



國小數學教材分析

—幾何—



國立教育研究院籌備處出版

國小數學教材分析----

幾何

國立教育研究院籌備處 出版

何主任序

九年一貫課程已經自九十年九月開始，在全國各國民小學一年級實施了，雖然仍有一些質疑的聲音，不過，九十一年九月，一、二年級學童和七年級（國中一年級）學生都已經開始採用新的教科書了。換言之，已有更多的國小與國中教師陸續投入九年一貫課程的教學工作，因而，瞭解各個學習領域的能力指標，以及將能力指標轉換成教學目標與活動目標，就成為教師們首先需具備的能力了。

在數學學習領域方面，九年一貫課程分為「數與量」、「幾何」、「統計與機率」、「代數」、「連結」等五個主題，除了「連結」之外，其他四個主題均分為四個階段，用能力指標表示學習的內容和期望學生學得的能力，但是由於能力指標與以往大家熟悉的課程標準敘寫方式不同，前者較具彈性，範圍亦較大，所以，在解讀上，可能會產生一些困難。

九年一貫課程不同於八十二年公布的國民小學課程標準，後者在公布前，即委託當時的台灣省國民學校教師研習會依據課程標準，研擬實驗教材並進行教學實驗。數學科是在全國各縣市推薦的三十一所學校，自八十一學年度入學的一年級新生中，每校選一至二班學生，採用該會所編之實驗教材（含教師手冊、學生課本和學生習作），進行教學實驗，共計有七十一班，總數約三千餘位學生參與。此外，擔任實驗班教學的教師，於學期開始的第一週，先參與研習會辦理之一週研習，課程則是完全針對該學期要教的實驗教材內容及教學方法。經過教學實驗和修訂後的實驗教材，移送國立編譯館，再經過修訂與送審之後，成為各國民小學可以選用的版本之一。然而九年一貫課程在實施之前，教育部先從提出計畫的學校中，選擇了若干所學校進行試辦，由於這是第一次採取開放、自主、彈性的方式處理國民小學的課程，有些學校的教師反而有無所適從的感覺。

為了協助國小教師們儘速地瞭解數學學習領域的能力指標，本處周筱亭研究員自八十九年五月開始，邀請了一些教授及教師，利用週六或週日，隔週開會，共同討論；希望能針對能力指標作詮釋並提供一些比較務實的參考資料給教師們

使用。

這套「國小數學教材分析」一共有十三本，它們各針對不同的數學內容，一方面檢討分析國立編譯館依據八十二年公布之國小數學課程標準出版的「部編本國小數學教科用書」，另一方面則分析九年一貫課程數學學習領域各主題的能力指標，並將「部編本國小數學教科用書」各單元中相關的教學活動與之對應。迄今，已完成十二本，它們是：整數的數概念與加減運算、整數的乘除運算、長度、重量和容量、分數的數概念與運算、小數的數概念與運算、面積、時間與速率、整數的數量關係、比（含線段圖）、統計與機率、體積和角度，相隔四年之後，這本「幾何」終於在謝堅教授、朱建正教授、廖淑麗老師、魯炳寰老師等人的通力合作之下完成了。

在本書付梓之際，以此序向各位參與人士表達誠摯的謝意，希望它真正能成爲教師們有用的數學課程規劃與設計參考資料。

何 福 田

國立教育研究院籌備處

民國九十五年二月

主 編 序

本書是“國小數學教材分析”系列叢書的一本。這套叢書是在民國 89 年暑假前規劃的，在 6 月 18 日第二次會議時決議，將小學數學課程中會出現的教材切割分類，並由參與者選擇有興趣的領域進行分析，然後分冊（份量較少之教材類型則合冊）出版。依照規劃，本叢書共有十三冊，書名及編寫者如下，總編輯和總訂正的工作則由黃敏晃和周筱亭擔任。

- 整數的數概念與加減運算——蔣治邦、陳竹村、謝堅、林淑君、陳俊瑜
- 整數的乘除運算——蔣治邦、謝堅、陳竹村、吳淑娟、林昭珍
- 重量和容量——鍾靜、朱建正、林素微、魯炳寰
- 長度——朱建正、鍾靜、呂玉英、胡鈺麟
- 整數的數量關係（含多步驟問題）——蔣治邦、謝堅、陳竹村、林昭珍、吳淑娟
- 分數的數概念與運算——蔣治邦、陳竹村、陳俊瑜、林淑君
- 面積——朱建正、林昭珍、胡鈺麟
- 時間與速率——鍾靜、魯炳寰、林素微
- 小數的數概念與運算——蔣治邦、謝堅、林淑君、陳俊瑜
- 比（含線段圖）——蔣治邦、謝堅、陳竹村、陳俊瑜、林淑君
- 體積和角度——朱建正、呂玉英、林昭珍、胡鈺麟
- 統計與機率——鍾靜、林素微、魯炳寰、鄒聖馨
- 幾何——黃敏晃、朱建正、謝堅、廖淑麗、魯炳寰

按教育部於民國 89 年 9 月底的公告，九年一貫課程已於民國 90 年 9 月起陸續實施，九年一貫課程的主要精神之一是鬆綁，不但打破學生學習時思考的框架，

連同以往國中小學教材設計的中央集權制度也要打破（因此稱課程綱要，而非以前的課程標準），教材設計權下放到各學校（學校本位課程，發展各校的特色）、到基層教師（教育的自主權），這樣的改革理念相當值得肯定，但相對應的是各校的行政能力與基層教師的教學能力也要提升，因此，各地的基層教師都在找尋資料，以便因應這一波重大的改革。

國小數學科教材，在民國 82 年課程標準之國立編譯館版本的教科用書（尤其是在教學指引）中，已有非常仔細的分析。這些分析，是根據知識發展的可能歷程以及學童認知結構發展的層次來進行，這種做法其實和九年一貫課程強調培養學生數學能力，而非灌輸學生許多數學知識的精神一致。所以，這些教材對基層教師在準備九年一貫課程的執行時，應具有豐富的實用價值。

但是，國立編譯館版本的國小數學教科書，將來不會再出版，即使擁有這套教科書，參考時仍有些不方便，一方面是各種教材切割分佈在各冊之中，翻閱不易；另一方面則是有些教材分析的基本原則，在教材發展當時並沒有納入教學指引。我們藉由這次機會將同類教材放在一起並加以精緻化，希望透過這套叢書能協助基層教師更清楚各類教材發展的脈絡。

由於九年一貫課程已開始實施，完成此項任務是相當迫切的。且所有參與人員都有他們自己的本職，因此，編寫的工作都在許多週末（週休二日很好用）的溝通討論形成共識後，回家繼續挑燈夜戰才能完成，我們很高興在八十九年十二月底前，已先完成其中的四本；九十年九月出版隨後的四本；九十一年八月又出版了四本。現在我們終於可以出版最後一本了。

在這裡要感謝所有參與人員的熱忱，由於大家無私的奉獻，使這套叢書的出現成爲可能。

周筱亭、黃敏晃

於民國 95 年 2 月

編輯要旨

- 一、本書為「國小數學教材分析」系列叢書中的一冊，該叢書預計出版十三冊，它們分別是：整數的數概念與加減運算、整數的乘除運算、長度、重量和容量、分數的數概念與運算、小數的數概念與運算、時間與速率、面積、整數的數量關係、比、統計與機率、體積和角度、幾何，八十九年度已出版前四冊，九十年九月出版隨後的四冊，九十一年六月再完成其中的四冊，今年（九十五年）四月終於可以出版最後一冊了。
- 二、編寫本系列叢書的目的在於一方面檢討臺灣省國民學校教師研習會「國民小學數學課程實驗小組」根據教育部八十二年公布的「國民小學數學課程標準」研發出的「國小數學實驗教材」和實驗後，由國立編譯館修訂並送審通過、出版的「部編本國小數學教科用書」內容，重新分析各主題的數學架構與兒童學習的認知結構；另一方面針對九年一貫課程數學學習領域中，各主題的能力指標，將前述「部編本國小數學教科用書」各單元中相關的活動與之對應，提供關心國民教育的人士參考。
- 三、本叢書各冊中所列之活動目標及內容，大都取材自國立編譯館的「部編本國民小學數學教學指引」一至十二冊，並已徵得該館同意引用，在此致謝。
- 四、限於篇幅，無法將各相關活動的詳細內容列於書內，但已標出各活動的出處（冊與單元），有興趣的讀者可參閱各冊教學指引。

目次

第一章 緒論	1
第一節 何謂幾何	1
一、幾何是應用科學	2
二、幾何是理想化的概念	2
三、幾何知識的發展	3
四、歐幾里得的《幾何原本》	4
五、幾何圖形作為數學解題的表徵工具	5
六、小學新的幾何教材的可能性	5
第二節 兒童幾何概念的發展	6
一、Van Hiele 夫婦的幾何發展理論	6
二、幾何圖形的分類活動發展	8
第三節 八十二年國民小學數學課程標準圖形與空間教材綱要	11
一、平面圖形教材綱要	11
二、立體圖形教材綱要	12
三、圖形與空間的術語與符號	13
第二章 圖形與空間教材的數學與認知結構	15
第一節 三角形	15
一、三角形的分類與命名	15
二、三角形的構成要素	18
三、三角形的定義	18
四、三角形的包含關係	20
五、三角形的畫法	23
六、三角形任兩邊和大於第三邊	24

七、三角形教學流程說明.....	25
第二節 四邊形.....	28
一、四邊形的分類與命名.....	28
二、四邊形的定義.....	30
三、四邊形的包含關係.....	32
四、定義與定理.....	34
五、四邊形教學流程說明.....	35
第三節 多邊形.....	38
一、凸多邊形與凹多邊形.....	38
二、多邊形與多邊形區域.....	38
三、等邊多邊形、等角多邊形、正多邊形的定義.....	39
四、全等多邊形.....	41
五、多邊形教學流程說明.....	42
第四節 圓與扇形.....	44
一、圓.....	44
二、圓周率.....	45
三、畫圓的工具—圓規.....	46
四、扇形.....	47
五、扇形的面積.....	47
六、圓與扇形教學流程說明.....	48
第五節 正方體與長方體.....	51
一、長方體與正方體的分類及命名.....	51
二、長方體與正方體的定義.....	53
三、長方體與正方體的視圖、展開圖、骨架及透視圖.....	54
四、長方體與正方體上的垂直與平行關係.....	56

五、長方體與正方體教學流程說明	58
第六節 球	62
一、球	62
二、球心與球的半徑及直徑	62
三、球的教學流程說明	63
第七節 柱體與錐體	65
一、柱體	65
二、錐體	67
三、柱體和錐體構成要素的分析	68
四、柱體和錐體的展開圖	70
五、柱體及錐體教學流程說明	72
第八節 垂直與平行	74
一、直角的命名	74
二、垂直的命名	75
三、平面圖形上的垂直和平行	76
四、空間中的垂直和平行	76
五、垂直與平行教學流程說明	78
第九節 全等與對稱	80
一、幾何圖形的基本變換—平移、旋轉、鏡射	80
二、全等圖形	81
三、對稱圖形	82
四、全等圖形與線對稱圖形的教學流程	86
第十節 相似(放大或縮小)	89
一、相似圖形	89
二、相似圖形的合成	89

◆ 國小數學教材分析

三、相似基本定理.....	90
四、放大或縮小.....	90
五、相似(放大或縮小)教學流程.....	91
第三章 八十二年版部編本教材分析.....	93
第一節 基本形體的初步認識.....	93
一、基本形體的初步認識活動.....	94
二、認識幾何量的前置經驗活動.....	106
第二節 基本形體的構成要素.....	109
一、形體的組合與切割活動.....	110
二、形體的製做活動.....	113
三、形體的構成要素.....	118
第三節 關係.....	132
一、構成要素間的關係.....	132
二、幾何物件間的關係.....	146
三、從實測到推論再到局部體系之建立.....	150
附件一 圖形與空間教學活動設計示例.....	152
示例一、「對稱圖形」教學活動設計.....	152
示例二、「放大圖與縮小圖」教學活動設計.....	163
附件二 八十二年部編本圖形與空間教材活動目標.....	192
一、平面圖形教材活動目標.....	192
二、立體圖形教材活動目標.....	197
參考文獻.....	199

第一章 緒論

本書共分三章，第一章簡要介紹幾何的意義、學童幾何知識的學習理論以及八十二年國小幾何教材的課程標準；第二章討論八十二年部編國小幾何教材的數學與認知結構；最後一章則嘗試從課程的理論架構來分析八十二年部編國小教材的規劃。

因為國小的幾何教材內容可以區分成討論幾何形體的「圖形與空間」，與討論如長度、角度、面積、體積與容量等的幾何量。而「圖形與空間」是本冊的討論重點；幾何量的內容僅討論與其學習有關的前置經驗，較完整的討論，請讀者參考本叢書規劃在「量與實測」領域的《長度》、《面積》、《體積和角度》以及《重量與容量》等四冊。

第一節 何謂幾何

Geometry(幾何學)一詞的拉丁文是 *geometein*，*geo* 是土地的意思，*metrein* 則是測量的意思，所以它的原意就是土地測量，研究物體形狀、大小、位置以及它們相互關係的學科，包括點、直線、圓、曲線、平面與立體等，以前也稱之為「形學」。

一般在歷史上，我們將幾何學的起源歸功於埃及人與尼羅河的長期互動，例如：古希臘歷史學家 **Herodotus**(希羅多德，約 485~430B.C.)在其書中的說法，認為尼羅河的氾濫，帶來了肥沃的土壤，但是也同時淹沒了河畔上的田地，為了解決疆界劃分的問題，需要每次重新丈量土地，負責測量土地的操繩師 (**rope-stretchers**)於是可以累積豐富的幾何知識，例如：他們以打結或作上記號的方式在繩子上作出等間距，再作為測量的標準。

而本節主要在簡介幾何知識的來源、性質與發展，並討論幾何圖形在數學各領域的重要性，最後提出在國小幾何教材領域裡新的可能性。

一、幾何是應用科學

幾何原屬於應用科學，並可回溯至新石器時代。仔細考察新石器時期的器具，即可發現，可就其形狀加以分類，例如：矛頭、割刀，刮刀與斧頭等；也可以看出形狀與功能有關，例如：將皮與肉分離，將皮下脂肪自皮上刮除等；也與原料，如燧石，以及加工方式，如捶打及磨有關。不同文化的石器也有些許風格上的差異，例如：農業文化居室取材於泥土，以版築或泥磚疊層方式建造，故形狀以方形為主；而游牧文化取材於獸皮、莖幹，以莖幹支撐覆於其上的獸皮建造，故形狀以圓形為主。由此汎例觀之，器物居室之形狀與功能，影響各民族對於方和圓的印象極大，更進而影響其審美觀與宇宙觀。

第一個獨一無二的人造物被創造時，也許來自靈感，並非來自一個慎密的計畫。但是當同類型的人造物陸續製造出來時，則產生修飾、調整與技法之傳習乃至技法之保存與傳播的現象。配合圖形之描繪，即美術的發展，以及語言與文字的使用，某種類似我們現今使用的垂直、平行、直角、直線、平面與等長等的語詞必定陸續出現。

除了人造物的製作外，天空的日月星辰的觀測紀錄，以及農業開始，人口增加之後的土地經營，乃至收成稅制的建立，又增添了人們對平面與立體圖形的知識，例如：當計物數發展出高階單位，如十、百、千、萬、…時，透過單位的制定與測量，現在中年級兒童也具有的长度、面積、體積與角度等的完整概念也跟著出現了；最後，當人類開始長距離旅行，需常與遠方的人來往時，除了指北針的使用，地圖的繪製與使用，也會變得愈來愈精確。

二、幾何是理想化的概念

圓規和矩尺必定是人類在製作宮室器物時，很早發明的工具。圓盒與圓蓋做得不準確，一定蓋得不好，但是如果做得準確，一定蓋得很好，且密閉性能佳。這種準確的標準，就形成垂直、平行、直線與平面等是什麼的理想化的概念。理想化概念使得任何人造物與標準之間產生差距，但是類似的人造物與標準符合的狀態又可以加以比較。

最早而比較重要的幾何知識一定就是與尺規運用的相關的知識。這些知識與理想化的圖形概念有密切的關係，它們形成一種存在於腦袋中的心智事物，但有明確的外顯表徵方式，足以引導人們把幾何裡心智物件之間的關係作推理。而數學中更抽象的幾何物件，則無明確的外顯表徵方式。

三、幾何知識的發展

與裡外、上下、左右、前後、相交、相離或阻擋等有關的知識，它的特徵是與長度的變化無關，稱為拓樸(或位相)幾何學。**Piaget(皮亞傑)**指出，它是兒童最早形成的幾何知識。而與剛性運動，或物體作不變形的平移、旋轉、翻轉有關的知識，它的特徵則與長度有很密切的關係，稱為歐幾里得(或度量)幾何學，自有公立教育制度以來，歐幾里得幾何學就是中學幾何教材內容的主體。

由於人類視覺的物理原理，主要是將空間中物體所反射的光，射入視網膜，再予以分析而感知，因此錐狀投影的分析配合此種觀點繪成的透視畫法形成的美術作品，刺激了射影幾何的發展。射影幾何中有許多直線共點與多點共直線，以及它們與具比例關係的諸線段長的關係，例如下圖 1-1-1，在三角形 **ABC** 中，做角 **A** 的內分角線 **AE**，與其外角的分角線 **AF**，則 **B、E、C、F** 四點在線 **BC** 上形成調和點列，且具有 $BE : EC = BF : FC$ 的關係*，而任何與 **AB, AE, AC, AF** 或其延長線相交的直線，其交點亦成調和點列。

在紙上畫出互相垂直的一對直線後，即可建立紙上任何一點與一數對 $(x,y) = (a,b)$ 的對應，在此關係下，方程式 $f(x,y) = 0$ 的解，即可以表現在平面上為曲線圖形，例如： $x^2 + y^2 = 25$ 表示圓心在 **x** 軸和 **y** 軸的交點，半徑為 5 的圓，而過圓上一點 $(3,4)$ 的切線為 $3x + 4y = 25$ ，用這種方式研究平面圖形，叫做平面解析幾何學。

自從微積分發明後，解析幾何學更進而分化為微分幾何學以及代數幾何學，前者專門討論面積、體積與曲線或曲面的曲率等；後者則專門討論多個曲線與曲

*若在邊 **AB** 上取一點 **G**，讓 $\angle AEG = \angle AEC$ ；在射線 **BA** 上取一點 **H**，讓 $\angle AFH = \angle AFC$ 。則由三角形全等的性質，可以推得 $EG = EC$ ， $FH = FC$ ，且 $EG // FH$ ，所以 $BE : EG = BF : FH$ ，故得 $BE : EC = BF : FC$ 。

面，如何透過多項式方程式的構成要素，例如：用次數、係數等表現出來。

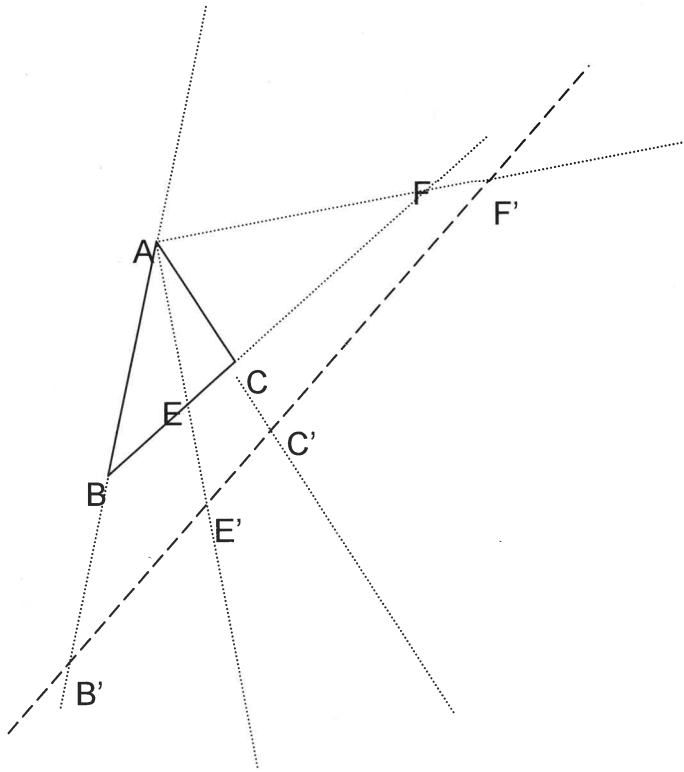


圖 1-1-1 點 B、E、C、F 形成調和點列；點 B'、E'、C'、F' 亦為調和點列。

四、歐幾里得的《幾何原本》

古希臘人係印歐語系亞利安人的一支。亞利安人爲求種族強大，制止內鬥，規定臣下若有爭端，則在酋長面前辯論，辯論結束由酋長宣判，之後就執行宣判的結果，並不得再有爭議。由此，發展出雄辯術及邏輯學。當他們的人旅行至巴比倫及埃及等地時，發現他們雖有豐富的幾何知識，這些知識主要來自天文觀測、宏偉的宗教建築與整理氾濫後的耕地等經驗，但是缺乏有系統的整理。而古希臘人經過不斷的努力，至亞歷山大時期，希臘幾何學家 **Euclid**(歐幾里得)有系統的整理了當時的幾何學知識寫成了 **Element**，中譯爲《幾何原本》，成爲了知識的典範，採用公理化方法，將平面幾何的知識，由顯而易見的事實，逐步推演至複雜的事實。我國有譯本是在明萬曆三十五年(1607年)徐光啓與義大利人利瑪竇合譯前六卷，清咸豐(1856年)李善蘭與英國人 Alexander Wylie 合譯後九卷。

歐洲文藝復興後，自阿拉伯人手中繼承了希臘的幾何傳統，基督教會更將幾何學當成教士的必修科目。後來公共學校系統建立後，平面幾何學成爲中學的必修科目。雖然內容相較於《幾何原本》有改進，但系統上，精神上，則與《幾何原本》並無差別。而目前傳統小學的幾何教材，當然順理成章地成爲國中幾何的先備經驗，因此《幾何原本》中一些較基本的圖形的名稱，其構成要素的名稱，以及頂點與邊的個數就成爲教學內容。另外，全等、相似、線對稱與點對稱等也都成爲小學的教材。其實，這些教材選擇的正當性應當詳加檢討。

五、幾何圖形作為數學解題的表徵工具

范氏圖（Venn diagram）是用以解釋集合的聯集與交集的關係，流程圖用以解釋函數的運算，微積分學的許多基本觀念也都有藉助函數圖形曲線來闡釋，這些都是使用圖形來表徵待解的問題。

兒童在未知數概念的發展時，使用線段圖表徵問題，從而建立未知量與已知量關係的經驗，這也是幾何圖形的重要用途之一。

六、小學新的幾何教材的可能性

社會資源增加後，會豐富幾何教材的範圍，例如：會使用地圖，一個人便可在野外與城市中自在地活動，但野外的地圖與城市的地圖有著極大差異。此外，木板、紙張、包心菜都有所謂生成方式，適當地辨識後，若順從其特性去處理，便能善用其利，這是從生活需求來看教材的可能內容。此外，許多 DIY 的方法都應該學習，例如：兒童可以從事勞作或工藝，如陶藝、折紙、插花、雕刻、剪貼、編織等，這些技術都是幾何的知識。這樣，幾何便是器物的製作和設計的基礎，也是利用資訊使自己能夠自由活動的基本知識所在。

曾經一個有趣的教學案例觀察是，當初 LOGO 這種簡單畫出平面圖形的程式語言，配合馬達驅動的水針筆，拿來教低、中年級的小孩使用時，趣味盎然的小孩斷然對參觀者否認她在做數學。這個實在的故事顯示了幾何教學活動廣大的可能性，朝此方向發展的幾何課程也會非常豐富，這也是社會資源增加後，可以考慮的幾何教材發展的方向。

第二節 兒童幾何概念的發展

一、Van Hiele 夫婦的幾何發展理論

依據荷蘭數學教育家 Van Hiele 夫婦對兒童幾何思考的研究指出，低年級學童能辨識出正方形或長方形，也能使用數學上的標準名稱來稱呼這些圖形，但是不知道如何給正方形或長方形下定義。中年級的學童雖然能透過幾何圖形的構成要素來檢驗一個圖形是否為正方形或長方形，例如：四個角都是直角的四邊形是長方形；四個角都是直角，而且四個邊也相等的四邊形是正方形，但是學童不見得理解「正方形一定是長方形」的集合包含關係。

Van Hiele 夫婦認為學童會有這些認知上的差異，主要的原因是兒童對幾何知識的掌握方式不同所致，他們將幾何思考的模式區分成五個發展的層次，每一個層次都有其發展的特徵，八十二年部編本國小數學教材(本書中簡稱本教材)幾何課程的設計即以此理念為根據，其概略特徵敘述如下：

(一) 視覺期(Visualization)—第零層次

此層次的學童是透過視覺觀察實物，由實物的輪廓來辨識形體或圖形，而經常接觸討論某類的圖形，其形狀差異不大，例如：三角形、正方形、長方形與圓等，學童可以透過移動、旋轉與翻轉等方式，直觀地辨識某類圖形。

此時學童可以使用非標準的數學語言，例如：學童稱呼某一個長方形，是瘦瘦的、長長的或是像門的樣子；稱呼某一個正方形，是方方正正的樣子。也可以使用標準的數學語言來描述圖形的形狀，例如：使用「正方形」、「長方形」、「圓形」與「三角形」等標準的數學語言指稱圖形的形狀，但是並不理解這些數學語言的定義，例如：用正方形的構成要素來定義一個正方形，是有四個邊與四個角及其關係是四個邊等長與四個角都是直角。

針對本層次的學童，本教材安排許多透過感官的操作活動，讓學童進行分類、造形、滾動、堆疊、描繪、著色、觸摸與複製等活動，幫助學童注意到圖形的構成要素。

(二) 分析期(Analysis)—第一層次

此層次的學童應該具有豐富的視覺辨識經驗，能進一步觀察圖形構成要素與圖形之間的關係，可以開始尋找出某一類圖形的共同性質，例如：以圖形組成要素來說，當注意到長方形的邊長時，學童可以發現長方形都有四個邊，這四個邊剛好分成兩組，一組是兩個長邊，一組是兩個短邊，而且兩個長邊等長，兩個短邊也等長。當注意到長方形的角時，學童可以發現長方形都有四個角，這四個角都相等，而且每一個角都是直角。而若以圖形之間的關係來說，例如：「長方形」與「此長方形對角線相交的圖形」，此為兩個圖形，當注意到長方形的對角線時，學童也可以發現長方形都有兩條對角線，而這兩條對角線等長且互相平分。

雖然此時學童可以發現長方形的四個角都是直角、對角線等長、對角線互相平分、兩雙對邊分別相等或兩雙對邊互相平行，但是學童無法解釋這些幾何性質間的關係，例如：無法透過推理，理解為什麼四個角都是直角的四邊形，它們的對角線一定會等長且互相平分。

針對本層次的學童，本教材安排許多圖形的製作活動、組合分割活動以及檢驗活動，幫助學童觀察製作後的圖形構成要素與原圖形構成要素間的關係，觀察原圖形與組合、分割後圖形構成要素間的關係，以及熟悉各種圖形的性質，幫助學童探索圖形與圖形之間的關係。

(三) 關係期(Relation)或非形式演繹期(Informal Deduction)—第二層次

此層次的學童已經能掌握各種圖形的構成要素，可以進一步探索圖形內在屬性關係，以及不同類圖形之間的包含關係，例如：兩雙對邊相等的四邊形一定是平行四邊形；對角線等長且互相平分的四邊形一定是長方形。此時期的學童不必將所有的屬性都描述出來之後，才能確認某一類圖形。

此層次的學童也能夠理解長方形一定是平行四邊形的意義，也能夠推論當平行四邊形有一個角是直角時，該平行四邊形一定是長方形。學童也能夠掌握三角形的外角等於對應的二個內角和， n 多邊形的內角和為 $(n-2) \times 180^\circ$ 的意義，這些都是此層次學童能透過理解其內在關係後建立的概念，而不只是公式的記憶。

(四) 形式演繹期(Formal Deduction)—第三層次

這裡演繹的意義是指在一個公設系統中去建立幾何理論，故此層次的人們

能用演繹邏輯證明定理，並建立相關定理的網脈結構關係。他們可以在一個公設系統中建立理論，他們不只是記憶圖形之間的各種性質，並且能夠證明與理解一個定理可以有很多不同證明的方法；他們也能理解一個定理的充份或必要條件的內在關係，並發現正逆命題間的差異性，國小學童絕少能達到此層次。

(五) 嚴密性(Rigor)或公理性(Axiomatic)—第四層次

達到這個層次的人們，可以在不同的公設系統中建立定理，並分析或比較這些定理的特性，例如：能區分歐氏幾何與非歐幾何系統間的差異，也可以理解抽象的幾何推理，甚至可以自創一套幾何公設系統。一般的人很難達到這個層次，即使是以數學為專業者也不易達成。

根據 Van Hiele 夫婦研究顯示，上述五個層次都有其序性，學習者必須擁有前一個層次的概念與策略，才能有效地進行下一個層次的學習活動。同時，由於教材內容屬性的差異，也會影響學習者落入不同的層次之中，例如：學童對平面上兩直線平行或垂直的概念已經進入第一層次的分析期，但是對空間中兩平面、兩直線或平面與直線平行或垂直的概念，可能還停留在第零層次的視覺期。

本教材預估大部分的國小低年級學童大多數都在第零層次的視覺期；中年級學童大約可以達到第一層次的分析期；高年級的學童大約在第一層次分析期到第二層次關係期的過渡時期。

二、幾何圖形的分類活動發展

Piaget(皮亞傑)曾以部分與全體的關係來研究類別組成的問題，皮亞傑將分類能力的發展區分成三個階段，分別是形象聚集階段、非形象聚集階段與分類獲得階段。

第一階段是形象聚集的階段，學童透過視覺將物體的形狀分類，例如：將形狀不同的長方形與正方形歸成不同的種類。

第二階段是非形象聚集的階段，此時學童已經掌握物體的某些屬性，能從功能性的觀點來分類，將同一屬性的物體歸成一類，視為同一個集合，但是無法掌握這些集合間的包含關係，例如：學童尚不能透過邊、角的關係區分長方形、菱

形與正方形；或透過平行的關係區分梯形與平行四邊形，雖然知道這些四邊形都有四個邊，所以也都是四邊形，但是無法理解這些集合間的包含關係，例如：不知道正方形是否也是長方形，長方形或菱形是否也是平行四邊形。

第三階段為分類能力獲得的階段，此時學童已經掌握部分與全體的關係，能夠處理物體種類間的包含關係，例如：知道正方形一定是長方形，正方形也一定是菱形，而長方形不一定是菱形等的包含關係。

本教材將幾何圖形的分類活動區分成三個階段來考量，第一階段以視覺性的觀點看問題時，學童透過視覺將幾何圖形的形狀歸類；第二階段以功能性的觀點看問題時，學童透過圖形的構成要素將幾何圖形分類，但是不理解這些幾何圖形所成的集合與集合間的包含關係；第三階段以關係性的觀點看問題時，學童掌握全體與部分的關係，能理解幾何圖形所成集合之間的包含關係，可以從不同的觀點進行分類。其中視覺性的觀點大約是 **Van Hiele** 夫婦幾何發展理論的第零層次，功能性的觀點大約是第一層次，關係性的觀點大約在第一層次到第二層次之間。

例如：圖 1-2-1 像一個臉部，其輪廓是圓型，兩個眼睛，一個鼻子，一個嘴巴都是三角形，耳朵部分也是三角形，但是和臉連接的那一部分是曲線的人頭圖像，當要求學童回答圖像中有多少個三角形時，不同層次的學童可能產生不同的答案。

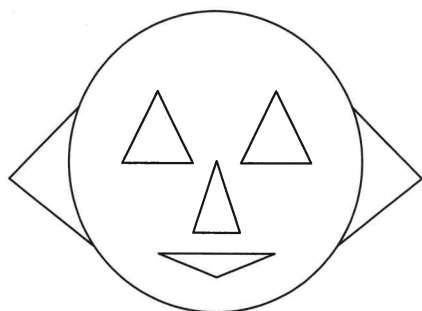


圖 1-2-1

透過視覺性觀點解決問題的學童，若將耳朵部分視為三角形，學童可能回答有 6 個三角形，因為視覺性觀點的學童易容忽略三角形三個邊的構成要素是直線段。

透過功能性觀點解決問題的學童注意到三角形的構成要素，知道耳朵不是三

角形，因為其中有一個邊不是直線段，所以只有 4 個三角形。

又如：圖 1-2-2 也像一個臉部，其輪廓是圓型，兩個眼睛是正方形，一個鼻子，一個嘴巴都是長方形，耳朵部分是三角形，但是和臉連接的那一部分是曲線的人頭圖像，當要求學童回答圖像中有幾個長方形，不同層次的學童也可能產生不同的答案。

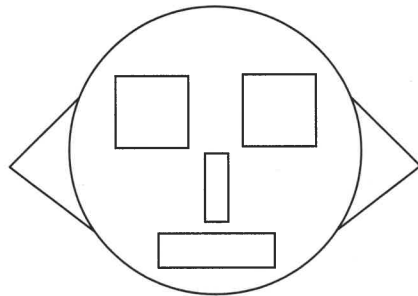


圖 1-2-2

透過視覺性觀點解決問題的學童只有一種答案，因為正方形不像長方形，因為圖中長方形長邊和寬邊長度的差異很大，因此回答有 2 個長方形。

透過功能性觀點解決問題的學童可能有兩種不同的答案。第一種答案是有 4 個長方形，第二種答案是有 2 個長方形。第一種答案的學童注意到四邊形的構成要素，知道四個角都是直角的四邊形是長方形，而正方形的四個角也都是直角，因此圖中有 4 個長方形。第二種答案的學童也注意到四邊形的構成要素，但只注意到四邊等長的正方形與有兩雙對邊等長的長方形，因此圖中有 2 個長方形。

