592)。

394. 老師：然後呢？

395. 學生：所以這個(4592)要跑過來，所以在底下了。

396. 學生：你在說什麼？

397. 老師：好，呂仲宸同學好想講，給他表現一下好了，我們讓男生。

398. 仲宸：就是有 4.592 個 0.00000000001，懂嗎？

399. 老師：他們說，再講一次，因為你擋住了。

400. 學生：總共有有 4.592 個 0.00000000001，懂嗎？

401. 老師：這一題不是你寫的嗎？

402. 仲宸：不是。

403. 老師：你寫哪一題？

404. 仲宸：我沒有寫。

405. 老師：你沒有寫喔，好，有聽懂意思嗎？

406. 學生：有。

407. 老師：真的嗎？

408. 學生：真的。

409. 老師：我不覺得耶，好，那最後一題 (7.38×10^{-9}) 呢？再來，誰，你會說嗎？好，那你說，我看看，要說跟他不一樣的。

410. 學生：就是先把 7.38 還原成 738。

411. 老師：擋住了。

412. 學生：然後 10 的(-9)次方就是小數有 9 位，因為這邊原本是 7.38，所以 1、2、3、4、5、6、7、8、9。

413. 老師：你說對了，大聲一點，不一樣，來，你聽他說。

414. 學生：就把 7.38 還原成…。

415. 老師：不是還原，寫在後面，對不對？

416. 學生：對。

417. 老師：本來是 7.38 這樣，對不對？

418. 學生：然後因為就是(-9)，所以小數有 9 位，然後這邊是 1、2、3、4、5、6、7、8、9，9 位，然後前面再加一個 0 (圖十九)。

419. 老師：有沒有聽懂意思？

420. 學生：有。

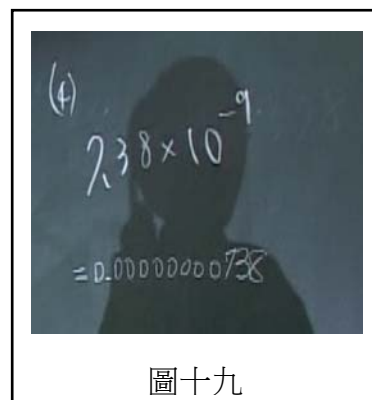
421. 老師：好，你再數一次那個 9 給他們看。

422. 學生：1、2、3、4、5、6、7、8、9。

423. 老師：有沒有看到？

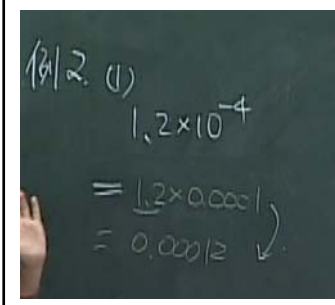
424. 學生：有。

425. 老師：好，下去，謝謝。他的寫法是這樣，就是老師說的意思，7.38 個什麼？我們前面講的，譬如說， 8×10^2 ，是代表什麼？8 個 100，對不對？ 10^2 是不是 100 的意思？8 個 100，所以 8 要寫在什麼位數？百位數，這樣懂嗎？如果我今天我寫成 9.2 個 10^3 ，表示什麼，9.2 個 1000，所以這個千，9 要寫在什



圖十九

麼位數？千位數，所以就變 92，9 是千位數喔，所以是要補成 9200，9 就是千位數，懂意思嗎？所以我們換成小數來講的話，意思就是說，這裡是 1.2 個什麼？0.0001（圖二十），所以我就會變成，這個是 1，先不要看小數部分的話，是不是 1 個 0.0001，對不對？所以那個 1



$$\begin{aligned} & 1.2 \times 10^{-4} \\ &= 1.2 \times 0.0001 \\ &= 0.00012 \end{aligned}$$

圖二十

要放在小數位數的哪裡？0.0001 這個地方，懂嗎？所以這一題 8.26，8 就會放在小數第 7 位，所以我就寫成，本來是 8.26 嘛，可是這個 8 因為要乘以 10^{-7} ，所以是不是會變成小數第 7 位，所以就會 1、2、3、4、5、6、7，那為什麼呂同學他們說，把前面一個 0 數進去就對了？

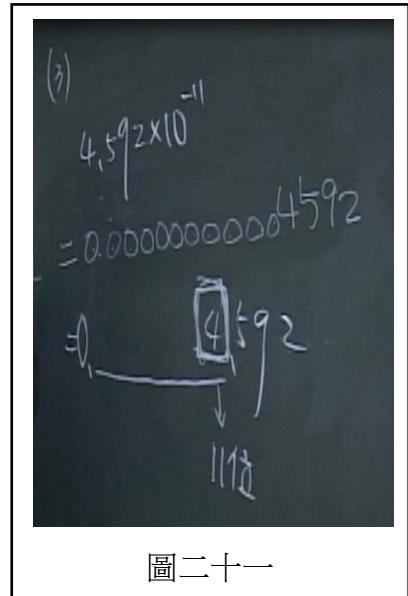
426. 學生：湊巧的。巧合。

427. 老師：巧合，那是因為他這個 8 是不是要佔一個位置，所以他乾脆把那個 8 的位置不要算，算成這個 0（個位數）的位置，所以就會變成 0 多一個，就是算到這裡去，可是這是不符合我們的邏輯思考的，這個是有點在用背的方法，懂意思嗎？很好用，對，考試的時候很好用，好，這個比較功利一點，像這一題（ 4.592×10^{-11} ）是什麼意思呢？這一題的話，是 4 個什麼？4.592（教師誤寫為 4.952），本來是這樣子，對不對？那個 4，我們是以 4 為…

428. 學生：老師，你寫錯。

429. 老師：好，4.592，我們的意思是說，以這個 4 為基準，因為 4 個，4 點多個什麼？0.00000...1，對不對？所以這是表示小數有第幾位？ 10^{-11} ，所以它是以 4 為基準的話，是在 0.這裡，4 是在小數第幾位？第 11 位（圖二十一），這樣懂意思了沒有？所以我這裡就要數，這個是第 11 位嘛，所以前面會有幾個 0？10 個 0，所以，有沒有好像我們剛剛說的那個整數，很大的數的時

候， 8×10^{20} 是幾位數？ $20+1$ ，有沒有那個概念？這邊有一點點類似，就是這裡是小數第幾位？11 位，這個在小數第 11 位，所以這裡要幾個 0？10 個 0，這樣看懂嗎？所以這裡要 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 個 0，再寫 4592，這樣懂了沒？然後小數點這時候就不要了，跑到前面來，這樣懂了沒有？所以這一題也是同樣的道理， 7.38×10^9 ，7.38，本來是不是點在這裡？我們是以 7



圖二十一

做基準，因為那個.38，小數位數捨去不理它的時候，我們就看到 10 的(-9)次方，所以就表示它在小數第幾位？這個 7 要在第幾位，第 9 位，所以前面要幾個 0？8 個 0，所以 1、2、3、4、5、6、7、8，這樣看懂了沒？了解？好，這是科學記號的表示法，你們應該就比較 ok 了，還要不要再練習一次？

430. 學生：不要了。

431. 老師：不用了。我們接下來要看一些科學記號的應用。科學記號還有一個很方便地方，就是它可以做乘除運算，好，我們看到第 1 個例題(圖二十

科學記號的乘除運算
例 1：已知 1 天文單位約為 1.5×10^{11} 公尺，試回答下列問題：
① 若木星與太陽的平均距離為 7.8×10^{11} 公尺，則木星與太陽的平均距離為幾個天文單位？
(以四捨五入法求到小數第一位)

圖二十二

二)，它說一個天文單位，我們剛剛有算過，對不對？一個天文單位是什麼

？從哪裡到哪裡的距離？

432. 學生：太陽到地球。

433. 老師：好，太陽到地球的平均距離，一個天文單位是 1.5×10^{11} ，我們來回答一個問題，第一個，如果木星和太陽的平均距離是 7.8×10^{11} 公尺，那麼，它是幾個天文單位？一個單位是 1.5×10^{11} ，我現在有 7.8×10^{11} ，那是幾個天文單位？

434. 學生：5 個。

435. 老師：5 個？怎麼來的？

$(7.8 \times 10^{11}) \div (1.5 \times 10^{11})$ ，在除的時候記住，這個科學記號要有一個括

$$\begin{aligned} \text{解：} & (7.8 \times 10^{11}) \div (1.5 \times 10^{11}) \\ & = (7.8 \div 1.5) \times 10^{11-11} \\ & = 5.2 \times 10^0 \\ & = 5.2 \end{aligned}$$

圖二十三

號，這裡要有括號把它括起來，這樣除的時候，剛剛我們在複習指數率的時候，是不是有做過這樣子類似的題目？怎麼除？要 7.8 除以 1.5，然後乘以 10 的幾次方？（圖二

十三）要 10^{11-11} ，對不對？好，所以我們看到， $(7.8 \div 1.5) \times 10^{11-11}$ ，因為相除指數要相減，好，這樣除完會變多少？ 5.2×10^0 ，10 的 0 次方是多少？1，就變成 5.2，你就知道了，木星跟太陽的距離是幾個天文單位啊？5.2 個天文單位，所以這是科學記號相除的時候，比你用平常的數字，你會怎麼

科學記號的乘除運算

例1：已知1天文單位約為 1.5×10^{11} 公尺，試回答下列問題：

②若火星與太陽的平均距離為1.5天文單位，則火星與太陽的平均距離是多少公尺？（請用科學記號表示）

圖二十四

除？780000...要寫幾個 0 啊，然後去除以 15000...，是不是要寫很多？然後再開始怎樣？消掉 0，對不對？把 0 消掉，是不是變成 $78 \div 1.5$ ，可是呢？你在這裡一看，就知道都是 11 次方，是不是就可以消掉了？所以，科學記號拿來做乘除運算的時候滿好用的，你很快就可以知道它剩下幾個 0，不用在那邊一個一個消去。然後下一題（圖二十四），我們看到火星，火星跟太陽的平均距離是 1.5 個天文單位，那到底是幾公尺，1.5，一個天文單位是 1.5×10^{11} ，現在有 1.5 個，要怎麼算，加、減、乘、除？乘，好，答對了。所以是 $1.5 \times 10^{11} \times 1.5$ ，對不對？這時候誰跟誰可以乘？

436. 學生：1.5 跟 1.5。

437. 老師：所以 1.5 跟 1.5 都是算式前面的數字可以乘，對不對？我們就會變成，1.5 乘 1.5，再乘以 10 的 11 次方($1.5 \times 1.5 \times 10^{11}$)，所以那邊乘起來是多少

438. 學生：2.25。

439. 老師：我們看到這裡又來一次小數的運算， 15×15 是不是 225，對不對？對，225 乘完，這裡小數 1 位再加小數 1 位，就會變小數 2

科學記號的乘除運算
例2：奈米口罩的織布縫隙是 10^{-9}m ，而霉菌長度是 $5 \times 10^{-7}\text{m}$ ，則霉菌長度是奈米口罩縫隙的多少倍？

圖二十五

位，所以就是 2.25×10^{11} ，這樣有沒有問題？沒有問題，好。再來，下一個。你們看這是一個生活問題（圖二十五），我們買口罩，SARS 來的時候，我不知道你們幾歲，國小對不對？國小、二年級、三年級，那時候因為 SARS 病毒的關係，老師會叫你們感冒的人一定要戴口罩，對不對？那時候就出現 N95 口罩、奈米口罩，有沒有？什麼叫奈米口罩？就是做的時候

，那些都是布去織成的，織的時候，它那個洞的大小，就會決定你的細菌會不會傳染出去，所以你看，奈米口罩的織布縫隙是 10^{-9} 公尺，可是黴菌的長度是 5×10^{-7} 公尺，請問，這個黴菌的長度是它的幾倍？還記得老師說黴菌長度是奈米口罩縫隙的幾倍要怎麼算？加、減、乘、除，哪一種？

440. 學生：除。

441. 老師：除，誰除以誰？黴菌長度(5×10^{-7}) \div (10^{-9})，除以奈米口罩，對不對？結果你看，除出來是多少？這裡除的時候，這邊前面有沒有數字？

442. 學生：沒有。

443. 老師：沒有數字，所以直接就 5，對不對？這裡除的時候，相除指數要相減，所以變 $10^{-(7)-(9)}$ ，多少？2 次方，好，所以就變成 $5 \times 10^{-(7)-(9)}$ ，變成 5×10^2 ，這樣乘出來是幾倍？

444. 學生：500 倍。

445. 老師：好，你看，問題出來了，黴菌的長度是奈米口罩縫隙的幾倍？500 倍，所以黴菌會不會出來？不會，對不對？就不會出來，可是你知道嗎？其實我有上網看一下資料，有的細菌比那個口罩還小，你戴口罩有沒有用？

446. 學生：沒有。

447. 老師：沒有用嗎？那老師叫你戴口罩幹嘛？

448. 學生：不要說話。

449. 老師：不要說話，不要說話就不用戴口罩了，答對了，防止口水飛出去，有的黴菌，我們剛剛前面有做到一個，很小的 SARS 的那一題，它的細胞就比不織布的縫隙還要小，這樣子那個細菌就很容易就會出來，對不對？可是事實上，那個細菌會單獨在那邊飄嗎？你們記得感冒是藉由什麼傳染？飛沫傳染，沫是什麼？

450. 學生：口水。

451. 老師：口水，所以那個細菌都會附著在你的口水上面，你的口水是很大的，所以它不會藉由那個口罩的縫隙飛出來，戴口罩才會有用，這樣知道嗎？所以那個細菌很小，你的口罩做的時候，有沒有辦法做到那個口罩的縫隙永遠都比那些細菌小？不可能。可是為什麼會有效？為什麼要叫你戴口罩？是因為它可以擋住飛沫傳染，細菌會藉由口水飛出來，口水比較大，這樣懂意思吧！好，所以乘除運算，我們就做到這邊，今天就上到這裡為止，後面還有一些科學記號的比大小，我們下一次再上。

參、教學說明

我的教學單元是科學記號，科學記號在數學上的應用並沒有很多，它主要是為了要配合國中生，在八年級的理化科目裡面，有一些莫耳數，還有電子量、庫倫，這一些會應用到科學記號，所以才會在數學課程裡面，特別加入這個單元。

我在活動上的安排，一開始是希望引起他們的動機，所以先講了牛郎和織女的故事，引出天文單位的概念，因為天文中的光年、天文單位，都是很大的數字，所以才需要科學記號的產生，然後我就進入比較大的數，很大的數字怎麼樣去用科學記號來記錄，在這個地方，因為牽扯到幾位數，學生比較能夠接受，所以做練習的時候，答對率都很高。第三部分，我就講到很小的數字，很小的數字因為牽扯到小數的計算，他們可能在小學的時候，小數的計算沒有學得很好，所以這個地方對他們來講，一直都是很困難的部分，因此，他們做科學記號，很小的數字要表示成科學記號的時候，就產生了一些問題，尤其是很多同學在補習班已經補過，他們的教法跟我的教法顯然不一樣，因為在補習班的時候會比較功利，直接告訴他們，要用什麼算法去算那個位

數會比較容易，但是他其實並不是充分的了解，所以到我這邊來講的時候，剛開始他們不能接受，因為我可能有一個部分，就是小數位數移動的時候，跳得太快了，他們就有一點不能接受。所以我在後面做練習的時候，就一直補強，到最後他們的觀念才完整，應該說大部分同學都有到澄清的地步，所以後來他們就覺得比較可以接受。最後一個部分，是做科學記號的乘除運算，因為乘除在科學上來講，也是常常會出現的，一些科學記號要去算乘法、除法，但是他們因為之前的指數率，好像學得還不錯，而且事先有跟他們複習一下，所以在這個乘除的運算部分，都還滿 OK，今天整個教學單元來講，我覺得還不錯。

肆、教學後的省思

在教科學記號的活動一到活動三的時候都很順利，因為很大的數，學生比較能接受，但到活動四，將很小的數以科學記號來記錄時，學生就出現了很多狀況，本來是希望學生能用單位量的概念再加上觀察，找出規律，讓很大的數和很小的數之間能有相同的判斷準則，但發現要學生觀察後能記起來是很困難的，尤其在 0.00000008 表示成科學記號時，學生還能接受 0.00000008 是 8 個 $0.00000001(10^{-8})$ 的想法，但當題目鋪陳到 0.0000023 是 2.3 個 0.000001 時，學生就有些迷惑了，可見學生在小數的理解度上是需要加強的，所以建議老師在教學時除了要複習指數律外，也要讓學生能掌握 2.3 個 0.000001 的意義。

以小數點為基準來探討的話，

$8.23 \times 10^7 = 8230000.\underline{0}$ ，它的個位數是第 1 位，所以基準變成十分位 $\underline{0}$ ，因此 8 會在十分位前面的第 $7+1$ 位；

$8.23 \times 10^{-7} = \underline{\underline{0.000000823}}$ ，它的十分位是第 1 位，所以基準變成個位數 $\underline{\underline{0}}$ ，因此 8

會在個位數後第 7 位。

以個位數為基準來探討的話，看到 8.23×10^7 就知道 8 是在個位數 0 前面 7 位，也就是 $8.23 \times 10^7 = 82300000$ ；

同樣的，看到 8.23×10^{-7} 就知道 8 是在個位數 0 後面 7 位，也就是 $8.23 \times 10^{-7} = 0.000000823$ 。

本次教學是用小數點為基準來教，發現會有兩個判斷的標準；經過省思後，如果改成以個位數為基準來教的話，就只有一個標準，所以建議老師可以試著用個位數為基準來教學，或許會有不同的成效。

線型函數

壹、教學活動設計

一、教學年級：七年級下學期

二、教學者：新北市立中山國中 陳春男 老師

三、教學目標：

- 1.藉由生活中的實例，看出數量的規律性，了解變數與函數的意義。
- 2.利用函數的表徵，了解函數有兩種對應關係。
- 3.透過函數的表徵，了解兩數的對應關係轉化成坐標平面圖形的意義。
- 4.透過操作活動，理解線型函數圖形的意義。

四、活動目標：

【活動一】能透過生活中的實例，看出數量的對應規律性，知道變數與函數的意義。

【活動二】能經由生活中的實例，理解函數有兩種對應關係。

【活動三】能利用連續量的生活實例，理解函數的表徵方式，並正確寫出函數對應的函數值。

【活動四】能利用生活中的實例，透過函數的概念，連結代數與幾何之間的關係，並理解函數圖形的意義。

【活動五】能理解線型函數圖形的意義，並畫出線型函數的圖形。

五、教學概要說明：

學生在七年級上學期學過一元一次方程式，七年級下學期學過二元一次聯立方程式，已經了解代數中未知數的基本概念，又在前面的單元學過坐標平面圖形，

了解二元一次方程式的圖形，具備基本的幾何坐標觀念。此單元希望透過生活中數量關係的對應經驗，理解變數的概念，知道定義域與對應域的限制，並透過函數的表徵，知道變數的概念，理解函數的意義。最後希望學生能利用函數的表徵，連結代數與幾何之間的關係，並理解函數圖形的意義。

第一節課藉由生活中的實例，看出數量的對應關係，知道變數的意義，理解函數有兩種對應關係，並能正確寫出函數的表徵。並經由函數概念與函數值的關係，理解定義域與對應域的意義。

第二節課是讓學生藉由函數的概念，連結代數與幾何之間的關係，並理解函數圖形的意義，畫出正確的線型函數圖型。

六、教學活動設計：

【活動一】能透過生活中的實例，看出數量的對應規律性，知道變數與函數的意義。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<ul style="list-style-type: none"> 解一元一次方程式，複習未知數的意義 	1.在七年級介紹一元一次方程式的時候，我們看到這個方程式 $2x-6=10$ ，其中的 x 代表什麼意思呢？同學們已經學過了，能不能說說看？ (1)如何用等量公理求出其中的 x 的值呢？ (2)如何表示呢？ 2.解出方程式中的 x 是什麼意思？	<ul style="list-style-type: none"> 同學可能會舉出各種例子來說明，例如，x代表未知數，或是x代表任意數等等。但是要切入主題，說明x代表暫時未知的已知數，當x被求出來時，x就知道是少了。 x的解表示滿足方程式等號的等式概念，必須加以引 	<ul style="list-style-type: none"> 複習並瞭解一元一次方程式的意義。 能透過等量公理來解出一元一次方程式的解。 能理解未知數x的意義。

<p>• 透過生活中的實例，理解變數</p>	<p>(1) 等式兩邊比較呢？有什麼關係？</p> <p>3. 某間零食店販賣巧克力，老闆為了方便店員結帳，把零賣巧克力的顆數和所需的金額列成一個表格。因為超過 30 顆時，就會用批發的價格出售，因此該表格只列出零售的顆數及對應的售價。請同學判斷巧克力個數與價格之間的關係。可以用什麼樣的方式來表示？(完成 P.66 學習單第 2 題)</p> <p>(1) 上面的關係，先用表格方式呈現：如果有 5 顆，總共多少錢？如果有 a 顆，總共多少錢？(完成學</p>	<p>導。</p> <p>• 主要目的是喚起同學對於一元一次方程式概念的主動連結。</p> <p>• 同學可能會由價格的角度來說明個數與價格之間的關連。(例如：5 顆有 15 元等，而不會直接說出 3×5 元)，教師必須適時引導。</p> <p>• 先用表格的表徵引導學生看出規律性，以便導出巧克力個數與價格間的關連。</p>	<p>• 能透過生活中的實例看出數量之間的規律。</p> <p>• 能正確說出顆數與價格之間的關連。</p>
------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------

<p>•經由函數概念與函數的對應關係，理解定義域之值域</p>	<p>習單的問題)</p> <p>4.如果嫌表格呈現的方式很麻煩，這個關係我們可以用甚麼樣的方式來表示?同學們有不同的表示法嗎? (考慮利用黑板來展示學生的寫法,並讓學生上台發表)</p> <p>5.我們看到了巧克力個數與價格的對應關係,數學上稱這種對應關係為函數。而每一種個數都對應到一個確定的價格,數學上稱這種對應的關係為函數,「$a \mapsto 3 \times a$」為函數的對應關係,個數的範圍「1、2、3、...、30」為函數的定義域;對應的價格「3×1、3×2、3×3、...、3×30」為函數的值域。</p> <p>(1) a 的範圍是由題目的條件決定的,</p>	<p>•先利用不同的表徵,例如:表格,對應關係,再介紹函數正式的記法,讓學生理解函數的表徵方式。</p> <p>•因為學生沒有集合的概念,無法直接理解函數是兩個集合之間的對應關係,老師必須讓學生理解從表格記法到省略記法的意義,才有辦法掌握函數記法的意義。</p> <p>•對於函數中相關的名詞,必須與學生</p>	<p>•能透過不同的表示法,推導出函數的不同表徵。</p> <p>•能理解對應關係的意義。</p> <p>•能理解函數中定義域與值域的意義。</p> <p>•能理解函數中自變數與因變數(依變</p>
---------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>• 函數的符號表徵</p>	<p>當 a 確定後，$3 \times a$ 就確定了，數學上也稱 a 為自變數，$3 \times a$ 為依變數或因變數。</p> <p>(2) 因為對應關係「$a \Rightarrow 3 \times a$」右邊的「$3 \times a$」也記錄了自變數 a，因此，可以省略對應關係左邊的 a，將對應關係「$a \Rightarrow a \times 3, a=1, 2, 3, \dots, 30$」，摘要的記成「$f(a)=a \times 3, a=1, 2, 3, \dots, 30$」，其中「$f$」是函數「function」的第一個字母，數學上常用「f」來表徵函數的對應關係，$f(a)$ 指的是類數 a 所對應的售價。</p>	<p>溝通，讓學生理解其意義，以免死記造成記憶的負擔。</p>	<p>數)的意義。</p> <p>• 能正確表示函數的對應關係。</p>
------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------	--------------------------------------

【活動二】：能經由生活中的實例，理解函數有兩種對應關係。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>• 函數表徵的意義與生活應用</p>	<p>6. 經由剛剛推導出的函數概念，現在我們再舉幾個例子，來釐清函數記法的意義。</p>	<p>• 同學們可能說出對應的關係採用表格的方式，有些同學可能說出口語的關係，有些同學可能說出</p>	<p>• 能理解函數表示法的意義。</p>

	<p>(1)端午節快到了，粽子店採取促銷活動。優待如下：優待利用快遞買肉粽的顧客(每個人限購 300 個)。</p> <p>①買 100 個以內(含 100 個)肉粽，每個肉粽賣 50 元，但是要加收 200 元的快遞費用。</p> <p>②買 101 個到 200 個肉粽，一個肉粽還是賣 50 元，但是不加收快遞費用。</p> <p>③買 200 個以上肉粽，一個肉粽賣 45 元，而且不加收快遞費用。</p> <p>請用數學式子把上面的問題記錄下來，讓大家一看到數學式子，就知道買幾個肉粽要付多少元？</p> <p>(2)同學們如果把每一種情形分開來</p>	<p>分項函數關係的樣式。</p> <p>•透過引導的方式讓學生從表格的表徵、口語的表徵、列式的表徵，統整到以函數的方式呈現。</p> <p>•同學可能只會針對其中一種狀況列</p>	<p>•能以正確的表示法，寫出正確的函數樣式。</p>
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------

	<p>看,可以看出每一種對應的關係嗎?最後把它結合在一起,可以有其他的發現嗎?</p> <p>(3)再舉一個例子,例如:平年時,月份和對應天數的關係。</p> <p>①同學們可以用表格寫出月份和天數的對應關係嗎?如何寫呢?</p> <p>②我們知道平年時,每一個月份都恰好對應一個天數,例如,4月對應的天數是30天,8月對應的天數是31天,這種對應的關係是函數。</p> <p>③但是,要怎麼寫出來,才是函數的記法呢?除了表格之</p>	<p>出關係,無法寫出所有完整的對應關係,老師宜加以指導,使同學能夠理解,將三種可能的方式列成一個函數來表示。</p> <p>•能利用定義域的範圍,引導學生推出正確的函數表示法,最後再結合成分項的函數關係。</p> <p>•能透過平年時,月份和對應天數的關係,理解函數關</p>	<p>•能正確的使用函數表徵,表示正確的對應關係。</p> <p>•能瞭解函數表示法的意義。</p> <p>•能完成函數表格的</p>
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------

	<p>外,有沒有其他的可能表示方式呢?</p> <p>④如果要寫成文字符號的對應關係,該如何表示?</p> <p>⑤如果我們改變原來「月份對應到天數」的關係為「天數對應到月份」,這種對應關係就不是函數的對應關係,「月份對應到天數」的關係中,每一個月份都恰好對應到一個確定的天數,但是「天數對應到月份」的關係中,只有 28 天對應到 2 月,而 30 天對應到 4 個不同的月份,31 天對應到 7 個不同的月份。</p> <p>•上面兩種例子所推導出的結果,跟你預期有相同嗎?</p>	<p>係。</p> <p>•學生可能只會完成表格的對應方式,必須加以引導,經由數字的對應,進一步寫成文字符號的對應關係。</p> <p>•學生可能直觀認定可以成立,應透過推理的過程,讓學生瞭解函數可以成立所代表的意義。</p>	<p>表示法。</p> <p>•在老師的引導下,能用文字符號寫出函數的對應關係。</p> <p>•能正確地判別函數有兩種對應關係。</p>
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------

	說說看差異在哪裡？		
--	-----------	--	--

【活動三】能利用連續量的生活實例，寫出正確的函數表徵方式，並能寫出對應的函數值。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<ul style="list-style-type: none"> 函數表徵在生活上的應用 	<p>7.溫度計上有兩種刻度，有人知道兩種刻度之間的換算規則嗎？</p> <p>(1)日常生活中常見的溫度計，左右兩邊都有刻度，一邊幫助我們報讀攝氏溫度，另一邊幫助我們報讀華氏溫度，例如當攝氏溫度是20度時，對應的華氏溫度是68度，華氏溫度是41度時，對應的攝氏溫度是5度。</p> <p>(2)因為每一個攝氏溫度恰好對應一個華氏溫度，每一個華氏溫度也</p>	<ul style="list-style-type: none"> 同學們可能說出攝氏幾度等於華氏幾度，但是不能明確說出換算的規則，有人可能知道規則，但是不知道理由，老師必須加以引導。 	<ul style="list-style-type: none"> 能理解攝氏與華氏的換算規則。

	<p>恰好對應一個攝氏溫度，所以攝氏溫度對應華氏溫度、以及華氏溫度對應攝氏溫度都是函數的對應關係。</p> <p>(3) 假設溫度計中攝氏溫度的刻度範圍是 0 度到 100 度，華氏溫度的刻度範圍是 32 度到 212 度，我們如何透過看著溫度計兩邊刻度的對應關係，推導出攝氏及華氏溫度互換的對應關係？同學們有什麼想法？</p> <p>(4) 攝氏溫度約定水結冰時的溫度是 0 度，水沸騰時的溫度是 100 度；而華氏溫度約定水結冰時的溫度是 32 度，水沸騰時的溫度是 212 度。也就是說，攝氏 0 度時華氏是 32 度，攝氏 100</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 同學們可能說出用比例的概念，有些同學可能說出解二元一次聯立方程式的結果。老師宜加以引導與說明。 • 能利用比例的觀念，寫出正確的函數(即攝氏與華氏的換算)。 • 可以利用前面已經知道的定義域概念，來介紹連續性的函數概念，作為後續介紹線性函數的圖形時的前 	
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

<p>• 常數函數的表徵</p>	<p>度時華氏是 212 度。水由結冰到沸騰之間，攝氏溫度將它等分成 100 格，華氏溫度將它等分成 180 格。所以攝氏溫度 1 格的長度是華氏溫度 1 格的 $\frac{9}{5}$ 倍，華氏溫度 1 格的長度是攝氏溫度 1 格的 $\frac{5}{9}$ 倍。</p> <p>(5) 如果將溫度計攝氏與華氏的變換看成函數時，該如何表示呢？</p> <p>• 同學們能知道 $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ 的意義嗎？</p> <p>(6) 攝氏溫度計與華氏溫度計，兩者之間有何關係？你有什麼發現嗎？</p> <p>8. 看完攝氏與華氏</p>	<p>置經驗。</p> <p>• 老師必須逐步引導學生看出攝氏與華氏之間的對應關係，並利用函數的表式方式，列出兩者之間的關係。</p> <p>• 說明實驗室中恆溫</p>	<p>• 能正確使用比例的概念，完成攝氏與華氏溫度換算的函數。</p> <p>• 能理解實驗室中溫</p>
------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------

	<p>的溫度計的變換，接下來，看一個關於實驗室溫度的例子。</p> <p>(1)舉一個例子，關於恆溫實驗室和經過時間的對應關係，同學們先猜想，為什麼實驗要保持恆溫呢？</p> <p>(2)如果不是恆溫，將會有甚麼結果呢？</p> <p>(3)某實驗室保持恆溫 4 度，以某天中午 12 時為基準，將一天之內經過的小時數和對應的溫度記錄下來。請完成學習單的表格。</p> <p>(4)由前面所學過的函數表示法的概念，我們可以用怎樣的數學式子將上面的對應關係記錄下來。怎麼表示這樣的一</p>	<p>裝置的必要性。</p> <ul style="list-style-type: none"> •透過恆溫的概念引導學生利用表格方式，完成溫度與時間的對應關係。 •有些同學會忘記定義域的限制，要記得提醒學生注意。 	<p>度設定恆溫的理由。</p> <ul style="list-style-type: none"> •能將恆溫的概念以表格對應的方式呈現。
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------

	<p>個函數?</p> <p>(5)利用前面學過的表示法，知道可以將溫度與時間的關係以函數 $f(x)=4, x=1,2,3,4$ 來表示。請問同學，它的意義是什麼？</p> <p>(6) $f(x)=4$ 透過運算，同學們能知道 $x=10$ 的函數值嗎？</p> <p>9.上面兩種表示法比較之後，兩者之間有何關係？你有什麼發現嗎？</p> <p>10.上面所推導出的結果，跟你的預期相同嗎？說說看，差異在哪裡？</p>	<ul style="list-style-type: none"> •有些同學會忘記函數的對應關係，本例子呈現的是多對一的情況，老師可以提醒學生注意，並詢問是否符合函數的定義。 	<ul style="list-style-type: none"> •能正確完成函數的表示法。 •能知道不同表徵可以表示相同的問題與呈現相同的結果。
--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------

附錄：線型函數學習單

新北市立中山國中七年 班座號: 姓名:

1. 解一元一次方程式 $2x-6=10$

2. 某廠牌巧克力，在 30 顆內，每 1 個 3 元，請完成巧克力個數與價格之間的關係。

(1)

顆數	售價
1	
2	
3	
4	
5	
.....	
30	

顆數	售價
1	
2	
3	
4	
5	
.....	
30	

(2)

如果店員乘法的心算能力很強，是否能用一個簡單的數學式子，把上面的表格記下來，讓大家一看到數學式子，就如同看到上面的表格。

$a(\text{顆}) \Rightarrow (\text{元})$; a 是顆數，是 a 顆對應的售價

如果要定義的更清楚呢？可以怎麼寫：

$a(\text{顆}) \Rightarrow (\text{元})$; $a =$, a 是顆數，是 a 顆對應的售價

數學上的寫法:

其中「f」是函數「function」的第一個字母，數學上常用「f」來表徵函數的對應關係， $f(a)$ 指的是類數 a 所對應的售價。

求出下列的值： $f(5)=$

$f(10)=$

$f(24)=$

$f(40)=$

3. 端午節快到了，粽子店採取促銷活動。優待如下：

優待利用快遞買肉粽的顧客（每個人限購 300 個）。

(1) 買 100 個以內（含 100 個）肉粽，每個肉粽賣 50 元，但是要加收 200 元的快遞費用。

(2) 買 101 個到 200 個肉粽，一個肉粽還是賣 50 元，但是不加收快遞費用。

(3) 買 200 個以上肉粽，一個肉粽賣 45 元，而且不加收快遞費用。

請用數學式子把上面的問題記錄下來，讓大家一看到數學式子，就知道買幾個肉粽要付多少元？

① 第一種情形，應該怎麼用表格表示？是否能用一個簡單的數學式子，把上面的表格記下來，讓大家一看到數學式子，就如同看到上面的表格。

② 第二種情形，應該怎麼用表格表示？是否能用一個簡單的數學式子，把上面的表格記下來，讓大家一看到數學式子，就如同看到上面的表格。

③ 第三種情形，應該怎麼用表格表示？是否能用一個簡單的數學式子，把上面的表格記下來，讓大家一看到數學式子，就如同看到上面的表格。

①

②

③

可以將上面的記法摘要的記成：

$$f(x) = \begin{cases} (\text{售價}) & x(\text{個數}) = 1, 2, 3, \dots, 100 \\ (\text{售價})x(\text{個數}) & x(\text{個數}) = 101, 102, 103, \dots, 200 \\ (\text{售價}) & x(\text{個數}) = 201, 202, 203, \dots, 300 \end{cases}$$

回答下列問題

①買 80 個肉粽要花多少錢？怎麼用函數值表示？

②買 130 個肉粽要花多少錢？怎麼用函數值表示？

③買 250 個肉粽要花多少錢？怎麼用函數值表示？

④買 400 個肉粽要花多少錢？怎麼用函數值表示？

真的要買 400 個肉粽，你會怎麼做？怎麼買較划算？把你的想法寫下來。

4. 平年時月份和對應天數的關係

用表格來溝通月份和對應天數的關係很恰當，下面的表格記錄了平年時月份和對應天數的關係，其中每一個月份都恰好對應一個天數，例如 4 月對應的天數是 30 天，8 月對應的天數是 31 天，這種對應的關係是函數。

月份	天數
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

下面呈現兩種摘要記錄上面表格的方法，哪一種記法是函數的記法？

第一種記法：

月份	天數
2	28
4、6、9、11	30
1、3、5、7、8、10、12	31

第二種記法：

月份	天數
x	\Rightarrow 28 $x=2$
y	\Rightarrow 30 $y=4、6、9、11$
z	\Rightarrow 30 $z=1、3、5、7、8、10、12$

第一種記法不像我們常見函數的記法，它只是將相同天數的月份記在一起，並沒有呈現自變數和依變數間的對應關係。

第二種記法是我們常見函數的記法，其中的 x 、 y 、 z 是自變數，自變數 x 的定義域是 2 月，2 月對應的天數是 28 天，自變數 y 的定義域是 4、6、9、11 月，這幾個月對應的天數都是 30 天，自變數 z 的定義域是 1、3、5、7、8、10、12 月，這幾個月對應的天數都是 31 天。

5. 攝氏溫度對應華氏溫度的關係

攝氏($^{\circ}$ C)	華氏($^{\circ}$ F)
0	$\Rightarrow 32 + \frac{9}{5} \times 0$
1	$\Rightarrow 32 + \frac{9}{5} \times 1$
2	$\Rightarrow 32 + \frac{9}{5} \times 2$
3	$\Rightarrow 32 + \frac{9}{5} \times 3$
...	
100	$\Rightarrow 32 + \frac{9}{5} \times 100$

上面記錄了攝氏 a 度時所對應的華氏溫度，其中 $a=0、1、2、3、\dots、100$ ，我們可以用下面的數學式子將上面的對應關係記錄下來。

攝氏($^{\circ}$ C)		華氏($^{\circ}$ F)
a	\Rightarrow	$32 + \frac{9}{5} \times a$ $a=0、1、2、\dots、100$

也可以將上面的對應關係，更摘要的記錄成下面常見函數的式子

--

例：華氏溫度對應攝氏溫度的關係

華氏($^{\circ}$ F)		攝氏($^{\circ}$ C)
$32+0$	\Rightarrow	$\frac{5}{9} \times 0$
$32+1$	\Rightarrow	$\frac{5}{9} \times 1$
$32+2$	\Rightarrow	$\frac{5}{9} \times 2$
$32+3$	\Rightarrow	$\frac{5}{9} \times 3$
\dots		
$32+180$	\Rightarrow	$\frac{5}{9} \times 180$

上面記錄了華氏 $32+a$ 度時所對應的攝氏溫度，其中 $a=0、1、2、3、\dots、180$ ，我們可以用下面的數學式子將上面的對應關係記錄下來。

華氏($^{\circ}$ F)		攝氏($^{\circ}$ C)
$32+a$	$\Rightarrow \frac{5}{9} \times a$	$a=0、1、2、3、\dots、180$

也可以將上面的對應關係，更摘要的記錄成下面常見函數的式子

--

或

--

6. 恆溫實驗室和經過時間的對應關係

某實驗室保持恆溫 4 度，以某天中午 12 時為基準，將一天之內經過的小時數和對應的溫度記錄下來。

經過的小時數		溫度(度)
1	\Rightarrow	4
2	\Rightarrow	4
3	\Rightarrow	4
	$\dots\dots$	
24	\Rightarrow	4

上面記錄了經過了幾小時後所對應的溫度，我們可以用下面的數學式子將上面的對應關係記錄下來。

經過的小時數	溫度(度)
$x \Rightarrow 4$	$x=1、2、3、\dots、24$

◆國中小數學教材與教學探討

也可以將上面的對應關係，更摘要的記錄成下面的式子。

學完了今天關於函數的概念，同學們有什麼樣的想法？

貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：各位同學，我們今天要上是一個新的單元，這個單元對你們來講，在國中算是比較抽象的基礎，所以我們今天就花點

$$1. \text{解一元一次方程式 } 2x-6=10$$

圖一

時間，好好的來介紹它。今天要教的單元叫做線型函數的單元，「線型」當然指的是，它所呈現的圖形是一條直線的概念。這個不在我們討論的範圍，今天我們只是針對「函數」這樣的概念，好好的跟同學們來說清楚。講函數的單元之前，我們就回想看看，以前在國一上學期哪些是跟未知數 x 有關的部份，麻煩同學們看一下學習單的第 1 題（圖一），這部份非常簡單，我可能會找一位同學上來做說明，這是一個什麼？一元一次方程式。可不可以把未知數的 x 解出來？

2. 學生：可以。

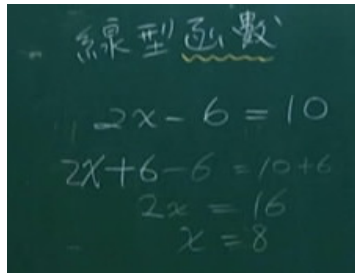
3. 老師：可以，同學馬上寫。我抽一個人上來，40 號，可以嗎？麻煩上來把你怎麼解寫出來就可以了，寫給大家看，好不好？同學們在學習單上面把 x 解一解。（教師行間巡視），對了，就是這樣。同學們看一下，他寫對了沒（圖二）？

圖二

4. 學生：第二個式子有問題。
5. 老師：式子什麼地方有問題？
6. 學生：第二個左邊。

7. 老師：好，品賢，你要不要上去把它補充一下？
你要不要跟大家說明一下，為什麼左邊會
得到 x 等於 8（圖三），可以嗎？

8. 品賢：左邊是負 6，所以，我們要把負號變成零
，左邊加 6，所以右邊也要加 6，所以是 2
 x 等於 16，然後 2 移過去變成 x 等於 8。



圖三

9. 老師：聽懂同學請舉手，好，放下。謝謝品賢。這裡，我有一點點意見。你們看看這個式子，本來的式子叫做 $2x - 6 = 10$ ，我們在上學期學過所謂的等量公理，對不對？它兩邊之所以會同時加 6，本來位置應該是在這裡（ $2x - 6 + 6 = 10 + 6$ ），對不對，是不是應該在這邊？然後他把它挪開，擠進去了（ $2x + 6 - 6 = 10 + 6$ ），對不對？這個東西擠在這裡，照道理來講，兩邊應該同時都加 6，這就是等量公理，對不對？然後因為 $-6 + 6$ 就等於 $6 - 6$ ，所以這樣的一個運算結果跟你這樣的運算結果是一樣的，我們就可以得到 $2x = 16$ ，而得到 $x = 8$ 的這個解。在這裡的 x 我們稱為是什麼數？未知數，很好，我就是要你這個答案。未知數的意思就是說，我們當初也講的很清楚， x 可以代表一個任意的未知數，我們今天要賦予這個 x 有更大的功能，我們希望從未知數的角度提升到可以代表任意的數，那它可不可以在某個範圍內是可以變的？就是我希望把未知數的概念跟功能提升到一個所謂「變數」的概念，那我們就可以有進階版、進化版，就是說，從未知數的功能提升到變數的功能。怎麼樣達到這樣的功能，麻煩同學們看一下接下來的例子。我直接來說明，好不好？底下的例子（圖四）很簡單，某一個廠牌的巧克力，其實我今天有帶來，但是待會兒表現好的，我們再給他，好不好？某一個廠牌的巧克力，他的想法是這樣子，在 30 顆以內，注意看

2.某廠牌巧克力，在 30 顆內，每 1 個 3 元，請完成巧克力個數與價格之間的關係。

(1)

顆數	售價
1	
2	
3	
4	
5	
.....	
30	

顆數	售價
1	
2	
3	
4	
5	
.....	
30	

圖四

題目的條件，待會兒的答案就在題目裡面。在 30 顆內每一顆 3 塊錢，請完成巧克力個數跟價格之間的關係，只寫第一個表就好了，麻煩同學們動手，可以嗎？有人問我，老師，你這兩個表格不是長得一樣嗎？是，但是我希望你寫不一樣的東西，這不一樣的東西在做什麼呢？左半邊那個表格，有沒有同學願意上來分享，告訴我，它的結果是什麼，有沒有，吳雙可以嗎？寫第一個，好，那就麻煩你上來。謝謝，你就把你看到的顆數跟價格的對應關係填一填，1 顆 3 塊錢，好，做對了沒？做對了（圖五），來，同學給他掌聲，謝謝。這證明一件事，我們國小的教育很成功，表示各位九九乘法表背的還不錯，為什麼這樣講？因為我們曾經去看賣東西的，他去做一些教育訓練，因為員工不是那麼清楚買一份多少錢，他真的有一個對

照表，你想想看，我現在 30 顆巧克力，因為每顆都一樣，也沒有什麼複雜的情形，對不對？所以 1 顆多少錢？3 塊，2 顆 6 塊，3 顆 9 塊，4 顆 12 顆，5 顆 15 塊，30 顆 90 吧，我現在問你，你光這樣子看，當我問一個比較奇怪的問題：25 顆，75 塊；因為它在 30 顆範圍裡面，對不對？40 顆？

顆數	價格
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
30	90

圖五

10. 學生：(有人說) 120，(有人說) 不知道。

11. 老師：耶！就有爭議了，為什麼？我剛剛不是講了嗎，在 30 顆內我就給你正常價，30 顆以上，我就可以賣批發價，可能就有不同的折扣啊！所以你問我，50 顆多少錢？不確定，可能要跟老闆講才清楚啊！各位了解我講的意思嗎？所以這是一個表格，透過這個表格，我們只看到了一個價錢，對不對？我們從這裡看到什麼樣的規律呢？我可能就會這樣子去思考，你要想想看，老師剛剛講，我要你這個表格跟那個表格長得不一樣，但是結果要一樣，要怎麼寫？要不要我暗示你一下？意思就是說，反正一顆多少錢，3 塊，3 乘以多少？1 嘛！你懂我在講什麼了，要不要上來？好啦！掌聲給他鼓勵一下，來啦，謝謝，來寫一下。答對了沒？跟你想的有沒有一樣？有，它的差別在什麼地方，你知道嗎？左邊這個表我必須要一個一個對應，先看多少顆，然後去看多少錢，對不對？但是如果我這樣看，反正一顆就 3 塊錢，一顆，3 乘以 1；二顆，3 乘以 2；三顆，3 乘以 3；四顆，3 乘以 4；五顆，3 乘以 5；……30 顆，3 乘以 30 (圖六)，我有沒有看到它的規律

性？看到了，對不對？底下我就問一個很大的問題了，第（2）小題（圖七）我不是直接問了嗎？如果店員他的乘法心算能力很強，我是不是就可以用一個很簡單的式子把上面的

顆數	價格	顆數	價格
1	3	1	3×1
2	6	2	3×2
3	9	3	3×3
4	12	4	3×4
5	15	5	3×5
30	90	30	3×30

圖六

表格列了下來，我就不要列了很長的表格，像中間這邊省略掉什麼？都是…，從 5 跳到 30，中間是不是跳了很多個？我需要一個一個把它做出來嗎？就不需要。所以第（2）小題的部份麻煩同學們發揮你的想像能力，如果你的心算能力很強，把上面的表格記錄下來，讓大家看到這個數學式子就像看到表格一樣，怎麼把表格省略，我現在就在做這件事，我們有沒有辦法做？也就是說，我們現在換成用一個對應的概念來處理的話，a 有沒有辦法對出來要多少錢？有沒有辦法做出來？有，我問一下，有辦法的舉手，我們認識一下，好不好？（教師行間巡視）我看看王銘陽舉手了，吳雙也做對了啊！好，我看大部份都寫對了，a 是它的顆數，也就是說，我買多少顆？a 顆，這邊是對應到它的價錢。剛剛從這個規律，你也看到在 1 跟 30 的範圍裡面，不管 a 是多少，它對應出來的價格叫做 $3 \times a$ ，簡稱為多少？ $3a$ ($a(\text{顆}) \Rightarrow 3 \times a = 3a(\text{元})$)。所以你看，這樣有什麼好處，你知道嗎？a 可以在 1 跟 30 之間任意的跳來跳去，不管是多少，這時候的 a 不再只是一個未知數了，它也成為一個可以變動的數，它就叫做變數，在這個範圍裡面不管你買多少顆，價錢就叫做 $3a$ ，這是第一個概念，到這邊有沒有問

(2)

如果店員乘法的心算能力很強，是否能用一個簡單的數學式子，把上面的表格記下來，讓大家一看到數學式子，就如同看到上面的表格。

$$a(\text{顆}) \rightarrow (\text{元}) ; a \text{ 是顆數，是 } a \text{ 顆對應的售價}$$

如果要定義的更清楚呢？可以怎麼寫：

$$a(\text{顆}) \rightarrow (\text{元}) ; a = \text{ , } a \text{ 是顆數，是 } a \text{ 顆對應的售價}$$

數學上的寫法:

其中「f」是函數「function」的第一個字母，數學上常用「f」來表徵函數的對應關係，f(a)指的是顆數 a 所對應的售價。

求出下列的值：f(5)=

f(10)=

f(24)=

f(40)=

圖七

題？第二個，如果我狠一點，直接寫 a 是顆數，3a 是對應的售價，這樣有沒有問題？那數學上怎麼來呈現這樣的一個部份呢？價錢的部份，我們該用怎麼樣的方式來處理它，是一個比較好的部份？我們會這樣子寫，就是說，表格有沒有辦法省略掉？舉個例子來說，當我今天把這個東西（圖六

左表的「顆數」欄)擦掉,你看它的價錢,你要回去想顆數,還要除對不對?可是如果這個(右表)看到價錢,我去想顆數,要除嗎?

價格
3x1
3x2
3x3
3x4
3x5
3x30

圖八

12. 學生：直接把它刪掉。
13. 老師：在哪裡？
14. 學生：右邊
15. 老師：哪一個？
16. 學生：把 $3a \cdots$ (圖八)
17. 老師：應該這樣吧！狠一點，這個就是我的顆數，整體就是我的價錢，在數學上就是說，我們怎麼樣把兩個，一個是顆數，一個是價錢，這兩個之間的一個對應關係，我怎麼很偷懶的用一個式子把它寫出來？這個寫出來的方式就叫做用「函數對應」的方式來寫。我們怎麼寫，數學上怎麼寫？數學上是這樣寫的，看好哦！本來就告訴你 a 顆對應到 $3a$ 的價錢，那怎麼寫，他直接就這樣寫了， $f(a)=3a$ ，這個 a 指的是它的什麼？顆數， $3a$ 指的是它的什麼？價錢，這樣清楚嗎？也就是說，當我給一個數字 3 ，乘以 3 自動就是它的價格了。為什麼用 f ？我下面跟你做一個說明，因為我們剛剛介紹叫函數，函數的英文叫做 function，它的第一個英文字母就是 f ，我們取它第一個字母，所以函數的定義，它就會從這裡開始，就是我能從這樣的一個對應關係，你本來還要再乘以 3 、乘以 3 、乘以 $3 \cdots$ 對不對？我現在不用看了，我直接從價格裡面，就知道你買了多少顆。有沒有辦法這樣做？這邊有沒有問題？會不會太快？
18. 學生：不會。
19. 老師：確定哦？

20. 學生：確定。
21. 老師：確定哦！好，就這個問題來講，我直接寫 $f(a)=3a$ ，數學上來說，我們這邊有寫哦，其中的「f」是一個函數的第一個字母，數學上常用來表徵函數的對應關係， $f(a)$ 指的就是 a 顆所對應到的售價，那底下偷懶，就會這樣問了， $f(5)$ 要多少，指的是什麼意思？
22. 學生：有 5 顆。
23. 老師：你買 5 顆要付多少錢，答案又是多少？怎麼算？根據剛剛的講法，你只是把 a 代成多少？5 嘛！就是 3×5 等於多少？15。這樣可以嗎？，底下是不是還有三個例子，把它完成好不好？好，我再下去看一下（教師行間巡視）。好，那你又是被我騙了，但是我都要說一下。這確定是正確的。我看很多人都寫的很好哦！但是最後一個，我覺得我比較好奇哦！第一個 $f(5)$ 是多少？15，對不對？那 $f(10)$ 呢？
24. 學生：30。
25. 老師：30，10 顆多少錢？30，對不對？那 $f(24)$ 呢？
26. 學生：72。
27. 老師： $f(40)$ 呢？
28. 學生：不確定。
29. 老師：好，重點就來了，剛剛我們講這到這個概念，順便把東西要再補充完畢，要有一個限定的範圍，限定範圍這件事重要不重要？很重要，如果我今天講的一個東西，跟你所指的這個東西，兩個人認知不一樣的話，這兩個東西是沒有交集的，所以一般來講，函數在數學上來講，只會顯現 $f(a)=3a$ ，就這個問題來講，這樣的題目是不夠的，為什麼？因為你沒有把定義說清楚、講明白。就我們來說，這邊會有一個限制，這個叫做定義上的限制

， a 要從哪裡開始， $a=1、2、3、4、5\dots$ ，到哪裡？到 30，你把 a 限制住了，然後去求那個 $f(a)$ 的值。前面那個限制我們把它稱做「定義域」，你的「定義域」要把範圍找出來，否則你面臨到一個很困難的問題，如果你現在整個 $f(a)=3a$ ， $a=1、2、3、4、5\dots$ ，到 30 的話，底下剛剛不是問了嗎？ $f(10)$ 有沒有在這個範圍裡面？

30. 學生：有。

31. 老師：你的 a 是變來變去的，對不對？滿足這個範圍裡面， 3×10 就是多少？30。剛剛下一個不是問你，24 個多少錢？ 3×24 是多少？72，對不對？24 有沒有在這個範圍裡面？有嘛！最後一個問題，那 $f(40)$ 呢，這個要怎麼寫？超出定義域範圍之外的東西，這個值，它會叫做無意義，因為它根本不在定義域裡頭，沒有在定義域裡面，問函數值，這本身是沒有意義的，這樣了解意思嗎？也就是告訴我們，今天要定義一個函數關係，你就要告訴我，你定義在哪個範圍裡面來談，超過這個範圍我可能會有不同的對應關係。從這裡其實你也會慢慢去思考，原來是這樣。換句話說，每一個 a 進來，我就要有一個對應的值才是有意義的，超過範圍，它就是沒有意義，所以這個東西你就要了解，到這裡有沒有問題？至於我們所對應出來的值，比如說，3、6、9、12、15、18、21、24 甚至到 90，這個是它所對應出來的值的範圍。我們有定義域相對應出來函數的值，對不對？那就叫做什麼？「值域」，值的範圍，域是區域，「定義域」定義要有一個區域，定義要有一個範圍，值域也要定義一個區域，也定義一個範圍，所以有「定義域」、有「值域」，這樣一個概念才是完整的。從第一個買巧克力的例子到這裡有沒有問題？好，到這裡沒有問題，我們就要翻過來看第二頁了，這個題目是很應景的，而且在生活中也常出現，我把題目說一遍（圖九），大家