透過關係性觀點解決問題的學童和透過功能性觀點解決問題的學童一樣，也可能有兩種不同的答案，只是他們判斷正方形是否也是長方形的想法不同，一是透過正方形是否也滿足長方形定義的方式解決問題，因為正方形所成的集合包含於長方形所成的集合中，因此所有的正方形一定也是長方形，所以是 4 個長方形。另一是透過集合的包含關係解決問題，知道正方形是長方形的一種，但是受到「一定要回答限制條件最嚴格的答案」這個約定俗成的影響，例如：畫出一個正方形，學童回答它是四邊形，它是平行四邊形，它是長方形都不會得到分數，只有回答正方形時才能得到分數，雖然正方形也是長方形，但是正方形的條件限制比長方形嚴格，因此判定圖中有 2 個正方形，2 個長方形，所以得到有 2 個長方形的答案。本教材建議教師在評量時，題意一定要明確，如果題意不明確，上述兩個答案都應該給分。

第三節 八十二年國民小學數學課程標準圖形與空間教材綱要

本教材是依據八十二年教育部修正發布的國民小學數學課程標準所編寫的國民小學數學教科書，因此本文先呈現八十二年國民小學數學課程標準中「圖形與空間」的教材綱要，以及「術語與符號」中屬於圖形與空間的相關名詞，因為它們是編寫教科書的依據。

在圖形與空間教材綱要中，又將圖形與空間區分成「平面圖形」與「立體圖形」兩部分，而術語與符號教材綱要中，則區分成數與計算、量與實測、圖形與空間、統計圖表以及數量關係五個部分。以下羅列八十二年版國民小學數學課程標準中平面圖形教材綱要、立體圖形教材綱要以及術語與符號中關於圖形與空間教材綱要的內容。

一、平面圖形教材綱要

一年級

- 複製實物的面，分辨出類似三角形、四邊形及圓形等圖形板的圖形。
- 觀察實物與圖形，辨別直線與曲線。
- 利用竹籤、釘板等構成簡單的平面圖形。

二年級

- 利用圖形板，拼排圖形，數出各圖形的數量。
- 利用相同的數量，全等的圖形板，拼排不同形狀的圖形。
- 利用不同的數量，全等的圖形板，比較圖形的大小。
- 透過摺紙、剪紙、鏡射等活動，觀察線對稱的現象。
- 利用以公分為刻度單位的直尺，畫出指定長度的線段。

三年級

- 透過製作的活動，了解三角形，四邊形的構成要素：角、邊、頂點及其個數；

並認識周界及周長。

- 做出或畫出滿足部分條件(指定一邊或二邊的長度，周長或一些頂點)的三角形或四邊形。
- 透過摺紙製作直角，並在生活情境或圖形中辨認直角。
- 利用直角，了解長方形、正方形、直角三角形的特性。
- 角的初步概念。

四年級

- 使用量角器量角度及畫角。
- 透過製作的活動，了解等腰三角形、正三角形的特性，並作圖。
- 透過製作的活動，了解圓心、半徑、直徑、圓周。
- 透過直角認識直線的垂直與平行。
- 由邊長的相等或垂直與平行的觀點，把四邊形分類並命名。
- 由此認識長方形、正方形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形。
- 圓規的使用。

五年級

- 透過圖形的疊合，認識全等的多邊形。
- 透過實測活動，認識圓周率。

六年級

- 透過操作活動，認識線對稱圖形。
- 透過操作活動，了解縮圖與擴大圖的關係。
- 了解比例尺的意義及表示方法，並應用於地圖的閱讀。

二、立體圖形教材綱要

一年級

- 從實物中，分辨出類似長方體、圓柱體、球體、角錐等模型的形體，並觀察

實物的面，分辨平面與非平面，進而認識三角形、四邊形與圓形。

二年級

- 利用各種積木，堆積造形並數出各積木的數量。
- 利用相同數量，全等的積木，堆積不同的形體。
- 利用不同數量，全等的積木，比較形體的大小。

三年級

- 透過製作盒子及其骨架的活動，了解長方體和正方體的構成要素：面、邊、頂點及其個數；並認識其透視圖和展開圖。

四年級

- 球的初步概念。

五年級

- 觀察長方體、正方體中，邊與面的垂直與平行關係。

六年級

- 透過實物與圖片，辨認柱體與錐體。

三、圖形與空間的術語與符號

一年級

- 直線、曲線、面、平面。
- 三角形、正方形、長方形、圓形。

二年級

- 全等、對稱。

三年級

- 角、邊、頂點、周界、周長、直角。
- 直角三角形、四邊形。
- 正方體、長方體。
- 透視圖、展開圖。

四年級

- 圓心、半徑、直徑、圓周。
- 等腰三角形、正三角形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形。
- 球。
- 垂直、平行。

五年級

- 多邊形、扇形。
- 圓周率。

六年級

- 角柱、角錐、圓柱、圓錐。
- 側面、底面。
- 縮圖、擴大圖、比例尺。
- 線對稱圖形。

第二章 圖形與空間教材的數學與認知結構

本章分成十節來討論國小幾何教材的數學與認知結構，一至四節分別為三角形、四邊形、多邊形、圓與扇形等平面圖形的部分；五至七節分別為正方體與長方體、球、柱體與錐體等立體圖形的部分；第八節則討論特殊的空間關係—垂直與平行；最後兩節則討論在國小裡簡單的幾何變換題材—全等與對稱及相似(放大或縮小)，而在附件一中，本書也收錄了「對稱圖形」以及「放大與縮小圖」的教學活動示例。

本章各節中的最後都會將所討論的題材做教學流程的說明，所羅列的教學活動目標與第三章中各節羅列的教學活動目標在分類上不同，是因為第二章與第三章的分析討論方式不同所致。而在附件二中，我們則把有關八十二年部編本「圖形與空間」所有相關的教材活動目標附上，讀者可逕行參考。

第一節 三角形

一、三角形的分類與命名

數學上常透過三個邊的長度是否相等、三個角的角度是否相等以及其最大內角是直角、銳角或鈍角，將三角形分類與命名，本節討論這三種方式裡，所進行的三角形分類與命名活動。

(一) 邊長是否相等的三角形分類

依據邊長是否相等的關係來分類，可以將所有的三角形區分成如下三類：

1. 三個邊都相等的三角形

如果三角形三個邊的長度都等長，稱呼這些三角形為三等邊三角形很適合，但是三個邊的長度都相等的三角形，它的三個角的角度也會相等。數學上稱各邊的長度都相等，而且各角的角度都相等的多邊形為正多邊形，因此我們直接稱呼

三個邊都相等的三角形為正三角形。

學童在進行三個邊都相等三角形的命名活動時，尚未理解正多邊形中「正」是邊與角都要相等的意義，因此本教材接受學童使用三等邊三角形這種非正式的數學名稱，也接受正三角形這種正式的數學名稱，並提醒教師們注意，當學童將三邊等長的三角形命名為正三角形時，他們心中正三角形名稱的意義和數學上正三角形的意義並不盡相同，因此在引入正多邊形的意義後，一定要回頭重新檢查或澄清，幫助學童理解正三角形是三個邊的長度都等長，三個角的角度也都相等的三角形的意義。

2. 恰有二個邊相等的三角形

如果一個三角形恰有二個邊的長度相等，稱呼這些三角形為二等邊三角形或等腰三角形都很恰當。在命名活動開始時，本教材先接受二等邊三角形這種非正式的數學名稱，但是在活動結束時，要求學童都使用等腰三角形這種數學上正式的名稱。

但是數學上常將有(至少)二個邊相等的三角形命名為等腰三角形，也就是說，恰有三個邊相等，以及恰有兩個邊相等的三角形都是等腰三角形，為了不讓學童混淆兩者的意義，首引等腰三角形命名活動時，本教材只討論恰有兩邊等長的三角形，但是當學童質疑正三角形是否也是等腰三角形時，建議教師透過問話：「正三角形有兩個邊相等嗎？所以正三角形是等腰三角形嗎？」，幫助學童形成正三角形也是等腰三角形的共識。

3. 三個邊都不相等的三角形

我們可以稱三個邊都不相等的三角形為不等邊三角形，在國小階段，這類三角形沒有特殊的性質可以討論，因此本教材不進行此類三角形的命名活動。

(二) 角度是否相等的三角形分類

因為三角形邊和角的關係是相對的，學童可以仿邊長是否相等的命名方式，同步進行角度是否相等三角形的命名活動。依據角度是否相等的關係來分類，也可以將所有的三角形區分成如下三類：

1. 恰有二個角相等的三角形

本教材定義有(至少)二個邊相等的三角形為等腰三角形，因為這樣的定義與

等腰三角形名稱的意義一致，至於兩個角相等的三角形是否也可以稱呼為等腰三角形，本教材認為等腰三角形的定義只能有一個，當學童察覺「兩等角三角形一定是兩等邊三角形，兩等邊三角形也一定是兩等角三角形」後，可以接受學童透過兩個角是否相等的方式來判斷一個三角形是否為等腰三角形，但是在課堂活動中，當學童使用兩個角相等的方式來命名等腰三角形時，建議教師透過問話：「兩個角相等的三角形，兩個邊也會相等嗎？兩個邊相等的三角形是等腰三角形嗎？」，澄清等腰三角形的定義。

2. 三個角都相等的三角形

本教材定義三個邊相等，三個角也相等的三角形為正三角形，因此接受學童命名三個角相等的三角形為三等角三角形，三個邊相等的三角形為三等邊三角形，等待引入正多邊形的意義後，再回頭澄清三個邊相等的三角形，三個角也會相等，三個角相等的三角形，三個邊也會相等，因此可以命名為正三角形，並形成三等邊三角形，三等角三角形和正三角形是同一個集合的共識。

如果學童已經先將三等邊三角形命名為正三角形，在討論角的分類時，再將三等角三角形命名為正三角形，但是沒有看到邊與角彼此會相等的關係時，會導至正三角形有兩種不同的定義。本教材建議教師透過問話「三個角都相等的三角形，三個邊也會相等嗎？三個邊都相等的三角形是正三角形，三個角都相等的三角形，也可以稱呼為正三角形嗎？」，讓正三角形的定義只有一個。如果班上多數學童都能察覺三個角都相等的三角形，三個邊也會相等；三個邊都相等的三角形，三個角也會相等，本教材也不反對教師定義三個邊相等，三個角也相等的三角形為正三角形。

3. 三個角都不相等的三角形

如同三個邊都不相等的三角形，在國小階段，這類三角形沒有特殊的性質可以討論，因此本教材也不進行此類三角形的命名活動。

(三) 三角形內最大角是直角、銳角或鈍角的三角形分類

數學上透過三角形內最大角是直角、銳角或鈍角的方式，將所有的三角形區分成直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形三類。如果三角形內最大角是鈍角(另兩個角一定是銳角)，稱此類三角形為鈍角三角形；如果三角形內最大角是直角(另

二個角一定是銳角)，稱此類三角形為直角三角形；如果三角形內最大角是銳角(另二個角也一定是銳角)，稱此類三角形為銳角三角形。

二、三角形的構成要素

頂點、邊和角是三角形的構成要素，在命名頂點、邊和角時，應幫助學童掌握它們的幾何特性，例如：三個邊是區隔圖形內部及外部的直線段，頂點是邊的端點重合為一點的地方，角是在頂點附近，由一邊要轉到另一邊的局部圖形。

給定三個不共線的點，可以決定唯一的一個三角形；給定滿足任兩邊和大於第三邊的三個邊，也可以決定唯一的一個三角形(**SSS**)；給定兩個邊和這兩個邊的夾角，也可以決定唯一的一個三角形(**SAS**)；但是，給定兩個邊及一個角(不是這兩個邊的夾角)，只有在這個角是直角時，才能決定唯一的一個三角形(**RHS**)，如果這個角不是直角，可以有兩個不同的三角形。

雖然給定三個角，不能決定唯一的一個三角形(可以得到很多相似的三角形)，但是給定兩個角和一個邊(不是這兩個角共有的邊)，或給定一個邊和這個邊的兩個夾角，都可以決定唯一的一個三角形(前者是 **AAS**，後者是 **ASA**)。

本教材將角區分為圖形角、張開角與旋轉角三類(請參閱本叢書「國小數學教材分析一體積和角度」一冊的說明)，其中張開角討論的是角張開程度的大小，旋轉角討論的是角旋轉程度的大小及旋轉方向，它們討論的重點都是角度，而圖形角是三角形構成要素的角，指的是三角形頂點的局部，或兩線段加上共同的頂點，並不涉及角度的概念。

三、三角形的定義

數學上透過邊、角是否相等及大小的關係區分出一些常見的三角形，依據八十二年課程標準中術語與符號部分，本教材引入正三角形(三等邊三角形或三等角三角形)、等腰三角形、直角三角形、鈍角三角形、銳角三角形與等腰直角三角形等的命名活動。

因為三角形的邊和角的關係是相對的，例如：若三角形有兩個邊相等，則這兩個邊相對應的兩個角也會相等；若三角形有兩個角相等，則這兩個角相對應的

兩個邊也會相等；若三角形中甲邊比乙邊長，則甲邊所對應的角會比乙邊所對應的角大；若甲角的角度比乙角的角度大，甲角所對應的邊也會比乙角所對應的邊長。

三角形的命名與定義可以透過邊，也可以透過角，以等腰三角形為例，可以透過有兩個邊相等的關係來命名，也可以透過有兩個角相等的關係來命名，本教材採取與數學名稱一致的方式來命名，定義有兩個邊相等的三角形為等腰三角形。

下面是本教材針對課程標準術語與符號部分的要求，出現的三角形定義：

- 三角形：平面上由三條首尾相連的直線段所圍成的封閉圖形，稱之為三角形。
- 直角三角形：本教材定義，三角形內最大的角是直角的三角形為直角三角形，也就是說，恰有一個直角及二個銳角的三角形是直角三角形，當學童有很多判斷直角三角形的經驗後，教師也可以接受學童透過「有一個角是直角的三角形」的方式來判斷一個三角形是直角三角形。
- 鈍角三角形：本教材定義，三角形內最大的角是鈍角的三角形為鈍角三角形，也就是說，恰有一個鈍角及二個銳角的三角形是鈍角三角形，當學童有很多判斷鈍角三角形的經驗後，教師也可以接受學童透過「有一個角是鈍角的三角形」的方式來判斷一個三角形是鈍角三角形。
- 銳角三角形：本教材定義，三角形內最大的角是銳角的三角形為銳角三角形，也就是說，三個角都是銳角的三角形是銳角三角形。
- 等腰三角形：本教材定義，(至少)有兩個邊相等的三角形為等腰三角形，因此正三角形也是等腰三角形。
- 正三角形：本教材定義，三個邊都相等,而且三個角都相等的三角形為正三角形，當學童能掌握三個角都相等的三角形，三個邊也會相等，三個邊都相等的三角形，三個角也會相等，教師也可以接受學童透過「三個邊相等」或「三個角也相等」的方式來判斷一個三角形是正三角形。
- 等腰直角三角形：本教材先定義直角三角形，再定義直角的兩個邊相等的三角形為等腰直角三角形，當然，等腰三角形中，兩腰的夾角為直角的三角形

也是等腰直角三角形。

四、三角形的包含關係

(一)集合與包含關係

為清楚說明包含關係的意義，底下我們先介紹一些數學上集合的語言後，再介紹三角形的包含關係。

如果一個集合 A 中的每一個元素，都屬於另一個集合 B ，我們稱集合 A 是集合 B 的部分集合，或稱集合 A 包含於集合 B ，例如：三角形是由三條線段圍成的圖形，正三角形是由三條等長線段圍成的圖形，正三角一定是一個三角形，所以正三角形所成的集合包含於三角形所成的集合中。

數學上常使用范氏圖(Venn diagram)來表徵集合間的包含關係，圖 2-1-1 表示集合 B 包含於集合 A 。

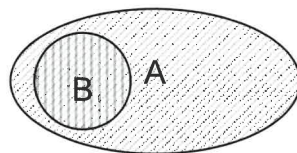


圖 2-1-1

圖 2-1-2 表示集合 A 和集合 B 的交集(共同元素所成的集合)是集合 C 。

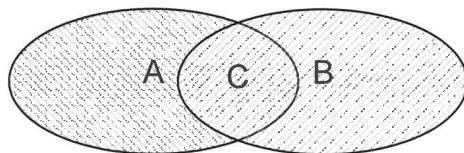


圖 2-1-2

圖 2-1-3 表示集合 C 包含於集合 A 和集合 B 的交集中，但是集合 C 不是集合 A 和集合 B 的交集。

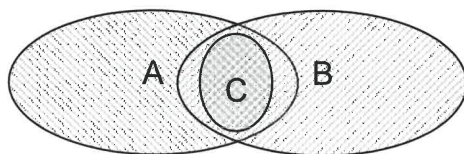


圖 2-1-3

圖 2-1-4 表示集合 A 和集合 B 的交集是空集合，沒有共同的元素。

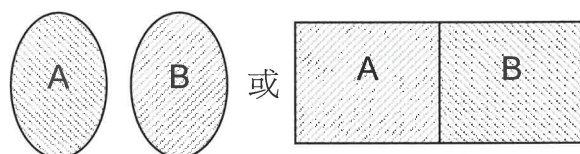


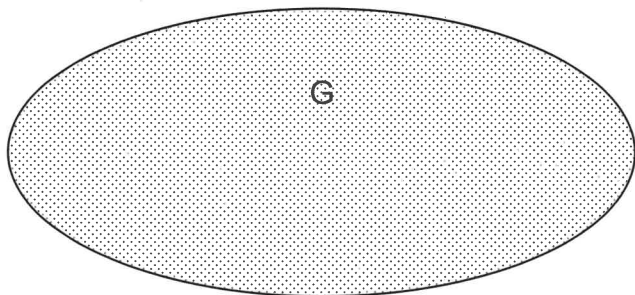
圖 2-1-4

(二) 三角形的分類

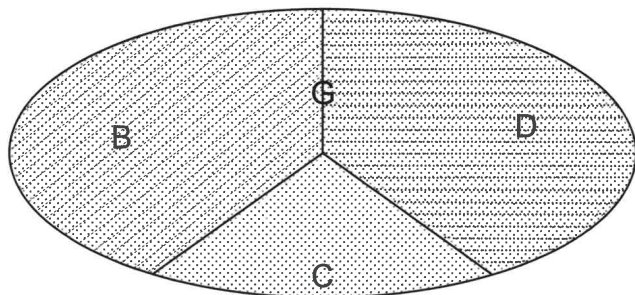
令 **A** 是正三角形所成的集合，**B** 是直角三角形所成的集合，**C** 是銳角三角形所成的集合，**D** 是鈍角三角形所成的集合，**E** 是等腰三角形所成的集合，**F** 是等腰直角三角形所成的集合，**G** 是所有三角形所成的集合。

圖 2-1-5 使用范氏圖表徵上面 7 個集合的包含關係，我們透過三角形內最大角是直角、鈍角或是銳角，將所有的三角形區分成直角三角形(**B**)、鈍角三角形(**C**)、銳角三角形(**D**)三個部分，因為每一個三角形，一定是直角、銳角或鈍角三角形，而且只能是其中的一種。

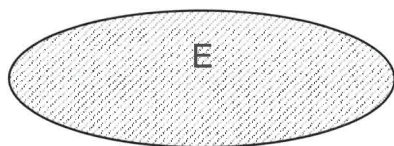
等腰三角形(**E**)和直角、銳角、鈍角三角形都有交集，它們的交集分別是等腰直角三角形(**F**)、等腰銳角三角形、等腰鈍角三角形。其中等腰直角三角形(**F**)是等腰三角形(**E**)和直角三角形(**B**)的交集，而正三角形(**A**)包含在等腰銳角三角形內，但是並不等於等腰銳角三角形。



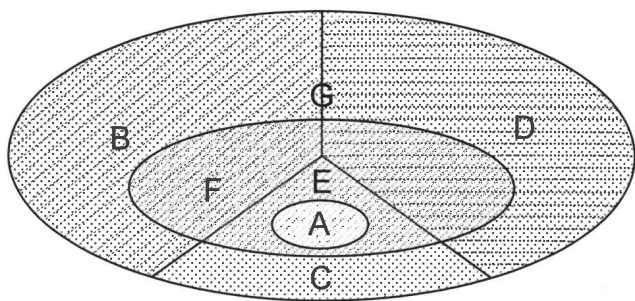
(G 表示所有三角形所成的集合)



(B、C、D 依序表示直角、銳角與鈍角三角形所成的集合，將所有的三角形(G)區分為三個部分)



(E 表示所有等腰三角形所成的集合)



(F 表示等腰直角三角形，是等腰三角形(E)與直角三角形(B)的交集；A 表示正三角形，是等腰三角形(E)與銳角三角形(C)交集的部分集合)

圖 2-1-5

五、三角形的畫法

三角形是由三個邊及三個角組成的，只要給定三個邊的長度(SSS)，或給定兩個邊的長度及這兩邊夾角的角度(SAS)，或給定一個邊的長度及兩個角的角度(AAS 或 ASA)，都可以決定一個三角形。

以正三角形的畫法為例，因為可以利用 SSS，SAS，ASA 三種方法畫出正三角形，在國小階段，SSS 的畫法可以滿足尺規作圖的約定，但是 SAS 與 ASA 的畫法必須使用量角器，若學童學會這三種畫法，就可以類比畫出其它形狀的三角形。

(一) SSS 畫法

先畫出一條和給定邊長等長的線段 AB，再以線段的兩個端點 A 和 B 為圓心，給定的邊長為半徑畫弧，兩弧相交於 C 點，連接 A、C 兩點和 B、C 兩點，就可以得到一個正三角形 ABC。

(二) ASA 畫法

先畫出一條和給定邊長等長的線段 AB，再以 A、B 為端點，線段 AB 為兩個角共同的邊，用量角器畫出夾角是 60 度的兩個角，這兩個角的另一個邊相交於一點 C，連接 A、C 兩點和 B、C 兩點，就可以得到一個正三角形 ABC。

(三) SAS 畫法

先用量角器畫出一個 60 度的角，角的頂點是 A 點，接著以 A 為圓心，給定的邊長為半徑畫弧，分別交角的兩邊於 B、C 兩點，連接 B、C 兩點，就可以得到一個正三角形 ABC。

很多教師都察覺，教過三角形的畫法後，學童很快就會忘記了，主要的原因是圓規只能畫出和圓規金屬腳(圓心)等距離的點，圓規無法畫出一條直線段，而三角形是由三條直線段所圍成的圖形。教師應該幫助學童理解圓規畫出的弧上一點(假設半徑是 r)和圓規腳那點連線的距離，以及長度是 r 的直線段，它們的長度相同的關係，例如：在一條直線段上，先用圓規畫出給定長度的線段，再比較畫出線段的長度，和畫出圓半徑的長度一樣長的關係。更重要的是，當學童畫出一個三角形後，應該要求學童說明為什麼可以這樣畫出三角形的理由，幫助學童澄

清三角形畫法的意義。

六、三角形任兩邊和大於第三邊

國小階段，可以透過下列三種方式，與學童溝通三角形任兩邊和大於第三邊的意義。

第一種方式是利用歐氏幾何中「兩點之間最短的路徑是連接這兩點的直線長」的公設。如圖 2-1-6，A、B 兩點間最短的距離就是線段 AB 的長度，在三角形 ABC 中，線段 CA 和線段 CB 的長度和一定比線段 AB 長，也就是說，三角形任兩邊的和的大於第三邊。

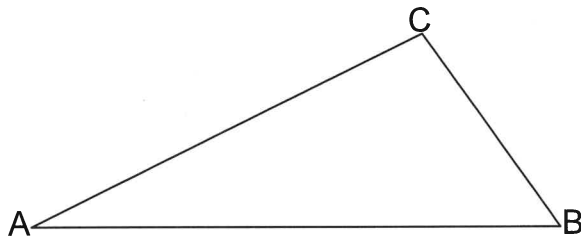


圖 2-1-6

第二種方式是固定兩邊(共端點)，透過觀察第三邊的變化，發現三角形任兩邊和大於第三邊的現象。如圖 2-1-7 中，拿出兩根竹籤，其中甲竹籤長 a 公分，乙竹籤長 b 公分($a < b$)，將兩根竹籤共端點的合在一起，假設共同的端點是 A 點，此時，這二根竹籤無法決定一個三角形；接著以 A 點為頂點，將兩根竹籤慢慢的張開，此時，這兩根竹籤開始可以決定一個三角形(SAS)，這個三角形的第三個邊，就是這兩根竹籤另外兩個端點 B、C 連成的直線段(此直線段一定比兩根竹籤的長度和小，比兩根竹籤長度差的絕對值大)，只要這兩根竹籤張開的角度小於 180 度，都可以決定一個三角形；當這兩根竹籤張開的角度等於 180 度時，又不可以圍成一個三角形。也就是說，從第三邊有一點長度開始，一直到和兩根竹籤的長度和相等之前，都可以圍成一個三角形，而這個三角形的第三邊的長度一定比另兩邊長度的和小。

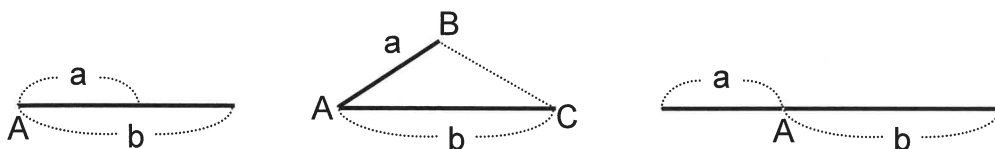


圖 2-1-7

第三種方式是固定一邊，透過觀察另外兩邊的變化，發現三角形任兩邊的和大於第三邊的現象。如圖 2-1-8，仿中間可以開合的吊橋來說明，當這座吊橋的橋面合成一條直線時(假設兩個端點是 A、B，線段 AB 長是固定的)，不能構成一個三角形，當橋面張開時(假設由 O 點張開，橋面的兩段 AO 和 BO，以 A、B 為頂點向上升起)，此時 AB、AO 和 BO 三線段不能圍成一個三角形，必須延長 AO 和 BO 才能構成一個三角形(假設 AO 和 BO 的延長線相交於 C 點)，這個三角形 ABC 的一邊 AC 一定會比 AO 長，另一邊 BC 一定會比 BO 長，所以 AC 和 BC 的長度合起來一定比 AB 長(AB 的長度是 AO 和 OB 的長度和)，也就是說，三角形任兩邊的長度和一定大於第三邊的長度。

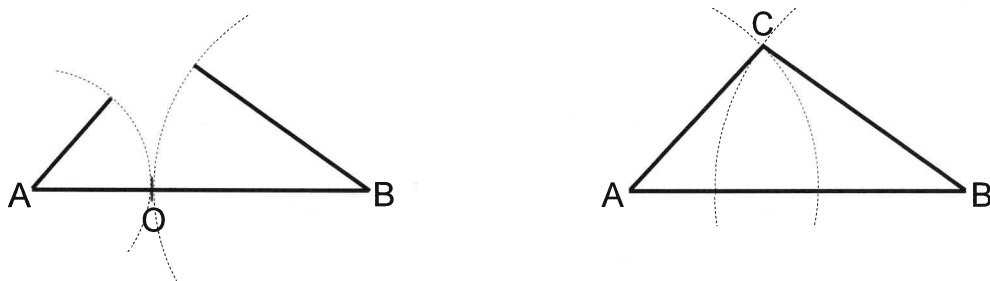


圖 2-1-8

七、三角形教學流程說明

表 2-1 是本教材與三角形教學有關的活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明，其中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。

表 2-1

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	3	透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。
1	6	4	透過說、讀、聽、做等練習，加強三角形、正方形、長方形和圓形等術語與圖卡、書空、…等的聯結。
1	6	5	透過塗色活動，加深學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。
1	6	*2	熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。
1	6	*3	能用單一的平面圖形造出圖案，以加深對圓形、三角形的認識。
1	6	*4	(1)熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。 (2)找出圖形的規律。
1	6	*6	增強辨認顏色、形狀、大小。
2	6	1	在有背景或其他圖形下辨認三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。
5	6	1	(1)描述三角形的畫法或描法。 (2)進行三角形的邊、頂點及角的命名活動。
5	6	2	透過複製三角形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。
6	9	2	(1)從比較三角板的角認識直角。 (2)認識直角三角形。
8	3	4	透過量角器認識度的意義。
8	3	5	在度量化的情境下，解決兩個角的合成、分解問題，並以算式記錄。
8	3	6	在鐘面圖上，用度量化的方式，描述旋轉角的角度。
8	3	7	(1)認識銳角和鈍角。 (2)使用量角器畫出指定度數的角。
8	5	8	將一堆三角形依據邊長或角的大小關係，加以分類並命名。

8	5	9	(1)認識對角對邊的概念與名詞。 (2)經驗後察覺三角形中最大邊對最大角(或最大角對最大邊)及最小邊對最小角(或最小角對最小邊)。
8	5	10	認識等腰三角形和正三角形的特性。

在低年級階段，本教材將學童對三角形的認知定為在 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元，本教材先透過活動 3~5、參考活動 2~4 及 6，幫助學童使用三角形的名詞辨認並描述三角形的形狀；在第二冊第六單元活動 1，本教材進一步在有背景或其它圖形的干擾下，要求學童能辨識出三角形，並透過限制學童使用三角形、正方形、長方形拼成一個指定圖形的活動，希望學童在拼湊的過程中，經驗到兩個圖形的邊一樣長時，或頂點對齊時，兩個圖形比較容易合在一起，為引入三角形的構成要素鋪路。

中年級開始，本教材將學童對三角形的認知定為在 **Van Hiele** 的第一層次分析期，本教材在第五冊第六單元開始幫助學童認識三角形的構成要素，在活動 1 中，先要求學童畫出一個三角形，透過描述三角形的畫法或描法，進行三角形構成要素頂點、邊和角的命名活動。在活動 2 中，透過分別複製三角形的頂點、邊和角的活動，加深學童對三角形的頂點、邊和角意義的掌握。

第一至第五冊，本教材討論的都是三角形，並沒有自三角形中區分出課程標準術語與符號要求出現的三角形；第六冊開始認識這些三角形，第六冊第九單元活動 2，透過比較三角板的三個角引入直角，並幫助學童認識直角三角形；第八冊第三單元在活動 4~6 介紹角度的意義後，在活動 7 引入鈍角及銳角，在第八冊第五單元活動 8~10 中，更進一步依據邊長或角度的大小關係，幫助學童將三角形分類並命名，依據邊長的關係，本教材引入等腰三角形及正三角形，依據角度的關係，本教材引入直角三角形、鈍角三角形及銳角三角形。

第二節 四邊形

一、四邊形的分類與命名

數學上常透過四個邊的長度是否相等，四個角的角度是否相等，對邊是否平行，對角線是否平分、相等或垂直等關係，將四邊形分類與命名。本教材透過下列四種方式，進行四邊形的分類及命名活動。

(一) 邊長是否相等

依據邊長是否相等的關係來分類，可以將所有的四邊形分割成五類(見圖 2-2-1)：

第一類是四個邊都相等的四邊形(四個邊的邊長依序是 a 、 a 、 a 、 a)。

第二類是恰有三個邊相等的四邊形(四個邊的邊長依序是 a 、 a 、 a 、 b ，其中 $a \neq b$)。

第三類是恰有二個邊相等，另兩個邊不相等的四邊形，又可以區分成對邊相等的四邊形(四個邊的邊長依序是 a 、 b 、 a 、 c ，其中 a 、 b 、 c 都不相等)，以及鄰邊相等的四邊形(四個邊的邊長依序是 a 、 a 、 b 、 c ，其中 a 、 b 、 c 都不相等)。

第四類是兩組邊長分別相等的四邊形，又可以區分成兩組對邊分別相等的四邊形(四個邊的邊長依序是 a 、 b 、 a 、 b ，其中 $a \neq b$)，以及兩組鄰邊分別相等的四邊形(四個邊的邊長依序是 a 、 a 、 b 、 b ，其中 $a \neq b$)。