認真的聽，然後順便看看有沒有什麼問題。端午節快到了，比如說，怡如粽子店採取促銷活動，這樣可以嗎？

3.端午節快到了，粽子店採取促銷活動。優待如下：

優待利用快遞買肉粽的顧客（每個人限購 300 個）。

(1)買 100 個以內（含 100 個）肉粽，每個肉粽賣 50 元，但是要加收 200 元的快遞費用。

(2)買 101 個到 200 個肉粽，一個肉粽還是賣 50 元，但是不加收快遞費用。

(3)買 200 個以上肉粽，一個肉粽賣 45 元，而且不加收快遞費用。

請用數學式子把上面的問題記錄下來，讓大家一看到數學式子，就知道買幾個肉粽要付多少元？

①第一種情形，應該怎麼用表格表示？是否能用一個簡單的數學式子，把上面的表格記下來，讓大家一看到數學式子，就如同看到上面的表格。

②第二種情形，應該怎麼用表格表示？是否能用一個簡單的數學式子，把上面的表格記下來，讓大家一看到數學式子，就如同看到上面的表格。

③第三種情形，應該怎麼用表格表示？是否能用一個簡單的數學式子，把上面的表格記下來，讓大家一看到數學式子，就如同看到上面的表格。

圖九

32. 學生：可以。

33. 老師：可以，你看男孩子笑的很開心，優待如下，優待用快遞買肉粽的顧客，每

人限購幾個？300 個，為什麼要限制？如果不限制，你全包了，萬一你毀約，這家粽子店就倒了，因為你下了訂單，他不能賣給別人了啊！而你不跟他買，他就慘了，這裡會有一個限制，怎麼個限制法？第一個限制說，你買 100 個以內，有沒有含 100 個？有，每個肉粽賣多少錢？50 塊，但是要加收 200 塊的快遞費用，這樣懂意思嗎？如果我今天要從肉粽到價格，你要怎麼寫？你看，如果畫表格，如果你的店員素質不高，你畫這個表格，會寫到死，為什麼？第一個，1 到 100 是一種價錢，然後 101 到 200 是不是又要另外一種價錢？再來，200 到 300 是不是又要一種價錢？你那個表格要做多大？

34. 學生：很大。

35. 老師：那你就改名字了，就不能叫做怡如粽子店，要叫表格多粽子店，你們家粽子外面通通都要貼表格，有些店省麻煩，說你買幾個自己看，然後你就付給我多少錢就好。像這個，來，你看哦！我們現在又來了，粽子的個數跟它的價錢，如果你今天寫的是從 1 到 100 個，你想想看，你這個要怎麼寫（圖十）？表格要不要寫很多？會不會寫很多？

個數	價格
1~100	

圖十

多？想想看，有沒有辦法用函數的概念來表示，這樣會比較省事，不然你會很辛苦耶！你看，1 到 100 裡面，這裡也是整數個，能不能說，老闆我要買 1.2 顆粽子？那怎麼賣？一顆再加 2 片葉子叫 1.2 顆，是這樣嗎？當然不是。所以你會發現它的定義域在這裡是什麼？都是整數顆的，1 顆、2 顆、3 顆、5 顆、8 顆、10 顆，你想想看，如果你今天 1 顆、2 顆、3 顆…，有水準一點，好不好？我希望有水準一點的，找一個人上來寫，真的要把

金莎巧克力送出去了啦！假設 10 顆要怎麼寫？如果說我回到剛剛的，在 1 到 100 的範圍裡面，它是 a 顆，我要怎麼寫？我覺得答對這個問題算是有程度的哦！你能不能找到一個規律性？有沒有人自願？不用寫定義域，定義域我已經寫在這裡了，1 到 100，所以你可以嘗試寫寫看，在第 3 題，就是在學習單第 2 面的地方，你第一種情形應該怎麼用表格表示？不就是這一種嗎（圖十）？這樣很累咧！能不能用一個簡單的數學式子，將這個表格記成一個很簡單的算式，讓人家看到這個式子就知道跟看到表格是一樣的。所以上來的人做兩件事，第一件事情是填寫這個表格，第二件事情就是想辦法把這個改成我剛剛講的這一種（ $f(a) = \underline{\hspace{2cm}}$ ），可以嗎？做得到這兩件事，就送巧克力。好，開始下去寫，不會趕快問哦！（教師行間巡視）價格寫在這裡。對，好，3 顆呢？所以能不能看到那種規律性？上去寫啊！你就把那個表格完成，然後把 $f(a)$ 寫完就結束了，而且只要寫第一種狀況就可以了，好，上來吧！王銘陽羨慕的要命，你看你把那個表格完成，把 $f(a)$ 寫完就可以了。有沒有問題？我看一下，對啊！1 顆 50 沒有錯，可是還要什麼，200 塊，所以你這裡還要加多少？200，所以你應該要想就是 $50 \times 2 + 200$ ， $50 \times 3 + 200$ ， $50 \times a + 200$ ，這樣懂意思了？這樣清楚嗎？你不能只有這個啦，這個是第一種，這是第二種情形的。這樣做，你把一般式子寫出來，你這個是結果嘛（圖十一），那你把後面寫一個等號可以嗎（圖十二）？對。他的價格沒有錯，對不對？但是從那樣子的話，如果只看價格，你知不知道他買幾個？這樣是不是比較難看出來？有沒有人有問題的？舉手我就過去了。我剛剛看了一下，還不錯。他做對了沒，做對了，麻煩同學給他掌聲，同學，來，真的要把它送出去了，謝謝，太棒了。來我們看一下，100 顆以內嘛，所以第 1 顆的價錢是不是 50×1 ，再加上 200，200 是什麼錢啊？快遞的費用，快遞要送到你家，否則那個粽子剛出

1~100	
個數	價格
1	250
2	300
3	
4	
⋮	
10	
a	

$$f(a) = 50a + 200$$

圖十一

1~100	
個數	價格
1	$250 = 50 \times 1 + 200$
2	$300 = 50 \times 2 + 200$
3	$50 \times 3 + 200$
4	$50 \times 4 + 200$
⋮	
10	$50 \times 10 + 200$
a	$50 \times a + 200$

$$f(a) = 50a + 200$$

圖十二

來是很新鮮的，送了一個禮拜才到你家，你敢不敢吃？比如說，兩個，那就 $50 \times 2 + 200$ ；三個， $50 \times 3 + 200$ ；四個， $50 \times 4 + 200$ ；十個， $50 \times 10 + 200$ ；a 個， $50 \times a + 200$ ，那你 $f(a)$ 寫成 $50a + 200$ ，a 有沒有一個範圍的限制？有，幾個？

36. 學生：小於等於 100。

37. 老師：1, 2, 3, 4, 5... 到多少？100，為什麼我要寫小於等於 100？我不太認同，小於等於 100 的範圍，如果我剛剛看到數學最優秀的他寫這樣： $(0 \leq a \leq 100)$ ，你們可以接受他這種寫法嗎？有人說不行耶！哪一位？為什麼不行？他用到不等式來呈現我們的範圍，對不對？但是這樣有沒有要把我們要表達的東西表達出來，第一個我要問，有沒有買 0 個啊？買 0 個，你沒有訂，

還向人家收快遞的錢，這也太狠了吧！如果這樣，0 個要付多少錢？我不買，還要付錢，誰理你啊！再來第二個，0 到 100 之間買 0.5 個，買 9.9 個，買 98.2 個，有人這樣買的吗？沒有。所以你雖然把整個範圍講完，就是 1 到 100 的正整數，但是我可不可以這樣寫？不行，因為裡面包含了分數、小數。所以我剛剛就是說，數學上就要界定的很清楚，第一，你不能只有結果，因為從結果，這個個數就沒辦法省掉了，但是如果寫成 $f(a)=50a+200$ 的過程，你知不知道他買幾個粽子？知道，只要在 1 跟 100 裡面的任意一個正整數，我就知道要付多少錢，到這裡有沒有問題？聽懂的舉手，好放下。接下來，範圍開始改成第二種情形，它應該會比較簡單了，因為我買了超過 100 顆，然後介於 100 到 200 之間，老闆怎麼說？

38. 學生：不用收快遞費。
39. 老師：不用收快遞的錢，也就是說，當我今天是從 101 到多少？200 的時候，我的個數跟我的價錢有沒有比較簡單？
40. 學生：有。
41. 老師：我從哪裡開始，能不能寫 1？不行啊！一定要從多少開始？101，要多少錢，怎麼寫比較好？
42. 學生：101 加……。
43. 老師：再加多少？到底是哪一種？
44. 學生： 50×101
45. 老師： 50×101 ，同樣的道理，我買 102 顆怎麼付錢？
46. 學生： 50×102 。
47. 老師： 50×102 ，對不對？一直舉例子啦，我隨便舉，我要買 120 個肉粽。
48. 學生： 50×120 。

49. 老師：多少？ 50×120 ，沒錯吧！如果說我今天用 x ，那要付多少錢？ $50 \times x$ ， x 有沒有範圍？
50. 學生：有。
51. 老師：範圍在哪裡？101 到哪裡？200 的什麼？正整數啊！這個有沒有問題？所以，你如果要寫成函數的樣子，你要怎麼看，是不是寫成 $f(x) = 50 \cdot x$ 或簡記成 $50x$ ？只是說，你的定義裡面 x 要從哪裡開始寫，101，102，103 到哪裡？
52. 學生：200。
53. 老師：200 嘛，這個有沒有問題？確定！第三種，他說你的量已經夠多了，多到某種程度，你買超過 200 個以上，最多不能超過幾個？300 個，對不對？一個肉粽賣你多少錢？45 塊。這個有沒有人會寫？這個比較簡單了吧！我寫在下面好了（ $f(x) = \dots$ ），看這個範圍要怎麼寫（ $x = \dots$ ）。有沒有同學願意上來？然後我拜託你做二件事，第一件事是告訴我們，200 個以上到 300 個有一個範圍，對不對？你現在有三個式子，這是第一個（ $f(a) = 50a + 200, a = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100$ ），這是第二個（ $f(x) = 50x, x = 101, 102, 103, \dots, 200$ ），這是第三個（ $f(x) = \dots, x = \dots$ ），我可不可以把三個併成一個？然後把它說清楚、講明白，有沒有可能？在某一個範圍裡面，我要套哪一個？有沒有辦法把三個合併成一個函數的式子來表示？讓人家一看就知道，原來你是買哪一種數量的粽子，所以你適用哪一種消費金額的優惠。這個要不要有同學上來試試看？第三種，我把定義域寫出來，從 201、202、203 然後一直到 300 個，應該用什麼方式來呈現，有沒有人有辦法上來幫我們處理一下？王達博，你有沒有興趣幫我們上來寫寫看，可以嗎？面對鏡頭要微笑一點，要開心一下。對，做對了沒？200 顆以上，一顆多少錢？45

元，所以 x 是介於 201 到 300 之間任何一個整數，可以變來變去，不管你買幾顆，反正我的價錢就是 $45x$ ，所以說，那個 x 不是一個未知數，而是它可以取代在這個範圍內的任意一個數，它是可以變動的，一樣是用 x 來呈現哦！我們可不可以叫它變數？可以，對不對？現在有三個東西，我怎麼把它們合併成一個？王先生，攝影中請微笑。來，有沒有辦法這樣做？不然我把它搬過來好了，你知道數學家很懶惰，很聰明的數學家是怎麼做的嗎？我們怎麼樣把三種合併成一種，一看就知道它是哪一種？思考一下，還是我直接說？來，你這麼辛苦，站這麼久，好，送你一個啦！回去聽我說。他又賺到了。你看，數學家怎麼做？把三個合併成一個，數學家就這樣寫：你要我求 $f(x)$ ，對不對？沒關係啊，我就把它打成一個大括號就好了啊 $f(x) = \{ \quad \}$ ！

54. 學生：是哦？

55. 老師：你猜了半天都不敢說，數學，你就要勇敢去說，為什麼不說？我怎麼寫，猜對了的舉手，有猜的舉手，好，放下，為什麼不敢講？

56. 學生：因為不確定。

57. 老師：怕怕哦！怕吃到那個巧克力會拉肚子！我告訴你怎麼處理，就這樣子啦！ $f(x)$ 直接寫成多少？ $50x + 200$ ，然後後面要寫什麼？我剛剛講，那個叫什麼，定義域，要定出來， x 等於多少，1, 2, 3, 4 到哪裡？到 100 的整數，如果你今天用這個，我一看就知道你一定沒有買超過 100 顆，對不對？超過 100 顆的，我用哪一種？ $50x$ ， x 從哪裡開始，101, 102, 103, 一直到哪裡？到 200，所以你用到 $50x$ 的，一定知道買超過 100 個，但是沒有超過 200 個，這樣看的出來他買幾顆嗎？所以那個 x 是不是叫 100 到 200 之間，隨便你挑一挑，我就知道你用哪一種？第三個買超過 200 顆以上，但是沒有超過 300

顆粽子的是 $45x$ ， x 從哪裡開始，201, 202, 203 到多少？到 300 嘛，到這裡有沒有問題？好，聽懂的舉手，請你把它寫下來，謝謝。寫完了以後，後面不是還有「回答下列問題」，你看他買幾顆，你到底要代哪一個，我剛剛又跟你耍了一下心機，買 400 顆粽子要花多少錢？你可能就要去想：「老師，他不是說有遊戲規則，只能買…」。老闆不賣你啦！

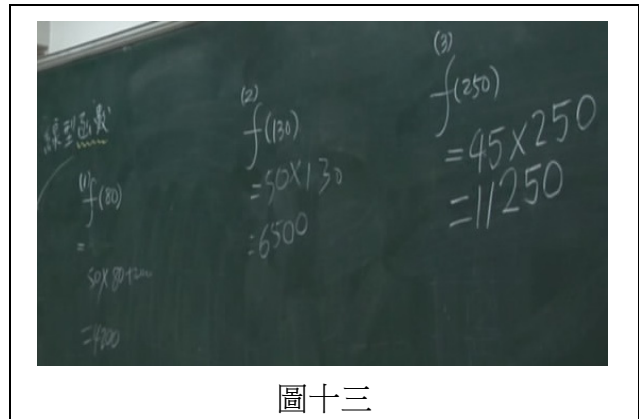
有人說，那除非我買兩次，200 顆，這裡就會有一個問題，你可能就要去思考，如果你硬要買 400 個，你要分成兩個人來買的話，是一個人買 300 個、一個人買 100 個，這樣的價錢比較便宜呢？還是每個人都買 200 個，價錢會比較便宜呢？你就要想一下啦，它可能會不同，你就要去判斷，所以數學在幹什麼？數學就是嘗試讓我們去解決日常生活中可能會遇到的問題，如果你真的有 400 個粽子的需求，你要怎麼去處理？這樣了解意思嗎？來，我們把它寫一寫，然後再來看後面的問題，我們抽三位同學上來好不好，一人寫一個，一個買 80 顆的，一個買 130 顆的，一個買 250 顆的，同學就要清楚你要套哪一個，弄完了我們再中場休息，好不好？可以，好，10 號、11 號、42 號，請上來，謝謝，自己挑，自己選。算式寫一下啦！我說它的算式寫一下，不能只給我答案啊！這太狠了，同學，你買 80 顆要用哪一種匯率？

58. 學生：還要加 200，多 200 塊。

59. 老師：這樣你不用快遞，你可能是一個禮拜以後才收得到。好，我們把黑板保留，然後先中場休息，好不好？等一下上課，我們再請寫的人上來幫同學們做講解，可以嗎？我們就先下課。

【第二節】

60. 老師：我們先找 80 個粽子的買主，同學，怡秀，麻煩你來跟我們解釋一下，好不好？你為什麼要這樣算啊？算出來是多少？看他對不對（圖十三）？



61. 學生：80 個肉粽在 100 顆以內，所以我先用 50×80 是 4000，然後因為還要加上 200 塊的快遞費，所以加 200。
62. 老師：說對了沒？
63. 學生：說對了。
64. 老師：說對了，來，掌聲鼓勵一下，謝謝。好，那個網拍 130 顆肉粽的買主來，陳主珉，對不對？來解釋一下。
65. 學生：因為 130 符合 101 到 200，所以不用多加 200 元的運費，所以就是 50×130 等於 6500。
66. 老師：6500，好，謝謝。來，第三個網購 250 顆肉粽的買主來。
67. 學生：重量級。
68. 老師：看他的身材就知道他吃的多啦！
69. 學生：因為是 250 顆，是在 201 到 300 的正整數裡面，他那時候有說價格一個就是 45，所以這兩個乘起來（ $45 \times 250 =$ ），它的錢數就是這樣（11250）。
70. 老師：一萬多塊，對不對？他說對了沒？
71. 學生：說對了。
72. 老師：對了，好，我們謝謝。根據剛剛那個肉粽公主來跟我們講話，我們現在補

充一題，我剛剛不是講說 $f(400)$ ，代表我要買幾顆？400 顆，怎麼算錢？目前就這個函數來講？

73. 學生：不能。

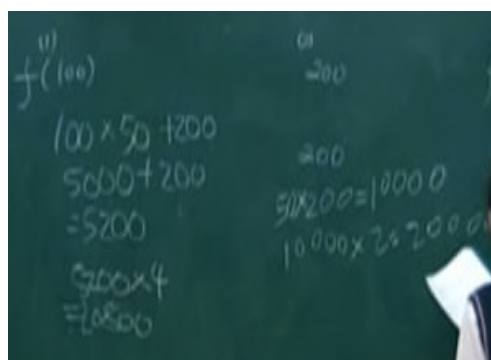
74. 老師：沒辦法做，因為它沒有在定義域裡頭，所以我們說 $f(400)$ 叫什麼？無意義，因為它沒有在你的範圍裡面。我們現在來解決日常生活中真的會碰到的狀況，剛剛也有人跟我討論了一下，就是說，我真的要買 400 顆粽子，要把整個怡如肉粽店包下來，我要買 400 顆，來，同學，你就要思考，它目前最多 300 顆，對不對？我到底要怎麼買會比較省？我們剛剛想到一個問題就是說，有人說要買 400 顆，可能我冒充 4 個人，100、100、100、100，有沒有可能？有沒有可能這樣？你會不會幫我算第（1）種情形，100、100、100、100，這樣我要花多少錢？這是第（1）種，你要冒充四個人頭，要有四個帳號去網購，對不對？第（2）種是好啦，反正我要 400 顆，我要兩個人，一個人各買幾個？200 顆，要多少錢？第（3）種，他說最大的優惠是幾顆？300 顆，我要怎麼買？我買 300 顆跟 100 顆，多少錢？算一下，然後告訴我哪一種最划算，上來講的人這次真的要給三顆巧克力了。你要不要先寫一寫？還是直接上來寫？銘陽，你要自己上來寫嗎？不要衝動是吧！以免粽子吃不完會拉肚子哦！真的要買 400 顆，我要怎麼買比較划算？動動腦想一下，當然，除了這些組合之外還有別的組合，對不對？只是說可行的。確定嗎？上來吧，懂老師講的意思嗎？就是我要買 400 顆粽子，我要怎麼買比較划算？會牽扯到不同的狀況，你有沒有幫我們算過，哪一種比較便宜？沒關係，你只要算出 $f(100)$ 再乘以 4 不就是 400 了嗎？（此時，上台的學生寫： 400×50 ）不是，我的意思不是這樣，你要先求出 $f(100)$ 的值，再乘以 4。懂我講的意思嗎？

75. 學生：懂。

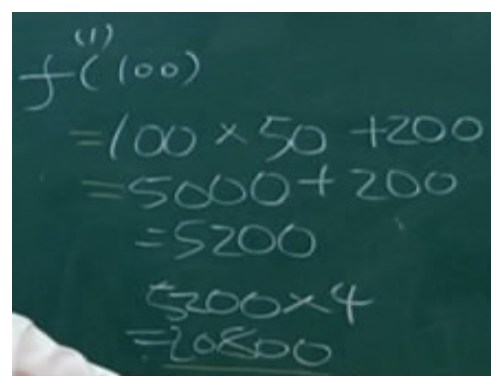
76. 老師：我現在不是要買一百顆，然後這樣有四個，然後就算出最後的價錢，所以你應該寫的算式是先寫 $f(100)$ ，然後再寫到 4 倍的 $f(100)$ ，這樣知道我在講什麼嗎？第(2)題應該怎麼寫比較好？謝祥忠，你要不要上來寫寫看？200 顆買 2 次。

77. 學生：…乘以 2 嗎？

78. 老師：對，乘以 2 沒錯，你算出一個再乘以 2，對，然後第(3)種就是一個是代 f 多少？300，一個是代 f 多少？100，看看哪個比較划算哦！要不要試試看，真的嗎？學藝股長，可以拜託你嗎？來，謝謝。同學要不要算算看，第一個，有沒有算對？然後第二個就是說我希望你們要有一個正確的數學符號的表示，像銘陽來講，你既然已經寫 $f(100)$ 了， $f(100)$ 的值你既然有函數丟進去了，可以求出它應該對應出來多少值（圖十四），這裡就可以寫什麼？等號，（圖十五）沒有

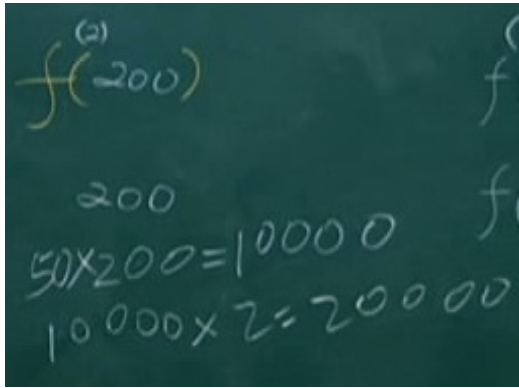


圖十四

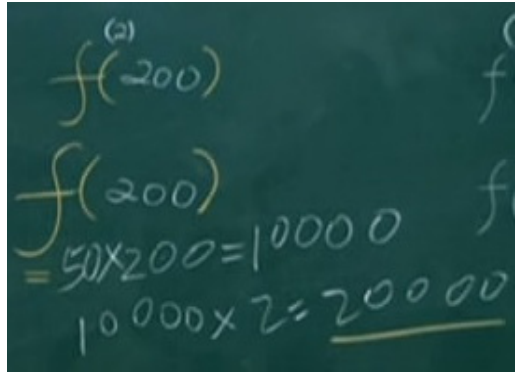


圖十五

關係，因為它就符合 50×100 再加 200，所以它等於 5000 再加 200 等於 5200，400 顆就是 5200 有 4 次，所以 $5200 \times 4 =$ 算出來，買 400 顆第 (1) 種買法他需要花 20800 塊，到這裡有沒有問題？第 (1) 種，我找四個人一人買一百。(此時，第 (3) 種上台的學生做完了) 很好，很好算對了，很棒啊！好，第 (2) 種祥忠的寫法是這樣子做的(圖十六)，他找了兩個人，所以他用的是 $f(200)$ 。有兩個，所以，你應該要怎麼寫這算式？同學要學會一個正式的數學算式的使用，我既然根據剛剛那個函數



圖十六



圖十七

的寫法， $f(200)$ 就等於在這裡，101 到 200 範圍，200 在這，我要用的是這一個，所以 $f(200) = 50 \times 200 = 10000$ ，我 1 萬乘以 2，總共花了多少錢？2 萬塊(圖十七)，這裡 (1) 花了多少錢？20800，差了多少錢？800 塊，對不對？那第 (3) 種買法就是說我派了兩個人，一個人買多少顆？300 個，一個買多少個？100 個。300 個的價錢在這裡，是 45×300 ，等於花了 13500，第二個買 100 顆， $50 \times 100 + 200$ 這邊花了 5200，所以 13500 再加 5200，我這邊只要花多少錢？18700(圖十八)，跟 20800 差多少錢？是不是差了

2000 多塊，每個人都買幾顆粽子？
400 顆，差了多少錢？2000 多，就是
我們在生活中，第一個 $f(400)$ ，超越
我定義域的範圍之外，這本身是沒有
定義的，它是無意義的，但是在生活
中，今天我們要去處理實際生活中碰
到的問題，真的要這樣買，我可能就

$$\begin{aligned} & (3) \\ & f(300) \\ & = 45 \times 300 = 13500 \\ & f(100) \\ & = 50 \times 100 + 200 \\ & = 5000 + 200 \\ & = 5200 \\ & 13500 + 5200 = 18700 \end{aligned}$$

圖十八

要很多選擇，如果是您，你會選哪一種？選第（1）種買的舉手，沒有。選第（2）種的？不考慮。第（3）種的？好，放下。這樣你有沒有發現，在每個不同的範圍之下，給我們優惠的條件是不一樣的嘛，總共是划算的，第（1）個雖然是最不優惠的 100 顆，但是你用的第（3）個是最優惠的條件，總共加起來還是划算的，所以這個函數來講，就是說，第一個，面對各種狀況我可以用一個數學常用的式子來表示，表示成我們要的，買幾顆我們就看到它所要的條件，這樣清楚嗎？這是我們所碰過函數表示法的一種，到這裡有沒有問題？沒有，那我們就繼續往下看，看第 4 個例子，換句話說，同學們就要看第三頁，在這一頁裡頭，我們定義了一個叫做什麼年？平年，平年跟閏年差別在哪裡？有沒有哪一個同學可以跟我們說一下，平年跟閏年的差別？平年 2 月有幾天？（圖十九）

4. 平年時月份和對應天數的關係

用表格來溝通月份和對應天數的關係很恰當，下面的表格記錄了平年時月份和對應天數的關係，其中每一個月份都恰好對應一個天數，例如 4 月對應的天數是 30 天，8 月對應的天數是 31 天，這種對應的關係是函數。

月份	天數
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

下面呈現兩種摘要記錄上面表格的方法，哪一種記法是函數的記法？

第一種記法：

月份	天數
2	⇒ 28
4、6、9、11	⇒ 30
1、3、5、7、8、10、12	⇒ 28

第二種記法：

月份	天數
x	⇒ 28 x=2
y	⇒ 30 y=4、6、9、11
z	⇒ 30 z=1、3、5、7、8、10、12

第一種記法不像我們常見函數的記法，它只是將相同天數的月分記在一起，並沒有呈現自變數和依變數間的對應關係。

第二種記法是我們常見函數的記法，其中的 x 、 y 、 z 是自變數，自變數 x 的定義域是 2 月，2 月對應的天數是 28 天，自變數 y 的定義域是 4、6、9、11 月，這幾個月對應的天數都是 30 天，自變數 z 的定義域是 1、3、5、7、8、10、12 月，這幾個月對應的天數都是 31 天。

圖十九

79. 學生：28。

80. 老師：28 天，那閏年 2 月呢？29，這個平年、閏年是另外一個主題，因為它牽扯到的是整個時間計算的問題，我們比較簡單的就是說，從表格來講，這件事情會很容易，只是會寫的很辛苦，為什麼？因為 1 到 12 月，你就要寫很多，比如說，1 就是月份，然後這牽扯到的是天數，麻煩同學把它寫上去，好不好？1 月、2 月、3 月、4 月、5 月、6 月然後再寫另外一半，因為我在黑板上沒辦法拉那麼長，每個月份是不是都有對應到一個天數？可不可以把它寫上去。（教師行間巡視）有沒有人不會寫的啊？我了解一下好不好？正確，對，平年啊！因為題目是寫平年。葉紘維，會不會寫？31 天啊，照寫啊！4 月呢？30，對了，很好，5 月是這個月，5 月有幾天？31 天。好，6 月呢？八月是 31 天，九月 30 天，十月呢？31 天。十一月？30 天，對，十二月？31 天，對，正確很好。一年怎麼算應該知道嘛！很好，正確的，我們對一下：一月 31 天，二月 28 天，三月 31 天，四月 30 天，五月 31 天，六月 30 天，七月 31 天，八月 31 天，九月 30 天，十月 31 天，十一

月 30 天，十二月 31 天，有沒有問題？有人就問說：「老師，這個有沒有函數關係？要怎麼寫？」我們要怎麼寫？我要把月份當成一個什麼，我怎麼看到黃色那個區塊（圖二十），所以我們就講說，有人會這樣想，這裡面幾個數字比較怪，這個（2 月）比較怪，為什麼，因為它對到的是二十八日，所以一種寫法是這樣，我寫成月份，2 月對過來幾天？28 天，然後再來就開始有對到多少的？對到 30 天。對到多少？31 天，你現在想想看，我要幾月來對？對到 30 天的有幾月？4 月。然後呢？6 月。然後呢？9 月，然後 11 月，是不是這樣？再來對到 31 天，有幾月？1 月、3 月、5 月、7 月、8 月、10 月、12 月，我現在問你，如果我寫這樣（圖二十一），你認為有沒有對應關係？有，但是像不像函數的對應？

月份	天數	月份	天數
1	31	7	31
2	28	8	31
3	31	9	30
4	30	10	31
5	31	11	30
6	30	12	31

圖二十

月份
 2 → 28
 4, 6, 9, 11 → 30
 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12 → 31

圖二十一

81. 學生：不像。
82. 老師：不像，怪怪的，對不對？那我怎麼樣寫成像函數對應關係，我剛學過大括號了啊，學過就來用，如果我今天還是要寫 $f(x)$ ，我要怎麼寫？ $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 28, & x=2 \\ 30, & x=4, 6, 9, 11 \\ 31, & x=1, 3, 5, 7, 8, 10, 12 \end{cases}$$

圖二十二

一樣用大括號，然後 x 當什麼？月份的話，所以定義域就開始了，第一個，我如果要對到 28 天， x 等於多少？2。如果我要等於 30 天， x 要等於多少？4、6、9、11。我要等於 31， x 要怎麼寫？1、3、5、7、8、10、12，這樣像不像函數的表示方法（圖二十二）？這個比較像，對不對？它的好處就是說，你看，有一個月份丟進來了，我就會有一個天數給你，所以進來一個「定義域」的東西，我就會有一個「值域」的東西出來。所以，針對那個「定義域」，有人會這樣說：你給我多少，我就知道我要對應給你什麼，就好像我剛剛講賣粽子一樣，你只要告訴我要買幾顆，我就告訴你要付多少錢，「定義域」裡面的東西，這個 x 我們剛剛講，它是一個變數，對不對？它會有一個說明的方式，就是說叫做「自變數」，就如同我剛剛講巧克力一樣，巧克力在 30 顆的範圍裡面， $f(a)$ 等於多少？等於 $3a$ ，這個 $f(a)$ 裡面的 a 我們把它稱為「自變數」，根據你給我的數值，我再相對應跑出來的那個數，比如說 $3a$ ，又比如說不管是 $50x + 200$ 、 $50x$ 或 $45x$ ，反正你給我一個值我就告訴你我要付多少錢，這個相對於「自變數」出來的，「值域」的內容我們就稱為「因變數」，因為你變了，我就相對也來變，所以我剛剛講 x 是一個什麼數？變數，在一個範圍裡面是可以跑來跑去的，你告訴我多少我就告訴你多少，所以一個叫「自變數」，一個叫「因變數」。所以，一樣的道理，你給我一個月份，不管幾月，我一定會給你一個天數，就完成了，這樣了解意思嗎？所以它是不是一個函數的關係？是。所以在數學裡，你看，針對月份然後給你一個天數，這件事情可以構成一個函數的關係，一般來講，為什麼我們舉這個例子，特別會在每一個教科書的教材提到天數跟月份，因為它反過來的時候，呈現一個很奇怪的東西。我現在不講月份跟天數，我現在講天數跟月份，你會覺得我怎麼辦？我把黑板上這邊擦

掉啦，你把「自變數」跟「因變數」記起來了，對不對？我們來看一下，如果你今天要把天數跟月份之間做成一個關係，它會很難寫，為什麼？我舉一個例子來問你， $f(28)$ ，你可不可以寫的出來？28 天是哪一個月？我問你，那 $f(30)$ ，完了，你要寫什麼？答案有沒有唯一一個？不行啊！對不對？不行了，我要怎麼寫？同樣的道理，我要講 $f(31)$ ，你丟一個進去，會跑出好幾個來，你看，1, 3, 5, 7, 8, 10, 12，所以，像這樣子我們就會定義它不是一個函數的關係，它沒辦法用 f 的方式來呈現，因為東西丟進去了，出來的要嘛就沒有，要嘛就不只一個，這個會有問題。好比說，我剛剛講的例子，現在定義域的範圍裡面不是只定到 300 顆粽子，你要訂 400 顆，他沒辦法給你價錢，你不能說，訂 400 顆，這個人去買這個價錢，那個人去買那個價錢，第三個人去買另外一個價錢，如果老闆讓三個人彼此不知道沒事，老闆要讓三個人知道，就會有事，這樣你懂我講的意思嗎？不然等一下你問怡如老闆娘就知道了，可不可以說，我對不同的人有不同的差別待遇？沒辦法去處理這個。所以函數在處理這件事情也會有同樣的問題，就是我今天要丟一個值進去，它應該要有一個值出來，告訴我值域中那個值是多少。這個才叫做有定義域範圍裡面的函數，否則超過這個範圍，我剛剛講過無意義，無意義就不是我要講的東西。像這種天數跟月份之間的東西，你丟一個 28 天，它自己丟了一個數「2」出來，是確定的。你丟 30 天進去，你要告訴我答案是什麼，你要填哪一個？不確定嘛，31 天進去，你告訴我答案要填哪一個？不確定，它就不構成一個函數的對應關係。所以我們結合上面所講的，函數會有兩種對應關係，一種是一個對一個，你給我一個值，我就出來一個值給你看，所以剛剛買肉粽，1 到 100 裡面，不管你買幾顆，我就告訴你要付多少錢；101 到 200，你買幾顆我也是給你

一個價錢，我不會給你兩個價錢；買 201 到 300，你只要固定買幾顆，我一定會告訴你固定的價錢。有沒有固定的？有。你給一個「自變數」，他跑出來一個「因變數」，這個叫做一對一的函數，這是一個函數的對應關係，這個有沒有問題，到這邊聽得懂嗎？一對一，聽懂的舉手。一個出來就是一個，另外一種是跟你不一樣的，應該這樣子講，摸彩抽籤也是函數的對應關係，我可能摸出來「銘謝惠顧」，他可能摸出來也是「銘謝惠顧」，所以你可能摸出來，二個摸到都對應，但是這是我摸出來的彩，我摸出來的沒得獎，你摸出來的沒得獎，可能看辰摸出來的得獎了，它也是一個函數對應關係，所以其實函數對應關係很多，比較好的一種觀念就是說當我一個值進去的時候，總是出來只有一個值跟它做對應，這是我們所聽到的對應關係，所以目前大概有這個概念就可以了。底下我們開始應用這個關係，剛剛講到都是離散的，為什麼？都是正整數，那些點都是分開的，有人就問：「老師，函數有沒有連續的？」，有，我們就要開始介紹了，介紹什麼？介紹溫度計，有沒有看過溫度計？溫度計有兩種溫度，對不對？看你在哪個國家，如果轉換你沒有弄清楚，是會鬧笑話的。

83. 學生：超熱的。

84. 老師：如果那個國家不是用攝氏，然後服務的又很好，比如說，你去國外住飯店，像美國有些地區用的是華氏，你請服務生說：「可不可以幫我放洗澡水？」他說沒問題，問你要幾度？你跟他講 90 度，我告訴你好冷了，就不一定啊，因為洗澡最適合的溫度可能只有 60 度、40 度、45 度，對不對？你現在就看看哦，兩種溫度之間為什麼我們說它是連續的量，各位看過溫度計嗎？有些形狀應該是類似這樣，中間有一根，然後有紅紅的液體對不對？左邊有左邊的刻度，右邊有右邊的刻度，裡面有些是裝水銀，有些裝的是

酒精，酒精才會有紅色的，水銀不會是紅色的，那上面的刻度怎麼寫？上面可能會寫 $^{\circ}\text{C}$ ，另一邊寫 $^{\circ}\text{F}$ ，Celsius，從英文字母來講，那個叫做攝氏，它怎麼訂？它可以從冰點，就訂多少？0，水的冰點0，水煮了，滾開是幾度？沸點幾度？100，換句話說，它從0到100之間分成幾等份？100等份，每一等份就叫做攝氏1度。華氏是另外一個外國人，他也是水的冰點跟沸點來訂，他把水的冰點，他說0度很奇怪，應該數字再大一點比較漂亮，但是他訂的也很奇怪，他訂幾度？32度，他把冰點訂為32度，他把沸點訂幾度？訂212度。好，同學們，幫我算一下，從32到212之間有幾度？幾等份？他把它分成180等份，每一等份叫做華氏1度，我們想，這兩個溫度之間有沒有一種對應的關係？這邊就開始有一個表格來做說明了，我們來看一下，第一個當攝氏 0°C 的時候，我剛剛講攝氏，…筆劃這麼多，有時候我就偷懶寫一個 $^{\circ}\text{C}$ 就好了，攝氏叫什麼？ $^{\circ}\text{C}$ ，華視叫什麼？有些人很皮，還問我：「老師，華視叫度F啊！台視咧？」，我不知道，那個就很累了。好，第一個，攝氏0度的時候，華氏是32度，有些人會比較簡單的說，我們剛剛提到，如果今天要看到兩兩之間的對應關係，我們要想辦法看到它的規律性，對不對？怎麼樣去表示會比較好，我寫32有比較好嗎？你就要看它們之間的關係了。你看，這邊差100格，對不對？0到100之間差了100格，然後切了100份，每一份是多少？1，對不對？每一份是叫1，因為差了100份，它是1。這個32到212之間差了幾份？180份，每一份是 $\frac{1}{180}$ ，對不對？所以你看，一個是 $\frac{1}{100}$ ，一個是 $\frac{1}{180}$ ，這兩個之間怎麼比啊！幾比幾，這樣有沒有辦法去想幾比幾？你看，攝氏，我這邊是切100份，華氏切幾份？180份，有沒有一樣長？

85. 學生：有。

86. 老師：有沒有一樣這麼長，有耶，你說一份大小怎麼比？是不是 180 跟 100 的比，或者是 100 跟 180 的比，幾比幾我們怎麼講？5：9。但是，你要想一件事，你要回答我，需要先想一件事，攝氏比較大份還是華氏比較大？

87. 學生：攝氏比較大份。

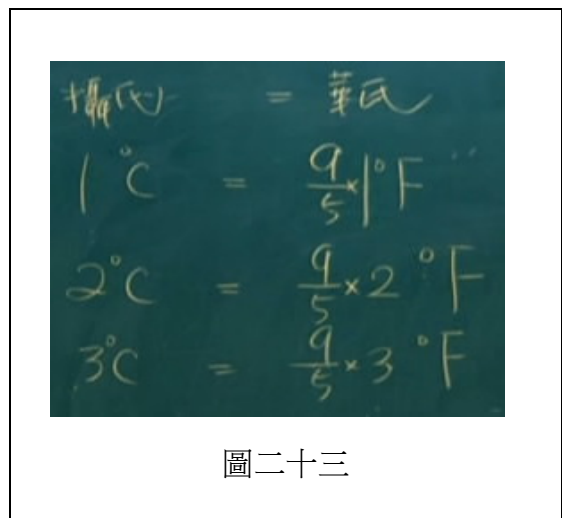
88. 老師：因為分給 100 個人，每個人分的比較多嘛，分給 180 個人，每個人拿的其實是比較小的，你要講清楚，所以在這裡，你要想清楚，攝氏一份等於華氏多少份？攝氏是比較大的，華氏是比較小的，所以我攝氏一份，它應該等於華氏多少了？幾分之幾，要寫對哦，攝氏一度等於華氏幾分之幾？要 $\frac{5}{9}$ 還是 $\frac{9}{5}$ ，想清楚哦，幾分之幾？

89. 學生： $\frac{9}{5}$ 。

90. 老師：確定哦？為什麼？

91. 學生：因為它們兩個…。

92. 老師：因為 $\frac{9}{5}$ 才會比 1 來的大嘛，這樣懂我講的意思嗎？所以攝氏 1 度等於華氏的 $\frac{9}{5}$ 度，我現在問你，攝氏 2 度呢？通常要找規律，我不會講 $\frac{18}{5}$ ，你看不到結果；3 份， $\frac{27}{5}$ ，更看不到結果了；4 份…。所以應該講，大聲一點，對， $\frac{9}{5} \times 2 = 3^\circ\text{C}$ 等於多少？ $\frac{9}{5} \times 3$ ，所以 1°C 我建議



圖二十三

你， $\frac{9}{5} \times 1$ （圖二十三），這樣有沒有比較容易看的出結果來，這樣清楚嗎？所以你現在想想看，0 度的時候碰到攝氏 32 度，然後再加上多少？ $\frac{9}{5}$ ，乘以多少？0 嘛！這樣有沒有比較好一點？如果說，攝氏 10 度，華氏要怎

麼寫？ $32^{\circ} + \frac{9}{5} \times 10$ ，是不是這樣？攝氏 20 是華氏 $32^{\circ} + \frac{9}{5} \times 20$ ，好，透過這個東西一直下去，如果我今天講，攝氏 a° ，有沒有人可以告訴我是華氏幾度？

93. 學生： $32^{\circ} + \frac{9}{5} \times a^{\circ}$

94. 老師：就這麼多的度，可不可以寫成一個函數給我，可以嗎？根據剛剛的想法，這個東西弄到後來總會找出一個最後想法的東西要寫出來，所以麻煩同學們看一下 P.70 上面那個例子的長條，a 對到 $32 + \frac{9}{5} \times a$ ，可不可以用上面的對應關係，然後摘要地記錄成常見的函數的式子？寫成函數的式子給老師看，有沒有辦法寫？你那個 a 對到 $32 + \frac{9}{5} \times a$ ，所以怎麼寫函數，我如果要寫成 $f(a)$ 要怎麼寫？a 是誰？剛剛講 a 是誰？攝氏嘛！對不對？a 是攝氏，我要怎麼寫會比較好？32 加多少？

95. 學生：加 $\frac{9}{5}$...

96. 老師：乘以...

97. 學生：a (圖二十四)。

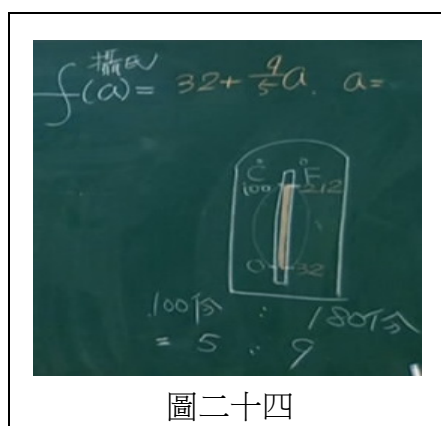
98. 老師：a，然後我現在問 a 有沒有範圍？如果就溫度計上看到的，我們剛剛定義不是定義從 0 到？

99. 學生：32。

100. 老師：想清楚哦，a 哦，a 是誰？

101. 學生：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...。

102. 老師：我現在問你，這個溫度計它可不可以連續？它可不可以 1.1 度？它可不可以 1.5 度？比如說，今天的溫度幾度，它一定會是整數度嗎？它可不可以有一些小數點？它可不可以有一些分數？可以，對不對？它的定義域裡面



圖二十四

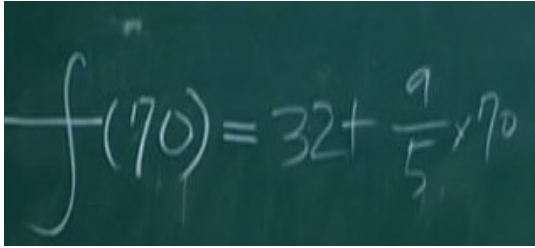
，就不會只是一個離散、固定的正整數了，對不對？它會不會有一些分數或小數的部份，所以就回到剛剛數學最強的小老師給的範圍，他可能就會這樣寫了，我現在這個 a ，我真的可以給一個範圍，如果說，今天一定要從冰點到沸點之間來定義的話，我的 a 可能這樣寫 ($0 \leq a \leq 100$)，介於 $0 \sim 100$ 之間都是 OK 的，這裡面就包含了整數、分數、小數，它們就是連續啦，就不會只再是正整數的溫度了，只不過正整數的溫度讓我們比較容易去對出來而已，這樣清楚我講的意思嗎？有沒有問題？確定？我底下可不可以問一個很白癡的問題？你既然知道攝氏跟華氏之間的對應關係了，剛剛問到了洗澡水，假設誰當顧客，問一下好了：「你洗澡水要幾度？」

103. 學生： 70° 。

104. 老師： 70° ？你不怕你的肉會...， 70° ，他問的是攝氏 70° ，應該是華氏幾度？來，誰要當服務生來幫他解題？祥忠，你要嗎？做完有三顆巧克力。

105. 學生：我。

106. 老師：哇塞！為什麼看到巧克力就有人舉手了？祥忠，你要不要試試看，攝氏 70° 等於華氏幾度？關係在上面。(教師對另外一位學生說) 你先等一下，我等一下一定讓你有



圖二十五

機會，你放心好了。我把東西準備好，看不到就沒有誘因了，對不對？對啊！沒錯啊（圖二十五）！不要緊張啊！要求救嗎？好人卡。

107. 學生：好啦！CALL OUT 啦！

108. 老師：沒有，沒算錯啊！就是這樣啊！你把它算出來就對了。

109. 學生：是這樣嗎？

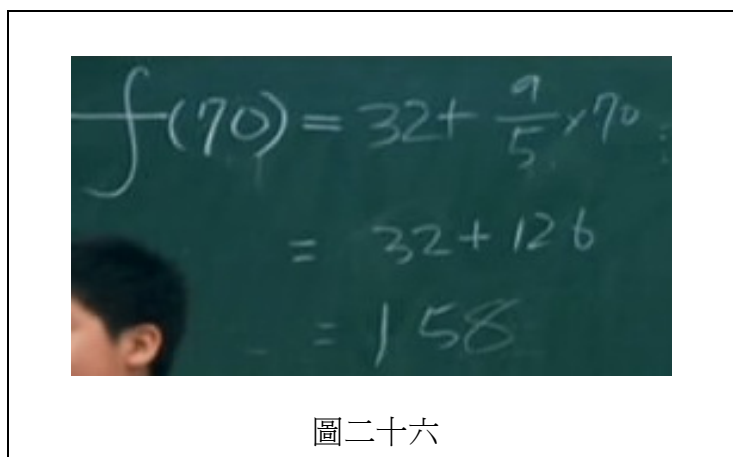
110. 老師：你這個鏡頭會卡很久耶，大家都看到你的，你把算式慢慢寫，你不要急啊！

111. 學生：剩下 1.5 顆金莎。

112. 老師：你為什麼要心算？慢慢來啊！32 加多少寫出來，再等於多少就好了？

113. 學生：沒了哦！最後一顆囉！剩下半顆了。

114. 老師：32 再加 126，再算一遍好不好？



圖二十六

115. 學生：耶，老師，他…金莎沒了啦！

116. 老師：他算對了沒？算對了，來（圖二十六）。

117. 學生：剩一顆。

118. 老師：剩一顆，那你兩顆要分給別人，來，掌聲鼓勵一下。其實不用求快，你只要概念正確，我們就是一步一步來， 70° 就是把它對應出來的值代多少？代 70° ，那 $32 + \frac{9}{5} \times 70$ ，其實就是 5 跟 70 約掉多少，五一得五，所以我說他的計算能力很強，他剛剛要把這些通通省略，直接丟答案，他連約分也省略，你知道嗎？很可惜失敗了，不然就變神童了，來 9×4 ，36，進 3， 9×1 ，9，加起來等於 126， $32 + 126$ 等於多少？158，這是第一個，到這裡有沒有問題？有些東西，不是只有函數定義這樣下哦，同學們，再看一下，第一個服務生，他說洗澡要 70° ，有沒有可能溫度要更高或更低？

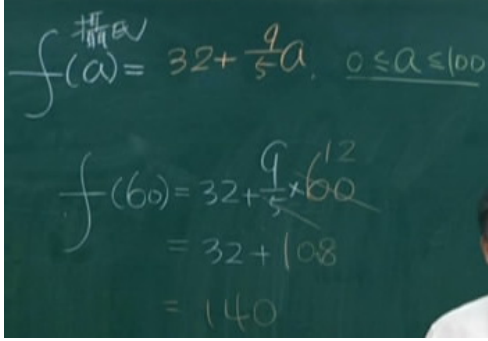
119. 學生：有啊！

120. 老師：比如說， 60° ，好，他要洗澡洗 60° 。

121. 學生： 30° 。

122. 老師：我們怎麼做， $32 + \frac{9}{5}a$ 乘以多少？乘

以 60，對不對？那我們就算算看，這裡還是 32，對不對？好，有人怎麼計算這麼快，5 跟 60 約是多少？ $12 \cdot 9 \times 12$ 是多少？108，加起來幾度？（圖二十七）140 度，可能你泡咖啡 60 度，我不知道，



圖二十七

不行，是不是？，泡茶呢？如果泡茶 100 度，答案已經出來啦！來，我們問一個比較奇怪的問題，看看你有沒有辦法解決，因為現在是兩個溫度計在轉化，有沒有可能在某一個溫度的時候，攝氏的溫度計跟華氏的溫度計呈現出來的度數是一樣的？

123. 學生：我知道。

124. 老師：有沒有可能？怎麼做？

125. 學生： -40 ，就兩邊……。

126. 老師：有沒有人上來？不要講半天，上來寫，告訴大家。你想想看是不是，想想看，手又不忍心放下來，因為放下來又沒機會，巧克力又不見了，是這樣嗎？大家寫一下，好，謝謝。

127. 學生：巧克力一顆就好了（圖二十八）。

128. 學生：是這樣嗎？不對哦，刺激哦！

129. 老師：為什麼叫做 $-\frac{9}{5}$ ， $a=32$ ，這是多少？

130. 學生：你要用好人卡嗎？

131. 老師：你不是寫了嗎？來解釋一下吧！冠佐

，為什麼你要把這兩個寫成相等？我

問一下同學，你在那邊，我問一下，

有沒有問題要問他的？看這邊，你要

問他，在哪裡？

132. 學生：為什麼寫 $-\frac{1}{4}$...那是5，不是1哦？

133. 老師：這 $-\frac{5}{4}$ 啊，這5啊，沒有，我問啦！第一個這個式子為什麼要這樣寫

$(a=32+\frac{9}{5}a)$ ，有沒有人要問他的？

134. 學生： a 是攝氏溫度吧！

135. 老師：大聲一點，你不是要問他嗎？你讓他那三顆這麼好拿，我是沒意見哦！

136. 學生：為什麼？

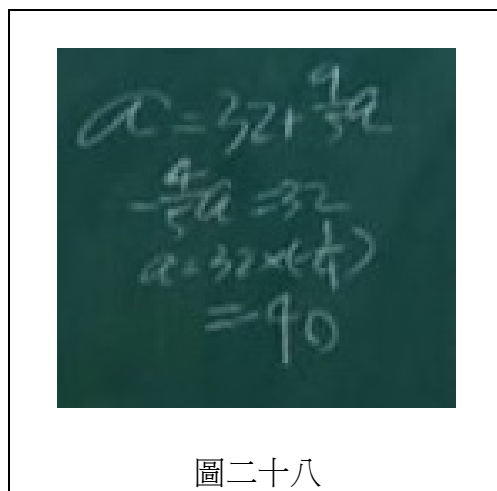
137. 老師：有辦法解釋嗎？兩個要一樣。

138. 學生：哪兩個要一樣？

139. 老師：先問一下，我們說的 a 是什麼？

140. 學生：攝氏。

141. 老師：攝氏， $32+\frac{9}{5} \cdot a$ 是華氏，這 (a) 是什麼氏？攝氏，老師剛剛不是講，攝氏跟華氏的溫度如果要一樣的話，所以，等號要不要成立？要。然後他現在在做什麼？他透過一個函數對應的概念再去解一個什麼？解一個方程式



圖二十八

，到這邊有沒有問題？聽懂的舉手，好，放下，來，冠佐等我一下，你有哥哥嗎？哥哥要叫冠佐，好，沒事。

142. 學生：冠上，冠下。

143. 老師：你們想太多了，你看，到這裡有沒有問題？如果沒有問題，我們剛剛講到，攝氏跟華氏的對應關係有沒有可能反過來？反過來就是變成華氏跟攝氏的對應關係有沒有可能？有，這個溫度來講，它其實就是一個連續的東西，它是不是說 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 整數的成長？它可能會有所謂的連續性的東西存在。華氏跟攝氏的對應關係，這個區塊我們把它當成回家的功課來做。剩下一點點時間，我們講最後一個例子，要講到實驗室的一個例子--恆溫裝置，為什麼要有恆溫？（圖二十九）

144. 學生：因為這樣子才能培養東西，在最適合的環境下。

5. 恆溫實驗室和經過時間的對應關係

某實驗室保持恆溫 4 度，以某天中午 12 時為基準，將一天之內經過的小時數和對應的溫度記錄下來。

經過的小時數溫度(度)

1 \Rightarrow 4

2 \Rightarrow 4

3 \Rightarrow 4

.....