第五類是四個邊都不相等的四邊形(四個邊的邊長依序是 a 、 b 、 c 、 d ，其中 a 、 b 、 c 、 d 都不相等)。

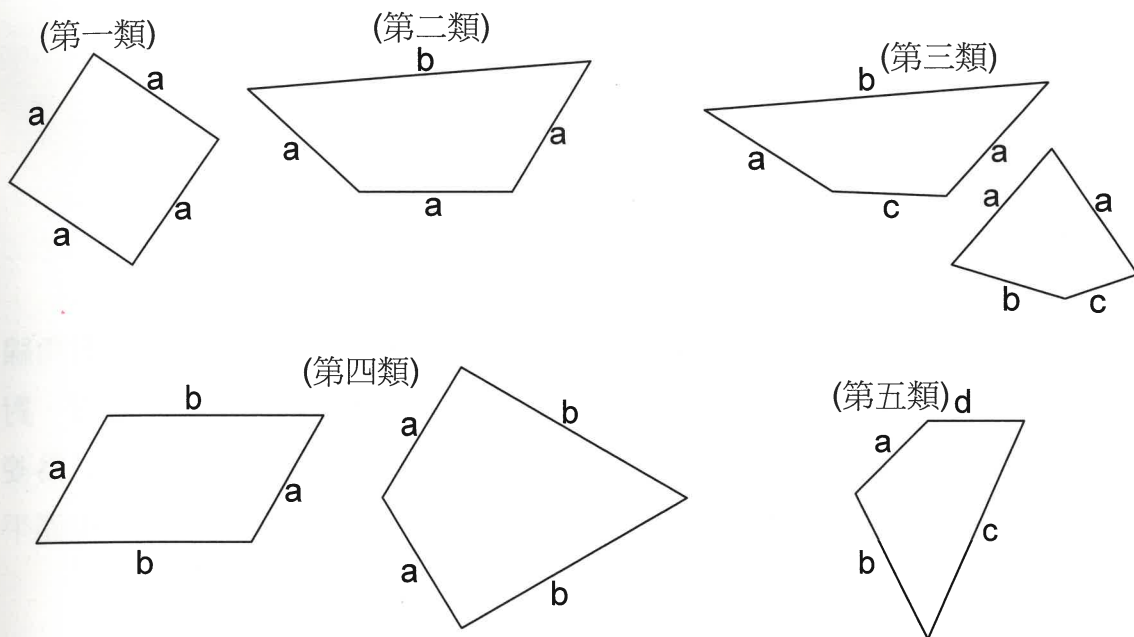


圖 2-2-1

雖然等腰梯形屬於第三類對邊相等的四邊形，平行四邊形屬於第四類兩組對邊分別相等的四邊形，箏形屬於第四類兩組鄰邊分別相等的四邊形，但是本教材並不透過邊長的關係進行這些四邊形的分類活動，因為透過平行或其它的關係來分類更恰當，例如：直角與對角線等。本教材只引入四個邊相等四邊形的命名活動，並稱呼四個邊相等的四邊形為菱形或等邊四邊形。

(二) 角度是否相等

仿邊長是否相等關係的分類方式，也可以透過角度是否相等的關係，把所有的四邊形分割成五類，本教材只引入四個角角度相等(都是 90°)四邊形的命名活動，並稱呼四個角都是直角(都相等)的四邊形為長方形、矩形或等角四邊形。

(三) 平行關係

我們可以很方便地描述三角形的邊和角的關係，因為三角形每一個邊都有一個對應的角，每一個角也都有一個對應的邊；但是無法方便地描述四邊形的邊和角的關係，因為四邊形每一個角分別有兩個對應的邊，每一個邊分別有兩個對應的角。雖然我們無法方便地描述四邊形的邊和角的關係，但是可以方便地描述四邊形邊和邊的關係，以及角和角的關係，因為四邊形每一個邊都有一個對應的邊和二個相鄰的邊，每一個角都有一個對應的角和二個相鄰的角。

依據有多少組對應邊平行的方式，可以將所有的四邊形區分成如下三類：

第一類是恰有兩組對應邊平行的四邊形，本教材稱之為平行四邊形。

第二類是恰有一組對應邊平行的四邊形，本教材稱之為梯形。

第三類是沒有任何一組對應邊平行的四邊形，本教材不討論。

(四) 對角線的關係

三角形沒有對角線，而四邊形有兩條相交的對角線，因此也可以透過對角線的關係來判斷四邊形的屬性，例如：對角線互相平分的四邊形為平行四邊形，對角線互相平分且等長的四邊形為長方形，對角線互相平分且垂直的四邊形為菱形，對角線互相平分、垂直且相等的四邊形為正方形，對角線互相垂直，但僅平分其中一條對角線的四邊形為箏形。

因為對角線不是四邊形的構成要素，透過對角線進行分類及命名活動，和這些四邊形數學上的名稱也沒有關係，因此本教材並不透過對角線的關係進行這些四邊形的命名活動。

箏形是相鄰兩邊分別相等的四邊形(四個邊的邊長依序是 a 、 a 、 b 、 b ，其中 $a \neq b$)，這樣的邊長關係在描述上相當困難，因為學童在二年級已有線對稱圖形活動的經驗，因此本教材透過對角線進行箏形的命名活動，請注意，本教材不是透過對角線的關係來分類或命名，本教材只是透過對稱的現象來描述箏形。

二、四邊形的定義

國小階段，透過邊、角是否相等或對應邊是否平行的性質，區分出一些常見的四邊形，依據八十二年課程標準術語與符號部分的內容，本教材引入正方形(正四邊形或等邊且等角四邊形)、長方形(矩形或等角四邊形)、菱形(等邊四邊形)、平行四邊形、梯形、等腰梯形與箏形(鴛形)等特殊四邊形的命名活動。

下面是本教材給課程標準術語與符號部分要求出現四邊形的定義：

- 四邊形：平面上由四條首尾相連的直線段所圍成的封閉圖形稱為四邊形，四邊形可以區分成凸四邊形和凹四邊形兩種，如圖 2-2-2，凸四邊形內部任意兩點所連成的線段，一定都在該四邊形的內部，而且凸四邊形的每一個內角都

小於 180 度；凹四邊形內部一定可以找到兩個點，使這兩點所連線段的一部分在該四邊形的外部，而且凹四邊形一定有一個內角(旋轉角概念)大於 180 度。另一個判定方式是，若將四邊形的四個邊作延長線，若有一延長線與另一邊相交則為凹四邊形，否則即為凸四邊形。日常生活中熟悉的四邊形，例如：正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形與箏形等都是凸多邊形，本教材所討論的四邊形也都是凸四邊形。

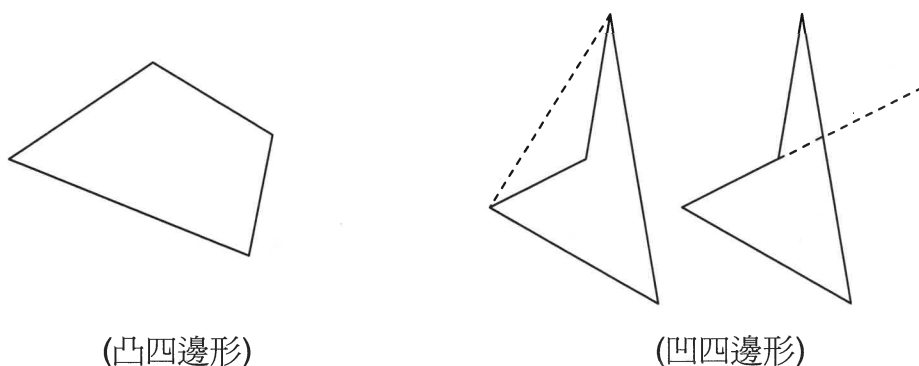


圖 2-2-2

- 長方形：本教材定義四個角都是直角的四邊形為長方形，又稱為矩形或等角四邊形，本教材不透過「四個角相等的四邊形」來定義長方形，主要的理由是在第七冊引入長方形的定義時，學童尚未學過四邊形的內角和是 360 度。
- 菱形：本教材定義四個邊都一樣長的四邊形為菱形，又稱為等邊四邊形。
- 正方形：本教材定義四個角都是直角，且四個邊都相等的四邊形為正方形，又稱為正四邊形或等邊且等角四邊形。
- 平行四邊形：平行四邊形可以有很多不同的定義方式，本教材定義兩雙對邊都平行的四邊形為平行四邊形，因為這種定義方式最符合平行四邊形的名字。
- 梯形：本教材定義恰有一雙對邊平行的四邊形為梯形，並建議教師透過「有一雙對邊平行，而另一雙對邊不平行」的方式定義梯形。我們在溝通梯形的定義時，常省略「恰」，將梯形的定義說成「有一雙對邊平行的四邊形」，「有一雙對邊平行」的說法很容易產生文字意義上的混淆，例如：解讀成「至少有一雙對邊平行」時，平行四邊形也是梯形，解讀成「恰有一雙對邊平行」時，平行四邊形不是梯

形，解讀成「至多有一雙對邊平行」時，除了平行四邊形外，所有的四邊形都是梯形。

- 箏形：有兩種定義箏形的方式，第一種是「對角線互相垂直，但僅平分其中一條對角線」；第二種是「有一條對角線，其兩側的對應邊都一樣長的四邊形」。因為學童已有線對稱圖形的舊經驗，本教材透過第二種方式定義箏形。中年級學童不易理解箏形定義的描述方式，本教材建議教師先拿出多個不同的箏形，透過這些四邊形的形狀很像一個小風箏的溝通方式，引入箏形的名字，再利用二年級線對稱活動的舊經驗，一個圖形對摺後，摺線兩邊能完全疊合的圖形叫做對稱圖形，幫助學童發現箏形是一個線對稱圖形，而且箏形有一條對角線(對摺的摺痕)，使其兩側的對應邊都一樣長，見圖 2-2-3。

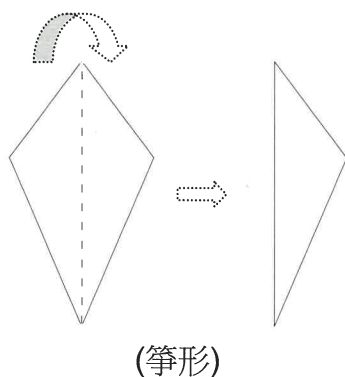


圖 2-2-3

- 等腰梯形：本教材定義不平行的那兩個邊相等的梯形為等腰梯形。

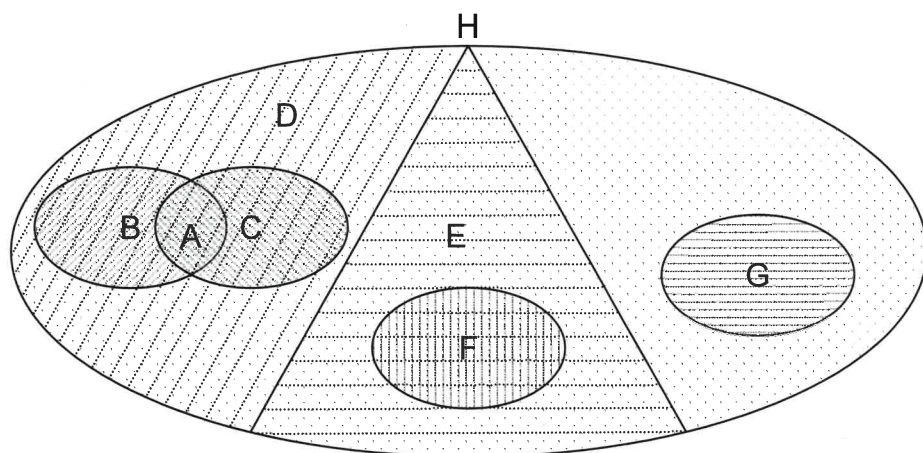
三、四邊形的包含關係

令 **A** 是正方形所成的集合，**B** 是長方形所成的集合，**C** 是菱形所成的集合，**D** 是平行四邊形所成的集合，**E** 是梯形所成的集合，**F** 是等腰梯形所成的集合，**G** 是箏形所成的集合，**H** 是四邊形所成的集合。

仿前節使用范氏圖表徵三角形集合包含關係的方式，也可以使用范氏圖溝通上面 8 個四邊形集合的包含關係。透過有幾雙對應邊平行的方式，可以將所有的四邊形分成恰有兩雙對邊平行，即平行四邊形(**D**)，恰有一雙對邊平行，即梯形

(E)，以及沒有對邊平行三類。

在圖 2-2-4 中，可以看到全部的四邊形被分成平行四邊形(D)、梯形(E)及沒有對邊平行的四邊形三類，其中菱形(C)和長方形(B)也是平行四邊形，所以包含於平行四邊形(D)，而正方形(A)是菱形(C)和長方形(B)的交集；等腰梯形(F)也是梯形，所以包含於梯形(E)；箏形(G)的對邊都不平行，所以包含於沒有對邊平行的四邊形。



(H 表示全部四邊形所成的集合，恰有兩雙對邊平行，即平行四邊形(D)，恰有一雙對邊平行，即梯形(E)，以及沒有對邊平行的四邊形將 H 區分成三類)

圖 2-2-4

下圖 2-2-5 和上圖 2-2-4 的概念相同，只是表徵的方式不同，在圖 2-2-5 中可以看到梯形(E)與平行四邊形(D)沒有交集，因為梯形一定不是平行四邊形，平行四邊形也一定不是梯形；正方形(A)是長方形(B)和菱形(C)的交集，因為正方形一定是長方形，正方形也一定是菱形；等腰梯形(F)包含於梯形(E)，因為等腰梯形一定是梯形；平行四邊形(D)、梯形(E)、箏形(G)的聯集並不是所有的四邊形(H)，因為有一些四邊形不是平行四邊形，不是梯形，也不是箏形。

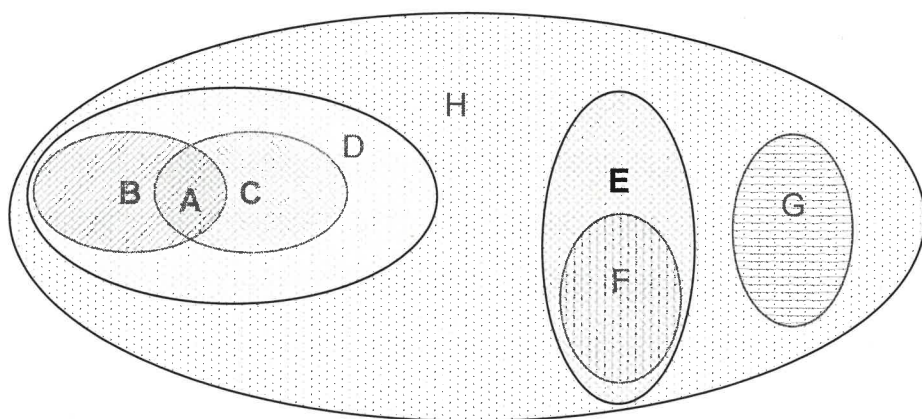


圖 2-2-5

在評量時，試題中常出現一些四邊形，要求學童寫出這些四邊形的名字，例如：試題中給定的四邊形是平行四邊形，因為平行四邊形一定是四邊形，學童在答案欄上寫四邊形，是否應該給分？使用平行四邊形的名字而不能使用四邊形的名字作答是一種約定俗成，習慣上，我們要求學童寫出限制最嚴格的圖形名稱。評量前，教師必須與學童溝通，形成所填名字必須儘量表示該圖形的所有特性的共識，例如：正方形的四個邊相等，四個角都是直角，作答時不可以將正方形記成長方形，因為正方形比長方形多了四個邊相等的特性。

四、定義與定理

平行四邊形具有下列性質：

- a：兩雙對邊互相平行。
- b：一雙對邊平行且相等。
- c：兩雙對邊分別相等。
- d：兩雙對角分別相等。
- e：對角線互相平分。

我們可以透過平行線的性質以及三角形全等的定理，證明這些性質可以互推，例如：可以選擇「兩雙對邊互相平行」當做平行四邊形的定義，透過 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$ 的順序證明其它的性質都成立，也可以選擇「兩雙對邊分別相等」當做

平行四邊形的定義，透過 $c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e$ 的順序證明其它的性質都成立。

在公理化的幾何層次，我們需要給平行四邊形一個定義，這個定義在理論上可以在 a 、 b 、 c 、 d 、 e 中任選一個，因為它們都是邏輯等價，可以互推的，但是數學上都選用 a 當做平行四邊形的定義，因為它和平行四邊形的名字最符合。

當學童尚未達到公理化幾何層次時，只能透過定義來判斷一個四邊形是否為平行四邊形。當學童達到公理化的幾何層次，並且透過證明知道 a 、 b 、 c 、 d 、 e 都等價之後(如果 a 是定義， b 、 c 、 d 、 e 都是定理)，可以透過定義，也可以透過定理來判斷一個四邊形是否為平行四邊形。國小階段的學童尚未達到公理化的幾何層次，無法透過證明形成定理，因此只能透過定義來判斷一個四邊形是否為平行四邊形，例如：面對一個四邊形，要求判斷該四邊形是否為平行四邊形時，學童只能透過定義 a 來判斷，不可以透過定理 b 、 c 、 d 、 e 來判斷。

教師可以給定一個已知的平行四邊形當做特例，要求學童檢查這個平行四邊形是否滿足 b 、 c 、 d 、 e 的性質，但是不宜宣告所有的平行四邊形都滿足 b 、 c 、 d 、 e 的性質，也暫不必要求學童利用 b 、 c 、 d 、 e 的性質，來判斷一個四邊形是否為平行四邊形。

五、四邊形教學流程說明

表 2-2 是本教材與四邊形教學有關的活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-2

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	3	透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。
1	6	4	透過說、讀、聽、做等練習，加強三角形、正方形、長方形和圓形等術語與圖卡、書空、…等的聯結。
1	6	5	透過塗色活動，加深學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。

1	6	*2	熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。
1	6	*4	(1)熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。 (2)找出圖形的規律。
1	6	*6	增強辨認顏色、形狀、大小。
2	6	1	在有背景或其他圖形下辨認三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。
2	6	2	透過觀察及套描活動，知道圖形板與其外框是同形狀。
2	6	3	在釘板上用橡皮筋圍出圖形。
2	6	4	用兩塊全等(形狀、大小一樣)的色板拼出一個圖形。
2	6	5	經驗一個圖形可由兩塊一樣的圖形所構成。
2	6	6	用一些三角形、正方形或長方形拼成一個指定的圖形。
2	6	7	用一些正方形或長方形拼成一個指定的圖形。
2	6	8	(1)由實際的拼排，經驗一個圖形可由幾個全等的圖形所構成。 (2)會將數據填入設計好的表中。
2	6	*1	(1)熟練三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。 (2)透過操作的活動，知道圖形板與其外框是同形狀。
2	6	*2	用竹籤在桌子上排出圖形。
5	6	3	透過描繪活動，認識四邊形的邊、頂點和角。
5	6	4	進行四邊形的命名活動。
5	6	5	透過複製四邊形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。
6	9	2	(1)從比較三角板的角認識直角。 (2)認識直角三角形。
6	9	3	(1)知道正方形、長方形都有四個直角。 (2)透過複製直角的活動，經驗垂直的意義。 (3)用紙摺出直角。

7	3	1	透過「指定一邊，做出直角另一邊」的方式，察覺垂直的意義。
7	3	2	察覺一線平行於另一直線的意義為同時垂直於第三直線。
7	9	1	認識平行四邊形和梯形，並加以命名。
7	9	2	透過對稱關係製作箏形、菱形，並加以命名。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

在低年級階段，本教材將學童對四邊形的認知定為在 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元，本教材先透過活動 3~5、參考活動 2、4 及 6，幫助學童使用正方形和長方形的名詞辨認並描述圖形的形狀；透過分佈練習，在第二冊第六單元，本教材進一步在有背景或其它圖形的干擾下，要求學童能辨識出四邊形，並透過限制學童使用三角形、正方形、長方形拼成一個指定圖形的活動，希望學童在拼湊的過程中，經驗到兩個圖形的邊一樣長時，或頂點對齊時，兩個圖形比較容易合在一起，為引入四邊形的構成要素鋪路。

中年級開始，本教材將學童對四邊形的認知定為在 **Van Hiele** 的第一層次分析期，本教材在第五冊第六單元開始幫助學童認識四邊形的構成要素，在活動 3 中，先要求學童畫出一個四邊形，透過描述四邊形的畫法或描法，認識四邊形的頂點、邊和角；在活動 4 中，進行四邊形的命名活動；在活動 5 中，透過分別複製四邊形的頂點、邊和角的活動，加深學童對四邊形的頂點、邊和角意義的掌握。

第一至第五冊，本教材討論的都是四邊形，並沒有自四邊形中區分出課程標準術語與符號要求出現的四邊形；第六冊開始認識這些四邊形，第六冊第九單元活動 2，透過比較三角板的三個角引入直角；在活動 3，幫助學童知道正方形、長方形都有四個直角。在第七冊第三單元活動 1、2，引入垂直與平行的意義；在第七冊第九單元活動 1、2，更進一步依據邊長的大小關係或對應邊的平行關係，幫助學童將四邊形分類並命名，依據邊長的關係，本教材引入菱形及箏形，依據平行的關係，本教材引入平行四邊形及梯形。

第三節 多邊形

一、凸多邊形與凹多邊形

由直線段所圍成的封閉圖形，數學上稱之為多邊形，多邊形可以區分成凸多邊形和凹多邊形兩種。

在前節中，我們曾討論凸四邊形與凹四邊形的判定方式，多邊形的情形也相同。如果一個多邊形其內部任意兩點所連成的線段，一定都在該多邊形的內部，則稱該多邊形為凸多邊形，如果一個多邊形內部存在兩個點，使這兩個點所連成的線段，有一部分在該多邊形的外部，則稱該多邊形為凹多邊形；另一個判定方式是，將多邊形的各邊作延長線時，若有至少一延長線與另一邊相交則為凹四邊形，否則即為凸四邊形，本教材討論的對象都是凸多邊形。

二、多邊形與多邊形區域

三角形和三角形區域是兩種不同的圖形，如圖 2-3-1，由三條直線段頭尾相接所圍成的圖形稱之為三角形，這個三角形可以把平面區分成三角形(周界)、三角形內部、三角形外部三個部分，而三角形和三角形內部合起來的圖形稱之為三角形區域。

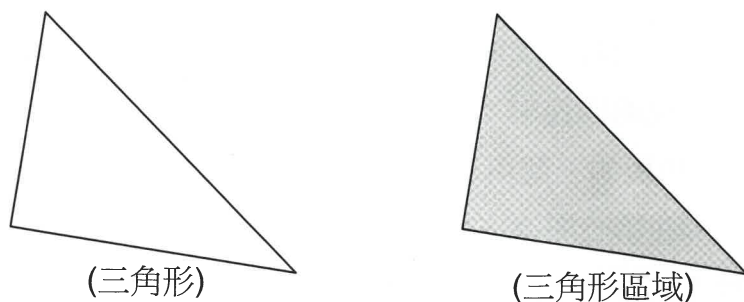


圖 2-3-1

在討論三角形的周長時，周長可以是三角形三個邊邊長的和，也可以是三角形區域周界的長度和；在討論三角形的面積時，面積是三角形區域的面積，三角形本身沒有面積，三角形圍成的區域才有面積。

在中文的日常用法中，常把三角形區域簡稱為三角形，長方形區域簡稱為長方形，圓區域簡稱為圓等，並沒有嚴格的區分 n 邊形和 n 邊形區域或圓和圓區域的意義，本教材提醒教師應該區分兩者的意義，並布置合理的問題情境。

低年級階段屬於視覺期，教師不必嚴格的區分多邊形與多邊形區域的意義，可以混用這兩種圖形，並將多邊形與多邊形區域都稱為多邊形，例如：將平面上畫出的三角形稱為三角形，拿出的三角形圖卡也稱為三角形。

中年級階段屬於分析期，開始要討論多邊形的構成要素，本教材並不嚴格要求學童區分多邊形和多邊形區域的意義，但是要求教師在布題時必須分辨出討論的重點是多邊形還是多邊形區域，並布置出合理的問題情境，例如：在討論三角形構成要素時，三角形的構成要素是頂點、邊和角，並不涉及三角形的內部，因此討論的對象應該是畫出的三角形，而不是三角形的圖卡。

另外在討論多邊形面積時，例如：長方形的面積是長方形及其內部所具有的性質，因此討論的對象應該是長方形區域，而不是長方形。本教材要求教師透過使用手將整個長方形區域抹過的方式，強調求的是長方形區域的面積。

三、等邊多邊形、等角多邊形、正多邊形的定義

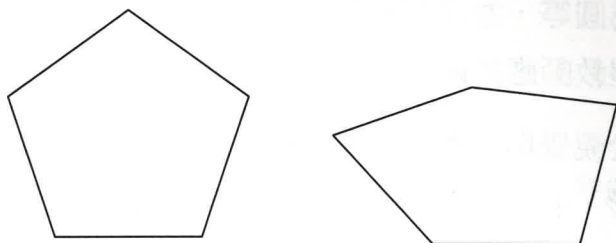
在多邊形中，只有三角形滿足等邊三角形一定是等角三角形，等角三角形一定是等邊三角形的關係，所以正三角形、等邊三角形、等角三角形是同一個集合。除了三角形之外，等邊 n 邊形($n > 3$)不一定是等角 n 邊形，等角 n 邊形($n > 3$)也不一定是等邊 n 邊形，也就是說，等邊 n 邊形($n > 3$)，等角 n 邊形($n > 3$)是不同的兩個集合，而正 n 邊形($n > 3$)是這兩個集合的交集。

(一) 等邊多邊形

本教材定義每一個邊都相等的多邊形為等邊多邊形，例如：等邊三角形、等邊四邊形、等邊五邊形、等邊六邊形等。菱形是等邊四邊形，但是菱形的四個角不一定是直角，因此等邊四邊形不一定是等角四邊形。

使用 n 根($n > 3$)一樣長的竹籤所圍成的 n 邊形是等邊 n 邊形，這些等邊 n 邊形的 n 個角不一定都相等(可以隨意的改變等邊 n 邊形的形狀)，因此，等邊 n 邊

形不一定是等角 n 邊形，如圖 2-3-2。



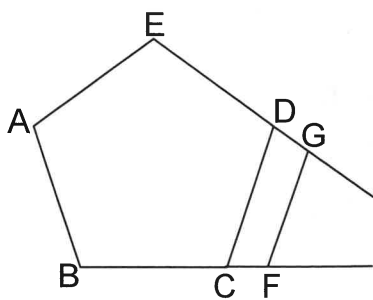
(等邊 n 邊形不一定是等角 n 邊形)

圖 2-3-2

(二) 等角多邊形

本教材定義每一個角都相等的多邊形為等角多邊形，例如：等角三角形、等角四邊形、等角五邊形、等角六邊形等。長方形是等角四邊形，但是長方形的四個邊不一定都等長，因此等角四邊形不一定是等邊四邊形。

如圖 2-3-3，畫一個正五邊形 $ABCDE$ ，延長這個正五邊形的兩個邊 BC 和 ED ，在延長線上分別取 F 和 G 兩個點，使線段 CD 和線段 FG 平行，則新五邊形 $ABFGE$ 還是一個等角的五邊形，因為同位角相等，但是已經不是等邊五邊形，相同的，當畫出正 n 邊形($n > 3$)時，也可以仿上述方式，畫出一個等角的 n 邊形，而這個等角 n 邊形不是等邊 n 邊形。



(等角 n 邊形不一定是等邊 n 邊形)

圖 2-3-3

(三) 正多邊形

本教材定義每一個邊都相等且每一個角都相等的多邊形為正多邊形，例如：正三角形、正四邊形(正方形)、正五邊形、正六邊形等都是正多邊形。

在數學上，大都使用量角器等分割圓心角，透過做出圓內接正多邊形的方式做出正多邊形，本教材認為要求學童畫出正多邊形太困難，透過等長的線段也不易做出正多邊形(因為不易控制等角)，因此提供多個正多邊形的圖像，要求學童透過檢查各邊是否都等長，各角是否都相等的方式，引入正多邊形的命名。

四、全等多邊形

兩個多邊形如果能處處疊合，本教材稱這兩個多邊形全等，或稱這兩個多邊形是全等的多邊形。

兩個全等的多邊形，其頂點數一定相等，而且可以透過疊合，建立一個頂點對應一個頂點的對應關係，由此對應關係，也可以得到角的對應關係和邊的對應關係，兩個全等多邊形互相對應的角其角度都會相等，互相對應的邊其邊長都會相等。

反過來，兩個邊數或角數相等的多邊形，也可以建立頂點的對應關係，當其中一個多邊形的頂點按照順時針方向排列時，如果另一個多邊形的頂點也按照順時針的方向排列，就可以得到一組邊的對應關係和角的對應關係，如果有一組對應關係讓對應邊的邊長都相等，以及對應角的角度都相等，這兩個多邊形就能夠處處疊合，也就是說，這兩個多邊形是全等的多邊形。

如果其中一個多邊形的頂點按照順時針方向排列時，另一個多邊形的頂點按照逆時針的方向排列(也就是將圖形翻轉)，也可以得到一組邊的對應關係和角的對應關係，如果有一組對應關係讓對應邊的邊長都相等，以及對應角的角度都相等，這兩個多邊形就能夠處處疊合，所以這兩個多邊形也會全等，見圖 2-3-4。

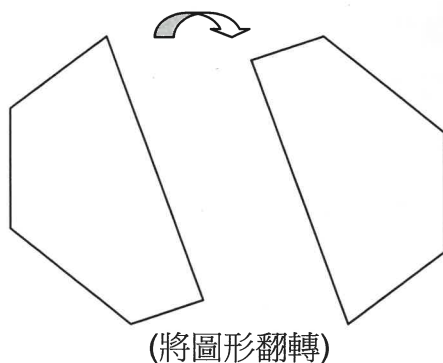


圖 2-3-4

五、多邊形教學流程說明

表 2-3 是本教材與多邊形教學有關的活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-3

冊別	單元	活動	活動目標
9	11	1	(1)將一堆三~七邊形的圖卡，根據邊的個數加以分類並命名，命名為五邊形、六邊形、七邊形後，將全類命名為多邊形。 (2)討論給定的五(及六)邊形圖卡，檢查邊、角是否相等，由此認識正五(及六)邊形。
9	11	2	以疊合方式檢驗兩多邊形圖卡完全疊合後，確定此二多邊形逐邊、逐角皆相等，由此認識兩多邊形全等時，各對應邊皆相等，各對應角皆相等。

當學童有足夠三角形及四邊形的活動經驗後，本教材在第九冊第十一單元引入多邊形的教學活動，活動 1 可以分成兩個部分，第一部分是布置一堆 3~7 邊形的圖卡，要求學童依據邊的個數加以分類及命名，得到五邊形、六邊形、七邊形的名稱後，再將這些邊數不同的多邊形，都命名為多邊形；第二部分是討論給定的正五邊形及正六邊形的圖卡，檢查它們每一個邊是否都等長，每一個角的角度是否都相等，在確定每一個邊長及每一個角度都相等後，將這些多邊形命名為正五邊形及正六邊形。

活動 2 先以疊合的方式，檢驗這兩個多邊形圖卡可以完全疊合後，再逐邊確認這兩個多邊形所有的對應邊都等長，逐角確認這兩個多邊形所有的對應角都相等，幫助學童認識兩個多邊形全等時，對應邊都相等及對應角都相等的結果。

第四節 圓與扇形

一、圓

在平面上選定一定點 O ，在平面上與定點 O 的距離是 $r(r > 0)$ 的所有點所成的集合稱為圓，該定點 O 稱為圓心， r 稱為半徑。圓把平面區分成三個部分，圓的內部，圓(周界)和圓的外部，圓和圓的內部合起來稱為圓區域。圓本身有長度，圓區域的周界是圓周，圓周也有長度，圓的長度和圓周的長度相同，都簡稱為圓周長。請注意，圓心並不在圓的上面。

在中文的用語中，一個圖形是圓還是圓區域，必須靠前、後文的描述來判斷，但是在英文的用語中，很明確的區分圓和圓區域，如果不強調內部，只談一個圓，英文稱之為 **circle**，如果強調圓和圓的內部，英文稱之為 **disc**。

參考圖 2-4-1，圓上任一點與圓心所連成的線段稱為半徑，一個圓有無限多條半徑，而這些半徑的長度都相同，稱為半徑長。兩條半徑若能連成一條直線段，稱該直線段為直徑，一個圓也有無限多條直徑，而這些直徑的長度也相等，稱為直徑長，日常生活中常將半徑長簡稱為半徑，直徑長簡稱為直徑。圓上任兩點可以將圓分割成兩部分，都稱為圓弧，其中比較長的部分稱為優弧，比較短的部分稱為劣弧，如果兩部分一樣長，則稱為半圓。圓上任兩點所連成的線段稱為弦，直徑是圓中最長的弦，直徑剛好將圓區域分割成全等的兩部分，直徑的兩個端點剛好將圓分割成全等的兩個圓弧。



(AB 為直徑；CO 為半徑) (DE 為弦；DGE 為劣弧；DFE 為優弧；AFB 為半圓)

圖 2-4-1

二、圓周率

所有的圓都很像，也就是說，所有的圓彼此都相似，因此所有圓的直徑和半徑的比都相等，其比值剛好是 2；而數學史上人們是透過圓內接正多邊形求圓面積時，發現所有圓的圓周長和直徑長的比也會相等，數學上稱圓周長比直徑長的比值為圓周率，並將圓周率簡記成 π 。

圓有圓周率，橢圓是否也存在橢圓周率？因為不同橢圓的長軸和短軸的比值並不一定相同，也就是說，各橢圓間並不一定滿足相似的關係，因此就所有的橢圓而言，並不存在橢圓周率。但是針對長軸和短軸的比值相等的橢圓，例如：長軸長是短軸長的二倍，它們之間都滿足相似的關係，因此它們的周長和長軸的比都相等，我們可以稱這個比的比值為這些相似橢圓的橢圓周率。

使用「做出一個圓，然後用尺精確量出圓周長和直徑長，再算出兩者的比值」的方式求圓周率，是國小階段最常見引入圓周率的教學方式，值得注意的是，圓周率是一個無理數，使用上述方式算出的圓周率是一個有理數(量出來的長度一定是有理數，有理數比有理數的比值一定是有理數，不會變成無理數)。上述教學方式只能得到圓周率的近似值，因為畫圓和測量都存在不可避免的誤差，例如： $\sqrt{2}$ 公分是存在的，但是不可能用尺量出 $\sqrt{2}$ 公分長，而且使用尺量物長時受到最小刻度單位的限制，無法得到精確的答案，因此要算出圓周率是 3.14、3.1416 或其它

更精確的答案，是不可能在這樣的教學方式中做到的。

古代數學家計算圓周率，是透過圓內接多邊形來逼近圓，以求得較精確的答案，例如：西方的阿基米得，使用正多邊形的周長逼近圓周長的方式求圓周率的近似值，東方的劉徽，祖沖之，使用正多邊形的面積逼近圓面積的方式求圓周率的近似值。他們算圓周率近似值的方法，第一步先利用圓內接四邊形的邊長或面積求圓周率的近似值，然後將邊的數目加倍，利用圓內接正八邊形的邊長或面積求圓周率的近似值，再將邊的數目加倍，利用圓內接十六邊形的邊長或面積求圓周率的近似值，以此類推，當邊長數愈來愈多時，求出來的圓周率會愈來愈精確。

利用圓內接正多邊形來逼近圓的方式，可以得到一組愈來愈接近圓周率的數列，利用圓外切正多邊形來逼近圓的方式，可以得到另一組愈來愈接近圓周率的數列，這兩組不同的數列雖然都愈來愈接近圓周率，但是都無法確定圓周率的值，真正圓周率的值會介於這兩組數列之間，無法使用分數或小數來記錄，也就是說，圓周率是一個無理數。

三、畫圓的工具—圓規

圓規是畫圓的工具，圓規有兩個腳，其中一個腳的腳尖是金屬製成的，另一個腳的腳尖上綁著鉛筆或筆心，當我們張開圓規的兩個腳，固定金屬製成的腳尖，讓綁著鉛筆或筆心的腳尖繞著金屬製成的腳尖轉一圈，就能夠畫出一個圓，而金屬製成腳尖所點出的那一個點就是所畫出圓的圓心，圓規兩個腳尖的距離就是所畫出圓的半徑。

圓規只能畫圓，無法畫出圓區域，但是畫出的圓可以決定一個圓區域。圓規也無法直接畫出一條直線段，圓規只能畫出到圓心的距離等於半徑的點。參考圖 2-4-2，如果要畫出一條和指定線段(例如長 a 公分)一樣長的線段，必須先畫出一條直線段 L ，再張開圓規的兩個腳尖，使兩個腳尖的距離和給定的線段一樣長(剛好是 a 公分)，以直線段 L 的一個端點 A 為圓心，畫弧交直線段 L 於 B 點，則線段 AB 的長就是 a 公分。

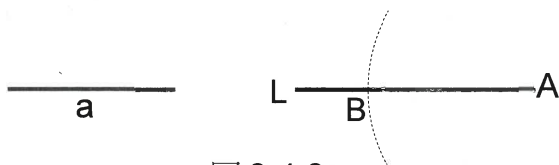


圖 2-4-2

四、扇形

參考圖 2-4-3，扇形是和圓有密切關係的圖形，圓上的一段圓弧以及該圓弧兩端點和圓心連成的兩條半徑所合成的圖形稱為扇形，圓弧大於半圓的扇形稱為優扇形，圓弧小於半圓的扇形稱為劣扇形，半圓也可以視為一種扇形，日常生活中人們只注意小於半圓的劣扇形，本教材主要討論的對象也是劣扇形。

如果一個圖形是由共端點兩條等長的線段夾一段圓弧構成，此圖形並不一定是扇形，只有在以共端點的那一點為圓心，等長線段的長為半徑畫圓，所夾的那一段圓弧剛好是畫出圓的圓周之一部分時，這個圖形才會是一個扇形。當我們將圓錐展開成平面時，其側面的展開圖是一個扇形，這個扇形可能是優扇形，也可能是劣扇形。

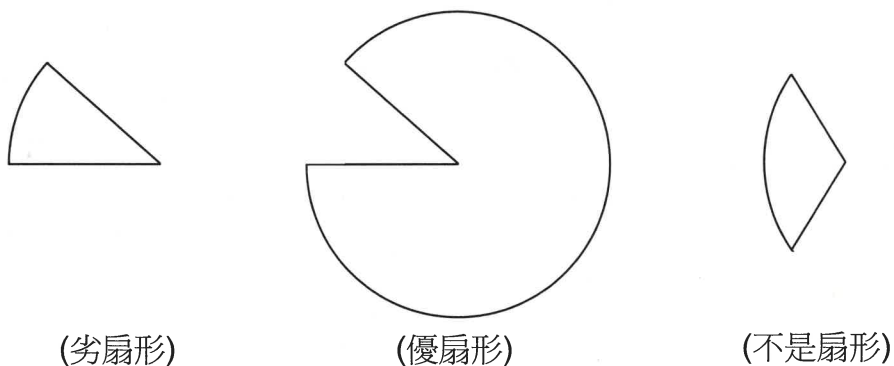


圖 2-4-3

五、扇形的面積

透過圓心將一個圓區域等分割成 360 等份，其中每一等份都是一個全等的扇

形區域，如果將這個扇形區域視為單位扇形面積，單位扇形的面積會是圓面積的 $\frac{1}{360}$ 。如果有上述單位扇形面積的概念，一個扇形的夾角是 30 度時，它的面積就是 30 個單位扇形面積的和，也就是說，夾角 30 度的扇形面積是「(圓面積 \div 360) \times 30」或「圓面積 $\times \frac{30}{360}$ 」，將這種想法一般化，可以得到夾角是 a 度的扇形面積公式「(圓面積 \div 360) $\times a$ 」或「圓面積 $\times \frac{a}{360}$ 」。仿上述引入扇形面積公式的方式，也可以透過單位弧長的概念引入扇形弧長的公式，夾角是 a 度的扇形，其弧長是「(圓周長 \div 360) $\times a$ 」或「圓周長 $\times \frac{a}{360}$ 」。

因為學童對分割圓心角的概念並不成熟，本教材並不引入扇形面積或扇形弧長的公式，因為扇形是分割圓形得到的，因此透過分數概念，教師可以要求學童透過圓面積求出特殊扇形的面積，如下圖 2-4-4，四分之一圓或八分之一圓的扇形面積。

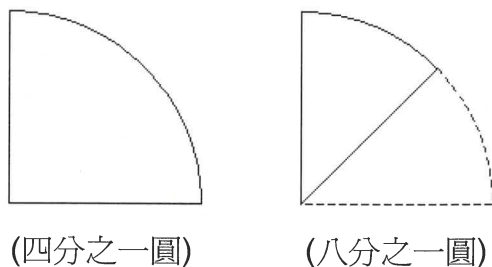


圖 2-4-4

六、圓與扇形教學流程說明

表 2-4 是本教材關於圓與扇形的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-4

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	3	透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。

1	6	4	透過說、讀、聽、做等練習，加強三角形、正方形、長方形和圓形等術語與圖卡、書空、…等的聯結。
1	6	5	透過塗色活動，加深學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。
1	6	*2	熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。
1	6	*3	能用單一的平面圖形造出圖案，以加深對圓形、三角形的認識。
1	6	*4	(1)熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。 (2)找出圖形的規律。
1	6	*6	增強辨認顏色、形狀、大小。
7	7	5	(1)復習辨認圓形與非圓形。 (2)透過具體操作活動，認識圓周、圓心、半徑和直徑。
7	7	6	(1)用圓規畫圓。 (2)透過用圓規畫圓的活動，加深了解圓周、圓心和半徑。
10	3	1	將圓周率的近似值暫定為 3 倍多，從直徑算出圓周長或由圓周長算出直徑。
10	3	2	認識扇形及其構成要素—頂點、邊、圓心角和圓弧。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

在低年級階段，本教材將學童對四邊形的認知定為 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元，本教材先透過活動 3~5、參考活動 2~4 及 6，幫助學童使用圓形的名詞辨認並描述圖形的形狀，因為圓形比多邊形容易區分，本教材沒有刻意再安排澄清圓形的活動。

中年級開始，本教材將學童對圓的認知定為在 **Van Hiele** 的第一層次分析期，在第七冊第七單元，開始幫助學童認識圓的構成要素，在活動 5 中，先要求學童複習如何辨識圓形和非圓形，在透過具體畫圓的活動，認識圓周、圓心、直徑和半徑。在活動 6 中，要求學童使用畫圓的工具—圓規來畫圓，以加深圓周、圓心、直徑和半徑的概念。

第十冊第三單元，在活動 1 中，本教材引入圓周率的概念，幫助學童發現所

◆國小數學教材分析

有圓的樣子都相同，圓周長大約是直徑長的 3 倍。在活動 2 中，先利用標有圓心的圓形紙卡製作扇形，並進行扇形的命名活動，接著要求學童由一堆圖卡中找出扇形圖卡，並實測這些扇形的邊和圓心角，幫助學童認識扇形的構成要素。

第五節 正方體與長方體

一、長方體與正方體的分類及命名

本教材對國小幾何教學活動中的分類及命名活動參考了皮亞傑對分類能力的發展所區分的三個階段，讀者可參考本章第二節的說明。

在立體圖形的分類及命名活動裡，會因為學童在不同的階段而有不同的重點，例如：學童在一年級時就已學會將長方體和正方體從圓柱體、錐體與球體中區分開來，但正式的命名是在二年級從紙盒製作的觀點切入；而三年級的構成要素分析也是為五年級的包含關係做準備，亦即認識正方體是長方體的一個特例；到六年級時便可從較高分析層次以圖形組成要素與圖形之間的關係來重新對各種立體圖形做分類活動，此分類並不是區分正方體與長方體的不同，而是在知道長(正)方體是四角柱的一個特例後，可因此與其它立體圖形區分開來，例如：柱體、錐體、球體等。所以本節在討論長方體與正方體的分類及命名活動上，也依此分為三個階段來說明。

(一) 視覺性的觀點—第一個階段

立體圖形的標準數學名稱如長方體、正方體、柱體、錐體與球體均為溝通方便而逐漸形成。而一般一年級及其之前的學童在未使用這些標準數學名稱時，也能夠以日常生活上的語言來溝通常見的立體實物，例如：像盒子、箱子、罐頭、櫃子等，或用尖尖的、三角的、圓圓的，或像球的形狀等詞彙來描述。所以關於立體圖形的分類在兒童早期就可以透過此種語言來描述、溝通。本教材先透過積木及實物的造形活動，讓學童經驗平面與非平面的區別，再運用學生的語詞，讓學生辨認各種立體圖形，也讓學童加強以觸覺來辨認像長方體、圓柱體、球體、圓錐體等積木或實物，或透過黏土等來仿製球、盒子、圓柱、圓錐等實物。

本教材在學童二年級時，才正式以數學標準名稱來命名長方體與正方體，強調在長方體與正方體的立體物中，如果各面皆是正方形的立體物則稱為正方體，而有長方形的面時，則稱為長方體，所以有的長方體中也有幾個面是正方形，但只要有一個面以上是長方形就稱為長方體。同時本教材認為此時學童可以僅憑視

覺判斷而無需實際操作，即可認知長方體或正方體可緊密地堆疊在一起，而圓柱體、錐體和球體則都不行，但學童此時無法以構成長方體的要素，如各面需互相垂直的性質，來說明其能緊密堆疊在一起的理由，以區別長方體或正方體與其它立體圖形的不同。

(二) 功能性的觀點—第二個階段

這個階段的重點是學童透過圖形的構成要素將幾何圖形分類，但暫時不強調以構成要素間的關係來討論各圖形集合間的包含關係。所以在三年級時，本教材透過製作紙盒的活動，重新認識由 6 個全等的正方形所組成的紙盒是正方體，而由 3 組相對而全等的長方形所組成的紙盒是長方體。也透過骨架的製作知道正方體由 12 條相等的邊所組成，而長方體是由 3 組邊，各組為 4 條相等的邊所組成。

從定義的觀點，正方體也是長方體的一種，此種包含關係在此階段雖然暫不強調，但本教材建議在此階段和小朋友溝通時，除了必須特別提出正方體加以討論的時候，在使用長方體的名詞時，皆包括正方體，但教學時仍以區分長方體與正方體為原則，例如：透過描述與觀察正方體與長方體紙盒，能知道正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點；而長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。

(三) 關係性的觀點—第三個階段

此階段強調幾何圖形所成集合與集合間的包含關係，可以從不同的觀點進行分類。本教材在五年級時，是以長方體與正方體來說，討論線與線的平行或垂直關係、面與面的平行或垂直關係、線與面的平行或垂直關係等，這些構成要素的關係，均無法用以區分長方體與正方體，不若三角形可以用三個角的大小關係區分出銳角、直角或鈍角三角形。所以本教材在五年級雖然討論了正方體與長方體上構成要素間的關係，但並不是用來區分正方體與長方體的不同，而是用作為討論垂直與平行這兩個重要的幾何性質的材料，也說明正方體是長方體的一種包含關係的理由，例如：讓學童先在一個長(正)方體中找出和指定邊互相垂或平行的其他邊，再討論長方體上邊和面的垂直現象，然後才討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象，及長方體上相對的面互相平行的現象。關於垂直與平行的討論，讀者可參考本章第八節，而長(正)方體上的垂直與平行在本節討論。

本教材預估高年級階段的學童，其幾何思考能力大都已進入 Van Hiele 的分析層次，所以在五年級探討過長方體及正方體的結構關係後，到六年級在探討角柱的結構時，除了仿照了分析長方體結構的模式外，也引導學童認識長方體與正方體也是特殊的四角柱的包含關係。

二、長方體與正方體的定義

在前面討論長方體與正方體的分類及命名活動裡，我們可以看出，本教材在定義一個幾何物件時是逐步加深加廣的，一方面顧及兒童的語彙，一方面也顧及兒童的認知經驗。而下面我們討論長方體與正方體的定義時，則是比較由數學知識的觀點提出，特別是本教材認為學童在小學階段能掌握的幾何知識。

按數學的定義，一個六面體，若有三對互相平行的面構成的封閉圖形，且各面均為長方形，即稱為長方體，這個說法係由本教材在第六冊讓學童由紙盒製作的觀點而來，這樣的長方體是不含其內部的空心長方體，而第四冊用於體積教學前置教學的堆疊活動中，所使用的積木為強調實心的長方體，本節因為是在空間中討論立體圖形，故所討論的長方體均為強調空心的長方體，所以在第六冊中，討論對一個長方體而言，其上相對的面都是全等的長方形，故有 3 對全等的長方形、3 組等長的邊及 8 個頂點。進一步地，討論構成長方體要素間關係的分析，如相鄰的兩邊互相垂直，同一平面上不相鄰的兩邊互相平行，這平行的性質極易由「同時垂直於另一邊」而得知。

本教材在第九冊時，討論長方體上相鄰的兩面互相垂直，而不相鄰的兩面則互相平行，這平行的性質是由「垂直一面的直線，若也垂直另一面，則此兩平面互相平行」而得知，例如：在第十冊時，是先在空間中利用桌子有桌腳在地面與桌面間的現象，指出桌面與桌腳互相垂直，桌腳與地面也互相垂，則稱桌面與地面互相平行，然後才在長方體上討論面的垂直關係。但是在長(正)方體上，不在同一平面上不相鄰的兩邊的垂直關係，則需透過另一邊與其所在的面來討論其垂直關係，本教材並不討論。

如果從柱體的角度來觀察長方體或正方體，它們亦為四角柱的一種，亦即在空間中有兩個全等且互相平行的長方形或正方形，連接這兩個平面區域周界對應

的所有直線段，若均垂直於此兩平面，如此形成的集合稱為長方體或正方體，此時兩個全等且互相平行的長方形或正方形稱為底，另外的四個面稱為側面，同時垂直於兩底的線段則稱為高，例如：先介紹柱體是可以擺成從上到下的粗細都一樣，它的上面和下面這兩個面全等而且互相平行，然後再以長方體構成要素及其要素間的關係等性質重新討論角柱。關於柱體的說明，讀者可參考本章第七節。

另外，一個六面體，若有三對互相平行的面構成的封閉圖形，各面均為正方形，即稱為正方體。因此，從分類上來看，正方體是眾多長方體的一個特例，亦即正方體也是長方體的一種，所以一般我們討論長方體時是包含了正方體，不過也由於正方體在長方體中的特殊性，在溝通上我們有時也區分正方體與長方體的不同，例如：本教材在三年級時建議老師除了必須特別提出正方體加以討論外，在使用長方體的名詞時，皆包括正方體，但老師在和學生溝通時，則仍以區分長方體與正方體為原則。而對一個正方體而言，其上的面都是全等的正方形，故有 6 個全等的正方形、12 條等長的邊及 8 個頂點。

三、長方體與正方體的視圖、展開圖、骨架及透視圖

本教材除了透過一般日常生活常見的實物與學童溝通立體圖形外，也由於立體形體經常必須繪製於平面紙張上，所以在低年級開始就透過在平面上所表示的立體圖案，例如：用平面立體圖卡與學童溝通它們實際所表示的立體圖形。本教材在溝通這類圖卡時所用的名稱有視圖、展開圖、透視圖等，除視圖外，「透視圖與展開圖」二個名稱均在第六冊藉分析長方體與正方體的構成要素時，有較正式的命名活動，以利於日後方便與學生溝通時用。

由於在中年級，本課程預估學童可以進入 **Van Hiele** 所謂的第一層次—分析期，所以在中年級為了幫助學童發展對長方體與正方體的構成要素分析，除了介紹透視圖與展開圖外，也引入了所謂的「骨架」來討論長方體與正方體的構成要素。

(一) 視圖

本教材在二年級下學期第六單元引入了視圖，但不必與學童介紹何謂「視圖」。本教材所謂的視圖不強調要遵守投影幾何條件的透視畫法，或出現在工程製

圖學的線條圖，而是比較強調所表達的立體圖形，例如：長方體或正方體的各面是正方形或長方形，但又需遷就於人在注視此類立體圖時必須有的透視感覺，故稱為視圖。

這類視圖在教材呈現時，比較強調邊的等長與平行，且正面需為正方形或長方形，故無透視畫法上所謂的遠視點，如下圖 2-5-1。

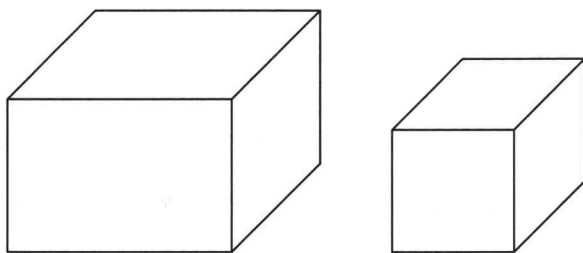


圖 2-5-1

(二) 展開圖

本教材展開圖的引入是在三年級下學期第六冊中，讓學童在製作紙盒時，由先準備好的正方形圖卡製作成正方體紙盒，並討論其構成要素後，再讓學童將紙盒沿著一些邊將相鄰的面剪開，使它能攤平地放在桌面上，而且整塊仍然連成一整片，如此命名所謂的「展開圖」。

(三) 骨架

本教材骨架的引入也是在三年級下學期第六冊中，透過描述「由一堆竹籤組成一長(正)方體燈籠骨架」的活動，討論正方體的頂點與邊的構成要素，並直接使用「骨架」一詞溝通。

(四) 透視圖

在視圖上以虛線描出長方體所有看不見的邊即為透視圖。因為視圖特別強調邊的等長與平行，且正面需為正方形或長方形，所以在描繪時，只要從頂點做出與同組的其他邊的平行線至公共頂點即可由視圖獲得透視圖，如下圖 2-5-2。

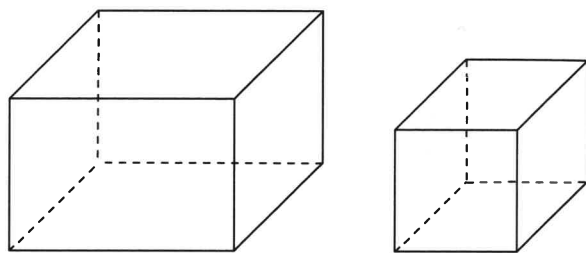


圖 2-5-2

由於中年級學童尚未學習「過給定一點作直線平行於另一線」的平行線畫法，故在三年級時，本教材採取將長方體的視圖上事先加上第八個頂點，再讓學童練習描繪，例如：讓學童將長方體和正方體的骨架與視圖對照後，再把視圖上所缺的三條邊以虛線補上而獲得透視圖，並命名為「透視圖」做為日後溝通之用。

四、長方體與正方體上的垂直與平行關係

本教材在三年級下學期與四年級上學期在平面圖形的教材裡引入垂直與平行關係，例如：在第六、七冊討論垂直與平行關係時，所有直線皆假定位於同一平面上，讀者可參考本章第八節。

但在五年級上學期所討論的垂直與平行關係，則進一步擴充於立體圖形上，例如：在長(正)方體上，有 12 條邊係位於 6 個平面上。故本節僅就長(正)方體上的垂直與平行關係分別說明，而涉及空間中的垂直與平行關係的內容則與本章第八節相同。

(一) 長(正)方體上的垂直關係

1. 邊與邊的垂直

長(正)方體各邊的垂直關係，本教材在五年級討論時皆以處在同一面上的直線(邊)為原則。故本教材在第九冊中，利用長方體各面均為長方形的事實，即可讓學童推得長方體各邊的垂直關係，希望學生能藉此練習簡單推理，但也接受學生使用三角板來檢查。

至於不在同一平面上的不相交兩直線，本教材暫不談論其垂直與否的關係。

2. 邊與面的垂直

空間中，若一直線與平面相交且與該平面上過此交點之直線均垂直，則此一

直線垂直於一平面，本教材以此為定義。若一直線與平面相交，而平面上有相異兩條直線過此交點，且與此直線垂直，則此直線必垂直於平面上其他過此交點之直線，故按前述定義即此直線與該平面垂直，此為定理，例如：本教材第九冊中，先讓學童認識空間中相交的兩直線可決定一平面，接著定義一直線與一平面垂直的意義後，再讓學童檢驗一直線若與平面上過垂足的相異兩直線垂直，則該直線即垂直此一平面，最後才討論長方體上邊和面的垂直現象。關於空間中的直線與平面的垂直關係的討論，讀者可參考本章第八節。

此處需注意的是在五年級上學期以前，是以先有一平面後，才在此平面上取相交的兩直線度量其角度，本教材在第九冊討論空間中的直線垂直於平面時，是先有空間中相交兩直線來決定一平面的，意即希望能讓學童了解會有一個平面包含此相交的二直線。所以本教材建議教師宜區分定義層面與定理層面的教學的不同與前後關係。

3. 平面與平面的垂直

本教材在第十冊，利用直線垂直於平面的認識，來進行平面垂直於平面的關係討論，例如：本教材是在第七冊先從生活中看到的牆壁或圍牆垂直於地面的現象開始。接著，用三角板的一邊固定在紙板上，另一邊在桌面上轉動(轉幅在 30 度至 60 度之間即可)，顯示紙板垂直於桌面。然後再探討長方體的面與其相鄰面的垂直關係。接著再觀察三角柱體的某些相鄰的側面做為反例。

(二) 長(正)方體上的平行關係

1. 邊與邊的平行關係

在長(正)方體上，互相平行的邊有三組，一組共四條。對一組中任一條而言，有另外兩條會分別與此邊同在長方體的一面上，其平行性質極易由「同時垂直於另一邊」而得，所以本教材主要是利用長方體各面均為長方形的事實，來討論長(正)方體上互相平行的邊。所以雖然在平面上，兩直線若同時平行於第三直線，則此兩直線互相平行，此事學生可以透過平行的定義來了解，但是此結果不適用於討論長方體上不在同一平面的邊，所以本教材在高年級所討論的平行關係，皆以處在同一面上的線為限，例如：本教材是在第九冊討論一個長(正)方體上邊與邊的平行關係時，是先復習平面上同時垂直於一直線的兩線互相平行，接著討論長方

形上對邊的平行關係，再讓學童於長方體上找出和指定邊互相平行的其他邊。

但有一邊與此邊相對，卻無法同在長方體上的同一面上，本教材利用它來進行非形式演繹的教學，因為本課程認為由於高年級階段的學童的幾何思考能力大都已進入 Van Hiele 的分析層次，同時也是學童由分析層次進入關係期(或非形式演繹期)的過渡時期，所以暫不強調幾何推理上所謂定義與定理的區分來系統地討論構成要素間關係的推演，但是在教學時仍然可以選擇某一構成要素間的關係，將它當成優先的定義，再試著讓學生覺察驗證另一構成要素間的關係，例如：本教材在第九冊，利用打開盒子或將長方體切成全等的兩個三角柱的方式，讓學生驗證討論原本看不出在同一平面上的另一條邊亦與討論中的邊相互平行的關係。

2. 平面與平面的平行

關於平面平行於平面，學童在四年級時，即認識到平面上兩直線互相平行的意義為兩直線同時垂於第三條直線。而空間中兩平面互相平行的條件也完全一樣，即兩平面同時垂直於一條直線，要說同時垂直於第三個平面也可以，例如：本教材在第十冊讓學童討論兩個牆壁或櫥櫃相對兩面的平行現象後，再討論長方體上相對兩邊互相平行的現象。

3. 邊與面的平行

直線平行於平面的定義，本教材是採取一直線及一平面同時垂直於另一條直線，要說成同時垂直於另一個平面也可以，例如：本教材在第十冊是藉由觀察單槓和地面平行的現象，讓學童認識直線和面互相平行的意義，再討論長方體上邊與面的平行關係。

五、長方體與正方體教學流程說明

表 2-5 是本教材關於長方體與正方體的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-5

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	1	透過積木及實物的造形活動，經驗平面和非平面的區別。
1	6	2	透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。
1	6	*1	(1)從觸摸中感覺物件的特色，如平平的、尖尖的、圓圓的、...。 (2)增強辨認長方體、圓柱體、球體、圓錐體等。
1	6	*5	複製球、盒子、圓柱、圓錐。
4	6	1	運用學生的語詞，進行正方體和長方體的命名活動。
4	6	2	將實物與平面立體圖對照，使學生能從平面立體圖認出實物。
4	6	3	透過說、讀、聽等練習，加強實物與平面立體圖的聯結。
4	6	4	學生用自己的話來描述造形的過程和想法。
4	6	5	仿造一個實心的正方體或長方體，其大小和事先準備的實物一樣。
4	6	6	用數量一定、形狀及大小相同的數學積木，堆積成各種可能的長方體或正方體。
4	6	*1	透過說、讀、聽等練習，加強實物與平面立體圖的聯結。
6	7	1	透過描述「由一堆正方形圖卡拼湊以圍成一正方體紙盒」的活動過程，在討論中凸顯正方體有 6 個面。
6	7	2	透過描述「由一堆長方形圖卡拼湊以圍成一長方體紙盒」的活動過程，在討論中凸顯長方體有 6 個面，12 條邊。
6	7	3	透過描述「由一堆竹籤組成一個正方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中凸顯正方體有 8 個頂點，12 條邊。
6	7	4	透過描述「由一堆竹籤組成一個長方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中凸顯長方體有 8 個頂點，12 條邊。
6	7	5	透過觀察正方體和長方體，經驗正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點，長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。

6	7	6	透過將長方體和正方體的骨架與視圖對照的活動，在視圖中補上三條虛線得到透視圖。
9	15	1	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相垂直的其他邊。
9	15	2	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相平行的其他邊。
9	15	3	(1)認識空間中相交兩直線決定一平面，且可直接度量此相交兩直線所形成的角之大小。 (2)認識一直線與一平面垂直的意義。 (3)經驗一直線若與平面上兩直線垂直，即垂直於此平面。 (4)討論長方體上邊和面的垂直現象。
10	7	2	由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。
10	7	3	由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。
10	7	4	由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。
11	11	1	透過由一堆立體中找出像柱子的立體的活動，認識柱體。
11	11	3	透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數、底面全等、側面為長方形、側邊一樣長且垂直於底面、底面互相平行、側邊互相平行。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

在低年級階段，本教材將學童對長方體與正方體的認知定位在 Van Hiele 的第零層次視覺期，所在第一冊第六單元活動 1、2 及參考活動 1、5 中，透過實物或積木，先以學童自然的語彙來進行辨識與簡單的分類活動。在第四冊第六單元活動 1~6 及參考活動 1 中，才對長方體與正方體進行正式的命名活動，一方面加強在平面立體圖中辨識各類立體圖形，一方面也對體積的教學進行了前置的堆疊活動，初步經驗了長(正)方體可緊密地做無空隙的堆疊，關於體積的教材說明，讀者可參考本叢書《體積和角度》一書。

中年級時，本教材將學童對長方體與正方體的認知定位在 Van Hiele 的第一

層次分析期。故在第六冊第七單元的活動 1~6 中，利用紙盒、骨架及視圖、透視圖、展開圖等與學童討論長方體與正方體的構成要素，並協助學童在平面紙張上描繪透視圖。

高年級時，本教材開始探討構成要素之間的關係，為由 Van Hiele 的第一層次分析期到第二層次關係期的過渡期，所以在第九冊第 15 單元活動 1~3 中，討論了長方體上邊與面的垂直與平行的關係，特別在活動 3 中，建議教師區分教學活動中定義與定理不同層面的處理，讓學童初步嘗試幾何推理。在第十冊第七單元活動 2、3 中，則藉由觀察牆壁和地面的垂直與平行的現象，認識平面互相垂直或平行關係的意義，在活動 4 中則藉單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。在第十一冊第十一單元活動 1 與 3 中，在學童初步認識角柱含長方體後，再藉由長方體的構成要素及其關係來探討一般角柱，讓學童以構成要素的觀點來對立體圖形進行分類活動。

第六節 球

一、球

在空間上選定一定點 O ，在空間中與定點 O 的距離是 $r(r > 0)$ 的所有點所成的集合稱為球，該定點 O 稱為球心， r 稱為半徑，半徑的 2 倍稱為直徑。球把空間區分成三個部分：球的內部、球(周界)和球的外部，球和球的內部稱為球體，請注意，球心並不在球上面。

在數學上，球是不包含內部的，英文稱之為球面(sphere)，若要強調球體(球和球內部的聯集)，英文稱之為 Ball(球體)，相同的，圓也不包括內部，英文稱之為 circle(圓圈)，若要強調圓區域(圓和圓內部的聯集)，英文稱之為 disc(圓區域)。

在中文的日常用語中，這是圓的，可以指包含內部的圓區域，也可以指不包含內部的圓。相同的，這是球形(或球體)的，可以指包含內部的球，也可以指不包含內部的球，造成這種不加分辨的原因，可能與物體為實心或空心，常常是很明顯的，要不然就是很不容易判斷有關。

二、球心與球的半徑及直徑

雖然球的定義和圓的定義相同，都是與定點 O 的距離是 r 的所有點所成的集合，但是圓是一個平面圖形，當我們固定繩子的一端，並在另一端綁上鉛筆，很容易的可以畫出一個圓，並具體的看到圓心，雖然在畫出的圓中看不到半徑，但是可以透過連接圓心和圓上任意點的方式畫出半徑長，因此引入圓心、半徑及直徑的意義沒有困難。

在空間中無法透過球的定義畫出一個球，在空間中要造出一個球或球體，也相當的困難，因為無法確定造出來的立體是一個球或球體，而且不論使用吹泡泡、搓黏土或其它方法造球，都無法看到球心，因此無法連絡球面、球心和半徑及直徑的關係。就是給學童一個籃球，也無法看到球心及半徑，基於上述原因，再加上課程標準並沒有要求一定要討論球心與半徑，因此本教材選擇可以操作的「球的截面為圓」的現象，幫助學童檢查立體是否為球，引入球的初步概念。

任意的平面與球相截，其截痕一定是一個圓，反之，若有一個空間的封閉圖形不是球，則必可找到一個截面，而此截面不是圓。本教材透過上述性質引入球的概念，只是提供學童一種檢驗立體是否為球或球體的方法，本教材並不要求學童理解上述性質，也就是說，本教材不要求學童推論，如果有一個截面不是圓，這個立體就不是球，如果從不同方向切出來的截面都是圓，這個立體就是球體。本教材要求學童先直觀的判斷某一個立體不是球形，並察覺如果這一個立體不是球，那麼一定可以找到一個截面不是圓形，如果這一個立體是球，那麼不同方向切割出來的截面都是圓。

學童從小就有滾動皮球或其它立體的經驗，知道籃球或其它球形立體在平面上往任意方向滾動，其滾動的方式是一致的，不會改變，而橄欖球(或其它非球形立體)在平面上往任意方向滾動，其滾動的方式不一致，隨時會改變運動方式。依據上述經驗，學童也可以透過滾動立體的方式，判斷這一個立體是否為球。

三、球的教學流程說明

表 2-6 是本教材關於球的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-6

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	2	透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。
8	8	1	從日常生活中找出球體的物品。
8	8	2	察覺球體的截面都是圓形，並認識半球體。

在低年級階段，本教材將學童對四邊形的認知定位在 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元，本教材先透過活動 2，幫助學童使用球或球形名詞辨認並描述圖形的形狀。

中年級開始，本教材將學童對球的認知定為在 **Van-Hieie** 的第一層次分析期，在第八冊第八單元，開始幫助學童認識球，在活動 1 中，先要求學童找出日常生活中常用的球形用品；活動 2 中，再要求學童先直觀的判斷某一個立體不是球形，