24 \Rightarrow 4

上面記錄了經過了幾小時後所對應的溫度，我們可以用下面的數學式子將

上面的對應關係記錄下來。

經過的小時數溫度(度)

$$x \mapsto 4 \quad x = 1, 2, 3, \dots, 24$$

也可以將上面的對應關係，更摘要的記錄成下面的式子。



圖二十九

145. 老師：你才有辦法去做實驗的觀察，實驗的觀察有些東西是要被控制的，控制變項，我今天如果把溫度做一個控制，在這樣的溫度之下，我們要看，譬如說，細菌成長的一些變化，或是在這樣恆溫之下細胞分裂的狀況，所以我們才要說在恆溫的實驗室裡面，它就會提到我們講的，函數對應到一個很奇怪的東西，這到後面我們會講，我們先開始看看題目，第一個，某實驗室保持恆溫幾度？4度，4度是一個很奧妙的數字，因為4度之下，水會呈一個很奇怪的状态，但是它又不完全，所以你去看思樂冰，它為什麼某些機器要調整在那個溫度，有它的原因哦！我們看一下，以某天中午12時為基準，將一天之內經過的小時數跟對應的溫度記錄下來，比如說，凌晨一點去量幾度？4度；凌晨二點去量幾度？4度；三點去量幾度？4度；十二點去量，4度；二十三點去量，4度；二十四點去量，4度，那個才叫做恆溫實驗室，你就會發現這個很怪，為什麼？因為我們剛剛講過，你這邊講的叫做「自變數」，對不對？一個東西進去，不是要有一個東西出來嗎？你會不會發現，一點量出來4度，二點量出來4度，三點量出來4度，一直到二十四點量出來還是4度，能不能告訴我，如果你要寫 $f(a)$ ，怎麼辦？等

於多少？不管你多少，它還是幾度？4 度，「定義域」 a 不見了？你剛剛講的 a 的定義域是 $a=1, 2, 3, 4$ 一直到多少？24，對不對？可是這裡面我看不到 a ，剛剛不是幾個 a 再加多少，或幾個 x 加多少，像這個怎麼辦？你要怎麼講？可不可以這樣講：4 加上 a 乘以多少？0。因為 $a \times 0$ 永遠都是多少？0。所以你 $f(a)=4$ ，像這樣的函數，我們有沒有給它一個名詞？有，像這樣子「定義域」固定，碰到一個常數項而已，像這樣的一個函數關係，你有沒有發現 1 丟進來是 4；2 丟進來，4；3 丟進來，4；10 丟進來，4；18 丟進來，4，不管多少丟進來，對到都是 4，換句話說，你的「自變數」是不是有很多？可是我的「因變數」只有一個。所以我們剛剛講，給一個肉粽就是要付多少錢，我們都跟你講那個叫一對一，像這種很多個進來，只對到 4，它的標準就稱為什麼？多對一。像這樣子多對一的函數，我們給他一個名詞，叫做「常數函數」。感覺上是一個很奇怪的東西，可是你想想看，在生活中，在實驗室裡面要不要恆溫？要啊！像你們家裡的冷氣設定溫度需不需也要設定一個恆溫？不然一下子溫度跑來跑去，或者是你們家熱水器的溫度跑來跑去，冬天忽熱忽冷，洗澡會很舒服哦？肉會不自主的跳來跳去，你就會知道。所以這種常數函數也是函數的一種狀況。今天我們總結只講兩種東西，一種告訴你什麼叫做函數，一種告訴你函數可能有兩種樣子，一種樣子叫做一對一，一種樣子叫做什麼？多對一。除了這個之外，我們剛剛不是講到三十天，可以對應到很多個月份，這個叫做一對多，那個不是函數的關係，目前我們教了兩樣，一個叫一對一，一個叫多對一，其它的通通都不叫做函數。回去把學習單完成，禮拜三還有第八節，我們把這個東西做一個處理，後續，你第三階段就很好學了，到這邊有沒有問題？

146. 學生：沒有。
147. 老師：我們今天課就上到這邊，下課。
148. 學生：起立，立正，敬禮，謝謝老師。
149. 老師：謝謝同學。

參、教學說明

我今天教的是國中七年級「線型函數」的單元，我今天介紹了有關於函數的概念。我們知道國中生學習的函數概念，在數學上來說非常抽象，而且是很困難的一個單元，所以我嘗試著從學生經驗中可以體驗的生活實例來引導出函數的概念。在這樣概念的引導當中，我舉了一些例子，從巧克力跟價格之間的關係，到後來買粽子跟價格之間的關係，甚至到平年的月份跟天數之間的關係，到後來是連續量華氏跟攝氏兩種溫度之間轉換的關係，引出來所謂的恆溫實驗室中一個固定溫度之下函數的變換關係。我希望透過各式各樣不同函數的對應關係，從表格的方式，然後引導學生怎麼樣用數學抽象的式子，呈現出一個函數的概念。讓孩子們理解，原來函數的概念在生活上，它不是一個純粹數學定義之下抽象的東西，而是從生活中很能夠讓他理解的概念所引導出來的函數概念。

另外，七年級孩子在很多數學觀念理解的成熟度上面並不是非常的成熟，所以很多東西就必須在教學當中一而再，再而三的引導，然後不斷的提醒他。比如說，在整個定義域裡的限制，巧克力規劃要在 30 個以內，粽子一定要 300 個以內，不斷的提醒孩子去思考，在這樣條件限制之下，不同的函數對應關係，要引用到哪一個不同的對應算式，才能夠算出一個正確的解答？事實上有一些讓我比較驚豔的部份是，因為在題目當中定義買 400 顆的粽子，在題目上是沒有意義的，因為超出定義域的範圍。可

是私底下孩子會問我說，如果真的要買 400 個，我們應該用什麼方式來買會比較划算？所以才會額外在第一節一開始時引導出這樣的概念，說如果我們真的要買 400 顆粽子，會有不同的購買方式，哪一個買的方式是比較理想的方式？引導學生去思考函數的應用。

在生活中你可以透過不同的數學思維，引導出你的價值判斷，然後選擇對你最有利的一個方式，去採買你所需要的東西。也就是嘗試著把數學跟生活之間做一個結合。透過這樣的結合，能夠讓孩子深刻的體會到數學的用處，這也是我教這堂課裡面額外的收穫。

最後在這裡，我也非常榮幸有這樣的機會，呈現出數學上有關於函數概念的部份，然後能夠跟孩子有這樣的互動，透過這樣的互動引導出這樣的教學。也希望這樣子一個教學的方式對後續未來的老師們教導孩子函數的單元時，對孩子概念的增進跟理解有所幫助。

以上就是我對這兩節課教學完之後的反思，謝謝。

肆、教學後的省思

今天我教學的單元是國中七年級「線型函數」的單元，對國中一年級生而言，函數的概念是比較抽象的部分，不容易理解函數的定義，以致於只會形式的操作，無法真正理解函數的意義。對於後面延伸的學習，造成學習上銜接的困難。

有鑑於此，針對國中一年級學生生活上可以理解的經驗，從巧克力的顆數與價格入手，經由日常生活中規律性的觀察，從表格的紀錄方式逐步引導出函數的概念，以

及函數表示法的意義。緊接著，透過表格的方式，呈現粽子個數與價格的關係、平年的月份與天數的關係、攝氏與華氏溫度的轉換關係、恆溫實驗室中的時間與溫度的關係等，讓學生明白，函數有兩種對應的關係。除了知道函數表示法的意義，並能求出正確的函數值。

關於學生的表現，我必須說，這不是我任教班級的學生，只是因為之前我代過這個班級的課，而這次錄影的單元是屬於七年級的課程，因此只好找這個班級的導師幫忙，搭配錄影的教材來演示。但是，說實在的，這個班級的學生表現的很不錯，只是一開始不熟，沒辦法很熱絡的反應，但是到了第二節課，學生熟悉了老師的教法與對錄影機器不陌生之後，反應就逐漸熱烈起來了。請學生上台作答或說明，都能夠有不錯的反應或表現。

在課堂上，學生對於生活中的實例，能夠充分的理解，尤其是對於定義域的部分，也有足夠具體的認識，像第二節課中，對於購買 400 顆肉粽的例子，也是因為學生下課時提問，因此，才會臨時在第二節課補充說明，一個人購買 400 顆肉粽是不允許的，所以 $f(400)$ 是無意義的。但是，在現實生活上，若真的要購買 400 顆肉粽，有幾種的處理方法，像是：(1) 4 個人，每個人購買 100 顆；或是 (2) 2 個人，每人購買 200 顆；或是 (3) 2 個人，其中 1 人購買 300 顆，另外 1 人購買 100 顆。讓學生去比較哪一種狀況所花費的金額最低，也就是讓學生透過生活中的實際情境，去理解數學與生活連結的部分，找尋最佳的可行解。學生有這樣的提議與興致，讓我很意外，也很高興，算是錄影過程中驚喜的發現。

很高興有這樣的機會，呈現函數概念的教學。從教案設計與教授討論和同儕互動的過程當中，理解學生學習函數概念的困難點，也針對這些困難，設計了從日常生活

◆國中小數學教材與教學探討

中取材，學生可以理解與體會的例子，幫助學生函數概念的學習，也希望這樣的教學，對於老師們教導學生認識、引導與使用函數的觀念與表徵，有所幫助。

因式分解(提出公因式、分組分解)

壹、教學活動設計

一、教學年級：八年級上學期

二、教學者：台北縣重慶國中 蔡佩旻老師

三、教學目標：

- 1.複習因式、倍式、因式分解。
- 2.能提出公因式來分解(二次)多項式。
- 3.能利用分組分解來解(二次)多項式。

四、活動目標：

【活動一】複習因式分解、因式和倍式。

【活動二】會運用 $a(b+c)=ab+ac$ ， a 為數字，做提公因式的因式分解。

【活動三】會運用 $a(b+c)=ab+ac$ ， a 為式子，做提公因式的因式分解。

【活動四】會運用 $a(b+c)=ab+ac$ ， a 為符號數字乘積，做提公因式的因式分解。

【活動五】會運用 $a(b+c)=ab+ac$ ， a 為數字符號(式子)的乘積，做提公因式的因式分解。

【活動六】能提公因式進行需變號的題型與 $ab+ac+ad= a(b+c+d)$ ， a 為數字或式子，的因式分解。

【活動七】能提出公因式及分組進行一般題型的因式分解。

【活動八】能利用分組分解做特殊題型的因式分解。

五、教學概要說明：

在進行此單元的教學前，學生已經學過因數分解及乘法公式，第一個教學活

動是先複習舊有經驗，藉此引入因式分解概念及其最佳表示法。

活動二到活動五則利用乘積展開及分配律，觀察式子並找出各項的共同因式，嘗試將 $ab+ac= a(b+c)$ 題型的題目做提公因式的因式分解。

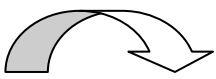
活動六針對需變號題型的式子運用 $b-a= -(a-b)$ 觀念做提公因式的因式分解。

活動七是對於不能直接提公因式的式子，採用先將式子分組後再提公因式的分組分解法。

活動八是針對一些不同情況的特殊題型，運用乘法公式與分組分解法做因式分解。

六、教學活動設計：

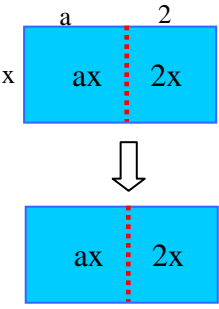
【活動一】複習因式分解、因式和倍式。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<ul style="list-style-type: none"> • 複習舊經驗：因數分解與因數、倍數概念 	<p>1. 何謂因數分解？ 因數？倍數？ 舉例： 因數分解</p>  $24 = 2 \times 12 = 4 \times 6$ $= 2 \times 2 \times 3$ <p>乘積展開</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 利用例子引導學生回答。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能瞭解因數分解、因數與倍數。
<ul style="list-style-type: none"> • 因式分解、因式、倍式的最佳表示法 	<p>2. 想想看，什麼是因式分解呢？ 舉例： (1) $2 \times (x+3) = 2x+6$ 乘積展開</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 舉例說明因式分解概念，讓學生瞭解乘積展開與因式分解的不同。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能瞭解因式分解、因式與倍式。

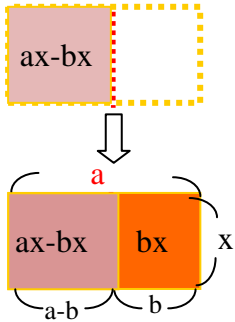
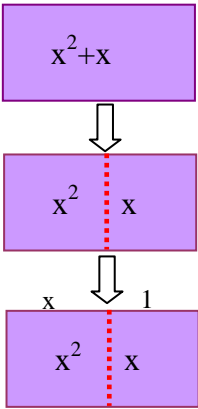
	$\Leftrightarrow 2x+6=$ $2 \times (x+3)$ <p style="text-align: center;">因式分解</p> <p>其中2、(x+3)都是2x+6的因式，2x+6是2、x+3的倍式。</p> $(2)(x+1)(x+2)=$ x^2+3x+2 <p style="text-align: center;">乘積展開</p> $\Leftrightarrow x^2+3x+2=$ $(x+1)(x+2)$ <p style="text-align: center;">因式分解</p> <p>其中(x+1)、(x+2)都是x^2+3x+2的因式，x^2+3x+2是x+1、x+2的倍式。</p> $(3)3 \times (x+y+3)=$ $3x+3y+9$ <p style="text-align: center;">乘積展開</p> $\Leftrightarrow 3x+3y+9=$ $3 \times (x+y+3)$ <p style="text-align: center;">因式分解</p> <p>其中3、(x+y+3)都是3x+3y+9的因式，3x+3y+9是3、(x+y+3)的倍式。</p> <p>說明： 一個二次多項式的</p>		
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

	<p>因式分解是指將此二次多項式寫成兩個一次式的乘積。或說一個多項式的因式分解是指將此多項式寫成其因式的連乘積。</p> <p>若$A=B \cdot C$，且A、B、C皆為多項式，則稱A為B、C的倍式，B、C稱為A的因式。</p> <p>3. 因式分解的情況有多種，何種表示會比較好呢？</p> <p>(1) $2x+6=2(x+3)$ $=\frac{1}{2}(4x+12)$ $=4(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})=\dots$</p> <p>(2) x^2+3x+2 $=(x+1)(x+2)$ $=\frac{1}{2}(2x+2)(x+2)$ $=\frac{1}{2}(x+1)(2x+4)$ $=2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})(x+2)$</p> <p>(3) $3x+3y+9$ $=3(x+y+3)$ $=\frac{1}{3}(9x+9y+27)$ $=\dots$</p>	<p>• 利用例子並寫出不同的分解法讓學生觀察何種表示法比較好。</p> <p>• 學生可能回答： (1) 每一個都可以 (2) 有的還可以提 2、$\frac{1}{2}$...</p>	<p>• 能判斷何種表示法較佳並能於作答時寫出較佳答案。</p>
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------

【活動二】：會運用 $a(b+c)=ab+ac$ ， a 為數字，做提公因式的因式分解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>• 將$ab+ac$題型的式子利用公因式做因式分解</p>	<p>1.例題1 我們知道 $(a+2)x=ax+2x$ (乘積展開) 如何將$ax+2x$記成兩個因式的乘積呢？</p> <p>說明一 $ax+2x$ $=a \cdot \boxed{x} + 2 \cdot \boxed{x}$ $= (a+2) \cdot \boxed{x}$</p> <p>說明二 ax有因式a、x，$2x$有因式2、x，兩者有公因式x，所以上面解法可以看成：因式分解就是利用分配律提出共同因式。</p> <p>說明三： 看成將長方形面積分割，找長寬。</p> 	<p>• 利用乘積展開讓學生瞭解式子的因式分解。</p> <p>• 會運用分律配 $a \cdot (b+c)$ $= a \cdot b + a \cdot c$ 或$(b+c) \cdot a$ $= b \cdot a + c \cdot a$ 將式子中的x提出。</p> <p>• 利用長方形的面積分割，找出共同邊。</p>	<p>• 能將簡單題型的式子利用提公因式做因式分解。</p>

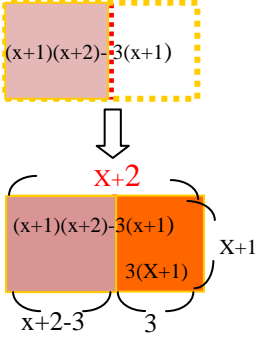
	<p style="text-align: center;">↓</p> <div style="text-align: center; border: 1px solid black; background-color: #00bfff; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $ax+2x$ </div> <p>總結： 因為$ax+2x=(a+2) \cdot x$ 所以$(a+2)x$就是 $ax+2x$的因式分解。</p> <p>2.例題2 我們知道 $(a-b)x=ax-bx$ $[a+(-b)]x=ax+(-bx)$ $=ax-bx$(乘積展開) 如何將$ax-bx$記成 兩個因式乘積 呢？</p> <p>說明一 $ax+(-b)x$ $=a \cdot \boxed{x}+(-b) \cdot \boxed{x}$ $=[a+(-b)] \cdot \boxed{x}$ $=(a-b)x$</p> <p>說明二</p>	<p>• 說明：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.若兩多項式為 $A \cdot C$、$B \cdot C$，則稱 C 為此兩多項式的公因式。 2.若式子中的各項有公因式，可利用分配律把公因式提出來，完成因式分解。 <p>• 學生操作並記錄解題過程。</p> <p>• 將 $-b$ 看成 $+(-b)$。</p>	<p>• 瞭解公因式的意義與式子如何利用提公因式做因式分解。</p>
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------

	<p> $ax-bx = a \cdot \boxed{x} - b \cdot \boxed{x}$ $= (a-b) \cdot \boxed{x}$ </p>  <p> 3.例題3 (1) 因式分解 x^2+x x^2+x $= x \cdot \boxed{x} + 1 \cdot \boxed{x}$ $= (x+1) \cdot \boxed{x}$ </p>  <p> (2) 因式分解 $x-3x^2$ $x-3x^2 = \boxed{x} \cdot 1$ $-3 \cdot x \cdot \boxed{x}$ $= (1-3x) \cdot \boxed{x}$ </p> <p> (3) 因式分解 $x(x+1)+x(x+3)$ $x(x+1)+x(x+3)$ </p>	<ul style="list-style-type: none"> • 運用乘法對減法分配律 $a \cdot (b-c)$ $= a \cdot b - a \cdot c$ $(b-c) \cdot a$ $= b \cdot a - c \cdot a$ • 將式子 $ax-bx$ 中的 x 提出。 • 需特別提醒學生 $x=1 \cdot x$ (容易犯錯) • 學生可能會寫成： $x^2+x = x \cdot x + 0 \cdot x$ $= (x+0) \cdot x = x^2$ • 提醒亦可寫成 $x(1-3x)$ • 提醒學生同類項要合併，化到最簡。 	<ul style="list-style-type: none"> • 會運算 $b(a+1)$ $= ba+ab$ • 運用乘法有交換律之規則。 • 會做符號的運算。
--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

	$=x \cdot (x+1) +x \cdot (x+3)$ $=x \cdot (x+1+x+3)$ $=x \cdot (2x+4)$ $=2x \cdot (x+2)$ <p>(4)因式分解</p> $x(x+1)-x(x+2)$ $x(x+1)-x(x+2)$ $=x \cdot (x+1) - x \cdot (x+2)$ $=x \cdot [(x+1)-(x+2)]$ $=x \cdot [x+1-x-2]$ $=x \cdot (-1)=-x$	<ul style="list-style-type: none"> 學生可能解法： $x(x+1)+x(x+3)$ $=x^2+x+x^2+3x$ $=2x^2+4x$ $=2x(x+2)$ 提醒學生解法雖然不同但仍然可以得到結論。 需提醒拆括號要變號且需化到最簡。 寫答案時，若最後式子為$x \cdot (-1)$，負號拿到最前面。 學生可能解法： 解法1： $x(x+1)-x(x+2)$ $=x^2+x-x^2-2x$ $=-x$ 解法2： $x(x+1)-x(x+2)$ $=x^2+x-x^2+2x=3x$ (錯誤解法，未變號) 	<ul style="list-style-type: none"> 會做括號前面為負的運算。
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------

【活動三】會運用 $a(b+c)=ab+ac$ ， a 為式子，做提公因式的因式分解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<ul style="list-style-type: none"> 將$ab+ac$題型的式子利用公因式與 	<p>1.例題4 (1)因式分解</p>	<ul style="list-style-type: none"> 學生可能會將 	<ul style="list-style-type: none"> 能將公因式為$ax+b$

<p>拆括號需變號的概念做因式分解</p>	$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)-3(x+1) \\ & (x+1)(x+2)-3(x+1) \\ & = (x+2) \cdot (x+1) \\ & -3 \cdot (x+1) \\ & = (x+2-3) \cdot (x+1) \\ & = (x-1)(x+1) \end{aligned}$  <p>(2)因式分解</p> $\begin{aligned} & (x+2)^2-(x+2)(2x+1) \\ & (x+2)^2-(x+2)(2x+1) \\ & = (x+2) \cdot (x+2) - \\ & (x+2) \cdot (2x+1) \\ & = (x+2-2x-1) \cdot \\ & (x+2) \\ & = (x+2)(-x+1) \\ & \text{(或}-(x+2)(x-1)\text{)} \end{aligned}$	<p>$(x-1)(x+1)$寫成 x^2-1，如下</p> $\begin{aligned} & (x+1)(x+2)-3(x+1) \\ & = x^2+3x+2-3x-3 \\ & = x^2-1 \end{aligned}$ <p>此時需提示學生，是否還可以再分解？</p> <ul style="list-style-type: none"> 學生的錯誤解法： $\begin{aligned} & (x+1)(x+2)-3(x+1) \\ & = x^2+3x+2-3x+3 \\ & = x^2+5 \end{aligned}$ <p>此時需提醒學生，拆括號要變號且需化到最簡。</p> <ul style="list-style-type: none"> 學生可能的解法： $\begin{aligned} & (x+2)^2-(x+2)(2x+1) \\ & = x^2+4x+4-2x^2-5x-2 \\ & = -x^2-x+2 \end{aligned}$ <p>但此可繼續分解，將於後面介紹。</p> <ul style="list-style-type: none"> 學生可能會有的錯誤解法： $\begin{aligned} & (x+2)^2-(x+2)(2x+1) \\ & = x^2+4x+4-2x^2+5x+2 \\ & = -x^2+9x+6 \end{aligned}$ 	<p>形式的式子利用提公因式做因式分解。</p>
-----------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------

【活動四】會運用 $a(b+c)=ab+ac$ ， a 為符號數字乘積，做提公因式的因式分解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<ul style="list-style-type: none"> 將 $ab+ac$ 題型含數字與單項式的式 	<p>1.例題5 (1)因式分解</p>	<ul style="list-style-type: none"> 需提醒學生，提出 	<ul style="list-style-type: none"> 能將公因式為 $a \cdot x$

<p>子，利用提公因式與拆括號需變號概念做因式分解</p>	$2ax + 2x$ $2ax + 2x$ $= 2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot x \cdot 1$ $= (a+1) \cdot 2x$ $= 2x(a+1)$ <p>(2)因式分解</p> $2ax - 2bx$ $2ax - 2bx$ $= 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot x$ $= (a-b) \cdot 2x$ $= 2x(a-b)$ <p>(3)因式分解</p> $4x^2 + 2x$ $4x^2 + 2x$ $= 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot x$ $= (2x+1) \cdot 2x$ $= 2x(2x+1)$ <p>(4)因式分解</p> $6x(x+1) - 4x(x+2)$ $6x(x+1) - 4x(x+2)$ $= 2 \cdot 3 \cdot x \cdot (x+1) - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot (x+2)$ $= 2x \cdot [3(x+1) - 2(x+2)]$ $= 2x \cdot$	<p>$2x$還有1。</p> <ul style="list-style-type: none"> 需提醒學生，怎樣才是較恰當的最後寫法。 <p>提醒學生拆括號時，如果是負號，要變號。</p> <ul style="list-style-type: none"> 學生可能的解法： $6x(x+1) - 4x(x+2)$ $= 6x^2 + 6x - 4x^2 - 8x$ $= 2x^2 - 2x$ $= 2x(x-1)$ 學生可能的錯誤解 	<p>形式的式子利用提公因式做因式分解。</p>
-------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------

	$\begin{aligned} & [3x+3-2x-4] \\ & = 2x \cdot (x-1) \end{aligned}$	<p>法：</p> $\begin{aligned} & 6x(x+1)-4x(x+2) \\ & = 6x^2+6x-4x^2+8x \\ & = 2x^2+14x \\ & = 2x(x+7) \end{aligned}$ <p>此時需提醒學生要變號。</p>	
--	---------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

【活動五】會運用 $a(b+c)=ab+ac$ ， a 為數字符號（式子）乘積，做提公因式的因式分解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>• 將$ab+ac$題型含數字與多項式的式子，利用提公因式與拆括號需變號概念做因式分解</p>	<p>1.例題6</p> <p>(1)因式分解</p> $\begin{aligned} & 9(x+1)^2+3(x+1) \\ & 9(x+1)^2+3(x+1) \\ & = 3 \cdot 3 \cdot (x+1) \cdot \\ & (x+1) + 3 \cdot (x+1) \\ & = 3(x+1) \cdot \\ & [3(x+1)+1] \\ & = 3(x+1) \cdot \\ & [3x+4] \end{aligned}$ <p>(2)因式分解</p> $\begin{aligned} & (x+1)^2(x+2)-(x+1) \\ &) (x+2)^2 \\ & = (x+1) \cdot \\ & (x+1) \cdot (x+2) - \\ & (x+1)(x+2) \cdot \\ & (x+2) \\ & = (x+1)(x+2) \\ & [(x+1)-(x+2)] \end{aligned}$	<p>• 學生可能的解法：</p> $\begin{aligned} & 9(x+1)^2+3(x+1) \\ & = 9x^2+18x+9+3x+3 \\ & = 9x^2+21x+12 \\ & = 3(3x^2+7x+4) \end{aligned}$ <p>若學生寫此答案，教師可問學生，是否分解到此就結束了呢？或是提醒學生需用到後面十字交乘的方法，才能做完。</p> <p>• 學生可能直接乘開，但很麻煩，不建議使用。</p>	<p>• 能將公因式為$a \cdot (bx+c)$形式的式子利用提公因式做因式分解。</p> <p>• 能將公因式為$(ax+b) \cdot (cx+d)$形式的式子利用提公因式做因式分解。</p>



	$=(x+1)(x+2)$ $[-1]$ $=-(x+1)(x+2)$		
--	-------------------------------------	--	--