◆國小數學教材分析

並察覺如果這一個立體不是球，那麼一定可以找到一個截面不是圓形，如果這一個立體是球，那麼不同方向切割出來的截面都是圓。本教材並沒有引入球心及半徑的概念。

第七節 柱體與錐體

一、柱體

空間中兩個全等且互相平行的封閉平面區域，以及在全等關係下，連接這兩個平面區域周界對應點的所有直線段，它們所成的集合稱為柱體。其中兩個全等且平行的封閉平面區域，稱為柱體的底，一般依擺放位置可以區分為上底與下底；底以外的其餘表面，稱為柱體的側面。同時垂直於兩個底面的線段，稱為柱體的高，而高的長度，一般也簡稱為柱體的高，上、下兩個底面的距離就是柱體的高。柱體一般以其兩個底面的形狀來命名，如果其底面是多邊形區域，則稱為角柱，如果其底面是圓區域，則稱為圓柱。下圖中圖 2-7-1 到圖 2-7-7 是七種不同的柱體。

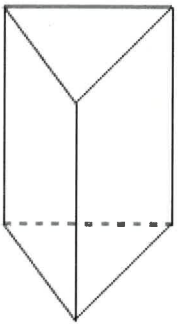
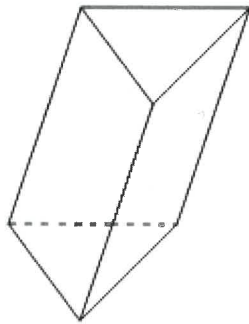


圖 2-7-1



(斜角柱)

圖 2-7-2

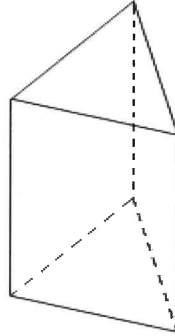


圖 2-7-3

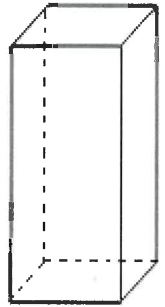


圖 2-7-4

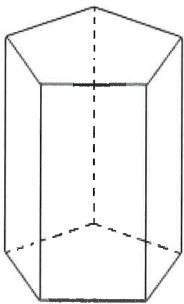
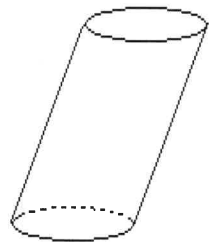


圖 2-7-5



圖 2-7-6



(斜圓柱)

圖 2-7-7

(一) 角柱

隨著角柱底面形狀的不同，可以分別給予柱體不同的名稱以利區別，例如：底面是三角形區域的柱體稱為三角柱，底面是四邊形區域的柱體稱為四角柱，底面是五邊形區域的柱體稱為五角柱…，以此類推。而上圖中圖 2-7-1、圖 2-7-2、圖 2-7-3 都是三角柱，圖 2-7-1 中三角柱的側面是長方形區域，而圖 2-7-2 中三角柱的側面是平行四邊形區域，如果角柱的側面是長方形區域，一般稱為直角柱，直角柱側面有兩個邊和兩個底面都垂直，如果角柱的側面是平行四邊形區域，一般稱為斜角柱，斜角柱側面的邊和上下兩個底面都不會垂直，當直角柱的底面是正多邊形區域時，一般稱為正角柱，圖 2-7-3 是正三角柱，圖 2-7-4 是正四角柱，圖 2-7-5 是正五角柱。在國小階段討論的對象都是直角柱，並不討論斜角柱，因此本教材將直角柱稱為角柱。

「上、下兩個底面是全等的多邊形區域」，「上、下兩個底的周界所對應的邊互相平行」，「上、下兩個底面互相平行」，「側面都是長方形區域」，「側面的邊的長度都等長」，「側面的邊，分別垂直於上、下兩個底面」，「側面的邊都互相平行」，上述這些性質都是直角柱的特徵，當學童進行完直角柱的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

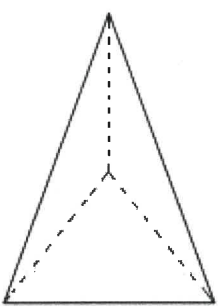
(二) 圓柱

底為圓區域的柱體稱為圓柱。和角柱一樣，圓柱也可以區分為直圓柱和斜圓柱兩類，圖 2-7-6 是直圓柱，圖 2-7-7 是斜圓柱，直圓柱上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面，而斜圓柱上、下兩個底面圓心的連線和兩個底面都不垂直。國小階段討論的對象都是直圓柱，並不討論斜圓柱，因此本教材將直圓柱稱為圓柱。

「上、下兩個底面是全等的圓區域」，「上、下兩個底面互相平行」，「上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面」，「側面上，同時垂直於上、下兩個底面的線段都等長」，上述這些性質都是直圓柱的特徵，當學童進行完圓柱的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

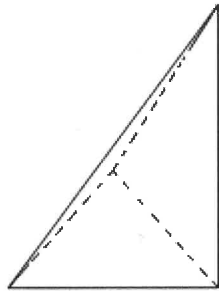
二、錐體

在空間中，給定一個封閉的平面區域，以及不在此平面區域上的一個點，則連接此給定的點與平面區域周界上任意點的所有直線段所成的集合，稱為錐體。決定此錐體的平面圖形稱為錐體的底，底面外的那一個給定點，稱為錐體的頂點，底面以外的錐體表面，稱為錐體的側面。錐體頂點到底面的距離，或由頂點垂直於底面的線段都稱為錐體的高。錐體一般以其底面的形狀來命名，如果其底面是多邊形區域，則稱之為角錐，如果其底面是圓區域，則稱之為圓錐。下圖中圖 2-7-8 到圖 2-7-14 是七種不同的錐體。



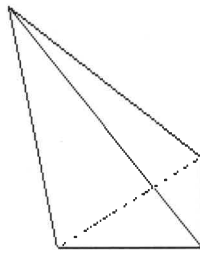
(底面是正三角形區域的正三角錐)

圖 2-7-8



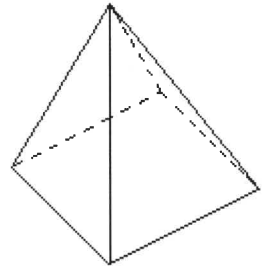
(底面是正三角形區域的斜三角錐)

圖 2-7-9



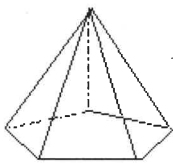
(底面不是正三角形區域的斜三角錐)

圖 2-7-10



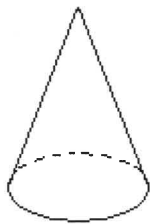
(正四角錐)

圖 2-7-11



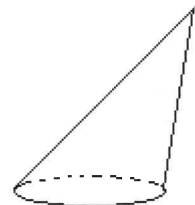
(正五角錐)

圖 2-7-12



(直圓錐)

圖 2-7-13



(斜圓錐)

圖 2-7-14

(一) 角錐

隨著角錐底面形狀的不同，分別給予錐體不同的名稱以利區別，例如：底面是三角形區域的錐體稱為三角錐，底面是四邊形區域的錐體稱為四角錐，底面是

五邊形區域的錐體稱為五角錐…，以此類推。而上圖中的圖 2-7-8、圖 2-7-9、圖 2-7-10 都是三角錐，圖 2-7-8 中三角錐的底面是正三角形區域，其側面都是等腰三角形區域，而頂點到底面正三角形外接圓圓心的連線一定會和底面垂直，一般稱這種角錐為正角錐，圖 2-7-9 中三角錐的底面也是正三角形區域，其側面不是等腰三角形區域，而頂點到底面正三角形外接圓圓心的連線不會和底面垂直，圖 2-7-10 中三角錐的底面是三邊都不等長的三角形區域，側面都不是等腰三角形區域。過去國小課程所討論的錐體都是正角錐，其底面都是正多邊形區域，而頂點到底面正多邊形外接圓圓心的連線都會和底面垂直，圖 2-7-11 與圖 2-7-12 都是正角錐，圖 2-7-11 是正四角錐，圖 2-7-12 是正五角錐。

本教材只討論角錐的一般性質，並不刻意的區分正角錐或斜角錐，「錐體的側邊都是三角形」，「錐體的側邊都交於同一點」，上述這些性質都是角錐的特徵，當學童進行完角錐的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

一個三角錐有 4 個頂點，其中不在底面上的那一個頂點，是決定錐體的頂點，而底面三角形區域的三個頂點，是形成角錐後產生的頂點，國小學童並不討論角錐是如何產生的，只討論給定的角錐有哪些性質，本教材定義尖尖的點就是角錐的頂點，將這四個點都稱為頂點，也不區分這些頂點不同的意義。

(二) 圓錐

底面為圓形的錐體稱之為圓錐，和圓柱一樣，圓錐也可以區分為直圓錐和斜圓錐兩類，圖 2-7-13 是直圓錐，圖 2-7-14 是斜圓錐，直圓錐頂點到底面圓心的連線會垂直於底面，而斜圓錐頂點到底面圓心的連線不會垂直於底面，本教材只討論圓錐的一般性質，並不刻意的區分直圓錐或斜圓錐。

三、柱體和錐體構成要素的分析

柱體及錐體的構成要素都是頂點、邊和面，生活中的實物構造，屬於標準的柱體或錐體並不多，大部分實物的外貌都是複合結構，有些部分的截面比較大，有些部分配有凹凸的裝飾，數學上的描述都是以實物的理想化情境來考慮。

(一) 角柱

角柱的構成要素為頂點、邊和面，這些構成要素的個數，分別依其底面的形

狀而不相同，下面列出角柱頂點、邊和面的個數和底邊的邊數間的關係。

- 頂點個數 = 一個底的邊數 $\times 2 = 2n$ (n 角柱)
- 邊的個數 = 一個底的邊數 $\times 3 = 3n$
- 面的個數 = 一個底的邊數 $+ 2 = n + 2$

由上面的式子可以知道， n 角柱的頂點個數、邊的個數及面的個數一定會滿足「頂點的個數($2n$) + 面的個數($n + 2$) = 邊的個數($3n$) + 2」，數學上稱這個算式為尤拉公式，而尤拉公式對正多面體等立體圖形也成立。

(二) 角錐

角錐的構成要素也是頂點、邊和面，其個數也和底邊有密切的關係，下面列出角錐頂點、邊和面的個數和底邊的邊數間的關係。

- 頂點數 = 底的邊數 $+ 1 = n + 1$ (n 角錐)
- 邊的個數 = 底的邊數 $\times 2 = 2n$
- 面的個數 = 底的邊數 $+ 1 = n + 1$
- 角錐也滿足尤拉公式「頂點的個數($n + 1$) + 面的個數($n + 1$) = 邊的個數($2n$) + 2」。

(三) 圓柱

決定圓柱的要素為底面的大小，以及兩個底面之間的距離，圓柱的粗細由底面半徑的長短決定，而圓柱的長短或高低由兩個底面的距離決定，因為圓柱底面圓區域的周界是曲線，側面為曲面，因此本教材不討論圓柱頂點、邊和面個數的問題。

(四) 圓錐

決定圓錐的要素為底面的大小，以及頂點到底面的距離，和圓柱不同的是圓錐有一個頂點，因為圓錐底面圓區域的周界是曲線，側面為曲面，所以本教材也不討論圓錐邊和面個數的問題。

四、柱體和錐體的展開圖

在理論上來說，立體的表面是無法展開的，因為立體只是一個形狀，並沒有厚度，只能透過拓印的方式，依其各面的相關位置，在平面將各個面拓印下來。為了能較具體地呈現立體各面展開的可能相對位置，本教材所討論的立體展開圖，是將立體想像成其內部是空心的，用紙做的模型，可以沿著此模型面的邊緣將其剪開。

剪出角柱和角錐的展開圖時，必須滿足剪開後相連的面保留有共同的邊，每一個面至少保留有一個邊和其它的面相連，所有的面要連結成一整塊，可以攤平成一個平面區域，而且可以再沿著相鄰的邊，摺回成原來的立體等這些條件。角柱和角錐可以有很多的展開方式，圖 2-7-15 和圖 2-7-16，分別是四角柱兩種不同的展開圖。

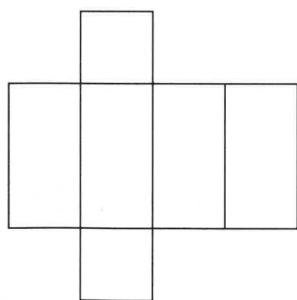


圖 2-7-15

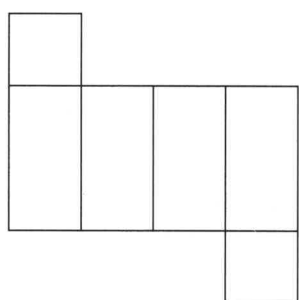


圖 2-7-16

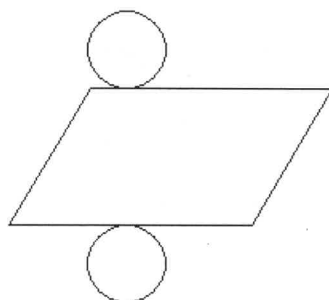


圖 2-7-17

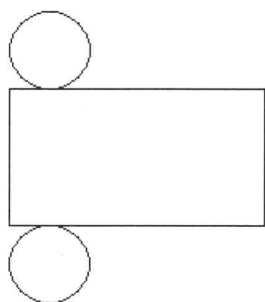


圖 2-7-18

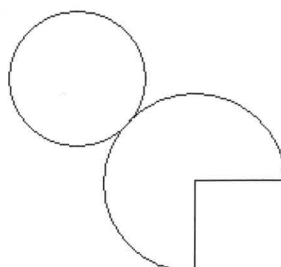


圖 2-7-19

圓柱和圓錐的底面是平面，側面是曲面，而其底部的圓周是曲線，因此圓柱和圓錐展開的方式和角柱與角錐不同。如果要讓展開後整個表面都能平攤在平面上，其底面的周界和側面理論上只能有一個點相連接，無法和角柱與角錐一樣，

保持一個直的邊相連接，圖 2-7-17 和圖 2-7-18 都是一個圓柱的展開圖，它們可以透過下列方式剪出：先將兩個底面沿著圓周剪開，使其分別和側面只保持一個理想化的連接點，再就側面上兩個底的邊緣各選定一個點，將這兩個點連接起來，如果這兩個點的連線和底面的邊緣不垂直，沿著這條線剪出來的展開圖是圖 2-7-17 圓柱的側邊展開成平行四邊形區域。如果這兩個點的連線和底的邊緣垂直，沿著這條線剪出來的展開圖是圖 2-7-18，圓柱側邊展開成長方形區域，習慣上，我們都選擇圖 2-7-18 當做圓錐的展開圖。

圖 2-7-19 是一個圓錐的展開圖，其剪開的方法和圓柱類似，先將底面和側面沿著底的邊緣剪開，使底面和側面只保持一個理想化的連接點，接著在底的邊緣上找一點，將這點和頂點連接起來，沿著這條線就能將側面剪成一個扇形。

直圓錐展開圖中扇形所夾的角度，和直圓錐底面的半徑以及頂點到底面圓周上任意點的距離(簡稱側邊長)有關係，假設一個直圓錐底面的半徑是 r ，側邊的長是 a ，那麼該直圓錐展開圖中的扇形區域，其半徑是 a ，弧長是 $2\pi r$ ，假設該展開圖中扇形的夾角是 θ 度，因為扇形的弧長和以 a 為半徑的圓周長滿足「 $2\pi r : 2\pi a = \theta : 360$ 」的關係，因此可以得到「 $\theta = 360 \times r \div a$ 」的結果。

學童不易理解上述公式，因此本教材只要求學童能剪出直圓錐的展開圖，並不要求學童畫出直圓錐的展開圖。如圖 2-7-20，教師畫直圓錐展開圖的時候應該注意，當 $2r = a$ 時， θ 會等於 180 度，所畫出的扇形是一個半圓，當 $2r > a$ 時， θ 會大於 180 度，所畫出的扇形會是一個優扇形(比半圓大)，當 $2r < a$ 時， θ 會小於 180 度，所畫出的扇形才是一個劣扇形。

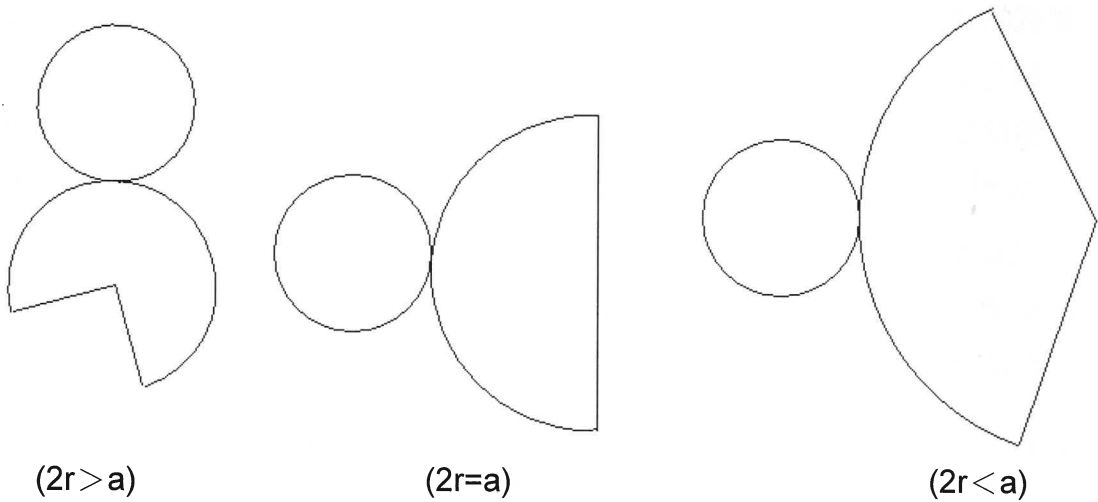


圖 2-7-20

五、柱體及錐體教學流程說明

表 2-7 是本教材關於柱體及錐體的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-7

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	2	透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。
6	7	5	透過觀察正方體和長方體，經驗正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點，長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。
10	7	2	由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。
10	7	3	由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。
10	7	4	由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。
11	11	1	透過由一堆立體中找出像柱子的立體的活動，認識柱體。
11	11	2	透過由一堆立體中找出像尖頂的立體的活動，認識錐體。

11	11	3	透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數、底面全等、側面為長方形、側邊一樣長且垂直於底面、底面互相平行、側邊互相平行。
11	11	4	透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等、底面互相平行。
11	11	5	透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數、側面的形狀為三角形和側面共同的頂點為尖頂的性質。

在低年級階段，本教材將學童對柱體和錐體的認知定為在 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元活動 2，透過實物辨識球、圓錐、圓柱和長方體等圖形，並描述圖形的形狀。

中年級開始，本教材將學童對球的認知定為在 **Van Hiele** 的第一層次分析期，在第六冊第七單元活動 5，開始探討柱體的構成要素，透過觀察正方體和長方體，知道正方體有六個全等的面，十二個等長的邊，長方體有三對全等的面，三組等長的邊，八個頂點。

高年級開始，本教材開始探討構成要素之間的關係，第十冊第七單元活動 2、3、4，分別幫助學童認識長(正)方體上相鄰的面互相垂直的現象，相對的面互相平行的現象，以及邊和面互相平行的現象。第十一冊第十一單元活動 1、2，分別在一堆立體中找出像柱子一樣的立體，以及像尖頂一樣的立體，認識柱體和錐體，活動 3 透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數，以及底面全等，側面為長方形區域，側邊一樣長且垂直於底面，兩底面互相平行，側邊互相平行等性質。活動 4 透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等，底面互相平行等性質。活動 5 透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數，以及側面為三角形區域，側面的邊都交於同一點的性質。

第八節 垂直與平行

一、直角的命名

「直角」之名稱得自鉛直方向與水平方向所成之形象。此種形象在生活周遭的物體上隨處可見。數學上，若角以兩邊所指方向差的大小加以分類，角度等於一圓之半徑繞圓心旋轉四分之一圓時，則稱此角為「直角」。因為鉛直、直角與垂直三個用語在表達時，指涉了不同的情境，但三者實則又緊密相關，故本節在討論垂直前，也將直角在本教材中的處理在本節中做討論。另外，關於鉛直，本教材在第七冊第三單元中曾提到，認知心理學家發現，人腦有專責判斷直線傾斜度的神經細胞，所以我們才能判斷水平方向與鉛直方向。其實，不用認知心理學家來說，每個人都可以很自然的判斷自己是否直立站在地面上，也知道傾斜站立時容易跌倒，或在爬坡時感覺地面是斜的，以此觀點來看，鉛直並不難理解與溝通。

本教材在第六冊初步引入直角時是以透過三角板上各角的比較活動直接命名「直角」，再進行各個具有明顯直角特徵的物件上直角之比對，以察覺在不同方位上顯現的直角特徵，例如：從比較三角板的角中命名直角後，再以三角板上的直角比對出書本、書桌、窗戶上的直角所在，再引入了角度的測量工具的使用及報讀活動，知道直角是張開 90 度的角。在第六冊引入直角時，並未同時介紹銳角與鈍角等名稱，而是在第八冊中，才藉由與直角的比較來定義銳角與鈍角，強調在三角形的三個角中，比直角大的角是鈍角，比直角小的角是銳角。

透過適當的溝通，一般 5 歲的兒童可以在一堆直角與非直角的圖形卡中分辨出直角，這比在一堆非直角的圖卡中加以區別不同的角來得容易。同時在一些直角的圖形中，角的邊是否呈水平或鉛直，在比較方位不同的兩直角是否相等時，觀察者的反應是否敏感會影響他們的判斷，即使學童到 10 、 11 歲時，仍然有很多會認為兩者不相等，故本教材建議教師宜注意此現象加強教學。雖然本教材在第六冊也討論平面圖形上的長方形或正方形中有四個直角，但此階段，本教材認為尚不宜以「有四個直角的四邊形都是長方形」做為長方形的正式定義，此部分的討論，讀者可逕行參考本章第二節。

雖然本教材在引入直角前已透過張開扇子的活動及其結果的描繪，例如：在第六冊中，讓學童認識了角的構成要素，但本教材對直角的初步命名活動，仍是先在三角板上做各角的比較活動以辨識直角，例如：透過比較三角板的角認識直角。到第七冊介紹所謂的旋轉角，是一射線繞其端點旋轉一個程度的量後，直角才有旋轉角量的意義。角量的最恰當數學意義是旋轉角量，而非圖形角或張開角。而本課程關於角的義意的引入則分為圖形角、張開角及旋轉角三個不同的階段來逐步豐富角的意義，有關的角不同定義方式的討論，讀者可參考本叢書《體積和角度》一冊。

二、垂直的命名

平面上兩相異直線之間的關係，可由兩直線相不相交，及相交後所成的角有多大來描述。相交所成的角有四個部分，合起來為一周角。對頂角相等，鄰角互補。若兩直線不相交，則稱兩直線(互相)平行。若兩直線相交，且其交角中有一個為直角，則其餘三個亦必為直角，此時稱兩直線互相垂直。

關於垂直的命名活動，本教材也是在第六冊引入，例如：讓學童在知道正方形、長方形都有四個直角後，透過複製直角的活動，經驗垂直的意義。此時的垂直意義也類似上節所指出的像直角的初步命名活動一樣，是圖象式的。然而垂直在數學上主要是強調兩相異直線間的關係，所以本教材在第七冊中進一步強調：

1. 垂直是兩直線之間的關係之一。
2. 垂直的名稱，是從所給直線為水平時，另一直線若呈鉛垂狀態，則可與水平線相交成直角而得。
3. 先有乙線垂直於甲線，將圖紙旋轉，亦可看成甲線垂直於乙線後，才有甲乙兩線互相垂直的說法。
4. 在乙線垂直於甲線時，甲線(水平線)先入為主，乙線後來為從。
5. 過指定點做直線垂直於已知直線。

三、平面圖形上的垂直和平行

本教材同意認知心理學家的發現，人腦有專責判斷直線的傾斜度的神經細胞，若以此來看平行的關係，則知兩直線平行的認知來自其傾斜度相同，而在操作層面上若有第三條相截直線參照，則其傾斜度的控制，來自與截線交角，因此平行關係也可採用與第三條直線同時垂直的定義，尤其在畫平行線的時候，使用與第三條直線垂直是具體有效的方式之一。另外對兩直線任意延長永不相交的平行定義，因兒童無法每次都準確地延長一直線至隨心所欲的長度，因此雖然知曉延長的意義，對任意延長，永不相交的意義，無法從具體的活動抽象而得，所以本教材採用可具體實施的平行定義，即兩直線若同時垂直於第三直線，則此二直線互相平行。此定義在平面幾何學中，確為可運作的定義，也符合一般的認知與數學內部的結構。

由於本教材採取平行的定義是由垂直而來，所以在第六冊第一次引入平行關係，是藉由討論長方形邊的垂直關係時，以同時垂直同一邊的兩邊，稱為平行的邊，例如：先從四邊形的邊中找出垂直的邊，再從垂直於同一邊的兩個邊經驗平行的意義。而在第七冊則進一步強調：

1. 平行是兩直線間的關係之一。
2. 先有乙線平行於甲線，此時甲線先入為主，乙線後畫為從。再由同時垂直於同一直線來看，亦可說成甲線平行於乙線，所以兩線互相平行。
3. 過指定點做直線平行於已知直線。

四、空間中的垂直和平行

本節主要在討論空間中的直線與平面的垂直與平行關係，涉及長方體部分的内容則與第五節相同。

(一) 直線垂直於直線

儘管在空間中考慮直線與直線的垂直關係，本教材主要仍然是考慮在空間中同一平面上處理，至於空間中不在同一平面上的兩直線是否有垂直的關係，本教材暫不談論，而長方體上的邊與邊的垂直關係，讀者可參考本章第五節。

(二) 直線垂直於平面

如圖 2-8-1，設 M_1 和 M_2 是平面 E 上過 P 點的兩相異直線。若 L 與 M_1 和 M_2 均垂直，則 L 與平面 E 垂直。

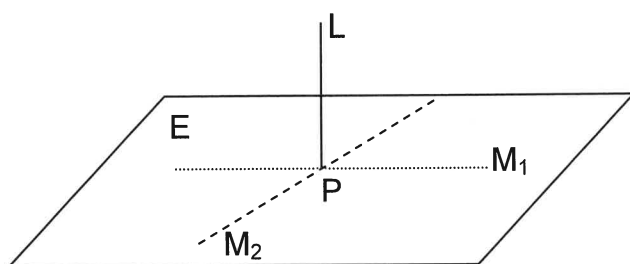


圖 2-8-1

換句話說，若 L 與兩相異直線垂直，則 L 垂直於此二直線所決定的平面，即此平面上任意過交點 P 的直線均與 L 垂直。

所以在五年級上學期，我們先讓學童認識到相交兩直線決定唯一的平面，再將此二直線的交角以量角器測量其度數，再以此測量直線交角的方法，用來判定直線是否與一平面上過其垂足的直線均垂直，以此來確定一直線是否與一平面垂直。接著才討論長方體上的邊與面的垂直關係，強調一邊與其相交的面，因為該面所含的另外兩邊皆垂直(因為是長方形)，所以可以判定長方體的邊與其相交的面均垂直，而可以不必再拿三角板來檢查。

另一方面，學童從旗桿、爬竿、電桿、柱等的觀察，或對繫繩立柱的實作中，就可以認識到直線垂直於平面的現象。但是本教材建議教師，可以將直線與平面垂直後固定住，再將整個系統做不同方向的轉動，再與兒童溝通直線仍然垂直於平面的現象。

(三) 平面垂直於平面

設有平面 E_1 和 E_2 ，若自 E_1 上任意一點 Q 向 E_2 做垂線，且此垂線完全在 E_1 上，則稱 E_1 和 E_2 垂直，換句話說，若 E_1 包含 E_2 的某一垂線，則 E_1 和 E_2 垂直。

本教材在五年級下學期引入平面垂直於平面的活動，例如：利用五上對直線垂直於平面的認識，探討平面垂直於平面的關係。本教材先從生活中看到的牆壁或圍牆垂直於地面的現象開始。接著用三角板的一邊固定在紙板上，另一邊在桌

面上轉動，顯示紙板垂直於桌面。然後再探討長方體的面與其相鄰的面的垂直關係。最後再觀察三角柱的某相鄰的側面做為反例。

(四) 平面平行於平面

本教材在兩直線平行關係的處理上，採取以平面上兩直線同時垂直於第三條直線為平行的定義。在空間中討論兩平面互相平行的關係也仿此，即空間中兩平面同時垂直於一直線或一平面時，則此兩平面互相平行。例如：本教材在第十冊中，舉例桌面和地面同時垂直於桌腳後，再討論長方體上相對兩面互相平行的現象。

(五) 直線平行於平面

空間中，若一直線與一平面同時垂直於另一條直線或平面時，則此直線平行於該平面，例如：在第十冊中，先藉單槓和地面平行的現象，討論支持橫槓的柱子和地面垂直也和橫槓垂直，再討論長方體上邊與面的平行關係。

五、垂直與平行教學流程說明

表 2-8 是本教材關於垂直與平行的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-8

冊別	單元	活動	活動目標
6	9	2	(1)從比較三角板的角認識直角。 (2)認識直角三角形。
6	9	3	(1)知道正方形、長方形都有四個直角。 (2)透過複製直角的活動，經驗垂直的意義。 (3)用紙摺出直角。
6	9	4	(1)從四邊形的邊中，找出垂直的邊。 (2)從垂直於同一個邊的兩個邊，經驗平行的意義。
6	9	5	經驗以量角器做為刻度尺，報讀角的大小。

7	3	1	透過「指定一邊，做出直角另一邊」的方式，察覺垂直的意義。
7	3	2	察覺一線平行於另一直線的意義為同時垂直於第三直線。
8	3	7	(1)認識銳角和鈍角。 (2)使用量角器畫出指定度數的角。
9	15	1	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相垂直的其他邊。
9	15	2	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相平行的其他邊。
9	15	3	(1)認識空間中相交兩直線決定一平面，且可直接度量此相交兩直線所形成的角之大小。 (2)認識一直線與一平面垂直的意義。 (3)經驗一直線若與平面上兩直線垂直，即垂直於此平面。 (4)討論長方體上邊和面的垂直現象。
10	7	2	由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。
10	7	3	由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。
10	7	4	由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。

中年級時的垂直與平行關係的教學，主要在平面上處理，在第六冊第九單元活動 2~5 中，先從三角板上認識直角，也知道正方形、長方形上都有四個直角，再藉直角讓學童經驗垂直與平行的意義，特別是在第六冊第九單元活動 5 中讓學童經驗以量角器做為刻度尺，知道三角板中的直角是張開 90 度的角。在第七冊第三單元活動 1~2 中，則讓學童透過「指定一邊，做出直角另一邊」的方式，察覺垂直的意義後，再讓學童察覺一線平行於另一直線的意義為同時垂直於第三直線。在第八冊第三單元活動 7 中，則利用直角區分出三角形中的銳角與鈍角。

高年級則強調在立體圖形與空間中處理垂直與平行關係的教學。在第九冊第十五單元活動 1~2 中，先討論長方體上的垂直與平行的關係，在活動 3 中才討論空間中的垂直關係。在第十冊第七單元活動 2~4 中，討論空間中的平行關係。

第九節 全等與對稱

一、幾何圖形的基本變換—平移、旋轉、鏡射

對於幾何圖形與幾何圖形關係的認識，近代幾何學家最常使用的方式之一，就是將幾何圖形變換成更適合做幾何探討的另一個圖形，也就是說，當我們想要解決某個幾何圖形相關的問題，但是遇到困難時，可以將該幾何圖形轉換成另一個幾何圖形，使原幾何圖形的困難問題，變成新幾何圖形的簡單問題，於是很容易的解決了新圖形的問題，然後再由所得的結果，逆轉還原成原來問題的結果。一般幾何圖形的基本變換包括平移、旋轉與鏡射。

(一) 平移

在平面上透過平行或垂直的移動，使原物件的位置產生移動的現象稱為平移，例如：在圖 2-9-1 中，將三角形向右移動；在圖 2-9-2 中，將長方形向上移動；在圖 2-9-3 中，也可以透過向右及向上移動，讓正方形產生斜角移動。

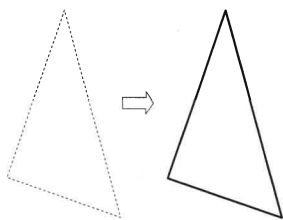


圖 2-9-1

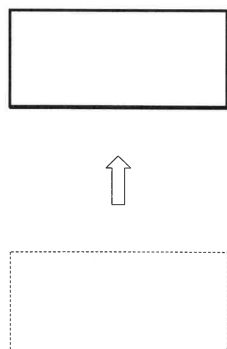


圖 2-9-2

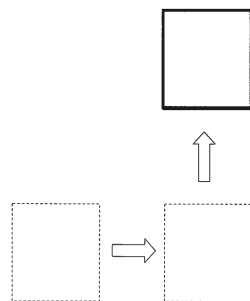
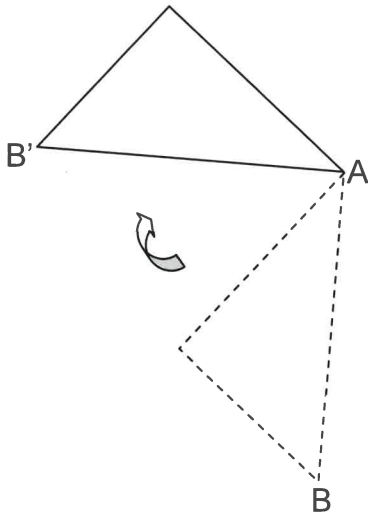


圖 2-9-3

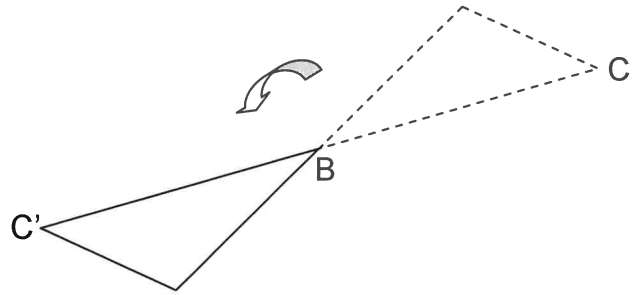
(二) 旋轉

在平面上，固定一個點，將圖形依順時針或逆時針方向旋轉，使圖形產生位移的現象稱為旋轉，例如：在圖 2-9-4 中，固定 A 點，以 AB 邊為軸，將三角形順時針旋轉 90 度)；或如圖 2-9-5 中，固定 B 點，以 BC 邊為軸，將三角形逆時針旋轉 180 度。



(順時針旋轉 90 度)

圖 2-9-4



(逆時針旋轉 180 度)

圖 2-9-5

(三) 鏡射

鏡射為物件的投射活動，在低年級階段，本教材透過摺紙及剪紙活動，幫助學童認識線對稱圖形，或透過將圖形翻轉 180 度，使圖形產生位移，此時圖形並沒有改變，而圖形由正面轉為反面，例如：固定 AB 邊，將三角形翻轉 180 度如圖 2-9-6，這些都是鏡射的啓蒙活動。在高年級，本教材幫助學童澄清線對稱圖形的意義後，透過已知線對稱圖形的一半及對稱軸，要求畫出線對稱圖形另一半的方式，幫助學童察覺將圖形翻轉 180 度的意義。

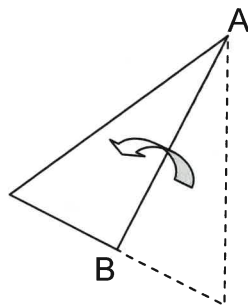


圖 2-9-6

二、全等圖形

全等是兩個圖形的一種關係，這種關係是指一個圖形經過平移、旋轉或鏡射

運動後，能與另一個圖形處處密合，也就是這兩個圖形的形狀一樣(相似)，而且面積大小也相等。假如將這兩個圖形上的圖案排除，使之單純化成為抽象的幾何圖形，由幾何學的定義來看，兩個幾何圖形滿足全等的關係，是指其對應邊相等，對應角也相等。本教材在第三冊第八單元，透過疊合的活動，認識全等圖形，第九冊第十一單元，幫助學童發現兩個多邊形全等時，其對應邊相等，對應角也相等。

三、對稱圖形

民六十四年國小課程同時引入線對稱圖形及點對稱圖形，其中點對稱圖形的教材，對國小學童而言相當困難，學童常無法理解點對稱圖形的意義，因此八十二年國小課程刪除了點對稱圖形，只留下了線對稱圖形的教材。本教材在實驗階段，爲了與六十四年課程銜接，編寫了點對稱圖形的教材，但是在正式版本中，將它給刪除了，以下所討論的都是線對稱圖形。

(一) 線對稱的意義

平面上的圖形，透過平移、旋轉與鏡射，可以得到與原圖形全等的圖形。給定一個平面圖形及一條對稱軸，可以透過線對稱這種鏡射概念，得到另一個全等的圖形。

數學上透過下列方式定義一個點對某一條線(對稱軸)的對稱點，見圖 2-9-7，平面上有一個點 A，一條直線 L，將直線 L 視爲對稱軸，由 A 點向直線 L 做垂直線，交點是 O 點，延長線段 AO，可以在直線 L 的另一側找到一個點 B，使得 $AO = OB$ ，則 B 點稱爲 A 點對直線 L 的對稱點。如果 B 點是 A 點對直線 L 的對稱點，A 點也會是 B 點對直線 L 的對稱點，一般也說 A、B 兩點對稱於直線 L。

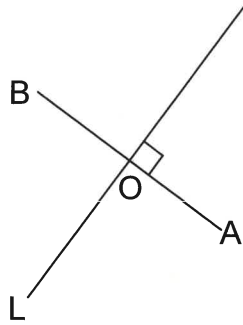


圖 2-9-7

仿定義一個點對某一條線(對稱軸)的對稱點的方式，也可以定義一個平面圖形對某一條線(對稱軸)的對稱圖形。見圖 2-9-8，平面上有一個圖形甲，一條直線 L ，將直線 L 視為對稱軸，圖形甲上的每一個點 P ，都可以找到一個對應於直線 L 的對稱點 P' ，假設所有 P' 點所成的集合是圖形乙，則圖形乙是圖形甲對直線 L 的對稱圖形。如果圖形乙是圖形甲對直線 L 的對稱圖形，圖形甲也會是圖形乙對直線 L 的對稱圖形，一般也說圖形甲、圖形乙兩個圖形對稱於直線 L 。

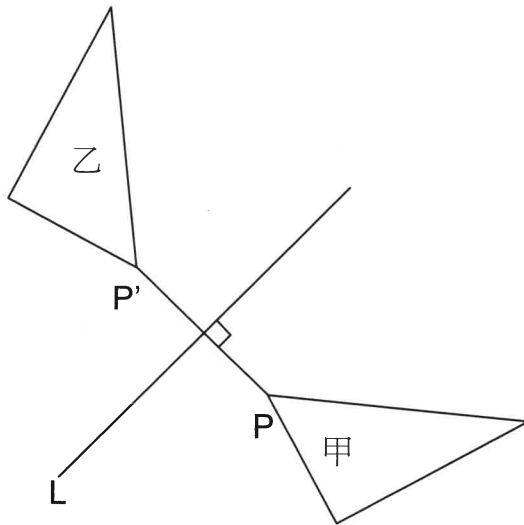


圖 2-9-8

(二) 線對稱圖形的意義

參考下圖 2-9-9，在求平面圖形丙對直線的對稱圖形時，如果圖形甲對直線 L 的對稱圖形剛好是圖形甲本身，數學上稱圖形甲為線對稱圖形，直線 L 為線對稱圖形甲的對稱軸。而圖 2-9-10 中，以等腰三角形為例，選定底邊的垂直平分線當

作對稱軸時，等腰三角形對這一條線的對稱圖形是原等腰三角形本身，因此等腰三角形是一個線對稱圖形，而底邊的垂直平分線是等腰三角形的對稱軸。如果該等腰三角形不是正三角形，除了這一條線以外，以其它的線為對稱軸，都不會讓等腰三角形的線對稱圖形是原等腰三角形本身，也就是說，該等腰三角形是只有一條對稱軸的線對稱圖形。

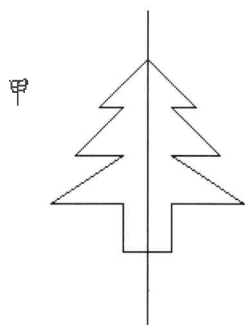


圖 2-9-9

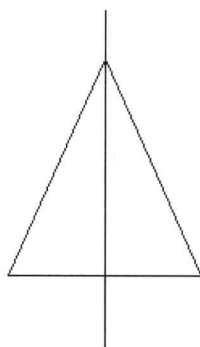


圖 2-9-10

再以一個三邊都不等長的三角形為例，見圖 2-9-11，以任意的直線為對稱軸，都不會讓該三角形與該三角形的對稱圖形重疊，因此該三角形不是線對稱圖形，再以正六邊形為例，見圖 2-9-12，在平面上可以找到六條直線當對稱軸時，正六邊形會與正六邊形的對稱圖形重疊，因此正六邊形是線對稱圖形，而且是有六條對稱軸的線對稱圖形。

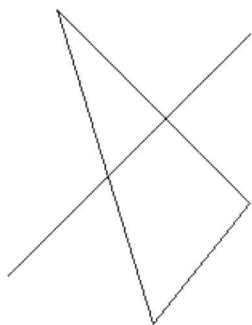


圖 2-9-11

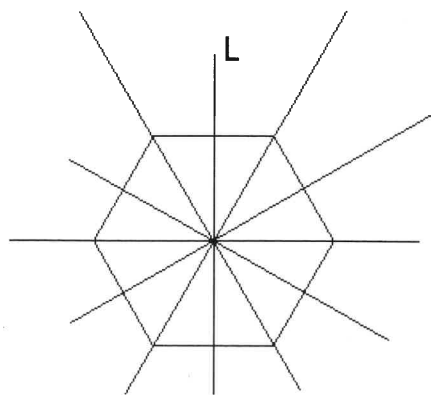


圖 2-9-12

(三) 國小階段如何引入線對稱圖形

數學上是先定義一個點對一條直線(對稱軸)的對稱點，再定義一個圖形對一條直線(對稱軸)的對稱圖形，最後才透過如果一個圖形對直線 L (對稱軸)的對稱圖形是自己本身的特殊情形，引入線對稱圖形及對稱軸的意義。

國小階段透過上述定義引入線對稱圖形，對學童而言不易掌握，因此本教材透過摺紙或剪紙活動引入線對稱圖形的意義，這是學童可以具體操作檢驗或製作的定義。將一個圖形對摺，被摺線分成的兩個部分如果完全疊合，本教材定義這個圖形是線對稱圖形，並稱摺線是這個線對稱圖形的對稱軸。

將一個線對稱圖形任意的對摺，被摺線分成的兩個部分未必能完全疊合，只有在兩部分完全疊合時，摺線才是這一個線對稱圖形的對稱軸，一個線對稱圖形的對稱軸可以只有一條，也可以有很多條。

讀者可參考本書附件一中所附的教學活動示例一(P.152)。

(四) 已知線對稱圖形的部分，如何畫出完整的線對稱圖形

本教材提供「已知一個線對稱圖形的部分圖形，要求學童畫出完整線對稱圖形」的問題，嘗試將具體操作的定義，推廣到平面幾何學的定義。參考圖 2-9-14，已知圖形甲是一個線對稱圖形，直線 L 是圖形甲的對稱軸。

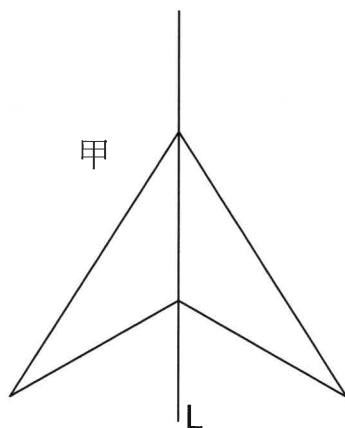


圖 2-9-14

而圖 2-9-15 中給定的是圖形甲的一部分，要求學童畫出完整的圖形甲。面對這一類的問題時，可以有下列兩種教學的方式：

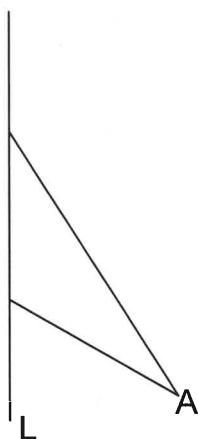


圖 2-9-15

第一種方式是直接宣告解題的步驟，要求學童找出部分圖形中的折點，畫出每一個折點對對稱軸 L 的對稱點(以 A 點為例，由 A 點向對稱軸 L 作垂線，垂足是 O ，再延長 AO 線段，在對稱軸 L 的另一側找到一個點 A' ，使得 $AO=OA'$)，再連接這些對稱點，就可以得到完整的線對稱圖形甲。

第二種方式是透過具體操作線對稱圖形，幫助學童發現線對稱圖形對應點連線和對稱軸之間的關係，再透過對這種關係的掌握畫出完整的線對稱圖形，本教材就是透過這種方式，幫助學童自己畫出完整的線對稱圖形。給定一個線對稱圖形，透過對摺後被摺線分成的兩個部分會完全疊合的現象，要求學童觀察對摺後會重疊的兩個點，在打開鋪平後和對稱軸的關係，當學童發現對稱軸是這些對應點所連成線段的垂直平分線，就可以透過這個關係，畫出已知點對於對稱軸 L 的對應點，完成整個線對稱圖形。

四、全等圖形與線對稱圖形的教學流程

表 2-9 是本教材關於全等圖形與線對稱圖形的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-9

冊別	單元	活動	活動目標
3	8	1	(1)憑直觀找出圖中不同的地方。 (2)用疊合的方法，說出這些圖形都是全等。
3	8	2	從一堆圖形中，找出全等的圖形。
3	8	3	透過剪、疊的活動知道兩個圖形是全等的。
3	8	4	描出全等的圖形。
3	8	7	透過摺紙的活動，觀察對稱的現象。
3	8	8	透過剪紙的活動，經驗對稱的現象。
3	8	*1	(1)透過對摺的方式，將原圖形分解成四個或八個全等的部分。 (2)將分解後的各部分拼回原圖形。
9	11	1	(1)將一堆三～七邊形的圖卡，根據邊的個數加以分類並命名，命名為五邊形、六邊形、七邊形後，將全類命名為多邊形。 (2)討論給定的五(及六)邊形圖卡，檢查邊、角是否相等，由此認識正五(及六)邊形。
9	11	2	以疊合方式檢驗兩多邊形圖卡完全疊合後，確定此二多邊形逐邊、逐角皆相等，由此認識兩多邊形全等時，各對應邊皆相等，各對應角皆相等。
11	7	4	透過剪紙(複寫或壓印)製造線對稱圖形，並對上述的製造活動進行反思，察覺摺痕兩邊的圖形摺疊後會重合，即全等。
11	7	5	給定一圖形，透過對摺的方式檢驗是否為線對稱圖形。
11	7	6	檢驗畫在方格紙上的圖形是否為線對稱圖形，並指出對稱軸兩邊互相對應的頂點、邊和角。
11	7	7	指出嵌入方格紙上的線對稱圖形：(1)對應點之連線和對稱軸互相垂直，(2)對稱軸平分對應點之連線。
11	7	8	在方格紙上畫出線對稱圖形。

本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。

在低年級階段，本教材將學童對全等圖形和線對稱圖形的認知定為在 Van Hiele 的第零層次視覺期，因此本教材在第三冊第八單元活動 1~4、7、8 以及參考活動 1，先透過疊合的活動，幫助學童認識全等圖形，再透過摺紙及剪紙活動，幫助學童認識線對稱圖形，讓學童在視覺下，對全等圖形有一個初步的概念。

高年級開始，本教材先幫助學童探討兩全等圖形中邊與角的關係，再引入線對稱圖形的意義。在第九冊第十一單元活動 1、2，先以疊合的方式檢驗兩個多邊形圖卡完全疊合後，確定這兩個多邊形逐邊逐角都相等，由此認識這兩個多邊形的對應邊都等長，對應角都相等。第十一冊第七單元活動 4，本教材透過摺紙，幫助學童認識線對稱圖形，以及線對稱圖形中對稱軸、對應點、對應邊和對應角。活動 5 幫助學童察覺對稱圖形中的對稱軸是對應點連線的垂直平分線，透過上述關係的掌握，活動 6 要求學童完成給定部分圖形的線對稱圖形，活動 7 要求學童判斷給定直線是否為線對稱圖形的對稱軸，活動 8 則引導學童在方格紙上畫出線對稱圖形。

第十節 相似(放大或縮小)

一、相似圖形

設甲、乙分別是由直線段所圍成的多邊形，以甲多邊形為基準，如果乙多邊形的邊數和甲多邊形的邊數一樣，而且乙多邊形每一個邊的邊長，和對應於甲多邊形邊長的比值都是定值 r ，乙多邊形每一個角的角度，和對應於甲多邊形的角度都相等，則乙多邊形的形狀會和甲多邊形的形狀一樣。當 $r=1$ 時，乙多邊形和甲多邊形一模一樣，我們說乙多邊形和甲多邊形全等，或說乙多邊形和甲多邊形是全等圖形，當 $r \neq 1$ 時，乙多邊形和甲多邊形的形狀一樣，但是面積的大小不同，我們說乙多邊形和甲多邊形相似，或說乙多邊形和甲多邊形是相似圖形。而相似圖形又可以依 r 值的不同，區分為放大圖與縮小圖兩種，當 $r > 1$ 時，乙多邊形的面積比甲多邊形大，我們說乙多邊形是甲多邊形的放大圖；當 $0 < r < 1$ 時，乙多邊形的面積比甲多邊形小，我們說乙多邊形是甲多邊形的縮小圖。

透過影印機放大的倍率，也可以得到邊長是曲線圖形的放大或縮小圖，因為不易與國小學童溝通兩相似圖形對應曲線長的比值或彎曲的程度，因此本教材不討論有曲線的圖形與其放大或縮小圖的關係，只討論由直線段所圍成的多邊形與其放大或縮小圖對應邊和對應角的關係。

二、相似圖形的合成

平面上兩圖形甲和乙相似，兩圖形所對應線段長度的比值是 r ，平面上兩圖形丙和丁也相似，兩圖形所對應線段長度的比值也是 r ，如果圖形甲和圖形丙，以及圖形乙和圖形丁合成的方式相同，則由甲和丙合成的圖形(甲+丙)，一定會和乙和丁合成的圖形(乙+丁)相似，而且兩個合成圖形所對應線段長度的比值還是 r 。

在能夠放大或縮小的影印機以及電腦尚未發明之前，人們都透過打格子的方式來製作一個已知圖形的放大圖或縮小圖，而打格子畫出放大圖及縮小圖的方法，就是利用相似圖形合成的概念來完成的。

三、相似基本定理

在數學上，三角形有三個經常使用的相似形基本定理，第一個定理簡稱為 **AA** 相似定理，兩個三角形，如果對應二個角的角度分別相等，其所對應第三個角的角度也會相等，也就是說，兩個三角形，只要對應二個角的角度分別相等，所對應三個角的角度一定會分別相等，對應三個邊邊長的比值一定會相等，這兩個三角形一定相似。第二個定理簡稱為 **SSS** 相似定理，兩個三角形，如果對應三個邊邊長的比值相等，對應三個角的角度也一定分別相等，這兩個三角形一定相似。第三個定理簡稱為 **SAS** 相似定理，兩個三角形，如果有一個對應角的角度相等，而且這個角所夾的兩個對應邊的比值也相等，這兩個三角形一定相似。

當學童透過打格子的方式求一個圖形的放大圖或縮小圖時，必須透過這些定理，才能檢驗所畫出的圖形是否相似，國小學童無法理解這些定理的意義，因此本教材透過一些對打格子方式的限制，例如：限制「為正整數或其倒數，頂點必須在格子點上，所畫的線段儘量與格子線重疊」，儘量避免使用這些定理的機會。

四、放大或縮小

日常生活中學童常有照像的經驗，照片中呈現的是原物件的縮小或放大圖，但是因為照片常受到取景角度的影響，例如：面對大樓正面或是側面取景、距離大樓很近或很遠取景、角度向大樓頂層或底層取景，所取得的照片並不相同，而且常會失真，因此照片不是溝通放大或縮小圖的好教材。在學校裡，影印機是必備的教學器材，而影印機所印出來的放大或縮小圖，不會受到取景角度的影響，一定和原圖形相似，因此本教材建議教師多使用影印機取得放大或縮小圖，以利進行教學活動。

給定一個圖形，如何得到這個圖形二倍的放大圖或二分之一倍的縮小圖，當然，最方便的方法就是調整影印機的倍率，透過影印的方式得到圖形，只是透過影印取得放大圖或縮小圖的學童，無法掌握原圖形與放大圖或縮小圖之間的關係。

本教材引導學童透過打格子的方式，畫出一個圖形的整數倍放大圖或整數的倒數倍的縮小圖，幫助學童理解放大與縮小的意義。作法是先把一個簡單的直線

圖形，嵌入格子圖中，再透過影印機放大二倍，要求學童檢查原圖形與放大圖形間的關係，接著才要求學童透過上述關係的掌握，利用打格子的方法，自己畫出一個給定圖形的放大圖或縮小圖，以畫出甲圖形的二倍放大圖乙圖形為例，學童先在甲圖形上打格子，畫出大小一樣的正方形格子，接著在空白紙上打格子，畫出邊長是原正方形格子邊長二倍的對應格子圖，再透過對原圖形與放大圖形之間關係的掌握，在空白紙上對應畫出乙圖形。

因為畫出一個圖形的二倍放大圖，與畫出一個圖形的二分之一倍縮小圖，情形相似，六年級的學童如果理解透過打格子的方式畫出一個圖形二倍放大圖的意義，也會同步的使用打格子的方式畫出一個圖形的二分之一倍縮小圖。本教材建議教師，如果教學時間許可，或學童學習意願強烈，可以進行一個圖形二倍放大圖的二分之一倍縮小圖與原圖形是否相同的活動。

讀者可參考本書附件一中所附的教學活動示例二(P.163)。

五、相似(放大或縮小)教學流程

表 2-10 是本教材關於相似(放大或縮小)的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-10

冊別	單元	活動	活動目標
10	14	1	由操作影印機的活動，經驗放大的意義，進而檢查原圖與放大圖之間的對應關係。
10	14	2	由操作影印機的活動，經驗縮小的意義，進而檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。
11	13	3	把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以放大 2 倍，檢查原圖與放大圖之間的對應關係。
11	13	4	自己畫格子做 2 倍放大圖，並利用與原圖同大的方格紙作 2 倍放大圖。

11	13	5	(1)把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。 (2)畫出 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖，並利用與原圖同大的方格紙作 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。
11	13	6	在製作放大(縮小)圖之後，知道原圖是放大(縮小)圖的縮小(放大)圖。
12	12	1	(1)閱讀簡介圖。 (2)認識邊長關係的比例尺，並運用於地圖、室內平面圖的閱讀。

因為不容易檢驗，本教材在低、中年級並沒有引入相似圖形的教學活動，在第十冊第十四單元活動 1 與活動 2，本教材透過操作影印機的方式，幫助學童認識放大圖與縮小圖，進而檢驗原圖形與放大圖或縮小圖之間的關係。

在十一冊第十三單元活動 3 至活動 6，本教材引導學童透過打格子的方式，畫出一個圖形的放大圖與縮小圖，活動 3 先把一個簡單的直線圖形，嵌入格子圖中，再加以放大 2 倍，要求學童檢查原圖形與放大圖形之間的關係，活動 4 要求學童自己畫格子做 2 倍放大圖，活動 5 則進行畫縮小圖的活動，活動 6 幫助學童澄清放大與縮小的相互關係，在製做放大(縮小)圖後，知道原圖是放大(縮小)圖的縮小(放大)圖。在第十二冊第十二單元活動 1 中則進一步應用放大(縮小)圖以及比例尺的概念來認識地圖的用法。

第三章 八十二年版部編本教材分析

本章嘗試從課程的理論角度來分析八十二年部編國小教材的規劃，將國小幾何的學習區分為三個層次，分別是基本形體的初步認識、基本形體的構成要素與關係。

本章所指的基本形體包含基本平面圖形與基本立體形體兩部分。基本平面圖形包括三角形、正方形、長方形、圓形、梯形、平行四邊形、菱形等；而基本立體形體則有正方體、長方體、球體、柱體、錐體等。

第一節 基本形體的初步認識

基本形體的初步認識是指能辨識並說出某類基本形體的名稱。法國數學家 Vergnaud 曾提出一種說法，表示某一個概念是在不同的情境下仍具有不變性的東西，它可以有多種表徵，即 $C=(S,I,R)$ ；其中 C 是 Concept(概念)， S 是 Situations(情境)， I 是 Invariance(不變性)， R 是 Representations(表徵)。所以一個概念的建立與獲得，應提供兒童豐富的情境去探索，例如：由多種圖形組成的一幅畫、由圖形與圖形鑲嵌形成的圖案、由生活物件找出基本形體等，在豐富的情境下找到屬於某一形體共同的不變性，當作判斷的標準，如此反覆，進而認得更多的形體。

兒童在低年級階段時，對基本形體的認識主要是透過感官活動來經驗生活周遭中的各類形體，但是生活中實際存在的形體往往經過加工、美化的修飾，而數學中有關形體的觀點卻是理想化的結果，例如：長方形的桌子，它四個邊的轉折處經常是圓滑的，但我們仍可視它為長方形；裝冰淇淋的甜筒，我們也可視它為圓錐。

本教材對兒童在基本形體的初步認識時，主要是先從立體的實物上複製出平面圖形，經過辨認或分類後，再對所分類的一堆物件作整體描述的命名活動，此

時的命名活動只是針對圖形所在的整體給一個數學上的術語，例如：三角形、正方形、圓形、長方形等名稱。除了複製活動外，爲了加深兒童對形體的認識，我們也讓兒童經歷形體的造型活動與辨認活動。複製活動的重點在描出圖形卡的外框，利用色紙或紙板剪出三角形、圓形、長方形等基本圖形；造型活動則強調利用所學的基本圖形卡拼出各種圖案，或在釘板上用橡皮筋圍出圖形、用牙籤排出所指定的圖形；辨認活動則是讓兒童在複雜下情境中抽離出圖形的形狀，以加深兒童對形狀的認識。但是，無論是平面圖形或立體形體，我們剛開始提供的物件應盡量單純化，且具封閉性，可讓兒童親手操弄，並讓物件所處的背景單純，再提供結構複雜，甚至是非例行性的物件，以豐富兒童辨識基本形體的能力。

本節將低年級基本形體初步認識階段的教材分成兩大部分來說明，第一部分是基本形體的初步認識活動，第二部分則討論幾何量學習的前置經驗。

一、基本形體的初步認識活動

低年級基本形體的初步認識階段的教材，包含了辨識與觸摸、分類與命名、複製與造型等活動。

(一) 基本形體的辨識與觸摸活動

辨識活動是指無論基本形體處於單純或複雜的情境中，兒童都可以從情境中依某類形體的外觀輪廓加以辨認，進而說出其名稱，其過程包括視覺的判斷與觸覺的感受。所謂情境指的是某一形體所處的背景，或該形體本身擺放的位置，如：直放、斜放、旋轉某個角度等，或同類形體的大小、顏色等。兒童在辨識的歷程中應當能經驗某類形體的不變性。活動進行的方式除了視覺的直接辨識外，也可以讓兒童觸摸隱藏的實物，嘗試描述出實物的外形或名稱。

1. 平面圖形的辨識與觸摸活動

平面圖形是附著於實物上而存在的幾何描述，例如：日常生活中所看到的工具、器皿、建築、…等都可以有平面圖形的幾何描述。亦即我們若從這些實物中摒棄其無可避免的夾雜物，例如：輕重、顏色、氣味、大小、材質、硬度、厚度等，平面圖形就是對實物抽象的結果之一。

我們讓兒童從立體積木上拓印出圖形時，他可以對拓印出來的圖形外觀做判

斷，此時圖形所在的空間背景是較單純的情境，沒有受到原來立體積木其他部位的干擾。在這樣同時含有多樣圖案的立體積木背景中找出基本平面圖形，可以讓兒童在認識基本平面圖形的過程中增加辨識的能力，所以教學活動的安排，可以先從簡單的情境開始，等兒童較熟悉某些基本圖形時，再提供複雜的情境給予辨認。

另外，還需安排讓兒童同時察覺實心的圖形板與空心的形狀，均有同一圖形存在其上的活動，進一步讓兒童認識平面圖形所要討論的部分。

2. 立體形體的辨識與觸摸活動

生活中充滿許多由幾何圖形所組成的立體實物，因此在兒童開始辨認基本立體形體時，應提供日常生活中常用的立體實物進行辨識活動，如盒子、罐子、球、水果、箱子、瓶子等。無論是辨識活動或是觸摸活動，都應請兒童對立體實物的特徵作充分的描述，以加深兒童對立體形體的認識。

要透過平面圖形來辨認出立體形體前，應提供兒童有豐富的經驗，從不同的角度來觀察立體形體。學生在辨識立體形體時，通常最先看到的是大小、顏色、功能、質地、形狀，稱呼上則是用「看起來像某物」的方式來溝通，所以當學生進行辨識活動時，可提醒兒童將焦點放在外形輪廓上。進行教學活動時，可先從像球體、錐體、長方體、正方體的實物入手，接下來才區分長方體與正方體，再來依序認識球體、柱體與錐體。

但是，立體形體的構成要素，本教材是安排在兒童到了高年級時才討論，而低年級在認識立體形體時，則是提供兒童透過兩個或多個基本形體的組合或切割，請他組合或切割成指定的形體，在這樣的活動過程當中，讓學生可以進一步發展對基本立體形體的辨識活動，做為認識立體形體構成要素的前置經驗。

3. 基本形體的辨識與觸摸活動目標

從表 3-1-1 中可以發現，第一冊第六單元活動 3 是讓兒童經驗平面圖形可以從立體物件中拓印出來，在拓印的過程中，兒童可以套描積木的某一面輪廓，這就是形狀的複製活動。複製後，可讓兒童進行單純的形狀辨識與命名活動。

第一冊第六單元活動 5 則透過塗色活動讓兒童經驗圖形的外圍輪廓，因此形

體本身的出現應保持其輪廓的單純性與完整性，才能達到讓兒童將焦點專注於外圍輪廓的目的。這個活動同時也是認識「面」概念的前置經驗。

第一冊第六單元的參考活動 2 則是透過遊戲，加強兒童對某類圖形的辨識與名稱的連結。

第一冊第六單元的參考活動 4 將形狀依規律週期的方式呈現，一面加強兒童對圖形的辨識，一方面兒童經驗邏輯的思考，觀察如何找到形狀排列的規則性。

第一冊第六單元的參考活動 6 呈現形狀的多樣方式，讓兒童觀察了解在圖形的變化過程中，仍具有某些不變性。

第二冊第六單元活動 1 開始出現要從複雜的背景中辨識圖形，難度較高。

第二冊第六單元的參考活動 1 除了從生活情境中辨識形狀的難度增高外，還同時讓兒童察覺實心的圖形板與空心的形狀，都是同一形狀。

表 3-1-1

八十二年版活動目標			核心布題
1	6	*1 1.從觸摸中感覺物件的特色，如平平的、尖尖的、圓圓的、…。 2.增強辨認長方體、圓柱體、球體、圓錐體等。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備球、盒子、空瓶子、空罐子、箱子、彈珠、造形積木、不透明的袋子、紀錄表。 <ol style="list-style-type: none"> 1.教師先把球、盒子、空瓶子、空罐子、箱子、彈珠、造形積木等放進不透明的袋子。請學生雙手入袋中觸摸，猜猜看摸到什麼？ 2.猜完後，再請學生拿出該物，看看是否猜對了。 3.把猜測的結果寫在統計欄內。
1	6	3 透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備造形積木或立體實物。 <ol style="list-style-type: none"> 1.請學生用描繪或蓋章的方法，把立體的面複製下來。 2.學生針對不同平面圖形的整體外觀，加以命名。
1	6	5 透過塗色活動，加強學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備各種常見的基本平面圖形。 <ol style="list-style-type: none"> 1.請學生依指定的顏色，塗在指定的圖形上。 2.請學生將相同圖形，塗上相同的顏色。

			<p>註 1：塗色活動可以讓學生有內外、周界的初步概念，並作為面積大小的前置活動。</p> <p>註 2：所給圖形應盡量獨立、單純。</p>
1	6	*2 熟練辨識三角形、長方形、正方形和圓形。	<p>• 準備各式各樣的三角形、長方形、正方形和圓形的圖卡或圖形板。</p> <p>兩人一組，解題者依據布題者對圖形的描述，拿出所指定的圖形與個數。</p> <p>註 1：此活動的目的是在豐富兒童對幾何物件的描述語言，因此應提出非例行性的幾何物件。</p> <p>註 2：非幾何物件的選用，以可辨認與可運作為主。</p>
1	6	*4 (1)熟練辨認三角形、長方形、正方形和圓形。 (2)找出圖形的規律。	<p>• 設計由基本圖形，形成有某些序列規律的問題。請學生找出圖形的規律，並說出下一個圖形的形狀和顏色名稱。</p> <p>註 1：圖形規律 (pattern) 一由一些組成元件，加上週期所形成的一系列的圖案。</p> <p>註 2：所設計的圖形規律問題，其週期應完整呈現。</p> <p>註 3：本活動為可培養兒童邏輯推理的前置活動。</p>
1	6	*6 增強辨認顏色、形狀、大小。	<p>• 準備多個大小、形狀、顏色不同的圖形卡。</p> <p>1.請學生說出任意兩張圖形卡之間的不同。</p> <p>2.根據兩圖形卡之間不同點的個數，將圖形卡擺在適當的位置上。</p> <p>註 1：此活動可進行分類活動。</p> <p>註 2：同一種圖形，可以呈現大小比例不同的各種形狀，作為相似概念的前置活動。</p>
2	6	1 在有背景或其他圖形之下辨認三角形、長方形、正方形和圓形等圖形。	<p>在這張情境圖中，哪裡有三角形（長方形、正方形和圓形）？</p>
2	6	*1 (1)熟練三角形、長方形、正方形和圓形等圖形。 (2)透過操作的活動，知道圖形板與其外框是同形狀。	<p>1.逐一提出正方形、長方形和圓形圖卡，逐一提問：這是什麼形？</p> <p>2.教室裡面哪裡有正方形（長方形和圓形）？</p>

本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。

(二) 基本形體的分類與命名活動

1. 集合與包含關係

請參考本書第二章第一節中「四、三角形的包含關係」有關「集合與包含關係」部分的說明(P.24)。

下面我們要加以說明的是關於分類活動與命名活動的關係。

2. 分類活動

分類活動是指將同一屬性的東西歸為同一類，然而兒童依其不同的認知發展，會對形體的屬性作不同的考量，因此會有不同的分類結果產生。在基本形體初步認識的階段中，兒童已能排除物體的顏色、輕重、材質、大小等因素，而只注意於它的外形輪廓做分類。例如：方方正正的正方形歸一類、長長扁扁的長方形歸一類、直線的分一類、曲線的分一類、尖尖的分一類、直直站立的分一類等。