【活動六】能提公因式進行需變號的題型與 $ab+ac+ad= a(b+c+d)$ ， a 為數字或式子，的因式分解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>• 將 $ab+ac+ad$ 題型的式子利用公因式與拆括號需變號概念做因式分解</p>	<p>1.例題7</p> <p>(1)因式分解</p> $a(a-b)-b(b-a)$ $a(a-b)-b(b-a)$ $=a(a-b)+b(a-b)$ $=(a-b)(a+b)$ <p>(2)因式分解</p> $(a-b)(x-y)+c(b-a)$ $(y-x)$ $(a-b)(x-y)+c(b-a)$ $(y-x)=$ $(a-b)(x-y)-c(a-b)$ $(y-x)=$ $(a-b)(x-y)+c(a-b)$ $(x-y)=$ $(a-b)(x-y)(1+c)$ <p>(3)因式分解</p> $4abx^2+6a^2bx-10a$	<ul style="list-style-type: none"> • $b-a=-(a+b)$ 將符號變號 • 學生可能的解法 $a(a-b)-b(b-a)$ $=a^2-ab-b^2+ba$ $=a^2-b^2$ $=(a-b)(a+b)$ • 學生可能的解法： 直接乘開，很麻煩，不建議使用。 	<ul style="list-style-type: none"> • 會看出 $b-a$ 與 $-(a+b)$ 之關係。 • 會將 $b-a$ 與 $y-x$ 變號後，提公因式，再作因式分解。

	b^2x $= 2abx \cdot$ $2x+2abx \cdot$ $3a-2abx \cdot 5b$ $= 2abx \cdot (2x +$ $3a-5b)$ <p>(4)因式分解</p> $3x(x+2)-(x+4)(x$ $+2)+2(x-1)(x+2)$ $3x(x+2)$ $-(x+4)(x+2)$ $+2(x-1)(x+2)$ $=$ $(x+2)[3x-x-4+2x$ $-2]$ $= (x+2)[4x-6]$ $= (x+2)[2x-3] \cdot 2$ $= 2(x+2)(2x-3)$	<p>•學生可能會直接乘開：</p> $3x(x+2)-(x+4)(x+2)$ $+2(x-1)(x+2)$ $= 3x^2+6x-x^2-6x-8+2x^2$ $+2x-4$ $= 4x^2+2x-12$ $= 2(2x^2+x-6)$ <p>由於需用到後面的十字交乘，所以不建議學生使用此法。</p>	<p>• 會做三項提公因式。</p>
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------

【活動七】能提出公因式及分組進行一般題型的因式分解。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>•將一般題型的式子分組分解做因式分解</p> <p>乘積展開 </p>	<p>1. 例題8: 因式分解</p> $ax+bx+ay+by$ <p>請學生觀察上例，如何做因式分解？(提示：分組)</p> <p>說明：</p> $ax+bx+ay+by$ $= (ax+bx)+(ay+by)$ $= (a+b)x+(a+b)y$ $= (a+b)(x+y)$	<p>•學生觀察並記錄過程。</p> <p>因式分解 </p>	<p>•會將一般題型的式子作因式分解。</p>

	<p>是否有其他解決方法？</p> $ax+bx+ay+by$ $= \boxed{a}x + \boxed{a}y + \boxed{b}x + \boxed{b}y$ $= (ax+ay)+(bx+by)$ $= a(x+y) + b(x+y)$ $= (a+b)(x+y)$	<ul style="list-style-type: none"> • 分組後再提公因式。 • 請學生思考並表達其它的解決方式。 • 請學生思考：是否可以這樣分組 $(ax+by)+(bx+ay)$？ 	
<p>a+b</p>			
	<p>說明：</p> <p>若式子中的各項沒有共同的因式可提出作因式分解，可以採取類似例題8的方式，先依題目將各項做分組後，各組再提出公因式做因式分解。</p> <p>2. 例題9: 因式分解</p> $x^2+ax+bx+ab$ <p>說明一</p> $x^2+ax+bx+ab$ $= (x^2+ax)+(bx+ab)$ $= x(x+a)+b(x+a)$ $= (x+b)(x+a)$	<ul style="list-style-type: none"> • 請學生思考並記錄解題過程。 	

	<p>說明二</p> $x^2+ax+bx+ab$ $=(x^2+bx)+(ax+ab)$ $=x(x+b)+a(x+b)$ $=(x+a)(x+b)$ <p>3.例題10：</p> <p>(1)因式分解</p> $ax-2x+ay-2y$ <p>說明一</p> $ax-2x+ay-2y$ $=(a-2)x+(a-2)y$ $=(a-2)(x+y)$ <p>說明二</p> $ax-2x+ay-2y$ $=ax+ay-2x-2y$ $=a(x+y)-2(x+y)$ $=(a-2)(x+y)$ <p>(2)因式分解</p> $2ax+by+2cx-ay-2bx-cy$ <p>說明一</p> $2ax+by+2cx-ay-2bx-cy$ $=$ $(2ax+2cx-2bx)+(by-ay-cy)=$ $=$ $2x(a+c-b)+y(b-a-c)$	<p>•請學生嘗試以不同分組方式作分解。</p> <p>•請學生思考並記錄解題過程並能嘗試錯誤。</p> <p>•提醒學生先分組再提公因式(分組方式可不同)。</p>	
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------	--

	$=$ $2x(a+c-b)-y(a+c-b)$ $=(2x-y)(a+c-b)$ <p>說明二</p> $2ax+by+2cx-ay$ $-2bx-cy$ $=(2ax-ay)+(by-2bx)$ $+(2cx-cy)$ $=a(2x-y)+b(y-2x)$ $+c(2x-y)$ $=a(2x-y)-b(2x-y)$ $+c(2x-y)$ $=(2x-y)(a-b+c)$		
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

【活動八】能利用分組分解做特殊題型的因式分解。

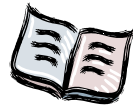
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>•將特殊題型的式子利用分組分解做因式分解</p>	<p>1.例題11:</p> <p>(1)因式分解</p> $x^2-2x+1-y^2$ $x^2-2x+1-y^2$ $=(x^2-2x+1)-y^2$ $=(x-1)^2-y^2$ $=$ $(x-1-y)(x-1+y)$ <p>(2)因式分解</p> $(a-2)x-(x^2-2a)$ $(a-2)x-(x^2-2a)$ $=ax-2x-x^2+2a$ $=ax-x^2-2x+2a$ $=$ $(ax-x^2)+(2a-2x)$ $=$	<p>•提示不一定是兩兩一組，是否有其他的分組分解方式？</p> <p>•教師可問學生：若已分組沒有共同因式時，該如何做？</p> <p>•提示需拆括號，重新分組。</p>	<p>•能將特殊題型式子作因式分解。</p>

	$(a-x)x+(a-x) \cdot 2$ $=(a-x)(x+2)$		
--	--------------------------------------	--	--

附錄：學習單

班級：20 座號： 姓名：

提公因式與分組分解



觀念一：因式、倍式、因式分解概念

複習：因數、倍數、因數分解（舉例說明）

例如： $24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = \dots$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 = \dots$
 $= 2 \times 2 \times 6$

**若 $a=bc$ 且 $a、b、c$ 皆為整數，則 a 叫做 $b、c$ 的 _____， $b、c$ 叫做 a 的 _____

因式分解舉例說明：

(1) $2 \times (x+3) = 2x+6$ $\Leftrightarrow 2x+6 = 2 \times (x+3)$
 (2) $(x+1)(x+2) = x^2+3x+2$ $\Leftrightarrow x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$
 (3) $3 \times (x+y+3) = 3x+3y+9$ $\Leftrightarrow 3x+3y+9 = 3 \times (x+y+3)$

說明：一個二次多項式的因式分解是指將此二次多項式寫成兩個一次式的乘積。
 或說一個多項式的因式分解是指將此多項式寫成其因式的連乘積。
 若 $A=B \cdot C$ ，且 $A、B、C$ 皆為多項式，則稱 A 為 $B、C$ 的倍式， $B、C$ 稱為 A 的因式。

因式分解表示法（何種表示法較好？）

<p>(1) $2x+6 = 2(x+3)$ $= \frac{1}{2}(4x+12)$ $= 4(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) = \dots$</p> <p>(2) $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ $= \frac{1}{2}(2x+2)(x+2)$</p>	<p>$= \frac{1}{2}(x+1)(2x+4)$ $= 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})(x+2) = ..$</p> <p>(3) $3x+3y+9 = 3(x+y+3)$ $= \frac{1}{3}(9x+9y+27) = ..$</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



觀念二： $ab+ac = a(b+c)$ ， a 為數字，做提公因式的因式分解

例題 1：

我們知道 $(a+2)x = ax+2x$ (乘積展開)
如何將 $ax+2x$ 記成兩個因式乘積呢？

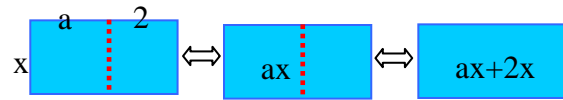
【法一】

提出公因式法說明

若兩多項式為 $A \cdot C$ 、 $B \cdot C$ ，則稱 C 為此兩多項式的公因式

**若式子中的各項有公因式，可利用分配律把公因式提出來，完成因式分解。

【法二】

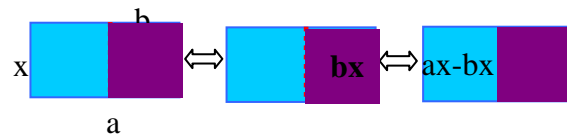


例題 2：

我們知道 $(a-b)x = ax-bx$
 $[a+(-b)]x = ax+(-bx) = ax-bx$ (乘積展開)

如何將 $ax-bx$ 記成兩個因式乘積呢？

【法一】



例題 3：

1. 因式分解 x^2+x



2. 因式分解 $x-3x^2$



3. 因式分解 $x(x+1)+x(x+3)$



4. 因式分解 $x(x+1)-x(x+2)$

觀念三： $ab+ac = a(b+c)$ ， a 為式子，做提公因式的因式分解

例題 4：

1. 因式分解 $(x+1)(x+2)-3(x+1)$

2. 因式分解 $(x+2)^2-(x+2)(2x+1)$



觀念四： $ab+ac= a(b+c)$ ， a 為符號數字乘積，做提公因式的因式分解

例題 5：

1. 因式分解 $2ax + 2x$

3. 因式分解 $4x^2 + 2x$

2. 因式分解 $2ax - 2bx$

4. 因式分解 $6x(x+1) - 4x(x+2) \dots$

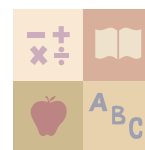


觀念五： $ab+ac=a(b+c)$ ， a 為數字與式子乘積，做提公因式的因式分解

例題 6：

1. 因式分解 $9(x+1)^2 + 3(x+1)$

2. 因式分解 $(x+1)^2(x+2) - (x+1)(x+2)^2$



觀念六：需變號題型與 $ab+ac+ad= a(b+c+d)$ ， a 為數字或式子，做提公因式的因式分解

例題 7：

1. 因式分解 $a(a-b) - b(b-a)$

3. 因式分解 $4abx^2 + 6a^2bx - 10ab^2x$

2. 因式分解 $(a-b)(x-y)+c(b-a)(y-x)$

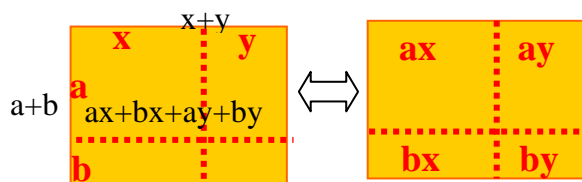
4 因式分解 $3x(x+2)-(x+1)(x+2)+2(x-1)(x+2)$

觀念七：一般題型運用分組分解做因式分解

例題8: 因式分解 $ax+bx+ay+by$

【法一】

【法二】



說明：

若一式子中的各項為共同的因式可提出，可以採取類似上例的方式，先做分組後，再利用提出公因式做因式分解。

例題9: 因式分解 $x^2+ax+bx+ab$.

【法一】

【法二】

例題 10:

1. 因式分解 $ax-2x+ay-2y$

2. 因式分解 $2ax+by+2cx-ay-2bx-cy$

觀念八：特殊題型利用分組分解做因式分解

例題 11:

1. 因式分解 $x^2 - 2x + 1 - y^2$

2. 因式分解 $(a-2) - (x^2 - 2a)$



貳、教學實錄

【第一節】

1. 老師：在講因式分解之前，我們先複習一下，什麼是因數分解？舉個例子，24 這個數，以前是怎麼做它的因數分解的？
 2. 學生：2 乘 2 乘 2 乘 2？（ $2 \times 2 \times 2 \times 2$ ）
 3. 老師：做因數分解就是去找這個數的什麼？
 4. 學生：因數。
 5. 老師：也就是找 24 的因數。例如，將 24 分解後，若式子中有一個 2 的話，另外一個數就是什麼（圖一）？
- $$\begin{aligned}
 24 &= 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 \\
 &= 4 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\
 &= 3 \times 8 = 2^3 \times 3
 \end{aligned}$$

（圖一）
6. 學生：12。
 7. 老師：這樣的分解方式（ $24 = 12 \times 2$ ），我們就稱它是什麼？
 8. 學生：因數分解。
 9. 老師：24 除了可以分解成 12×2 之外，還可以分解成什麼？
 10. 學生： 3×8 （圖一）。
 11. 老師：還可以分解成 4×6 ，類似這一些分解都叫做 24 的什麼？
 12. 學生：因數分解。
 13. 老師：除了這樣的分解方式，我們還可以再把 12 拆成 2×6 （圖一），可以將 24 寫成兩個數連乘之外，還可以寫成三個數的連乘，三個數連乘這樣的式子，也稱為因數分解。再來，除了這個方式之外，當然我們也可以再把 3×8 中的 8 做分解，這樣子分解出來的方式也稱為因數分解。可以嗎？當然，我們還可以再把 $2 \times 2 \times 6$ 中的 6 去分解成什麼？

14.學生： 2×3 。

15.老師： $6 = 2 \times 3$ 。像這樣子的一個分解方式，我們會叫它是這個數的什麼？因為式子中的每一個數都是它的因數，而且是質因數，所以這個式子叫做「質因數分解」。可以發現一個數的因數分解有這麼多種，當然還有其它沒有列出來的，因此一個數的質因數分解，會因為排列方式不一樣，有好幾種，但最後我們會表示成唯一的表示法，這一種就是我們所謂的標準分解式，也就是把底數一樣的合併起來。 $2 \times 2 \times 2 \times 3$ 會變成 2 的 3 次方乘上 3 的 1 次方 ($2^3 \times 3^1$)，1 次方通常省略不寫， $2^3 \times 3$ 稱為 24 的「標準分解式」(圖一)。寫成這樣子的好處是什麼？剛剛我們寫的分解方法有很多種，對不對？如果題目要求將一個數做因數分解，你在檢查的時候，是不是會有好幾種答案？這樣子就沒有辦法確定唯一的答案。所以題目通常會要求用標準分解式的形式去寫，這樣子在檢查答案的時候，就可以確定唯一的答案。有沒有問題？

16.學生：沒有。

17.老師：所以我們把它推廣，這邊講的因式分解，就是把數字改成什麼來看呢？

18.學生：多項式。

19.老師：把數字改成我們第一章介紹的多項式。所謂的因式分解是什麼？舉個例子，你們看一下講義上舉了三個例子(圖二)，誰可以告訴老師，左、右邊的空格

因式分解舉例說明：

	$(1) 2x(x+3) = 2x+6$	
	$\Leftrightarrow 2x+6 = 2x(x+3)$	
	$(2) (x+1)(x+2) = x^2+3x+2$	
	$\Leftrightarrow x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$	
	$(3) 3x(x+y+3) = 3x+3y+9$	
	$\Leftrightarrow 3x+3y+9 = 3x(x+y+3)$	

(圖二)

分別要填什麼？有沒有人自願要告訴老師的？式子畫紅色(底線)的部分，

是在做什麼事情？第一個式子 $2x+6=2(x+3)$ ，一個數字去乘一個多項式；第二個式子 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ ，兩個多項式相乘；再來，第三個式子 $3x+3y+9=3(x+y+3)$ ，一個數字去乘一個多項式。所以這三個式子其實就是在做什麼事情？前面學過的，多項式的什麼呢？

20.學生：多項式的乘法。

21.老師：乘法啊！其實就是把多項式展開，所以右邊空格我們要填的就是乘積展開，也就是多項式的乘法。再來左邊的空格呢？式子 $2x+6=2(x+3)$ ，因為我們知道 $2(x+3)$ 展開之後會等於 $2x$ 加 6 ，對不對？

22.學生：對。

23.老師：所以我們知道 $2x+6$ ，其實也會等於 $2(x+3)$ (圖二)；同樣的道理，式子 $(x+1)(x+2)$ ，我們利用多項式的乘法展開，可以得到右邊 x^2+3x+2 這個式子，所以 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ ，可以嗎？再來下面這個例子 $3x+3y+9=3(x+y+3)$ ，我們也得到 $3x+3y+9$ 等於 $3(x+y+3)$ ，可以嗎？下面這幾個我沒有畫線（底線）的部分，其實就是在做多項式的因式分解。因式分解在做什麼事情？把它換成多項式乘法的運算。利用前一節學過的多項式除法可知， 2 可以把 $2x+6$ 整除，所以 2 是 $2x+6$ 的因式。同樣的道理， $x+3$ 也可以把 $2x+6$ 整除，所以 $x+3$ 會是 $2x+6$ 的因式。因此，因式分解的意思就是把一個多項式，寫成它的因式連乘積。如果一個多項式有 3 個因式，就可以寫成 3 個因式相乘，如果有 4 個，就可以寫成 4 個連乘，所以這些表示法都會是它的因式分解。同樣的， $3(x+y+3)$ 會是 $3x+3y+9$ 的因式分解，有沒有問題？

24.學生：沒有。

25.老師：把左邊、右邊的空格填上去，填好的，就看下面的例子。舉兩個例子看一下（圖三），前面舉過例子， $2x+6$ 可以寫成 $2(x+3)$ ，對不對？這個式子 $2(x+3)$

是 $2x+6$ 的因式分解。下面這個式子 $\frac{1}{2}(4x+12)$ 會不會是它的因式分解，怎麼去判斷？把右邊式子 $\frac{1}{2}(4x+12)$ 乘開、檢查，會不會等於左邊式子 $2x+6$ ？如果會的話，就代表這個式子 $\frac{1}{2}(4x+12)$ 也會是 $2x+6$ 的因式分解。把 $\frac{1}{2}$ 利用分配律乘進去後發現相等，所以這個式子 $\frac{1}{2}(4x+12)$ 也會是它的因式分解；再來檢查下面這個式子 $4(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})$ ，這個式子乘開之後，會不會也是 $2x+6$ 的因式分解？

$$\begin{aligned} (1) 2x+6 &= 2(x+3) = \frac{1}{2}(4x+12) \\ &= 4(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}) = \dots \\ (2) x^2+3x+2 &= (x+1)(x+2) \\ &= \frac{1}{2}(2x+2)(x+2) \\ &= \frac{1}{2}(x+1)(2x+4) \\ &= 2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})(x+2) \\ (3) 3x+3y+9 &= 3(x+y+3) \\ &= \frac{1}{3}(9x+9y+27) = \dots \end{aligned}$$

(圖三)

26. 學生：是。

27. 老師：所以這個式子 $4(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})$ ，也是 $2x+6$ 的因式分解。因此一個多項式的因式分解法有這麼多種，可是我們在寫答案的時候，到底寫哪一種會比較好呢？

28. 學生：(有人說) 第一種。(有人說) 第三種？

29. 老師：為什麼寫第一種會比較好？剛剛有人回答第三種。

30. 學生：易哲。

31. 老師：易哲，為什麼你覺得第三種比較好？起來回答吧！為什麼你覺得第三種比較好？

32. 易哲：數字比較大。

33. 老師：數字大就比較好嗎？贊成他這句話的舉手，真的是數字大就比較好？那你可以將數字寫更大，若數字換成 8，後面要乘上什麼呢？

34.學生： $\frac{1}{4}x$ 。

35.老師：再來要加上多少？

36.學生： $\frac{3}{4} \left[8\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) \right]$ 。

37.老師：若數字越取越大，那要取到多少才是最好的答案呢？我們在分解的時候，不見得數字越大越好，因為這樣子在檢查答案的時候，不好判斷答案是不是正確，還要乘進原式檢查是不是跟人家的答案一樣，懂我的意思嗎？所以通常我們在寫的時候，選擇怎麼樣子的寫法會比較好？例如，這個例子

$\frac{1}{2}(4x+12)$ 中的4跟12，它們其實有什麼可提出？

38.學生：公因數。

39.老師：4跟12有一個公因數4可以提出來，利用乘法對加法或減法的分配律，把它們共同的因數提出來。因數4提出來且化簡之後，會跟第一個式子 $2(x+3)$ 一樣；同樣的道理，這個式子 $4\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)$ 中，兩項 $\frac{1}{2}x$ 、 $\frac{3}{2}$ 都有一個 $\frac{1}{2}$ 可以提出

來，最後化簡都會跟第一個式子 $2(x+3)$ 一樣。所以我們在寫答案的時候，通常會選擇像第一個 $2(x+3)$ 這樣的式子去寫，有沒有問題？分解的過程裡面，如果有因式能提出去的，請你盡量把因式拿到最外面去，然後把它化到最簡。同樣的，下面這一題也是（圖四），你會選擇哪一個當做答案？

$$\begin{aligned}
 (2)x^2+3x+2 &= (x+1)(x+2) \\
 &= \frac{1}{2}(2x+2)(x+2) \\
 &= \frac{1}{2}(x+1)(2x+4) \\
 &= 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)(x+2) \\
 &\quad \text{(圖四)}
 \end{aligned}$$

40.學生：第一個。

41.老師：為什麼選第一個式子 $(x+1)(x+2)$ 呢？第二個式子 $\frac{1}{2}(2x+2)(x+2)$ ，為什麼不可以？

42.學生：2 可以再提出。

43.老師： $\frac{1}{2}(2x+2)(x+2)$ 當然也可以，但它不是最好的答案，為什麼呢？因為式子 $2x+2$

中，有一個2 可以提出來再去化簡，就跟第一個式子 $(x+1)(x+2)$ 是一樣的。所以你在寫答案的時候要特別注意，能提出來的因數（式）要把它提出來，可以嗎？後面剩下的例子你們自己看，

檢查一下哪一個是最好的答案。例如，看一下第三個例子（圖五），我不是列了兩個式子 $3(x+y+3)$ 、 $\frac{1}{3}(9x+9y+27)$ ，你覺得選哪一個會比較好？

$$\begin{aligned}(3)3x+3y+9 &= 3(x+y+3) \\ &= \frac{1}{3}(9x+9y+27) = .. \\ &\text{(圖五)}\end{aligned}$$

44.學生：第一個。

45.老師：這樣有沒有問題？所以你在作答的時候，請選最恰當的答案來寫，到這邊可以嗎？

46.學生：可以。

47.老師：因式分解的概念及其表示法，你要選擇哪一種來寫要特別注意。再來，我們看到例題1（圖六），利用分配律，可以把這個式子 $(a+2)x$ 展開變成 $ax+2x$ 。如果我問你 $ax+2x$ ，要把它表示成因式的連乘，請問要怎麼表示？一個方法去找它的因式，前面一節有學過，給你一個多項式，怎麼判斷它是不是給你的另外一個多項式的因式？直接用多項式的除法去判斷，對不對？可是現在題目沒給，怎麼去找 $ax+2x$ 的因式？怎麼去把 $ax+2x$ 做因式分解？

例題1

我們知道 $(a+2)x=ax+2x$ （乘積展開），如何將 $ax+2x$ 記成兩個因式的乘積呢？

（圖六）

48.學生：提出公因式。

49.老師：提出公因式。怎麼從這個式子 $(ax+2x)$ 寫成因式連乘，也就是寫成兩個式子相乘。如果只有這個式子 $(ax+2x)$ 的話，怎麼知道？因為 $(a+2)x = ax+2x$ ，左邊式子 $(a+2)x$ 等於右邊式子 $ax+2x$ ，那右邊式子 $ax+2x$ 會不會等於左邊式子 $(a+2)x$ ？

50.學生：會。

51.老師：所以就告訴你，這個式子 $(a+2)x$ 就會是 $ax+2x$ 的連乘，也就是這兩個式子 $(a+2)$ 、 x ，分別是 $ax+2x$ 的因式，可以嗎？除了從這個式子 $(a+2)x$ 去找它的因式分解之外，還有沒有其它的方法？這是第一個方法，題目有告訴你 $(a+2)x = ax+2x$ ，才有辦法很快的找出它的因式分解，如果沒告訴你的話怎麼辦？怎麼直接從這個式子 $ax+2x$ ，寫成二個式子連乘？利用分配律，從式子中找共同的因式，這兩項都有一個 x ，所以我們可以利用分配律，把相同的東西拿到最外面，再來，第一項剩下什麼？

52.學生： a 。

53.老師： a ，第二項剩下什麼？

54.學生： 2 。

55.老師：所以這個式子寫成兩個因式的連乘之後，就會變成 $(a+2)x$ (圖七)，可以嗎？這是直接利用分配律去做，其實這個 x ，如果把它看成兩個多項式的話， x 叫做這兩個多項式的什麼？

說明→

$$ax+2x = a \cdot \boxed{x} + 2 \cdot \boxed{x}$$

$$= (a+2) \cdot \boxed{x}$$

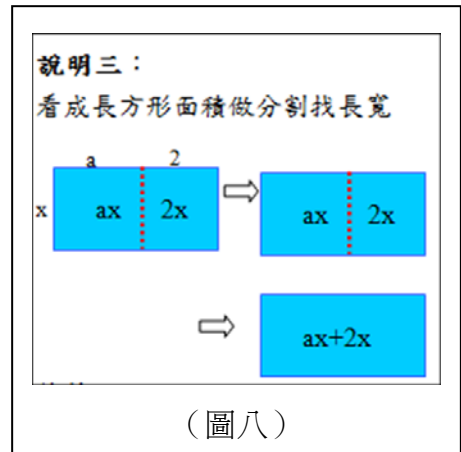
↙

(圖七)

56.學生：公因式。

57.老師：公因式，所以用分配律做因式分解的時候，其實就是找它這兩項的公因式，

把它提到最外面去，可以嗎？除了這個方法，有沒有其它的方法？有沒有人對分配律不熟的？如果不熟的話，可以利用一個長方形(圖八)，看成它的長是 $a+2$ ，寬是 x ， $ax+2x$ 其實就是整個長方形的面積，所以做因式分解，其實有點像在找這個長方形的什麼？



58.學生：面積。

59.老師：假設給你一個多項式，請你將多項式因式分解，就有點像給面積去找這個長方形的長跟寬，可以嗎？這個 x 其實就是你做分配律時候的什麼？

60.學生：公因式。

61.老師：它們共同的邊 x ，就是它們的公因式，有沒有問題？如果你對分配律不太熟，你可以用這個圖形去想(圖八)，有沒有問題？

62.學生：沒有。

63.老師：沒問題就看到後面例題 2，(圖九) 題目 $(a-b)x=ax-bx$ 或是 $[a+(-b)]x=ax+(-bx)=ax-bx$ ，請你將這個式子 $ax-bx$ 寫成它的因式連乘，請問要怎麼表示？

例題2

我們知道 $(a-b)x=ax-bx$

$$[a+(-b)]x=ax+(-bx)$$

$$=ax-bx$$

(乘積展開)

如何將 $ax-bx$ 記成兩個因式乘積呢？

(圖九)