在教學過程中，當低年兒童進行分類活動後，可請他們說明分類的標準是什麼，及他們要為這堆物件給一個什麼樣的名稱。這時，兒童可以用非標準的名稱來命名，只要他能清楚的描述出物件的特徵即可，例如：像銅板一樣的形狀，或像三明治、牙膏盒、鐵盒子、色紙的形狀。

兒童在幾何領域的學習過程中，有實物的視覺經驗是很重要的，所以我們提供實物，讓學生有較富豐的視覺經驗。因此，在進行分類活動時，拿生活中的實物讓學生去觸摸，再借用生活語言來描述，是很重要的活動，例如：像洗衣板的形狀、像遮雨棚的形狀。也可以拿組合物件，如：甜筒冰淇淋，請學生描述。或者讓學生借助生活的物件當作參考物件來描述所看到的幾何形體，例如：像輪胎的游泳圈、甜甜圈等。

另外在數學上，面的形式可分為平面與非平面，非平面中的曲面是較特殊的一類。兒童在進行立體形體的分類活動時，也可以讓兒童根據平面與曲面的不同作為分類標準。

3. 命名活動

因為兒童在低年級階段對形體的認識主要是依賴視覺，根據形體的整體外觀

進行命名活動，不牽涉到形體的構成要素或關係，所以教學上應該提供多樣化的形體讓兒童辨識，例如：不同顏色、不同大小、物件是空心或實心、有背景圖案干擾等，讓兒童能摒除外在的因素，僅抽離出形體的外觀，同時透過形體的說、讀、聽、寫、做的活動來加深對形體的認識。如此，在基本形體初步認識的階段，兒童對形體的認識，才能排除顏色、輕重等因素，亦即不會因為一個長方形（體）的顏色是紅色或綠色的而產生命名的困擾，仍然認為它是一個長方形（體）。

兒童在進行形體的命名活動時，所用的描述語言可以分為標準名稱與非標準名稱兩種。標準名稱指的是數學的幾何用語，例如：正方形、長方形、梯形、圓形、三角形、正方體、長方體、錐體、柱體。非標準名稱是一般生活用語，例如：圓圓的形狀、長長的形狀、尖尖的形狀，像蛋糕的形狀、像甜甜圈的形狀、像門的形狀、像盒子的形狀、像冰淇淋筒的形狀、像柱子的形狀等。

命名活動剛開始進行時，應讓兒童能用他自己的語言對形體作描述，使他們有深入觀察形體的經驗。但是在教學結束前仍應該讓兒童用標準名稱來做為分類溝通的用語。

在平面圖形的討論中，當我們要從學生的非標準名稱轉為數學上的標準名稱時，所討論形狀的物件，不再是生活中的物件，應該以「圖形卡」來進行為宜，以鞏固數學上理想化的概念。而各種圖形的圖形卡應有豐富的形式呈現，如高瘦、矮胖的長方形或大小不同的三角形，以避免學生認為只有某一類大小或樣子的形狀，才是數學認為的長方形或三角形。學生有初步的長方形概念後，接下來會請學生去找哪裡有長方形，對兒童而言，教室裡出現的長方形與長方形圖形卡兩者單獨呈現時，其難度是不同的，長方形圖卡的辨認難度較高，應放在後面進行。

立體形體的構造比平面圖形更為複雜，但因為有了平面圖形的認識經驗，所以學生能藉助平面的經驗來注意到形體的結構，以進行立體形體的辨認及分類與命名的活動。例如：在認識柱體的活動中，當學生從生活物件中找出柱子後，請學生檢查柱子的特性，接下來命名柱體為角柱或圓柱，並分辨直角柱和斜角柱，再來分辨柱體與非柱體，並以橫擺的方式來檢驗角柱底面的特性，以辨認錐體不同的地方。

認識錐體的活動可以設計如下：觀察圖片引發興趣、介紹四角錐放置於地上時只有一頂點在空中，貼在地上的面稱為「底面」，命名錐體為角錐或圓錐、分辨錐體與非錐體。三角錐、四角錐等的命名和柱體部分很接近，可以用類比的方式要求學童命名，例如：底面是三角形的柱體稱為三角柱，底面是三角形的錐體稱做什麼錐。第一次命名時，學生可能無法類推，到第二或第三次應可以順利命名出數學上使用的名稱。之後，可以提供常見的立體物件，請學生根據柱體和錐體的特性做判斷，看它是屬於哪一類的形體。

4.分類與命名活動的差異

分類的狀態通常可以有對立關係與蘊涵關係兩種，對立關係如第二章第一節中的圖 2-1-4，蘊涵關係如第二章第一節中的圖 2-1-1，而隨分類而來的就是命名，但是命名活動若不是從分類的觀點來切入時，卻也往往產生在分類上易混淆的情形，以三角形的分類來說，我們可以依據邊長是否相等的關係將所有的三角形分割成對立關係的三類：三個邊都相等的三角形、恰有二個邊相等的三角形、三個邊都不相等的三角形，如下圖 3-1：

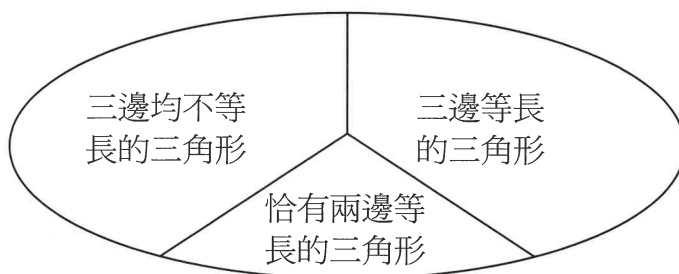


圖 3-1

數學上我們定義正三角形為三個邊都相等的三角形；而「恰有」二個邊相等的三角形是等腰三角形、三個邊都不相等的三角形沒有特別的名稱，但是數學上將「至少有」二個邊相等的三角形定義為等腰三角形，因此本教材視正三角形包含於等腰三角形中，如下圖 3-2：

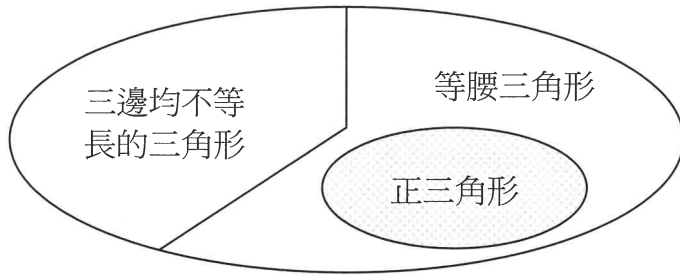


圖 3-2

另外，若以三角形有一個角是鈍角、直角或三個角都是銳角來對三角形進行分類活動與命名活動時，則此三類三角形分別是鈍角三角形、直角三角形與銳角三角形，它們可以將所有的三角形區分為三類，是完全的對立關係，沒有蘊涵關係，如下圖 3-3：

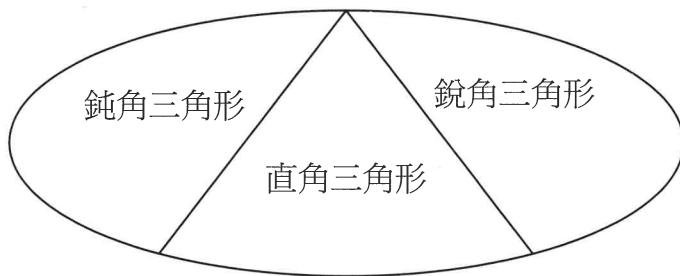


圖 3-3

而這些有特別名稱的三角形之間的關係，讀者可參考第二章第一節的說明與圖 2-1-5。

5. 基本形體的分類與命名活動目標

表 3-1-2 中，第一冊第六單元參考活動 6，當兒童就不同大小、形狀、顏色或不同的擺放位置進行形狀辨識後，還可以讓兒童對這堆形狀做分類。分類的標準剛開始可以由兒童自己分類，請它們說明分類的理由；之後則請兒童根據老師的標準提出分類的結果，以加深兒童對形狀的認識。

由下表中可以發現，第一冊第六單元活動 3 是兒童第一次針對簡單的圖形，進行命名活動。

到了第一冊第六單元活動 4 時，兒童則透過圖卡、符號、實物、聲音等連結加強形狀命名的認識。

第一冊第六單元活動 5 經由塗色活動對圖形外框形狀有更多的經驗接觸，上述活動都是加強形狀的認識與名稱的連結。

接下來的第一冊第六單元參考活動 2、第二冊第六單元活動 2、第二冊第六單元參考活動 1，都是當兒童對形狀的認識有初步概念後，對於形狀的使用或從複雜的背景中，是否還能辨識出形狀，這樣的歷程可以豐富形狀概念的建立。

表 3-1-2

八十二年版活動目標			核心布題
1	6	2 透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備盒子、罐子、球、水果、斗笠、漏斗、甜筒等實物。 1.請學生用自己的語言描述所見各類實物的樣子。 2.教師將實物分成五類，如長方體、正方體、圓柱、圓錐、球等。 3.請學生將各類實物會分成同一類的原因說出來，並用手指指出相似處。 4.請學生試著用自己的語詞來稱呼某一類的實物。
1	6	3 透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備造形積木或立體實物。 1.學生用描繪或蓋章的方法，把立體的面複製下來。 2.學生針對不同平面圖形的整體外觀，加以命名。
1	6	4 透過說、讀、聽、做等練習，加強三角形、長方形、正方形和圓形等術語與圖卡，書空，…等符號的聯結。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備基本的平面圖形。 1.透過實物、文字符號、聲音符號，兩兩之間的關係，讓學生了解平面圖形。例如：請學生舉出、說出、畫出、比出老師所指定的圖形。 2.找出教室的什麼地方有長方形？
1	6	5 透過塗色活動，加強學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備各種常見的基本平面圖形。 1.學生依指定的顏色，塗在指定的圖形上。 2.學生將相同圖形，塗上相同的顏色。 <p>註 1：塗色活動可以讓學生有內外、周界的初步概念，並作為面積大小的前置活動。</p>

			註 2：所給圖形應盡量獨立、單純。
1	6	*2	<p>熟練辨識三角形、長方形、正方形和圓形。</p> <p>• 準備各式各樣的三角形、長方形、正方形和圓形的圖卡或圖形板。</p> <p>兩人一組，解題者依據布題者對圖形的描述，拿出所指定的圖形與個數。</p>
1	6	*6	<p>增強辨認顏色、形狀、大小。</p> <p>• 準備多個大小、形狀、顏色不同的圖形卡。</p> <p>1. 學生說出任意兩張圖形卡之間的不同。</p> <p>2. 據兩圖形卡之間不同點的個數，將圖形卡擺在適當的位置上。</p> <p>註：此活動可進行分類活動。</p>
2	6	2	<p>透過觀察及套描活動，知道圖形板與其外框是同形狀。</p> <p>1. 這（教師用手比畫門框四周）是什麼形狀？</p> <p>2. 透過套圖遊戲板（一張圖形卡搭配一個框），逐一拿出來描繪和筆劃，以了解圖形板與外框是同形狀。</p>
2	6	*1	<p>(1) 熟練三角形、長方形、正方形和圓形等圖形。</p> <p>(2) 透過操作的活動，知道圖形板與其外框是同形狀。</p> <p>1. 逐一提出正方形、長方形和圓形圖卡，逐一提問：「這是什麼形？」</p> <p>2. 教室裡面哪裡有正方形（長方形和圓形）？</p>
4	6	1	<p>運用學生的語詞，進行正方體和長方體的命名活動。</p> <p>• 準備造形積木、白色積木、紅色積木、淺綠色積木和各種形狀的空盒子。並展示類似圓錐、圓柱、三角柱、長方體、正方體、球等物品。</p> <p>1. 請學生找出像某一實物的物品，例如：正方體的盒子。</p> <p>2. 請學生說說看這些物品共同的地方在哪裡？</p> <p>3. 教師正式命名「正方體」。</p> <p>4. 同樣的方式命名「長方體」。</p> <p>5. 討論教室是什麼形狀。</p>
4	6	2	<p>將實物與平面立體圖對照，使學生能從平面立體圖認出實物。</p> <p>• 準備造形積木與立體圖卡。</p> <p>1. 請學生指認由各種方向角度拍攝的同一積木。</p> <p>2. 請學生拿出圖卡上所繪的積木，並依圖卡上的圖</p>

				示來擺置。
4	6	3	透過說、讀、聽等練習，加強實物與平面立體圖的聯結。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備立體圖卡、有各類積木名稱的字卡與造形積木。 1.請學童指出造形積木的名稱。 2.教拿出立體圖卡或有各類積木名稱的字卡，再請學生拿出造形木。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。				

(三) 基本形體的複製與造型活動

形體的複製是指利用其他物件做出和指定的物件有一樣形體的活動；造型活動是運用所給的物件作出另一種形體。

1. 平面圖形

兒童在低年級階段，關於平面圖形的複製活動，可以有描繪、蓋章、塗色等，蓋章是將面塗上顏色，直接完整的覆蓋出來。進行塗色活動時，可準備各種常見的基本平面圖形，請學生依指定的顏色，塗在指定的圖形上或請學生將相同圖形，塗上相同的顏色，以了解學生對形狀的掌握情形，而此塗色活動也可以作為學習「面積」的前置經驗。

在兒童低年級階段的平面造形活動可以有畫圖，讓兒童仿繪圖形，或聽到圖形的名稱時，畫出這個圖形的外形來；或用其他物件，例如：牙籤或橡皮筋圍出指定的圖形。

2. 立體形體

相關於立體形體的複製與造型活動，在低年級階段，通常有下列幾種方式：

- (1)請學生用積木堆出各種形體。
- (2)請學生根據立體形體的視圖，用積木堆出該立體形體。
- (3)給小的正方體，請學生堆出指定大小的正方體或長方體。
- (4)給固定數量的小正方體，請學生堆出各種長方體。

其中的第四種方式，可作為認識因數的前置經驗，此時討論的重點是所排出來的長方體或正方體的邊長個數與總量個數之間的關係。

當學生進行立體形體的複製活動後，需進一步的澄清這樣的製作過程是如何符合了複製的條件，例如：用積木堆出一個實心的長方體或正方體的紙盒，教學討論的重點則是比較這些紙盒和這些用小積木堆成的長方體之間的大小關係。

3.基本形體的複製與造型活動目標

從表 3-1-3 中可以發現，第一冊第六單元活動 3 是讓兒童經驗形狀的複製後，再對形狀命名。

第一冊第六單元參考活動 3 隨意讓兒童運用平面圖形作畫，造出圖案。第二冊第六單元活動 2 觀察實心板與空心的外框，讓兒童經驗形狀的不同呈現方式，以加深形狀概念的建立。

第二冊第六單元參考活動 2 是一個用牙籤做出圖形的造型活動，過程中應注意兒童是否掌握了形狀的封閉性，當兒童排出有缺口的形狀時，應討論是否合理。

表 3-1-3

八十二年版活動目標			核心布題
1	6	1	透過積木及實物的造形活動，經驗平面和非平面的區別。 • 準備空瓶、空盒、空罐、造形積木。 1.請學生指出哪些物品會滾動。 2.請學生指出平面的部分。
1	6	3	透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。 • 準備造形積木或立體實物。 1.學生用描繪或蓋章的方法，把立體的面複製下來。 2.學生針對不同平面圖形的整體外觀，加以命名。
1	6	*3	能用單一的平面圖形造出圖案，以加深對圓形、三角形的認識。 • 準備造型色紙、膠水、彩色筆和圖畫紙。 1.請學生做出單一種大小不同的圖形。 2.請學生將這些圖形創造成自己喜歡的圖案。
2	6	2	透過觀察及套描活動，知道圖形板與其外框是同形狀。 1.這（教師用手比畫門框四周）是什麼形狀？ 2.透過套圖遊戲板（一張圖形卡搭配一個框），逐一拿出來描繪和筆劃，以了解圖形板與外框是同形狀。

2	6	*2	用竹籤在桌上排出圖形。	1.用竹籤排成有三角形的圖形。 2.用竹籤排出你喜歡的圖形。
4	6	4	學生用自己的話來描述造形的過程和想法。	1.請用積木堆出一個你們喜歡的東西。 2.說說看，你們堆的是什麼東西，怎麼堆的，先放什麼，後放什麼？
4	6	5	仿造一個實心的正方體或長方體，其大小和事先準備的實物一樣。	1.這些（紙盒）和這個（由小積木堆成的長方體）是不是一樣大？你怎麼知道的？ 2.說說看，你們是怎麼堆的？
4	6	6	用數量一定、形狀及大小相同的數學積木，堆積成各種可能的長方體或正方體。	1.用這 8 個白色積木，堆出一個正方體或長方體。 2.說說看，你堆的是正方體或長方體？ 3.你是怎麼堆的？
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。				

二、認識幾何量的前置經驗活動

國小階段涉及的幾何量有長度、角度、面積與體積等，而這些教材在八十二年課程標準中也歸屬於量與實測的領域，本叢書另有《長度》、《面積》及《體積和角度》三冊，讀者可參考，下面我們謹就這些幾何量的前置活動做討論。

(一) 圖形的周長與周界概念之前置經驗及其活動目標

當兒童透過畫線或觸摸活動，感受到圖形的外框後，除了可以探討形狀的概念外，也可以進一步討論圖形的「周界」概念。在圖形中，加入另一個物件，可討論物件放在圖形框內與框外的關係，而引入周界的概念，在描述周界的長度時，就有了周長的概念了。

與周界相關的教學，例如：在塗色活動中，要求學生將圖形的內部與外部分別塗上不同的顏色，讓學生感受圖形有內、外之分，而其分界線就是圖形的外框，這是周界的初步概念。亦可提供七（多）巧板的拼排活動，要求學生將拼排後的結果描繪下來，其步驟先從畫出所有圖形拼板的外框，也就是可以看到拼排的過程與結構，再要求學生只畫出所拼成圖形的最外圍，如此讓學生感覺到周界的特性。拼圖遊戲中，兒童要選取什麼圖形板，是依據圖形板在嵌入之前的「空洞」

來判斷的，這時學生觀察到的也是圖形的外框形狀，因此，學生可以根據圖形板的形狀，找到鑲嵌的空洞形狀，或反過來，辨識空洞的形狀，找到相對應的圖形板形狀。

在表 3-1-4 中，第二冊第六單元活動 2 及第二冊第六單元參考活動 1，當兒童描述圖形外框時，已經將焦點擺在圖形的周界，透過討論可作為周界概念學習的前置經驗。

第二冊第六單元參考活動 2，用竹籤排出圖形的活動，也是抽離出形狀的外框作討論。

表 3-1-4

八十二年版活動目標			核心布題
2	6	2 透過觀察及套描活動，知道圖形板與其外框是同形狀。	1.這（教師用手比畫門框四周）是什麼形狀？ 2.透過套圖遊戲板（一張圖形卡搭配一個框），逐一拿出來描繪和筆劃，以了解圖形板與外框是同形狀。
2	6	*1 (1)熟練三角形、長方形、正方形和圓形等圖形。 (2)透過操作的活動，知道圖形板與其外框是同形狀。	1.逐一提出正方形、長方形和圓形圖卡，逐一提問：這是什麼形？ 2.教室裡面哪裡有正方形（長方形和圓形）？
2	6	*2 用竹籤在桌上排出圖形。	1.用竹籤排成有三角形的圖形。 2.用竹籤排出你喜歡的圖形。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

(二) 全等的初步概念及其活動目標

在兒童低年級階段，全等的概念只是視覺上直觀的全等，此時兒童透過操作來經驗全等的意義，從外觀、操作疊合來檢驗兩圖形是否全等，例如：先從觀察圖形的異同著手，再引入摺紙或疊合動作來說明檢驗全等圖形。而從圖形的構成要素（邊長、角度）來探討全等的意義，是在高年級時才討論。

表 3-1-5

八十二年版活動目標			核心布題
3	8	1 (1)憑直觀找出圖中不同的地方。 (2)用疊合的方法說出這些圖形都是全等。	找出兩張圖形中不同的地方，並用疊合的方法檢驗，說出這些圖形是全等的。
3	8	2 從一堆圖形中，找出全等的圖形。	1.先以直觀的方式找出一堆圖形中的全等圖形。 2.將直觀找出的全等圖形以疊合的方式檢驗。
3	8	3 透過剪、疊的活動知道兩個圖形是全等的。	1.檢驗兩個不能移動的圖形（畫在紙上或黑板上）是否全等。
3	8	4 描出全等的圖形。	2.讓學生描出指定圖形的全等圖形。
3	8	7 透過摺紙的活動，觀察對稱的現象。	將正方形的色紙對摺，觀察摺線及摺線隔開的兩個部分是否全等。
3	8	8 透過剪紙的活動，經驗對稱的現象。	1.將正方形的色紙對摺後，沿著摺線剪出一個圖形，打開看看，剪出的圖形有沒有摺線。 2.摺線隔開的兩個部分是不是完全疊合。 3.說明對摺剪出的圖形，摺線隔開的兩個部分完全疊合時，這個圖形叫做對稱圖形。
3	8	*1 (1)透過對摺的方式，將原圖形分解成四個或八個全等的部分。 (2)將分解的各部分拼回原圖形。	1.將圓形紙分成四個全等的部分，討論摺法。 2.沿著摺線剪下，比較四個部分是否全等。 3.用四個全等的部分拼回一個圓形。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

第二節 基本形體的構成要素

構成要素一般是指生成形體的要素與重要部分的局部化，例如：立體形體的構成要素可以是面、線段和頂點；平面圖形的構成要素則可以是線段和頂點；而角是線段相交於頂點的局部；正方形可由兩特殊全等長方形組成。

生活中我們常常使用基本平面圖形描述其他物件，例如：屋頂好像三角形、太陽的形狀是圓形…等。小學幾何教材的處理，是從學童日常生活對這些形狀的辨別與描述開始，透過視覺或觸覺的感官來觀察具體的實物，由實物的整體或輪廓開始辨識圖形，使用相關的幾何語言，漸漸學習操弄這些幾何形體及其性質，例如：用正方形或正三角形的緊密排列，可以促進學生了解正方形或正三角形的幾何性質，成為學習圖形構成要素的基礎。

另一方面，製作或描繪活動，可提升學生對圖形組成的了解，例如：四邊形各種畫法，可以點下四個頂點再連接完成四邊形，這些頂點可決定每個邊長與角度；也可以描下四個邊完成四邊形，但此處需注意角度問題，因為四邊形不像三角形可由各邊來唯一確定，例如：邊長均等長的正方形與菱形。而長方體的造型活動中，則可以使用六個面完成長方體；亦可製作骨架，將討論重點放在邊長關係上。

形體的構成有多樣性，如正方形可以切割成兩個等腰直角三角形，亦由長短邊長比為 2:1 的兩個全等長方形組成。

通常兒童是在三年級左右開始探討構成要素，教學上透過複製形體的製作活動，把形體的構成要素明顯化，並透過使用來認識它，以正方體為例，進行「由一堆正方形圖卡拼湊以圍成一正方體紙盒」與「由一堆竹籤組成一個正方體燈籠骨架」，分別將注意力集中在面、邊與頂點上，以突顯構成要素一面、邊、頂點及角與其數量。再以三角形為例，「描述三角形的畫法或描法」與「透過複製三角形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素」。在學生能說明三角形的畫法或描法後，進行構成要素的命名活動，例如：邊、頂點及角，突顯構成要素，再以逆向方式，透過複製三角形的要素和以要素組成圖形，讓學生進一步地對構成要素

有更深的體認與了解。

析出構成要素後，就可以開始找尋某一類形體的共同性質，例如：在長方形與其構成要素上，把注意力放在邊長時，可以發現長方形都有四個邊，這四個邊恰好分成兩組，相對的兩個邊成爲一組，長度相同；如果注意力集中在角度時，長方形都有四個角，這四個角都一樣大，每一個角都是直角；如果注意力集中在對角線上時，學童可以發現每個長方形都有兩條對角線，而且這兩條對角線一樣長。

透過長方形的構成要素認識後，可以逐一探討並讓學生了解長方形的性質，但是在此階段，學童還無法透過推理理解這些性質之間的關係，例如：四個角都是直角的長方形，對角線會相等；四個角都是直角的長方形，其兩組對邊會等長等等。這些關係的探討是下一階段幾何教學的重點，請參考本章第三節。

有關基本形體的構成要素部分，以下我們分成三個主題來探討，分別是形體的組合與切割活動、形體的製做活動、形體的構成要素。

一、形體的組合與切割活動

在基本形體的初步認識中，我們就曾提到圖形的組合切割，這類活動可以幫助兒童注意到圖形的構成要素，例如：需將相等邊長的兩邊拼起來，可以讓學生注意到相等的邊。組合活動進行時，應讓兒童對組合後的圖形外框描繪下來與原圖形板對照。當然，相等圖形的緊密鋪排，是面積概念的基礎，而利用正方體緊密堆疊成長方體，也是體積學習的前置經驗。

圖形的切割活動可透過摺紙後打開觀察摺痕與邊所成的圖形，例如：正方形色紙對摺打開後，可以看到有兩個全等的等腰直角三角形，或兩個全等長方形。另外，計算多邊形內角和，需要能將 n 邊形分解成 $(n-2)$ 個三角形，這也是將多邊形分解的一個例子。而計算平行四邊形面積，可將平行四邊形切成兩塊再拼成長方形，或利用扇形拼成類似長方形或平行四邊形以計算圓形面積，這些都是利用切割再組合的例子。同樣的，計算柱體體積，也可以透過類似切割組合的方式來計算圓形面積。

在中年級階段，對於基本形體的名稱，會因了解其構成要素，而有更進一步精緻的名稱，以凸顯某些基本形體構成要素的特性，例如：「等腰直角三角形」是既有兩邊等長，且兩邊夾角是直角的三角形。

另外，幾何量如：長度、面積、體積與角度等，都與構成要素的認識有密切的關係，例如：從周界到周長的度量，從單位面積的堆積與長方形面積公式，從單位體積的堆積與長方體體積公式，從三角形、梯形、平行四邊形都可以切割後組成長方形以解決面積的求算方法，或是圓形切割成多個扇形求算圓面積，圓柱體體積亦可仿此方式求出。

下面我們將本教材形體的組合與切割活動分為平面圖形與立體圖形兩部分來討論。

(一) 平面圖形的組合與切割活動目標

從表 3-2-1 中可知，平面圖形的組合與分解活動從低年級就開始了，學童通常將等長的邊拼在一起，把直角拼在一起，因為這樣拼起來容易，而且日常生活中處處可見。

第二冊教材大多是用一些全等圖形的組合活動，教學設計上應提供學童一些全等的基本圖形，例如：三角形或四邊形，讓學童拼合兩個到多個的圖形成為另一個圖形。使用全等圖形的好處是有等長的邊容易拼合，大多兒童也會自然地把邊長相同的邊拼在一起，教材設計上以提供全等或是有等邊長的形狀來拼合為主。第二冊第六單元活動 4、活動 5，先從個數少的全等圖形板作拼合活動，再進入多種形狀與多個圖形作組合圖形，上述情形都是兒童可以自由拼成不同形狀的活動，接下來進一步要求兒童利用所給的形狀，做出指定圖形的形狀，如：第二冊第六單元活動 6、7、8，這樣的過程中，兒童會更注意圖形形狀的特徵，而對形狀有更多的認識。

在第七冊第七單元活動 4 我們進行兩個旋轉角的合成活動，亦牽涉到圖形角的合成，到第十一冊第七單元活動 1，是兩個角的連續旋轉合成，關於角度的討論，可參考本叢書《體積和角度》一冊。此外與長度、面積、體積相關，透過保留概念切割重組，以用簡單形式了解面積公式，可參考本叢書《長度》與《面積》

兩冊。

表 3-2-1

八十二年版活動目標			核心布題	
2	6	4	能用兩塊全等（形狀、大小一樣）的基本圖形拼出一個圖形。	請拿出兩塊像這樣（全等）的色板拼拼看，討論形狀和拼法。
2	6	5	經驗一個圖形可由兩塊一樣的圖形所構成。	這些圖形哪一塊是用這兩塊（全等的圖形）拼成的？
2	6	6	用一些三角形、正方形或長方形拼成一個指定的圖形。	這些圖形用已經準備好的圖卡要怎麼拼？
2	6	7	用一些長方形或正方形拼成一個指定的圖形。	用一些長方形或正方形拼成一個指定的圖形。
2	6	8	(1)由實際的拼排，經驗一個圖形可由幾個全等的圖形所構成。 (2)會將數據填入設計好的表中。	這個圖形用長方形（正方形、三角形）排排看，共用了幾塊？
2	6	*1	(1)熟練三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。 (2)透過操作的活動，知道圖形板與其外框是同形狀。	1.逐一提出正方形、長方形和圓形圖卡，逐一提問：這是什麼形？ 2.教室裡面哪裡有正方形（長方形和圓形）？
11	7	1	(1)透過兩個直角的旋轉合成，認識始邊與終邊成一直線的旋轉角並命名為平角。 (2)將三角形三內角的旋轉角和，變為一平角。	1.用竹籤作一個 90 度的旋轉角，並記錄始邊與終邊。 2.把剛才做的旋轉角的終邊當成始邊，再做一個 90 度的旋轉角。 3.這兩次旋轉角合起來旋轉了幾度？這個角的邊、頂點在哪裡？ 4.將正三角形、直角三角形的三個內角分別畫出其旋轉角並接在一起，三個角合起來旋轉了幾度？
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。				

(二) 立體形體的組合與切割活動目標

第四冊第六單活動 6，用數學積木堆出長方體與正方體，是以組合為主的製作活動，也是體積的前置經驗。第八冊第八單元活動 2，是切割球體的分解活動，利用球體的截面是圓的現象，幫助學生檢查立體形體是否為球，引入球的初步性質。

表 3-2-2

八十二年版活動目標			核心布題
4	6	6	<p>用數量一定、形狀及大小相同的數學積木，堆積成各種可能的長方體或正方體。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.用這 8 個白色積木，堆出一個正方體或長方體。 2.說說看，你堆的是正方體或長方體？ 3.你是怎麼堆的？
8	8	2	<p>察覺球體的截面都是圓形，並認識半球體。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.將像球體的水果切開。 2.命名「截面」。 3.要求記錄並從紀錄中知道球的截面是圓形。 4.再切一些截面，檢驗也是圓形。 5.把不像球的水果切出截面後討論。 6.回到球的截面探討。 7.溝通半球的意義。

二、形體的製做活動

製作是看著形體，再做出一個和它一模一樣的物件。

(一) 形體製做活動與構成要素

在初步認識的複製、蓋印活動中，是讓兒童著重於對形體整體感覺的處理與討論。在討論構成要素時，我們希望兒童是先從製作形體中尋得要素，再從要素回過頭來製作形體，透過這樣的來回製作活動，讓兒童逐漸認識形體與構成要素的關係，例如：先用三根吸管圍成一個三角形，知道這個三角形會有 3 個頂點；再給定三個不共線的點，可以畫出唯一的一個三角形。另外，也可以知道給定滿足和大於第三邊的三個邊 (SSS)，或給定一個邊和這個邊的兩個夾角 (SAS) 也可以決定唯一的一個三角形。但給定三個角(AAA)，與給定兩個角和一個邊 (SSA)

不能決定唯一的一個三角形。而在四邊形的造型活動，因給定四個邊後，四個角仍有自由度，所以剛開始給兒童的複製四邊形的活動中，是給定四邊形圖卡，而非如三角形給定三個邊。

立體的造型活動，困難性較高，在檢驗上也相當困難，所以製作活是以析出構成要素為主的造型活動，例如：可提供多個面，黏合成一個立體；或提供頂點棒和頂點珠，頂點珠有固定頂點棒角度的設計，以此來製作立體的骨架。

所以，造型活動除了讓學童製作形體，幫助了解構成要素外，在控制構成要素特徵下製作特殊造型也一個教學重點。但是在立體造型上，需加以小心，例如：用六張正方形紙卡做成正方體，就比較簡單，容易處理，但是用 12 根吸管或鐵絲做成正方體骨架，就缺少限定角度的因素，雖每邊等長，但是各面上的角度是開放的，容易形成平行六面體；只有當所有角都是直角時，才是正方體。同樣的，平面上用兩對等長的吸管，可以排成平行四邊形；只有在四個角都是直角時，才是長方形。

(二) 平面圖形的製做活動及其活動目標

本教材從製作活動探討或引入幾何圖形的構成要素，顯現出構成要素對於圖形製作的重要，透過製作可以分析出構成要素，利用構成要素的組合，也可以完成幾何圖形。

下表 3-2-3 中，第二冊第六單元活動 3，能在釘板上用橡皮筋圍出圖形，是很特別的製作，利用釘板和橡皮筋圍出幾何形狀，這是在低年級利用整體形狀的製作活動，在學生能辨識基本圖形，例如：三角形、正方形、長方形等，之後引入的造型活動，讓學童以橡皮筋在釘板上圍出長方形和學童喜歡的圖形。

第二冊第六單元補充活動 2，用竹籤在桌上排出圖形，開始有用構成要素的製作活動，不過僅強調圍成圖形，為平面圖形的構成要素鋪路。

從中年級開始，分析構成要素是主要的學習內容，第五冊第六單元活動 1 和活動 3 是由製作引入分析三角形和四邊形的構成要素；活動 2 和活動 5 是由構成要素製作三角形和四邊形的活動。活動 4 則是由構成要素重新命名四邊形，再進行四邊形的製作活動，讓學生更了解構成要素的意義。活動進行先由製作辨識三