64.學生： $x(a-b)$ 。

65.老師：你可以直接從題目這兩個式子去看， $(a-b)x=ax-bx$ ，也代表 $ax-bx$ 會等於什麼？

66.學生： $(a-b)x$ 。

67.老師：從題目可以直接得到什麼？它可以寫成這兩個式子 $(a-b)x$ 、 $[a+(-b)]x$ 連乘，可以嗎？ $(a-b)x$ 展開會是 $ax-bx$ ， $[a+(-b)]x$ 展開也會是 $ax-bx$ ，前面 $(a-b)x=ax-bx$ ，是用到乘法對減法的分配律；後面 $[a+(-b)]x$ ，是用到乘法對加法的分配律。因為我們在寫答案的時候，通常不會寫 $[a+(-b)]x$ 的形式，會簡化換成 $ax-bx$ 的形式，可以嗎？所以碰到運算式子裡面有 $+(-b)$ 的話，最後一定要把它化到最簡，也就是 $+(-b)=-b$ 的意思，有沒有問題？除了這個方式之外，如果題目沒告訴你 $(a-b)x=ax-bx$ 的話，怎麼去把式子 $ax-bx$ 做因式分解？如果只有給你 $ax-bx$ 去做因式分解，你怎麼做因式分解？這兩個多項式的公因式是什麼？

68.學生： x 。

69.老師：所以我們可以把它們共同的因式，拿到哪裡？

70.學生：外面。

71.老師：外面， x 拿出去之後， ax 這一項剩下 a ，再來， $-bx$ 這一項剩下？

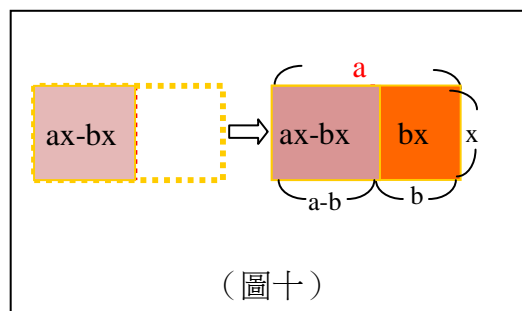
72.學生： $-b$ 。

73.老師：所以化簡之後，它就會變成 $(a-b)x$ ，這個就是它因式的連乘積，有沒有問題？

其實 $(a-b)x$ 會是這一個多項式的什麼？

74.學生：因式。

75.老師：這兩項 $(a-b)$ 、 x 都會是 $ax-bx$ 的因式， $ax-bx$ 會是 $(a-b)x$ 的倍式，它們的關係你們要很清楚。到這裡有沒有問題？當然你也可以用圖形的方式，去做分配律的動作，也就是把它聯想成長



方形之後去做分解，(圖十)把它共同邊的部分找出來，可以嗎？

76.學生：可以。

77.老師：沒有問題的話，就看下一題，例題3(圖十一)。我們找同學上來寫，好不好？有沒有人自願的？第1小題有沒有人自願？請兆弘上台寫，其他同學動筆寫。第2小題請清儀，再來第3小題請靖媛，再來第4小題請晝萱，每個同學都要動筆寫。你們都做完了嗎？

例題3

1. 因式分解 x^2+x
 2. 因式分解 $x-3x^2$
 3. 因式分解 $x(x+1)+x(x+3)$
 4. 因式分解 $x(x+1)-x(x+2)$
- (圖十一)

78.學生：做完了。

79.老師：做完就一起來看他們寫的對不對。例題3第1小題，他做了什麼事情？這兩項 x^2+x 的共同因式是什麼？看到 x^2 代表什麼？ x 連乘幾次？

80.學生：2次。

81.老師：2次。第一項 x^2 兩個 x 、第二項一個 x ，所以它們的共同因式是什麼？

82.學生： x 。

83.老師：所以 x 拿到最外面，第一項的一個 x 拿出去之後，還有一個 x ；第二項的 x 拿出去之後，還有沒有東西？注意 x 是1乘上 x (即 $1 \cdot x$)，所以第二項把 x 拿出去之後，其實這邊還有一個1。 x^2+x 因式分解完，就是 $(x+1)x$ (圖十二)。寫最後答案的時候，我們習慣會把單項的寫在前面 $x(x+1)$ ，當然寫 $(x+1)x$ 不會說你錯，因為乘法有交換律，但還是建議你可以把單項寫在式子最前面，這樣比較好看一點。有沒有問題？我們看例題3的第2小題(圖十三)，一樣做了什麼事情？第二項 x^2 把它看成什麼？兩個 x 連乘，一樣把共同的因式 x 拿到外面去，所以第一項拿出去 x 之後，一樣沒有了嗎？

$$\begin{aligned}
 & 1. \text{ 因式分解 } x^2+x \\
 & x^2+x = x \cdot \boxed{x} + 1 \cdot \boxed{x} \\
 & = (x+1) \cdot \boxed{x}
 \end{aligned}$$

(圖十二)

$$\begin{aligned}
 & 2. \text{ 因式分解 } x-3x^2 \\
 & x-3x^2 = \boxed{x} \cdot 1 - 3 \cdot \boxed{x} \cdot \boxed{x} \\
 & = (1-3x) \cdot \boxed{x}
 \end{aligned}$$

(圖十三)

84.學生：還有 1。

85.老師：所以第一項還剩下 1，減掉後面 $3 \cdot x$ ，這邊 3 不要漏掉，很多人常常會忘記這個 3，只看到這個 x ，所以不要漏掉它，有沒有問題？記得 x^2 拿出去一次後，剩下一次喔！所以括號裡面不要再寫二次方，有人常常會犯這個錯，若這邊再寫二次方，會跟原本的題目不一樣，因為乘出來之後會變三次方。所以請特別注意，已經拿出去的東西不會在裡面，有沒有問題？

86.學生：沒有。

87.老師：再來我們看例題 3 的第 3 小題，(圖十四) 先把它乘開，乘開之後，同類項 x^2 跟 x^2 做合併，再來 x 與 $3x$ 也是同一類的，把它合併起來，然後再去做什麼事情？找出 $2x^2$ 、 $4x$ 共同的因式，它們共同的因式是什麼？ $2x^2$ 這一項有一個 2， $4x$ 這一項也有一個 2，可以提出； $2x^2$ 這一項有兩個 x 連乘， $4x$ 這一項有一個 x ，各提出一個 $2x$ ，所以最後括號裡面會剩下什麼東西？

$$\begin{aligned}
 & \text{例題3} \\
 & 3. \text{ 因式分解} \\
 & x(x+1)+x(x+3) \\
 & =x^2+x+x^2+3x \\
 & =2x^2+4x \text{ 【方法一】} \\
 & =2x(x+2)
 \end{aligned}$$

(圖十四)

$$\begin{aligned}
 & \text{例題3} \\
 & 3. \text{ 因式分解} \\
 & x(x+1)+x(x+3) \\
 & =x(x+1+x+3) \\
 & =x(2x+4) \text{ 【方法二】} \\
 & =2x(x+2)
 \end{aligned}$$

(圖十五)

88.學生： $x+2$ 。

- 89.老師：有沒有問題？這是一個方法，除了這個方法之外，有沒有人有其它的方法？
除了把式子全部乘開，然後去合併同類項，再找公因式之外，有沒有其它的方法？或是有沒有比較快的方法？
- 90.學生：直接提出 x 。
- 91.老師：直接什麼？這兩項 $x(x+1)$ 、 $x(x+3)$ 剛好都有什麼？
- 92.學生： x 。
- 93.老師：所以可以從 $x(x+1)$ 、 $x(x+3)$ 直接做什麼事情？把 x 拿出來，第一項剩下 $x+1$ ，第二項剩下 $x+3$ ，式子 $(x+1)+(x+3)$ 就直接做同類項合併的動作，可以得到 $2x+4$ （圖十五）。這樣就寫完了嗎？剛剛有沒有講過，什麼樣的答案會比較好？怎樣是最簡化的， $2x$ 這一項有一個 2，4 這一項是兩個 2 連乘，所以也有一個 2 可以拿出去，做化簡後，就會變成什麼？ $2x$ 乘上什麼？
- 94.學生： $x+2$ 。
- 95.老師：這兩個方法做出來的答案有沒有一樣？你會選擇用哪一種方法來算？
- 96.學生：右邊。
- 97.老師：沒有說哪一種比較好，你就自己選擇一種來算，可以嗎？再來我們看第 4 小題（圖十六），他做了什麼事情？他把這兩項 $x(x+1)$ 、 $x(x+2)$ 共同的因式， x 拿出去之後，這邊少了什麼（學生在黑板上寫的是： $x(x+1)-x(x+2)=x[(x+1)-(x+2)]$ ）？
- 98.學生：1。
- 99.老師：1 不見了，然後呢？公因式拿出來之後，這兩個 $(x+1)$ 、 $(x+2)$ 要相減，對不對？在這邊要特別注意，括號前面是一個減號，所以拆括號的話，你要變號，這邊會變成 $x+1-x-2$ ，化簡之後， $1-2$ 等於多少（圖十六）？

100. 學生：-1。

101. 老師：所以這邊才會有一個(-1)出現，算完後式子為 $x \cdot (-1)$ ，對不對？記得負要拿到最前面，然後 1 可以怎麼樣？

102. 學生：省略。

103. 老師：你不要這樣子寫喔(-1x)，這樣很奇怪。

通常碰到 1 和文字符號連乘的時候，1 請你都把它省略。如果算出來是 1x 的話，也不要這種答案出現，特別注意，可以嗎？有沒有問題？

104. 學生：沒有。

105. 老師：沒有的話，看一下例題 4，你們可以先做一下。剛剛做的題目都很類似，提出來的公因式都是單項的。現在你看一下這兩項 $(x+1)(x+2)$ 、 $3(x+1)$ （圖十七），提的東西變成什麼了？一個式子！有沒有？第一項有一個 $x+1$ ，後面一項也有一個

$x+1$ ，跟剛剛一樣利用分配律，把 $x+1$ 拿到最外面，共同因式拿出去之後，第一項就剩下什麼？

106. 學生： $x+2$ 。

107. 老師：再來第二項 $x+1$ 拿出去，剩下-3，化簡之後，因式分解出來會變成什麼？ $(x+2-3) \cdot (x+1)$ 。 $2-3=-1$ ，所以因式分解的結果為 $(x-1) \cdot (x+1)$ ，有沒有問題？這是第 1 小題

例題 3

4. 因式分解 $x(x+1)-x(x+2)$

$$\begin{aligned} & x(x+1)-x(x+2) \\ & =x[(x+1)-(x+2)] \\ & =x(x+1-x-2) \\ & =x \cdot (-1) \\ & =-x \end{aligned}$$

（圖十六）

1. 例題 4

$$\begin{aligned} & (1) \text{ 因式分解 } (x+1)(x+2)-3(x+1) \\ & (x+1)(x+2)-3(x+1) \\ & = (x+2) \cdot (x+1) - 3 \cdot (x+1) \\ & = (x+2-3) \cdot (x+1) \\ & = (x-1)(x+1) \end{aligned}$$

（圖十七）

(2) 因式分解 $(x+2)^2-(x+2)(2x+1)$

$$\begin{aligned} & (x+2)^2-(x+2)(2x+1) \\ & = (x+2) \cdot (x+2) - (x+2) \cdot (2x+1) \\ & = (x+2-2x-1) \cdot (x+2) \\ & = (x+2)(-x+1) \\ & \text{(或 } -(x+2)(x-1) \text{)} \end{aligned}$$

（圖十八）

。再來第 2 小題（圖十八），我們去找這兩項 $(x+2)^2$ 、 $(x+2)(2x+1)$ 的什麼？
公因式。它們的公因式是什麼？

108. 學生： $x+2$ 。

109. 老師：為什麼是 $x+2$ ？因為 $(x+2)^2$ 這一項有一個 $x+2$ ， $(x+2)(2x+1)$ 這一項也有一個 $x+2$ 。你要注意 $(x+2)^2$ 是指 $x+2$ 連乘兩次，所以拿出去之後，裡面還會剩下幾個？1 個，不要寫 2 個喔！ $x+2$ 拿出來，前面一項會剩下 $x+2$ ，後面一項剩下 $2x+1$ ，得到 $(x+2)-(2x+1)$ ，式子要做化簡，不要寫到這邊就停，一定要化到最簡。若括號前面是減號的時候，括號內符號要做什麼？

110. 學生：變號。

111. 老師：所以 $-(2x+1)$ 會變成 $(-2x-1)$ ，再去做 $(x+2-2x-1)$ 同類項合併，同類項合併後，剩下多少 x ？

112. 學生： $-x$ 。

113. 老師：然後呢？ $2-1=1$ ，所以化簡後，是 $-x+1$ ，寫到這邊有沒有問題？

114. 學生：沒有。

115. 老師：除了這個答案 $(x+2)(-x+1)$ 之外，有沒有人還有其它的答案？有人會把式子 $(-x+1)$ 中的負號提出，可不可以？

116. 學生：可以啊！

117. 老師：當然也是可以，你也可以在這邊做一個動作，但是你提的時候，不要提錯了。怎麼提呢？負號拿出來，括號裡面會變成什麼？正的 x 和負 1（即 $x-1$ ），負的要放到哪裡？

118. 學生：前面。

119. 老師：最前面，這邊化簡之後，會變成 $-(x+2)(x-1)$ ，可以嗎？當然你在寫答案的時候，寫 $-(x+2)(x-1)$ ，對不對呢？對，當然也可以，但是建議在寫的時候，如

果寫到 $(x+2)(-x+1)$ 已經結束了，就不要繼續往後算，為什麼呢？因為你們很容易忘記變號，所以建議你們寫到這邊就好，不需要再做提負號的步驟。當然答案是 $-(x+2)(x-1)$ 也是對的，如果你改人家考卷的時候，老師唸這個答案 $(x+2)(-x+1)$ ，而他寫這個答案 $-(x+2)(x-1)$ ，要給他對，因為這兩個答案的結果都一樣，有沒有問題？

120. 學生：沒有。

121. 老師：你們寫完了沒？

122. 學生：寫完了。

123. 老師：下面的題目我找人上來寫。看例題 5（圖十九），有沒有人自願上來？每次都要我點，來，易哲第 1 小題；再來第 2 小題明昱；第 3 小題金俊；第 4 小題家寅。寫完了可以看一下黑板上的答案，有沒有跟你不一樣。你們都寫好了嗎？

例題5

1. 因式分解 $2ax + 2x$
2. 因式分解 $2ax - 2bx$
3. 因式分解 $4x^2 + 2x$
4. 因式分解 $6x(x+1) - 4x(x+2)$
(圖十九)

124. 學生：寫完了。

125. 老師：寫完，我們就一起看他們寫的。第 1 小題，第一步驟先做什麼事情？他看到 2，就趕快把 2 拿出來（圖二十），再來呢？分解完之後，發現這好像不是答案，對不對？然後他做什麼事情？把 x 拿出來，所以最後 $2x$ 提出，括號裡面剩下什麼？ $a+1$ 。如果沒有可提出來的，就確定這是最後的答案。可以嗎？這邊特別注意喔！ x 拿出來之後，裡面還有一個 1，不要漏掉它，很多人常常在這邊會漏掉，特別注意一下。除了他這樣算之外，還可以怎麼算？他的方法是沒有錯的，但兩項都有 $2 \cdot x$ ，所以其實我們可以把式子 $2ax$ 中的 $2x$ 直接拿出來（圖二十一），然後剩下什麼？ $a \cdot 2x$ 這一項拿出去 $2x$

之後，這邊有個 1，所以括號裡剩下 $a+1$ 。分解後得到 $2x(a+1)$ ，有沒有問題？

例題 5

方法一

$$\begin{aligned} 1. 2ax+2x &= 2(ax+x) \\ &= 2x(a+1) \end{aligned}$$

(圖二十)

例題 5

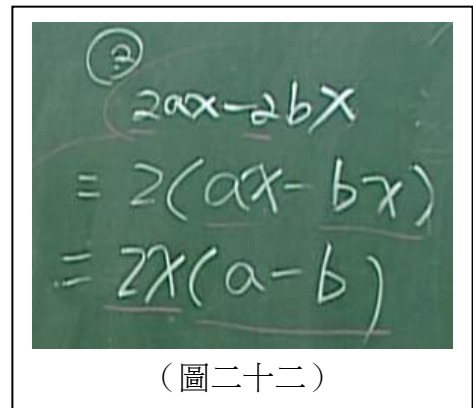
方法二

$$1. 2ax+2x = 2x(a+1)$$

(圖二十一)

126. 學生：沒有。

127. 老師：再來第 2 小題，這一題跟剛剛一樣做了什麼事情？第一步驟做了什麼事情？看到 2 就把 2 拿出來，然後發現這不是最簡化，又把 x 拿出來，最後式子做因式分解，就變成什麼？ $2x(a-b)$ (圖二十二)。其實你也可以怎麼做？跟剛剛那題一樣，直接看到什麼東西？



128. 學生：2。

129. 老師：然後又看到什麼？ x 。所以直接把 $2x$ 拿出來，前面剩下 a ，後面剩下 b ，所以這個式子做因式分解是 $2x(a-b)$ (圖二十三)

例題 5

$$2. 2ax-2bx = 2x(a-b)$$

(圖二十三)

，可以嗎？兩個方法可以選一個來做，沒有規定你要一次全部提出來，你要一個、一個去提也是可以的，可是可能花比較多時間。

130. 學生：可以。

131. 老師：再來第 3 小題，這題他做了什麼事情？把 $2x$ 拿出來， $4x^2$ 這一項哪有 $2x$ ？因為

例題 5

$$3. 4x^2 + 2x = 2x(2x+1)$$

(圖二十四)

$4x^2$ 等於 $2 \cdot 2 \cdot x \cdot x$ 。所以兩項拿出去 $2x$ 之後，前面剩下 $2x$ 、後面剩下 1 ，分解後變成 $2x(2x+1)$ (圖二十四)，因為你們這邊常常做錯，所以我會常常出現這種題目，提醒你們不要再犯錯了，可以嗎？

132. 學生：可以。

133. 老師：我們看第 4 小題，這題第一步驟先把它利用分配律去乘開，乘開後，合併同類項再化簡式子，再提出公因式(圖

例題 5

4. 因式分解

$$6x(x+1)-4x(x+2) = 6x^2+6x-4x^2-8x$$

$$= 2x^2-2x$$

$$= 2x(x-1) \quad \text{【學生作法】}$$

(圖二十五)

二十五)，這方法有沒有人跟他一樣？

134. 學生：有。

135. 老師：有。你也用這一個嗎？真的喔！你們其他人用什麼方法？直接從這兩個式子裡面，有看到公因式嗎？

136. 學生： $2x$ 。

137. 老師：哪裡有 $2x$ ？這明明是 $6x$ ，這是 $4x$ ，哪裡有 $2x$ ？把 6 分解成 2×3 ，所以 $6x(x+1)$ 這一項，有一個 2 、一個 x 可提出(圖二十六)。再來， $4x$ 把它分解成 $2 \times 2 \cdot x$ ，然後就

例題 5

4. 因式分解

$$6x(x+1)-4x(x+2) = 2x[3(x+1)-2(x+2)]$$

$$= 2x[3x+3-2x-4]$$

$$= 2x(x-1)$$

(圖二十六)

看到什麼？都有 $2x$ 。所以把 $2x$ 拿出來，前面一項剩下 3 ，然後呢？就沒了嗎？

138. 學生：3 倍。

139. 老師：3 倍的什麼東西？ $x+1$ (即 $3(x+1)$)。然後減掉什麼？後面一項 $2x$ 拿出來之

後，還有一個 2 倍的什麼？

140. 學生： $x+2$ 。

141. 老師：再來要做什麼事情？

142. 學生：化簡。

143. 老師：怎麼化簡？利用什麼東西？乘法對加法的什麼？分配律。所以會等於什麼？

144. 學生： $3x+3$ 。

145. 老師：後面一項化簡，記得括號前面是減號的時候，裡面要變號，也不要忘記 $2(x+2)$ ，不要只乘前面一個，後面一個也要乘，很多人常常後面 2×2 忘記乘，只乘前面，所以這邊特別注意一下。最後拆完括號後，式子變成 $3x+3-2x-4$ ，再來要做什麼事情？化簡。化簡之後剩下 $2x(x-1)$ 。這兩個算式（圖二十五、圖二十六）算出來的答案會不會一樣？

146. 學生：會。

147. 老師：如果不一樣怎麼辦？

148. 學生：錯了。

149. 老師：不一樣的時候怎麼辦？

150. 學生：再算一次。

151. 老師：如果每一次算都不一樣，代表什麼？你的計算一定哪邊有出錯，一定要去檢查你的算式，或是從頭再算，可以嗎？可以的話，請你把到例題 5 的部分寫完，弄清楚才可以下課，有沒有問題？

152. 學生：沒有。

153. 老師：沒有問題就先下課。

【第二節】

154. 老師：例題 6（圖二十七），第一個式子怎麼分解？

155. 學生：乘開。

156. 老師：覺得要乘開的舉手。

157. 學生：我。

例題6

1. 因式分解

$$\begin{aligned} 9(x+1)^2+3(x+1) &=3(x+1)[3(x+1)+1] \\ &=3(x+1)(3x+3+1) \\ &=3(x+1)(3x+4) \end{aligned}$$

（圖二十七）

158. 老師：一個方法就是直接乘開，然後同類項合併嘛！再去提公因式，然後就完成因式分解。

159. 學生：對。

160. 老師：還可以怎麼做？除了乘開之外呢？直接從這兩項 $9(x+1)^2$ 、 $3(x+1)$ 去做什麼事情？

161. 學生：提出公因式。

162. 老師：找公因式， $9(x+1)^2$ 、 $3(x+1)$ 的公因式是什麼？ $x+1$ 。 $(x+1)^2$ 式子中的 2 次方，是代表什麼意思？兩個 $x+1$ 連乘，所以 $x+1$ 提出去。哪邊有 3？

163. 學生：9。

164. 老師：9 可以分解成什麼？ $9=3 \times 3$ ，兩項都有一個 3 可以拿出來，且都有一個 $x+1$ 拿出去，所以它們共同的因式是什麼？ $3(x+1)$ 。第一項記得要括號，很多人 $3(x+1)$ 直接會寫 $3x+1$ ，要特別注意。第二項 $3(x+1)$ 拿出去之後，還剩下什麼？剩下 1，千萬不要再寫 0 了。繼續利用乘法對加法的分配律，得到 $3(x+1)(3x+3+1)$ ，最後化簡得到 $3(x+1)(3x+4)$ （圖二十七），這樣有沒有問題？有人答案會寫 $3(3x+4)(x+1)$ ，這樣寫對不對？

165. 學生：錯。

166. 老師：錯？

167. 學生：對。

168. 老師：這兩個答案有沒有一樣？

169. 學生：一樣。

170. 老師：差別在哪裡？是不是兩個乘的位置不一樣，可是這個答案有錯嗎？沒有，為什麼？因為乘法有交換律，所以記得在改人家答案的時候，不要因為老師唸的答案不同，而他寫這一個，你就給他錯喔！有沒有問題？記得數字部分一定要放到最前面，寫在後面會很奇怪。一定要把數字、單項的，放在算式最前面，兩項以上的式子都放到後面去，可以嗎？

171. 學生：可以。

172. 老師：再來我們看第 2 小題（圖二十八），這一題有兩項，你看到什麼？

173. 學生： $(x+1) \times (x+2)$

174. 老師：前項有一個 $x+1$ ，後項也有一個 $x+1$ ，再來還有什麼？

175. 學生： $x+2$ 。

176. 老師：再來，記得有兩個連乘，所以等一下拿出去一個，會剩下什麼？

177. 學生：一個 $x+1$ 、 $x+2$ 。

178. 老師：把它們的共同因式 $x+1$ 跟 $x+2$ 提出，所以括號剩下 $(x+1)-(x+2)$ ，記得是減，不要寫加喔！

179. 學生：沒括號的話，就會是 $x+1-x-2$ 。

180. 老師：再來做什麼事情？化簡。將括號拆開，記得拆括號後，裡面要變號，所以會變成？

例題6

2. 因式分解

$$\begin{aligned} & (x+1)^2(x+2)-(x+1)(x+2)^2 \\ &= (x+1)(x+2)[(x+1)-(x+2)] \\ &= (x+1)(x+2)[x+1-x-2] \\ &= (x+1)(x+2)(-1) \\ &= -(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

（圖二十八）

181. 學生： $x+1$ 。

182. 老師： $(x+1)-x-2$ ，得到式子 $(x+1)(x+2)[x+1-x-2]$ ，其中 $x-x=?$

183. 學生： 0 。

184. 老師：再來， $1-2$ 是多少？

185. 學生： -1 。

186. 老師：碰到數字的部分要做什麼？拿到最前面。所以直接寫 $-(x+1)(x+2)$ ，可以嗎？
把講義題目自己練習寫一次。

187. 學生：可以。

188. 老師：寫完就先看例題 7 的題目，（圖二十九）我找同學上來寫。第 1 小題找怡廷，等一下上來寫完之後，我要找人來講喔！不然都是我在講話。

189. 學生：自己寫自己講。

190. 老師：再來第 2 小題找宜柔；第 3 小題宜倫，其他同學都要動筆寫喔！講解

部分，第 1 小題找蘋真；第 2 小題找書萱；第 3 小題找清儀；第 4 小題找家寅。來，第一個趕快上來，蘋真快點，練習講講看，快點站起來，那再讓你準備一下，書萱先上來，認真聽喔！

191. 書萱：我要直接講嗎？

192. 老師：對啊！為什麼它會變這樣？（圖三十）
它沒有過程喔！

193. 書萱：就是這個如果變成負號，就會變成這個

例題7

1. 因式分解

$$a(a-b)-b(b-a)$$

2. 因式分解

$$(a-b)(x-y)+c(b-a)(y-x)$$

3. 因式分解

$$4abx^2+6a^2bx-10ab^2x$$

4. 因式分解

$$3x(x+2)-(x+4)(x+2)+2(x-1)(x+2)$$

（圖二十九）

例題7

2. 因式分解

$$(a-b)(x-y)+c(b-a)(y-x)$$

$$=(a-b)(x-y)(1+c)$$

$$=(a-b)(a+b)$$

（圖三十）

◦ (即 $-(b-a)=-b+a=a-b$ 、 $-(y-x)=x-y$)

194. 老師：你要不要寫一下？寫給同學看。

195. 書萱：就是 $b-a$ 如果加一個負號，就會變成 $-(b-a)=-b+a$ ，也等於 $a-b$ 。

196. 學生：喔！

197. 書萱：然後 $y-x$ 加一個負號，就會變成 $-(y-x)=x+y$ 。如果要提公因式的話，這邊加一個負號，這邊也加一個負號（即 $-(b-a)=a-b$ 、 $-(y-x)=x-y$ ），所以負負得正，就不用變號。然後就把 $a-b$ 跟 $x-y$ 提出來，前項就剩 1，後項就剩 c ，分解後答案為 $(a-b)(x-y)(1+c)$ 。

198. 老師：聽得懂的舉手，不會的趕快寫上去，清儀準備。

199. 清儀：這三個 $4abx^2$ 、 $6a^2bx$ 、 $10ab^2x$ 都有 $2abx$ ，如果把 $2abx$ 拿出來（圖三十一），第一項 $4abx^2$ 剩下 $2x$ ；第二項 $6a^2bx$ ，因為提出 $2abx$ 還有一個 a ，6 除以 2 變成 3，所以 $6a^2bx$ 剩下 $3a$ 。

例題7

3. 因式分解

$$4abx^2 + 6a^2bx - 10ab^2x \\ = 2abx(2x + 3a - 5b)$$

（圖三十一）

200. 老師：她沒講錯啊！為什麼要笑？

201. 清儀：然後第三項 $-10ab^2x$ ，式子中是 b^2 ， $2abx$ 拿出來，還有剩下 $-5b$ ，所以分解後是 $2abx(2x+3a-5b)$ 。

202. 老師：有沒有問題？有沒有人要補充？不會寫的趕快補上去喔！接下來第 4 小題。

203. 家寅：第 4 小題，這三項 $3x(x+2)$ 、 $(x+4)(x+2)$ 、 $2(x-1)(x+2)$ 都有 $x+2$ 可提出（圖三十二），然後把 $(x+2)[3x-(x+4)+2(x-1)]$ 化簡一下，就變成 $(x+2)[4x-6]$ ， $4x-6$ 這裡可

例題7

4. 因式分解

$$3x(x+2) - (x+4)(x+2) + 2(x-1)(x+2) \\ = (x+2)[3x - (x+4) + 2(x-1)] \\ = (x+2)[4x - 6] \\ = 2(x+2)(2x-3)$$

（圖三十二）

以提出 2 來，所以化簡後答案就是 $2(x+2)(2x-3)$ 。

204. 老師：同學，有問題嗎？一樣都是先把公因式拿出去，剩下的就在裡面做運算。你在做運算的時候，特別注意不要計算錯誤喔！然後記得可以拿出來的公因式，先把它拿出去，可以嗎？來，蘋真，換妳來，快點（學生害羞不敢上台），有沒有人要幫她？

205. 學生：宜倫。（學生點名）

206. 宜倫：就是這個負號，等一下，對不起，負號乘進去，然後就…。

207. 學生：每個都加負號就好了啊！

208. 宜倫：對啊！負號乘進去（圖三十三）， $(+b)$ 變成 $(-b)$ ， $(-a)$ 變 $(+a)$ ，最後 $-b(b-a)$ 就變 $b(a-b)$ ，然後 $(a-b)$ 是公因式提出來，化簡後答案就是 $(a-b)(a+b)$ 。

例題7

1. 因式分解

$$a(a-b)-b(b-a)$$

$$=a(a-b)+b(a-b)$$

$$=(a-b)(a+b)$$

（圖三十三）

209. 老師：聽的懂她在講什麼嗎？

210. 學生：聽不懂！

211. 宜倫：我再講一次，就是 $-b(b-a)$ 有個負號，把這個負號乘進去，然後這邊變成 $(-b)$ ，這邊負號乘進去的話，是變成 $(+a)$ 。然後下面只是把它位置交換， $(a-b)$ 是公因式提出來，所以剩下 $(a-b)(a+b)$ 。

212. 學生：哦！

213. 老師：她剛剛少講了一個東西，為什麼會有個「負」，她做了什麼事情？

214. 學生：變號。

215. 老師：所以這邊 $(-b)$ 會變成有一個 (-1) 拿進去，可以嗎？（即 $-b=+(-1) \cdot b$ ）剛有人聽不懂，應該是不知道那個「負號」哪來的，有沒有問題？

216. 學生：沒有。

217. 老師：這 4 小題趕快把它寫完，寫完我們就要繼續看後面的例題。好啦！不要講話，趕快寫，這 4 小題還有沒有人有問題？

218. 學生：沒有。

219. 老師：不要用抄的，要自己寫，聽完之後，要自己寫一次。好了，你們在做什麼？看這邊，例題 8（圖三十四），我們要把這個多項式 $ax+bx+ay+by$ 做因式分解。來，這題怎麼因式分解？之前做的題目都

例題8

因式分解 $ax+bx+ay+by$
請學生觀察上例，如何做因式分解？（提示：分組）
（圖三十四）

可以看到每一項都有什麼？共同的因式，對不對？可是你發現這個多項式，每一項怎麼都沒有一樣的東西，怎麼辦？沒辦法一次提 x 或提 y 或提 a 或提 b 的時候，怎麼辦？怎麼提？

220. 學生：分兩個式子。

221. 老師：哪兩個式子？

222. 學生：隨便，都可以。

223. 老師：怎麼分？ $ax+bx$ 很像剛剛我們算的，對不對？ $ay+by$ 也很像剛剛算的，如果只有 $ax+bx$ 的話，你會分解，對不對？或者如果只有 $ay+by$ ，你會嗎？這兩個 $ax+bx$ 一起的話，可以看到什麼東西？

224. 學生： $x(a+b)$ 。

225. 老師：再來，這兩個 $ay+by$ 都有？

226. 學生： y 。

227. 老師：再來乘上什麼？

228. 學生： $y \cdot (a+b)$ 。

229. 老師：這樣分之後，又看到了什麼？前項有 $a+b$ ，後項也有個 $a+b$ ，所以 $a+b$ 是它

們共同的因式。提出去後剩下 $x+y$ ，可以嗎？所以這個因式分解後是 $(a+b)(x+y)$ （圖三十五）。除了這樣的方式，還有沒有其它的分解方式？只能把前兩個當一組，後兩個當一組嗎？

例題8因式分解 $ax+bx+ay+by$

方法一

$$\begin{aligned} ax+bx+ay+by \\ &= x(a+b)+y(a+b) \\ &=(a+b)(x+y) \end{aligned}$$

（圖三十五）

230. 學生：第一跟第三個分一組。

231. 老師：還可以怎麼分？金俊上來寫，其他的自己也練習一下。來，順便講解一下，快點。

232. 金俊：不要啦！

233. 老師：快點。

234. 學生：易哲想要講解。

235. 易哲：剛剛是 1、2 項一組，3、4 項一組，這個是把 $ax+ay$ ，還有 $bx+by$ （圖三十六）。 ax 跟 ay 都有 a 拿出去， bx 跟 by 都有 b 拿出去，變成 $a(x+y)$ 、 $b(x+y)$ ，這裡兩個都有 $x+y$ ，所以變成 $(x+y)(a+b)$ 。

例題8因式分解 $ax+bx+ay+by$

方法二

$$\begin{aligned} ax+bx+ay+by \\ &= ax+ay+bx+by \\ &= a(x+y)+b(x+y) \\ &= (x+y)(a+b) \end{aligned}$$

（圖三十六）

236. 老師：有沒有人聽不懂他在講什麼的？

237. 學生：沒有。

238. 老師：這邊 $a(x+y)$ 、 $b(x+y)$ ，其實是先做什麼事情？ $x+y$ 是共同的因式先拿出來，然後再把剩下的 a 寫下來， b 寫下來，可以嗎？這樣有沒有問題？這兩種方式有沒有問題？

239. 學生：沒有。

240. 老師：還有沒有其它的方法？剛剛第一個方法，是第一個跟第二個一組，再來第三跟第四一組；第二個方法是第一個跟第三個一組，然後第二個跟第四個一組。還有沒有其它的方法？可不可以第一個跟第四個一組，第二個跟第三個一組呢？

241. 學生：不行。

242. 老師：為什麼？

243. 學生：沒有同類項。

244. 老師：如果第一個跟第四個一組，第二個跟第三個一組，你會發現什麼事情？這樣分出來之後要做什麼？有沒有共同的因式可以拿出來？

245. 學生：沒有。

246. 老師：所以你在做分組動作的時候，要記得有一樣因式的，把它合在一組，可以嗎？所以這兩種方法你可以選擇一種來算就可以了。記得不要用這一種（ $ax+by$ ）+（ $bx+ay$ ），因為這樣分沒有幫助，可以嗎？

247. 學生：可以。

248. 老師：再來我們看到後面，例題 9（圖三十七），你們先自己做。有沒有人自願？用不同的方法，來，宜欣，寫寫看。來，智偉，寫第二個方法的，跟第一個分組要分不一樣喔！

例題9

因式分解 $x^2+ax+bx+ab$
（圖三十七）

249. 老師：兆弘講第一個方法，他是用哪兩個一組？

250. 兆弘：不是講方法二？方法一還是方法二？

251. 老師：方法一。

252. 學生：方法一。

253. 老師：你要面對前面啊！這樣講人家不知道你在講什麼。

254. 兆弘： (x^2+bx) 跟 $(ax+ab)$ ， x^2 和 bx 一樣都有 x ，提出來（圖三十八）。

255. 老師：你要面對前面。

256. 兆弘： x^2 、 bx 有共同的因式 x 提出來，然後得到 $x(x+b)$ ； ax 、 ab 共同的因式為 a ，提出，得到 $a(x+b)$ ，最後變成 $(x+a)(x+b)$ 。

例題9:

因式分解 $x^2+ax+bx+ab$

方法一

$$x^2+ax+bx+ab=(x^2+bx)+(ax+ab)$$

$$=x(x+b)+a(x+b)$$

$$=(x+a)(x+b)$$

（圖三十八）

257. 老師：有沒有人不清楚他在講什麼的？這個方法一是用了什麼？第一項跟第三項一組，第二項跟第四項一組，再來提出公因式之後 x 、 a ，發現這兩項也有一個公因式 $(x+b)$ ，把它拿出來，剩下的這兩個把它加在一起，就是這個多項式的因式分解，可以嗎？

258. 學生：可以。

259. 老師：來，方法二，瑞恩。它是哪幾個一組，他的方法跟方法一不一樣，剛剛第一個方法，是用第一項跟第三項一組，還有第二項跟第四項一組，所以方法二應該不會是用那一個吧！應該用的是哪一個？你可以觀察一下，講給大家聽，他怎麼做。

260. 瑞恩：就是 $(bx+ab)$ ，變成是 $(x+a) \cdot b$ （圖三十九）。然後 x^2 是 $x \cdot x$ ， x^2+ax 兩項各一個 x 都拿出去，變成 $x(x+a)$ 。然後 $x(x+a)+b(x+a)$ 再提公因式，合併起來就是 $(x+b)(x+a)$ 。

例題9

因式分解 $x^2+ax+bx+ab$

方法二

$$x^2+ax+bx+ab=(x^2+ax)+(bx+ab)$$

$$=x(x+a)+b(x+a)$$

$$=(x+b)(x+a)$$

（圖三十九）

261. 老師：為什麼合併變 $(x+b)(x+a)$ ？為什麼？

262. 瑞恩：因為這個 b 跟這個 x 加在一起。
263. 老師：為什麼 b 和 x 要加一起？
264. 學生：有加啊！
265. 瑞恩：然後 b 跟 x 加一起，就 $b+x$ 啊！
266. 老師：是這樣嗎？
267. 學生：是啊！你說說看。
268. 老師：你們在做的時候，為什麼是先把 b 和 x 加在一起，後面 $x+a$ 就丟外面。第一步驟必須先確定什麼事情？不是一看到什麼就把這兩個 b 和 x 加一起，對不對？你必須先從式子裡面去做什麼事情？找它們有沒有公因式啊！所以要先做什麼事情？先判斷有沒有公因式。
269. 學生：有。
270. 老師：所以，你先拿出去的東西是什麼？ $x+a$ ，對吧！把 $x+a$ 拿出去之後，前面剩下什麼東西？
271. 學生： b 。
272. 老師：後面剩下什麼？
273. 學生： x 。
274. 老師：所以才得到 $(x+a)(x+b)$ 。不是這兩個 b 、 x 出來， $(x+a)$ 才會出來耶，順序不一樣喔！不要搞錯囉！聽到了沒？所以你在做因式分解的時候，記得我們現在做的，是提出公因式跟分組分解，提公因式的話，第一步驟一定先做什麼？
275. 學生：找公因式。
276. 老師：有公因式的放在哪裡？最前面，剩下的再把它加在一起，或相減或一起做運算，有沒有問題？可以嗎？

277. 學生：可以。
278. 老師：不要一看到題目就隨便亂加在一起，不一樣喔！可以嗎？我們剛剛做的這些動作都跟前面不太一樣，前面的都是什麼？有共同因式直接提出去，而我們這邊做的動作是什麼？先分組，然後再提公因式，這是另外一種方式，也就是這個單元講的另外一個方式，可以嗎？
279. 學生：可以。
280. 老師：所以你發現一個多項式裡面，如果它沒有共同的因式可以拿出去的時候，你可以先做什麼動作？
281. 學生：分組的動作。
282. 老師：分組完之後，發現又有共同的因式，才去提什麼？
283. 學生：公因式。
284. 老師：可以嗎？你不要一看到題目，怎麼沒有公因式，不知道怎麼做。你可以試著分組看看，分組的方法有很多，不是只有一種，可以嗎？可以嘗試用不同的方式，如果你發現分組的方式，像剛剛這個的話 $(ax+ by) + (bx+ ay)$ ，怎麼辦？就不能採這個方式，所以就換別的，懂我意思嗎？
285. 學生：懂。
286. 老師：來，請你做例題 10，你可以用兩個方式都試著做做看，當然你在考試的時候，不需要兩個方法都做，只要選擇其中一個方法就可以了。做好了嗎？來，一起來看這一題，四項，對不對？四項通常會幾個分一組？發現它沒有共同因式的時候，就要做什麼？就把它分組嘛！有四項，所以通常會幾個、幾個一組？
287. 學生：兩個、兩個一組。
288. 老師：兩個、兩個一組。所以你可以先採用第一項跟第二項一組，然後呢？ 第三

項跟第四項一組（圖四十），試試看。第一項跟第二項一組的話，可以看到什麼？ $x(a-2)$ 。再來，後面 $y(a-2)$ ，所以分組之後，發現什麼事情？ $(a-2)$ 可以拿出來，先找共同因式，不是先把它加起來喔！要確定真的有共同的因式，這兩個才

例題10

1. 因式分解 $ax-2x+ay-2y$

方法一

$$\begin{aligned} ax-2x+ay-2y & \\ &= x(a-2)+y(a-2) \\ &= (a-2)(x+y) \end{aligned}$$

（圖四十）

可能合併起來，可以嗎？ $a-2$ 拿出來，所以得到 $(a-2)(x+y)$ ，可以嗎？

289. 學生：可以。

290. 老師：你可以試著用別的方式做，我剛剛是第一個跟第二個一組，你可以第一個跟第三個、第二個跟第四個一組（圖四十一），有沒有人要用第二種方法的？

例題10

1.因式分解 $ax-2x+ay-2y$

方法二

$$\begin{aligned} ax-2x+ay-2y &= ax+ay-2x-2y \\ &= a(x+y)-2(x+y) \\ &= (a-2)(x+y) \end{aligned}$$

（圖四十一）

291. 學生：有。

292. 學生：有，只有一個、二個。

293. 老師：算出來的結果會不會一樣？

294. 學生：會。

295. 老師：所以方法不一樣，結果還是會一樣，記得方法不是只有一種，不要去死背那種方法。再來，有沒有人用第一項跟第四項一組、第二項跟第三項一組？也就是 $(ax-2y)+(-2x+ay)$ 分組方式，有沒有人用這種方式？為什麼不用這一個？知道為什麼嗎？算不出來嘛！可以嗎？這一題有沒有問題？

296. 學生：沒有。

297. 老師：再來看下一小題，這一題有幾項（圖四十二）？

298. 學生：六項。

299. 老師：有六項，有沒有共同的因式？

300. 學生：有。

301. 老師：每一項都有共同的因式嗎？有嗎？

302. 學生：第一、三、五項一組，第二、四、六項一組。

303. 老師：如果每一項沒有公因式的時候怎麼辦？

304. 學生：分組啊！

305. 老師：分組，怎麼分？

306. 學生：第一、三、五項一組，第二、四、六項一組。

307. 老師：為什麼要第一、三、五項一組，第二、四、六項一組？你怎麼知道要第一、三、五項一組，第二、四、六項一組？你看到它們的什麼？

308. 學生：公因式。

309. 老師：所以你會把這 $(2ax+2cx-2bx)$ 放在一起，再來， $(by-ay-cy)$ 放在一起（圖四十二）。
 $(2ax+2cx-2bx)$ 都有因式 $2x$ ，所以 $2x$ 拿到前面，剩下 $(a+c-b)$ ，後面呢？式子 $(by-ay-cy)$ ，因式 y 拿出來，剩下 $(b-a-c)$ 。糟糕，怎麼看起來不太一樣，怎麼變？變成加一個負號，怎麼加？這邊就要變一個減 (-1) 乘進去，可以嗎？

310. 學生：可以。

311. 老師：所以後面 $+(b-a-c)$ 就會變什麼？負號乘進去之後，會變成 $-(-b+a+c)$ ，這個跟 $(a+c-b)$ 有一樣嗎？

312. 學生：有。

例題10：

2. 因式分解 $2ax+by+2cx-ay-2bx-cy$

$$2ax+by+2cx-ay-2bx-cy$$

$$=(2ax+2cx-2bx)+(by-ay-cy)$$

$$=2x(a+c-b)+y(b-a-c)$$

$$=2x(a+c-b)-y(a+c-b)$$

$$=(2x-y)(a+c-b)$$

（圖四十二）

313. 老師：這邊應該是什麼？ $-y(a+c-b)$ 。這兩個式子 $(a+c-b)$ 、 $(-b+a+c)$ ，哪裡一樣？確定嗎？你怎麼知道它變成一樣？看起來不一樣啊！
314. 學生：換順序。
315. 老師：用到運算上什麼性質？交換律，誰跟誰換？
316. 學生：a 跟 b 跟 c 換。
317. 老師：a 跟-b 換之後，-b 再跟 c 換，所以用了兩次交換律，最後會變成跟前面一樣。你發現這兩項又有共同的因式，一樣共同因式 $(a+c-b)$ 拿出來，記得一定要先判斷它有沒有共同因式，先拿出來，然後前面剩下 $2x$ ，後面-y 這樣子，可以嗎？這兩個順序 $(2x-y)(a+c-b)$ 顛倒有沒有一樣？一樣，因為乘法有什麼？
318. 學生：交換律。
319. 老師：可以嗎？這一題？
320. 學生：可以。
321. 老師：來，把這兩小題寫完之後，請你做下面例題 11。例題 11 第 2 小題看一下，2 後面加一個 x（即 $(a-2)x$ ……原題目漏掉）。來，家寅上來寫，記得第 2 小題把它這邊加一個 x，第 2 題有沒有人要自願？沒有，誰算出來第 2 小題？
322. 學生：易哲。
323. 老師：第 1 小題，有沒有人要上來講的？
324. 學生：家寅上去講解。
325. 老師：剛剛遇到的都是兩個、兩個一組的，對不對？可是你發現這一題 $x^2-2x+1-y^2$ ，如果你用兩個、兩個一組，會算不出來，怎麼辦？來，聽一下他怎麼講。

326. 家真：就這個是等於這個（即 $x^2-2x+1=(x-1)^2$ ）（圖四十三）。

327. 老師：那個是什麼？

328. 家真：這個是一個平方差，這個是等於這個，即 $x^2-2x+1-y^2=(x-1)^2-y^2$ 。

329. 老師：聽得懂嗎？

330. 學生：聽得懂。

331. 家真：因為 $(x^2-2x+1)-y^2=(x-1)^2-y^2$ ，可以運用 $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ 平方差的式，所以 $(x-1)^2-y^2=(x-1-y)(x-1+y)$ 就是最後的答案。

332. 老師：這一題有沒有問題？

333. 學生：沒有。

334. 老師：當你發現兩個、兩個一組不行的時候，就可以怎麼做？三個、一個一組。因為這是設計好的題目，前面這個剛好是差的平方公式， $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ，這樣子轉換之後，你看到什麼， $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ ，就用這個去做代換，就可以把這一題做完因式分解，可以嗎？這一題有沒有問題？

335. 學生：沒有。

336. 老師：下一題呢？這一題怎麼做？本來有括號，你發現括號裡面都沒有共同的因式，怎麼辦？就想辦法把括號拆開之後，自己再重新分組。拆括號，記得這邊要怎樣？

337. 學生：變號。

338. 老師：所以減掉什麼？ $-x^2+2a$ ，再來就自己重新分組嘛，怎麼分？（圖四十四）

例題11

1. 因式分解 $x^2-2x+1-y^2$

說明

$$\begin{aligned} x^2-2x+1-y^2 &= (x^2-2x+1)-y^2 \\ &= (x-1)^2-y^2 \\ &= (x-1-y)(x-1+y) \end{aligned}$$

（圖四十三）

例題11

2. 因式分解 $(a-2)x-(x^2-2a)$

$$\begin{aligned} &(a-2)x-(x^2-2a) \\ &= ax-2x-x^2+2a \\ &= ax-x^2-2x+2a \\ &= (ax-x^2)+(2a-2x) \\ &= (a-x)x+(a-x) \cdot 2 \\ &= (a-x)(x+2) \end{aligned}$$

（圖四十四）

339. 學生：第一項、第四項一組，第二項、第三項一組。

340. 老師：剛剛第一項、第二項一組不行，所以現在要不要第一項、第二項一起啊？

341. 學生：不要了。

342. 老師：可以試試看，第一項、第三項一組，第二項、第四項一組，可不可以？如果再不行怎麼辦？或是你用第一項、第三項一組，第二項、第四項一組去做看看，如果再不行怎麼辦？第一項、第四項一組，第二項、第三項一組，可以嗎？會不會自己把它做完？做完才下課喔！剩下就給你們自己做了，這個單元有沒有問題？上到這邊？

343. 學生：沒有。

344. 老師：我們今天就上到這邊，下課了。

參、教學說明

先講第一個部分，就是教學前的準備。本來剛開始設計教案的時候，是以課本內容為主，後來設計的時候，發現很多問題，經過教授們建議之後，重新把課程再設計，內容、流程的部分都做了很多的調整。我調整到依照不同的題型去做整理，當作我的課程流程，並且用不同的例題，引導學生處理類似題型，應用於提出公因式，還有分組分解去做因式分解。因為因式分解是屬於代數的運算，所以當初的設計，本來是想用很多圖形代替算式，後來發現那個方式好像行不太通，今天就幾乎是用代數算式的方式，直接去引導他們。

我在上課講的一些例題，會特別強調計算要注意的地方，還有他們容易犯錯的部分，這是教學前的準備，也是我設計教案的時候，會注意的問題。

這個單元的教學目標，我在設計的時候，是依不同的題型，並利用解題上的一些過程、技巧，幫助學生理解，利用分組分解和提出公因式，來做多項式的因式分解。課堂上，大部分是由老師講述的方式，然後運用與學生在課堂上的互動及他們的發問，去了解並釐清學生的一些模糊概念。

至於今天上課的狀況，第一節課所用的方式，跟我平常上課用的方式差不多，大部分時間都是我在講，偶爾叫學生上台做，再從他們上台做的狀況，發現他們的問題。第二節課時，因為教授建議我可以讓學生除了上台寫，也讓他們發表一下意見和想法，這樣比較能夠清楚地知道學生的一些概念到底清不清楚。我發現這兩個方式有很大的差異，就是我看他們寫的跟聽他們講的，聽他們講會比較清楚的知道他們不懂的地方在哪裡，然後我可以即時的糾正他們一些錯誤的觀念。這樣的方式可以讓他們馬上改

正錯誤的觀念，我自己也可以即時糾正他們，並改進自己的教學方法。我覺得他們今天第一節跟第二節的反應，差距滿大的，我們班算是很活潑的一群，平常上課的方式比較像第二節課，比較像真正的他們啦！就今天的上課狀況來看，我預估班上大概會有一半以上的人，可以比較清楚地了解今天上課的內容，因為我們班學生的落差其實滿大的。採用今天這樣子的方式來上課，讓學生上台寫，然後讓不同的人上台講別人寫的東西，可以從裡面去發現學生不清楚的觀念，也可以即時糾正他。而我在題目的設計上面，應該還可以設計另外的題型，讓他們比較清楚地知道錯誤的地方在哪裡。

肆、教學後的省思

本次的教學單元為利用提出公因式與分組分解做多項式的因式分解，課程時間為兩節課（共九十分鐘），中間有十分鐘的休息時間。教學單元預計分八個活動進行，分不同題型的題目，讓學生能夠在未來處理各式題目時，知道如何下手，也從課堂活動中發現學生的一些問題，都是在教學上需作調整的部分，以及學生觀念及計算上要加強的重點。

課堂中老師先由舊經驗的複習，引入學生對因式分解的認識，由於教學時間為國中二年級學期中，學生已經學過乘法公式與多項式乘法。雖然部分已經能熟練運算性質中的分配律，但在過程中卻發現還有部分的學生，對於分配律的概念不是很清楚，所以這部分必須再加強。

自己也感覺在活動上，速度似乎是快了點，雖然讓學生上台演練、講解、發表，課堂氣氛活潑，但從學生的課堂筆記中，也發現部分學生並未跟上進度，或是未能專注於課堂上，應該稍微給一點時間讓學生討論，或是把已講解過的題目透過互動，讓學生更瞭解該如何解題，而不是一題接著一題，沒有給他們消化的時間，這是未來在

教學上要注意的地方。活動設計上可能也要再多加強學生易犯錯之處，特別加強課後演練。

上課講義的部分，因為教案的調整，導致最後一題的題目有誤，也因為時間關係，未能及時的修正題目，但有讓學生於課後再針對此題做演練，完成此題的解題，這是未來在設計教案時也要注意的地方。

國家圖書館出版品預行編目(CIP)資料

國中小數學教材與教學探討 / 周筱亭, 劉君毅主編.

--初版.-- 新北市：國家教育研究院, 民 100.12- 冊；公分

ISBN 978-986-02-9584-9 (第 3 冊：平裝)

1.數學教育 2.代數 3.教學活動設計 4.中小學教育

523.32

100021181

國中小數學教材與教學探討---代數篇（三）

主 編：周筱亭 劉君毅

教學指導：謝 堅 鍾 靜 曹博盛 朱佳仁 周筱亭

作 者：梁翠玲 陳春男 蔡佩旻

發 行 人：吳清山

出版機關：國家教育研究院

地 址：新北市三峽區三樹路二號

電 話：(02) 8671-1111 轉 教學資源及出版中心

網 址：<http://www.naer.edu.tw>

出版年月：中華民國 100 年 12 月

版 次：初版

電子出版品說明：本書籍影片同時登載於「國中小數學教師專業成長網」

網址為：<http://math.naer.edu.tw>

定 價：新台幣 175 元

印 刷 者：

地 址：

電話：

展 示 處：政府出版品展售門市

地址及電話：

1.五南文化廣場：台中市中山路 6 號

TEL：(04) 2226-0330

網址：<http://www.wunan.com.tw>

2.國家書店松江門市：台北市松江路 209 號 1 樓

TEL：(02) 2518-0207

網址：<http://www.govbooks.com.tw>

GPN：1010003274

ISBN：978-986-02-9584-9

國家教育研究院保留本書籍附件影片資料之著作權及所有權利。