角形的構成要素並加以命名的活動，再以三角形構成要素製作三角形，是雙向（要素與造型活動）的教學。

第六冊第十一單元活動 4 是透過製作活動讓學生了解周界的意義，並測量與認識周長，在這活動之前第二冊第六單元活動 2（透過觀察及套描活動，知道圖形板與其外框是同形狀。）、活動 3（能在釘板上用橡皮筋圍出圖形。）及補充活動 1（1.熟練三角形、長方形、正方形和圓形等圖形。2.透過操作的活動，知道圖形板與其外框是同形狀。）、活動 2（用竹籤在桌上排出圖形。）都是這個活動的前置活動。幾何教學常會與度（測）量有相互關係，從邊到邊長、角到度、面到面積、體到體積，幾何教學都是前面重要概念的引入，而度量又為幾何的探索投入新的向度。邊長與角度是平面圖形要素探索時，重要的兩個量。

表 3-2-3

八十二年版活動目標			核心布題
2	6	3 能在釘板上用橡皮筋圍出圖形。	1.在釘板上用橡皮筋圍出長方形。 2.以上圍出的都是長方形嗎？
2	6	*2 用竹籤在桌上排出圖形。	1.用竹籤排成有三角形的圖形。 2.用竹籤排出你喜歡的圖形。
5	6	1 (1)描述三角形的畫法或描法。 (2)進行三角形的邊、頂點及角的命名活動。	• 準備大小不等的三角形、正方形、長方形圖卡及每生白紙一張。 1.請學生從一堆圖形中，找出三角形並進行描繪活動。 2.請學生說說看，描或畫的時候，畫了哪些東西。 3.針對畫的線、相接的點、尖尖的地方進行命名。
5	6	2 透過複製三角形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。	• 準備白紙、直尺、三角板。 請學生依序將三角板的邊、角、頂點，分別描下來，並問學生是否每一部分，都畫出來了。
5	6	3 透過描繪活動，認識四邊形的邊、頂點及角。	• 準備白紙、三角形圖卡、剪刀。 1.請學生用剪刀將三角形圖卡，剪去一個角。

				<p>2.剪出來不是三角形的圖卡，描繪下來，並問學生你描了哪些東西。</p> <p>請學生說說看，邊、頂點、角各有幾個。</p>
5	6	4	進行四邊形的命名活動。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備一些不同的四邊形圖卡。 <p>1.請學生說說看，這些圖卡有什麼相同的地方。</p> <p>2.你們想為這些圖形，取什麼名字呢？</p>
5	6	5	透過複製四邊形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備四邊形圖卡、直尺和白紙。 <p>1.請學生依邊、頂點、角分別將四邊形圖卡，描繪下來。</p> <p>2.請學生說說看，是否每一個邊、角、頂點都描下來了。</p>
6	11	4	認識周界和周長。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備繩子與直尺。 <p>1.將繩子沒有重疊地接在一起，形成一個圖形。</p> <p>2.在繩子裡面的區域叫做圖形的內部，外面的區域叫做圖形的外部。</p> <p>繩子本身的長度就是周長。</p>
<p>本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。</p>				

(三) 立體形體的製作活動及其活動目標

在平面圖形的組合活動中，我們將簡單平面圖形等長的部分緊密地靠在一起，用正方形鋪排出長方形，引入面積的概念。在立體圖形的組合活動中，我們則用小方塊緊密堆疊成一長方體，引入體積的概念。而用面組成正方體或長方體，或製作骨架，則是使用構成要素組成立體形體的製作活動。由下表 3-2-4 可以知道第四冊第六單元透過簡單的型體與積木，堆出一些立體，在其活動 6，特別用數學積木堆出長方體與正方體，是以組合為主的製作活動。

第六冊第七單元透過用正方形圖卡製作正方體、用長方形圖卡製作長方體與利用竹籤製作正方體骨架，並討論頂點、邊、面的個數，這是構成要素的製作活動。

表 3-2-4

八十二年版活動目標			核心布題	
4	6	4	<p>學生用自己的話來描述造形的過程和想法。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1.請用積木堆出一個你們喜歡的東西。 2.說說看，你們堆的是什麼東西，怎麼堆的，先放什麼，後放什麼？
4	6	5	<p>仿造一個實心的長方體或正方體，其大小和事先準備的實物一樣。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1.這些（紙盒）和這個（由小積木堆成的長方體）是不是一樣大？你怎麼知道的？ 2.說說看，你們是怎麼堆的？
4	6	6	<p>用數量一定、形狀及大小相同的數學積木，堆積成各種可能的長方體或正方體。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1.用這 8 個白色積木，堆出一個正方體或長方體。 2.說說看，你堆的是正方體或長方體？ 3.你是怎麼堆的？
6	7	1	<p>透過描述「由一堆正方形圖卡拼湊以圍成一正方體紙盒」的活動過程，在討論中突顯正方體有 6 個面。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1.用習作附件的正方形圖卡嘗試拼排正方體紙盒並討論。 2.讓學生說出正方體紙盒的製作過程（重點在說出選用了六張大小相同的正方形圖卡來拼排）。 3.師生形成「面」的名稱的共識，並指認正方體上的面及說出個數。 4.溝通「邊」、「稜」、「相鄰的面」等名詞，並在正方體上指認出來。 5.數出正體盒子上有幾條邊。 6.將正方體紙盒剪開成展開圖（剪開的展開圖必須能攤平在桌上，並保持完整仍連成一整片）。最後將展開圖再摺回成一個盒子。
6	7	2	<p>透過描述「由一堆長方形圖卡拼湊以圍成一長方體紙盒」的活動過程，在討論中突顯長方體有 6 個面、12 條邊。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1.用習作附件的長方形圖卡嘗試拼排長方體紙盒並討論。 2.讓學生說出長方體紙盒的製作過程（重點在說出選用三種長方形的圖卡，每一種用了 2 張；圖卡相接的邊一樣長）。 3.指認長方體的面並說出面的個數，找出長方形中全等的面並塗上相同的顏色。

			<p>4.數出長方體盒子上有幾條邊。</p> <p>5.將長方體紙盒剪開成展開圖（剪開的展開圖必須能攤平在桌上，並保持完整仍連成一整片）。最後將展開圖再摺回成一個盒子。</p>
6	7	3	<p>透過描述「由一堆竹籤組成一個正方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中突顯正方體有 8 個頂點、12 條邊。</p> <p>1.教師準備若干包竹籤（裝有 4 公分竹籤 14 支，8 公分竹籤 2 支）和黏土，並展示事先製作好的燈籠。</p> <p>2.教師將燈籠外面的紙拿掉，指著骨架問學生，做這些骨架要用到哪些東西？</p> <p>3.請學生將準備好的竹籤分類，量量看竹籤的長度和數出各種長度的數量。</p> <p>4.讓學生用竹籤和黏土製作燈籠的骨架。</p> <p>5.學生說明製作的過程（包含選用哪一種長度的竹籤和竹籤的數量）。</p> <p>6.從燈籠骨架上認識「頂點」的名稱及個數、共用頂點的三條邊叫做「相鄰的邊」。</p>
6	7	4	<p>透過描述「由一堆竹籤組成一個長方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中突顯長方體有 8 個頂點、12 條邊。</p> <p>1.教師展示事先製作的長方體燈籠，將外面的紙拿掉，讓學生仿做一個長方體的燈籠骨架。</p> <p>2.讓學生觀察不同長度的竹籤，依長度分類並數出數量。</p> <p>3.和同學合作用竹籤和黏土製作燈籠的骨架。</p> <p>4.讓學生發表製作燈籠骨架的過程。學生的發表中若未澄清「共點的三支竹籤都不等長」、「使用的 12 支竹籤的性質」，老師宜逐步追問。</p> <p>5.教師提問「用了幾支竹籤？」、「用了幾種長度的竹籤？」、「每種用了幾支？」。</p> <p>6.教師說明 12 支竹籤就是長方體的邊。請學生指出哪些邊一樣長？長方體骨架上有幾個頂點？共用頂點的邊是哪幾條？</p>

三、形體的構成要素

(一) 形體構成要素的命名活動

頂點、邊和角是多邊形的構成要素，在命名時，應儘量幫助學童掌握其幾何特性，例如：邊是區隔圖形內外的直線段；頂點是邊的端點重合為一的地方；角

則是頂點附近，由一邊要轉向另一邊的局部圖形。

在基本形體的初步認識中，學生嘗試了形體的辨識與觸摸、形體的分類與命名、形體的複製與造型等活動，一方面讓學生更深入的認識整個形體，一方面也感受一些基本要素相關的特徵，例如：描繪活動可以加深對圖形輪廓的認識，也開始將注意力從整體移至輪廓，像是在第五冊開始對三角形畫法進行描述活動，更進一步要求學生將注意力移往構成的要素。

在初步認識中的命名是以形體的日常用語或稱呼為主；進入構成要素後，先對一個簡單圖形加以命名，再漸次擴充到各個形體，例如：從三角形的構成要素命名頂點、邊與角，再對四邊形也一樣進行構成要素的命名。

當學生能掌握這些構成要素後，就可以對圖形以其構成要素的特徵來命名，例如：三角形有兩邊一樣長，可以稱為等腰三角形；有一個直角的三角形，稱為直角三角形。

角的構成要素在本教材有三種處理觀，第一種是圖形角，從三角形、四邊形中，發現圖形有尖尖的角；第二種是張開角，利用扇子張開的程度，了解角的構成要素與大小；第三種是旋轉角，記錄固定一端旋轉的直線所形成的角。另外，直角是一種特殊的角，在基本形體與生活中常見，因此也常用來對某些簡單基本形體用來進行命名活動，例如：有一個直角的等腰三角形，可進一步命名為等腰直角三角形。

另外「圓」是與多邊形差異很大的常見圖形，圓的構成要素與多邊形不同，多邊形構成要素是「邊、角和頂點」，但我們討論的圓心、直徑與半徑等，不是多邊形的構成要素，反之亦然。而由圓衍生出的「扇形」，其構成要素有頂點（圓心）、邊（半徑）、角（圓心角）與弧（圓弧）等。

1. 平面圖形構成要素的探索活動目標

與平面圖形的構成相關的活動如下表 3-2-5，從中年級起，學生學習幾何，從一般性整體認識，進入分析構成要素的探討，首先是了解構成要素：第五冊開始，探討三角形（第五冊第六單元活動 1）和四邊形（第五冊第六單元活動 3）的構成要素（邊、頂點和角）、第六冊探討角（第六冊第七單元活動 7）、第七冊探討圓

形的構成要素，討論圓周、圓心和半徑（第七冊第七單元活動 5）、第十冊探討扇形的構成要素頂點、邊、圓心角和圓弧（第十冊第三單元活動 2）。

「角」在構成要素的探討中相當特別，是由兩個邊和一個共同的頂點組成的，但強調的是張開的程度而非此兩邊的長度，教材中在第五冊探討三角形和四邊形的角，第六冊藉由扇子張開討論角張開的程度，在十一冊則由旋轉角討論兩角和。

「圓」是與多邊形差異很大的常見圖形，構成要素的探討和多邊形不同，多邊形構成要素是「邊、角和頂點」，圓形我們討論「圓心、圓周和直徑半徑」（第七冊第七單元活動 5~6），圓形衍生出的「扇形」，構成要素是「頂點（圓心）、邊（半徑）、角（圓心角）與弧（圓弧）」（第十冊第三單元活動二）。

多邊形的教學，是在學生已經掌握了三角形、四邊形的構成要素後進行的活動，經過中年級學生了解要素後，高年級利用這些要素進一步處理多邊的圖形，透過邊、角、頂點，學生可以區分四邊形、五邊形、六邊形等等，將這些是多個邊的形狀歸納成爲多邊形。此外，高年級也引入兩多邊形全等的意義，就是每個對應的構成要素相等，如：對應邊等長、對應角度等大。

表 3-2-5

八十二年版活動目標			核心布題	
5	6	1	<p>1.描述三角形的畫法或描法。</p> <p>2.進行三角形的邊、頂點及角的命名活動。</p>	<p>• 準備大小不等的三角形、正方形、長方形圖卡，另外給每位學生白紙一張。</p> <p>1.請學生從一堆圖形中，找出三角形並進行描繪活動。</p> <p>2.請學生說說看，描或畫的時候，畫了哪些東西。</p> <p>3.針對畫的線、相接的點、尖尖的地方進行命名。</p>
5	6	2	<p>透過複製三角形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。</p>	<p>• 準備白紙、直尺、三角板。</p> <p>請學生依序將三角板的邊、角、頂點，分別描下來，並問學生是否每一部分，都畫出來了。</p>
5	6	3	<p>透過描繪活動，認識四邊形的邊、頂點及角。</p>	<p>• 準備白紙、三角形圖卡、剪刀。</p> <p>請學生用剪刀將三角形圖卡，剪去一個角。</p>

				<p>1.將剪出來不是三角形的圖卡，描繪下來，並問學生描了哪些東西。</p> <p>2.請學生說說看，邊、頂點、角各有幾個。</p>
5	6	4	進行四邊形的命名活動。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備一些不同的四邊形圖卡。 <p>1.請學生說說看，這些圖卡有什麼相同的地方。</p> <p>2.你們想為這些圖形，取什麼名字呢？</p>
5	6	5	透過複製四邊形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備四邊形圖卡、直尺和白紙。 <p>1.請學生依邊、頂點、角分別將四邊形圖卡，描繪下來。</p> <p>2.請學生說說看、是否每一個邊、角、頂點都描下來了。</p>
6	7	7	透過張開扇子的活動及其結果的描繪，認識角及其構成要素。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備大小不等的三角形和四邊形圖卡、扇子、扇子的骨架。 <p>1.請學生說說看，扇子是怎麼打開的。</p> <p>2.怎麼告訴別人，扇子打開的程度有多大？</p> <p>3.記錄下來的符號，我們也可以把它叫做角，相接角的兩條直線，要叫做角的什麼呢？</p>
6	9	2	<p>1.從比較三角板的角認識直角。</p> <p>2.認識直角三角形。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 準備三角板一付、紙摺的直角。 <p>1.比比看，一付三角板中有沒有一樣大的角，這樣一樣大的角叫做直角。</p> <p>2.用三角板的直角，找找看哪裡有直角？</p> <p>3.像這樣有直角的三角形，可以叫做什麼三角形？</p>
6	9	3	<p>(1)知道正方形、長方形有四個直角。</p> <p>(2)透過複製直角活動，經驗垂直的意義。</p> <p>(3)用紙摺出直角。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 準備四邊形圖形、三角板和紙摺的直角。 <p>1.檢查看看，四邊形圖卡哪裡有直角？正方形和長方形有幾個直角呢？</p> <p>2.怎樣在某一條線上畫出直角？</p> <p>3.怎樣用紙摺出直角？</p>
6	9	4	<p>(1)從四邊形的邊中，找出垂直的邊。</p> <p>(2)從垂直同一個邊的兩個</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 準備四邊形圖卡、三角板和紙摺的直角。 <p>1.說說看，圖形中垂直於*邊的有哪些邊，你怎麼知</p>

		邊，經驗平行的意義。	<p>道的？</p> <p>2. 找找看，長方形中有哪兩個邊同時垂直於另一邊？這兩個邊有什麼關係？</p> <p>3. 找找看，四邊形圖卡中哪裡有平行的邊呢？你怎麼知道的？</p>	
7	7	5	<p>(1) 複習辨認圓形及非圓形。</p> <p>(2) 透過具體操作活動，認識圓周、圓心、半徑和直徑。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 準備一些圓形和非圓形的圖卡。 • 準備一張打洞的厚紙板及有點出圓心的圓和沒有點出圓心的圓。 <ol style="list-style-type: none"> 1. 揭示圖卡，問學生哪些是圓形？哪些不是圓形？並說出判斷的理由。 2. 討論圓的畫法（可能用繩子、打洞的厚紙板、圓規、圓形板等）。 3. 討論畫圓時要注意的事項（如：繩子的一端要固定、長度要一樣等）。 4. 命名：畫圓時固定的點叫做圓心，畫出來的圓的周圍叫做圓周，從圓心到圓周拉出來的線段叫做半徑（討論半徑的長度有沒有一樣長）。 5. 將圓形板對摺後，摺線都通過圓心，通過圓心的摺線叫做直徑（討論直徑的長度有沒有一樣長）。 6. 找出沒有點出圓心的圓的圓心來。
7	7	6	<ol style="list-style-type: none"> 1. 用圓規畫圓。 2. 透過用圓規畫圓的活動，加深了解圓周、圓心和半徑。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 介紹認識圓規，同時以圓規畫出等長的兩條線段，問學生這兩條線是不是一樣長，並說明原因。 2. 讓學生練習用圓規畫圓，並點出圓心，畫出半徑和直徑，並量出半徑和直徑的長度。 3. 畫出指定半徑長度的圓，並點出圓心，畫出半徑。
8	3	7	<ol style="list-style-type: none"> (1) 認識銳角和鈍角。 (2) 使用量角器畫出指定度數的角。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 畫一個比直角小的角，檢驗後並命名「銳角」。 2. 畫一個比直角大的角，檢驗後並命名「鈍角」。 3. 直觀判斷三角形中的銳角、直角和鈍角。
9	11	1	<p>(1) 將一堆三～七邊形的圖卡，根據邊的個數加以分類並命名，命名為五邊形、六邊形、七邊形後，</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 準備各類多邊形圖卡、五枝等長的吸管穿線並貼上磁鐵、等角但不等邊長的五邊形。 <ol style="list-style-type: none"> 1. 請學生在一堆多邊形圖卡中找出五邊形。

		將全部命名為多邊形。 (2)討論給定的五(及六)邊形圖卡, 檢查邊、角是否相等, 由此認識正五(及六)邊形。	<ol style="list-style-type: none"> 對各類多邊形命名, 並指出唯有三角形不以邊來命名成三邊形。 請學生找出正三角形、正方形、正五邊形。 拿出穿線的五枝等長的吸管, 與學生討論五邊均等長的五邊形一定是正五邊形嗎? 知道正五邊形的條件除了要五個邊相等外, 同時五個角也要相等。
9	11 2	以疊合方式檢驗兩個多邊形圖卡完全疊合後, 確定此二個多邊形逐邊、逐角皆相等, 由此認識兩多邊形全等時, 各個對應邊皆相等、各對應角皆相等。	<ul style="list-style-type: none"> 準備全等的圖形卡、半透明的描圖紙。 <ol style="list-style-type: none"> 請學生拿出圖形卡找出全等的圖形, 並形成用邊和角均完全疊合來判斷全等圖形。 請學生指出全等圖形所對應的角、對應的邊與對應的頂點。 用半透明的描圖紙來判斷圖形的全等與否, 並介紹角的記法, 例如:「$\angle 1$」。
10	3 2	認識扇形及其構成要素—頂點、邊、圓心角和圓弧。	<ol style="list-style-type: none"> 在圓上把兩條半徑圍住的部分塗上顏色(塗比較小塊的部分, 可能包括圓心角大於 90 度、小於 90 度和接近 90 度), 稱呼這種由一個圓的兩條半徑和所夾的圓弧形成的圖形叫做「扇形」。 半徑一樣時, 比較扇形的大小。 圓上兩條半徑形成的角, 頂點在圓心上, 這樣的角稱為「圓心角」。比較扇形的大小, 也同時在比較圓心角的大小。 半徑不一樣時, 比較扇形的大小。 討論扇形的構成要素: 頂點、圓心角、半徑、圓弧。
11	7 1	<ol style="list-style-type: none"> 透過兩個直角的旋轉合成, 認識始邊與終邊成一直線的旋轉角並命名為平角。 將三角形三內角的旋轉角和, 變為一平角。 	<ol style="list-style-type: none"> 用竹籤作一個 90 度的旋轉角, 並記錄始邊與終邊。 把剛才做的旋轉角的終邊當成始邊, 再做一個 90 度的旋轉角。 這兩次旋轉角合起來旋轉了幾度? 這個角的邊、頂點在哪裡? 將正三角形、直角三角形的三個內角分別畫出其旋轉角並接在一起, 三個角合起來旋轉了幾度?

2. 立體形體構成要素的探索活動目標

本教材在中年級幾何教材的學習，已從一般整體性的認識，進入分析構成要素的探討，平面圖形在第五冊開始探討三角形與四邊形的構成要素。因平面圖形的面，也是立體形體構成要素所要探討的對象，所以立體形體的構成要素安排在平面圖形構成要素之後。

本教材從第六冊第七單元開始探討立體形體的構成要素，首先探討的正方體與長方體：從利用圖卡的製作活動，突顯正方體與長方體的面，再繼續探討邊，當然面與邊個數的計數，也是教學的重點之一。

透過製做正方體或長方體的骨架，可以突顯邊和頂點，點數邊和頂點的個數，並發現邊長和長方體與正方體的關係（正方體的 12 個邊都等長，長方體有三組不同長度的邊（活動設計是做長、寬、高各部等長的長方體骨架））。在經驗使用圖卡拼湊圍成正方體和長方體，並經驗製作正方體與長方體的骨架後，進行對正方體與長方體模型的觀察，並計數構成要素的個數（正方體有六個全等的面、八個頂點、十二個等長的邊；長方體有三對全等的面，八個頂點與三組四個等長的邊）。在立體中，點數頂點或邊等，容易重複點算或漏算，需要確認這些構成要素的個數，例如：正方體上面有四個頂點，下面有四個頂點，共有八個頂點，就是很好的點數策略。

在前面使用圖卡製作正方體與長方體的活動後段，我們一併處理的「展開圖」，以及之後的骨架製作活動，各可突顯面與邊和頂點；此外我們觀察長方體與正方體，從另一向度，計數構成要素，並討論簡單的相等（全等）關係。但一般視圖並無法直接看到 6 個面、8 個頂點與 12 個邊，所以教材在這些活動的基礎後，引入了透視圖的製作，透過骨架與視圖對照，在視圖裡補上三條虛線而得到透視圖。

高年級處理柱體、圓柱、錐體和圓錐，此處是觀察形體，直接確認這些構成要素，並討論其關係，角柱與角錐的構成要素皆為頂點、邊和面，這些要素會因底面邊數不同而有特定的關係，在活動中討論頂點、邊和面的數法。圓錐和圓柱部分，本教材並不討論圓柱和圓錐的頂點、邊和面的個數問題。第十一冊十一單元活動 3 到 5 分別處理角柱、圓柱與角錐。

表 3-2-6

八十二年版活動目標			核心布題
6	7	1 透過描述「由一堆正方形圖卡拼湊以圍成一正方體紙盒」的活動過程，在討論中突顯正方體有 6 個面。	<ol style="list-style-type: none"> 1.用習作附件的正方形圖卡嘗試拼排正方體紙盒並討論。 2.讓學生說出正方體紙盒的製作過程（重點在說出選用了六張大小相同的正方形圖卡來拼排）。 3.師生形成「面」的名稱的共識，並指認正方體上的面及說出個數。 4.溝通「邊」、「稜」、「相鄰的面」等名詞，並在正方體上指認出來。 5.數出正體盒子上有幾條邊。 6.將正方體紙盒剪開成展開圖（剪開的展開圖必須能攤平在桌上，並保持完整仍連成一整片）。最後將展開圖再摺回成一個盒子。
6	7	2 透過描述「由一堆長方形圖卡拼湊以圍成一長方體紙盒」的活動過程，在討論中突顯長方體有 6 個面、12 條邊。	<ol style="list-style-type: none"> 1.用習作附件的長方形圖卡嘗試拼排長方體紙盒並討論。 2.讓學生說出長方體紙盒的製作過程（重點在說出選用三種長方形的圖卡，每一種用了 2 張；圖卡相接的邊一樣長）。 3.指認長方體的面並說出面的個數，找出長方形中全等的面並塗上相同的顏色。 4.數出長方體盒子上有幾條邊。 5.將長方體紙盒剪開成展開圖（剪開的展開圖必須能攤平在桌上，並保持完整仍連成一整片）。最後將展開圖再摺回成一個盒子。
6	7	3 透過描述「由一堆竹籤組成一個正方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中突顯正方體有 8 個頂點、12 條邊。	<ol style="list-style-type: none"> 1.教師準備若干包竹籤（裝有 4 公分竹籤 14 支，8 公分竹籤 2 支）和黏土，並展示事先製作好的燈籠。 2.教師將燈籠外面的紙拿掉，指著骨架問學生，做這些骨架要用到哪些東西？ 3.請學生將準備好的竹籤分類，量量看竹籤的長度和數出各種長度的數量。 4.讓學生用竹籤和黏土製作燈籠的骨架。

			<p>5. 學生說明製作的過程（包含選用哪一種長度的竹籤和竹籤的數量）。</p> <p>6. 從燈籠骨架上認識「頂點」的名稱及個數、共用頂點的三條邊叫做「相鄰的邊」。</p>
6	7	4	<p>透過描述「由一堆竹籤組成一個長方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中突顯長方體有 8 個頂點、12 條邊。</p> <p>1. 教師展示事先製作的長方體燈籠，將外面的紙拿掉，讓學生仿做一個長方體的燈籠骨架。</p> <p>2. 讓學生觀察不同長度的竹籤，依長度分類並數出數量。</p> <p>3. 和同學合作用竹籤和黏土製作燈籠的骨架。</p> <p>4. 讓學生發表製作燈籠骨架的過程。</p> <p>學生的發表中若未澄清「共點的三支竹籤都不等長」、「使用的 12 支竹籤的性質」，老師宜逐步追問。</p> <p>5. 教師提問「用了幾支竹籤？」、「用了幾種長度的竹籤？」、「每種用了幾支？」。</p> <p>6. 教師說明 12 支竹籤就是長方體的邊。請學生指出哪些邊一樣長？長方體骨架上有幾個頂點？共用頂點的邊是哪幾條？</p>
6	7	5	<p>透過觀察正方體和長方體，經驗正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點；長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。</p> <p>1. 課前準備每組一套如下的積木或盒子： 甲：長方體；乙：長方體（共頂點的三邊都不等長）； 丙：長方體（共頂點的三邊中有兩邊等長）。</p> <p>2. 每一組拿出甲（乙或丙）積木，問學生積木是什麼形狀以及指出積木的 6 個面並點算面的個數。</p> <p>3. 教師提問「6 個面全等嗎？」請學生證明面的全等，學生可用描繪後比較的方法驗證全等。</p> <p>4. 教師提問「這個積木有幾條邊？這些邊都等長嗎？」。請學生證明邊的等長，學生可用尺量或描下其中一邊再與其他的邊做比較。</p> <p>5. 教師提問「這個積木有幾個頂點？」</p>
6	7	6	<p>透過長方體和正方體的骨架與視圖對照的活動，在視圖中補上三條虛線得到透視圖。</p> <p>1. 學生在課前將習作附件 8、9（學生的附件 8、9 的視圖上都多了一個紅點，是爲了幫助兒童畫出透視圖）取下，混在一起。</p> <p>2. 教師在黑板揭示如習作附件 8、9 視圖（沒有畫出紅點，且將圖卡混在一起）的放大圖。</p>

		<p>3.教師問學生以前有沒有看過像黑板上的圖，教師說明這些圖都是從不同的方向把立體的積木畫在平面的紙上。像這樣的圖，通常把它叫做「視圖」。</p> <p>4.教師選擇一張長方體的視圖，讓學生從自己的習作附件中找出這張視圖來；再從先前做好的兩個燈籠骨架中選一個，照著這張視圖擺擺看。</p> <p>5.教師指定視圖上的一條邊，讓學生指出是燈籠骨架上的哪一條邊？</p> <p>讓學生說出這些燈籠骨架有幾條邊？幾個頂點？再數數看，視圖裡面畫了幾條邊？幾個頂點？</p> <p>6.讓學生對對看，燈籠骨架上哪幾條邊和哪個頂點在視圖上沒有看到？把它在燈籠骨架上找出來。</p> <p>7.讓學生嘗試說出為什麼視圖上沒有看見這些邊和頂點，並在自己的視圖上畫出視圖上缺少的三條邊。</p> <p>8.教師說明為了分辨這三條視圖上原來沒有的邊，通常用虛線來畫。</p>
11 11 3	<p>透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數、底面全等、側面為長方形、側邊一樣長且垂直於底面、底面互相平行、側邊互相平行。</p>	<p>1.柱體上下兩面叫做底面、周圍其餘的面叫做側面、兩相連在一起的側面的共用邊叫做側邊。</p> <p>2.討論長方體的性質(頂點數、邊數、面數、全等的面、等長的邊、垂直平行關係)。</p> <p>3.討論角柱體的性質(頂點數、邊數、面數、全等的面、等長的邊、垂直平行關係)。</p> <p>4.討論上下底面的形狀和大小並推至全等關係。</p> <p>5.討論頂點數及數法；討論邊數及數法；討論面數及數法。</p> <p>6.側面是什麼形狀？你怎麼知道是長方形？</p> <p>7.側邊的長度一樣長嗎？你怎麼知道的？</p> <p>8.側邊和底面互相垂直嗎？你怎麼知道的？</p> <p>9.兩個底面互相平行嗎？你怎麼知道的？</p> <p>10.分組討論一種角柱的特性並上台報告。</p> <p>11.(綜合學生發表的特性)比較看看角柱有共同的特性嗎？</p>

11	11	4	透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等、底面互相平行。	<ol style="list-style-type: none"> 1.討論圓柱體的性質(上下底的形狀、大小和關係，兩底面有否互相平行)。 2.討論上下底面的形狀和大小並推至全等關係。 3.討論兩底面有否互相平行？ 4.討論不同圓柱的性質。 5.(綜合學生發表的特性)比較看看圓柱有共同的特性嗎？
11	11	5	透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數、側面的形狀為三角形和側面共同的頂點為尖頂的性質。	<ol style="list-style-type: none"> 1.討論角錐的性質(底面的形狀、頂點數、邊數、面數、側面的形狀、側面共同的頂點位置)。 2.討論頂點數、邊數、面數及數法。 3.討論側面的形狀。 4.討論側面共同的頂點在哪裡？ 5.(綜合學生發表的特性)比較看看角錐有共同的特性嗎？

(二) 構成要素的個數計數及其活動目標

構成要素的數量，與基本形體有一定的關係，尤其在平面的多邊形，三個邊圍成的是三角形，四個邊圍成的是四邊形，多個邊圍成多邊形。而三角形有三個邊、三個角和三個頂點，四邊形有四個邊、四個角和四個頂點， n 邊形有 n 個邊、 n 個角和 n 個頂點。

立體形體的構成要素並不容易計數，通常需要有策略的計數，才能確認數全部的「面」、「邊」、「角」或「頂點」的個數。在角柱與角錐其構成要素之間的關係如下表 3-2-7：

表 3-2-7

角柱	角錐
頂點個數：一個底的邊數 $\times 2$	一個底的邊數 + 1
邊的個數：一個底的邊數 $\times 3$	一個底的邊數 $\times 2$
面的個數：一個底的邊數 + 2	一個底的邊數 + 1

表 3-2-8 是有關構成要素的個數計數及其活動目標。

表 3-2-8

八十二年版活動目標			核心布題	
6	7	1	<p>透過描述「由一堆正方形圖卡拼湊以圍成一正方體紙盒」的活動過程，在討論中突顯正方體有 6 個面。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1.用習作附件的正方形圖卡嘗試拼排正方體紙盒並討論。 2.讓學生說出正方體紙盒的製作過程（重點在說出選用了六張大小相同的正方形圖卡來拼排）。 3.師生形成「面」的名稱的共識，並指認正方體上的面及說出個數。 4.溝通「邊」、「稜」、「相鄰的面」等名詞，並在正方體上指認出來。 5.數出正體盒子上有幾條邊。 6.將正方體紙盒剪開成展開圖（剪開的展開圖必須能攤平在桌上，並保持完整仍連成一整片）。最後將展開圖再摺回成一個盒子。
6	7	2	<p>透過描述「由一堆長方形圖卡拼湊以圍成一長方體紙盒」的活動過程，在討論中突顯長方體有 6 個面、12 條邊。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1.用習作附件的長方形圖卡嘗試拼排長方體紙盒並討論。 2.讓學生說出長方體紙盒的製作過程（重點在說出選用三種長方形的圖卡，每一種用了 2 張；圖卡相接的邊一樣長）。 3.指認長方體的面並說出面的個數，找出長方形中全等的面並塗上相同的顏色。 4.數出長方體盒子上有幾條邊。 5.將長方體紙盒剪開成展開圖（剪開的展開圖必須能攤平在桌上，並保持完整仍連成一整片）。最後將展開圖再摺回成一個盒子。
6	7	3	<p>透過描述「由一堆竹籤組成一正方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中突顯正方體有 8 個頂點、12 條邊。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1.教師準備若干包竹籤（裝有 4 公分竹籤 14 支，8 公分竹籤 2 支）和黏土，並展示事先製作好的燈籠。 2.教師將燈籠外面的紙拿掉，指著骨架問學生，做這些骨架要用到哪些東西？ 3.請學生將準備好的竹籤分類，量量看竹籤的長度

			<p>和數出各種長度的數量。</p> <p>4.讓學生用竹籤和黏土製作燈籠的骨架。</p> <p>5.學生說明製作的過程（包含選用哪一種長度的竹籤和竹籤的數量）。</p> <p>6.從燈籠骨架上認識「頂點」的名稱及個數、共用頂點的三條邊叫做「相鄰的邊」。</p>
6	7	4	<p>透過描述「由一堆竹籤組成一個長方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中突顯長方體有 8 個頂點、12 條邊。</p> <p>1.教師展示事先製作的長方體燈籠，將外面的紙拿掉，讓學生仿做一個長方體的燈籠骨架。</p> <p>2.讓學生觀察不同長度的竹籤，依長度分類並數出數量。</p> <p>3.和同學合作用竹籤和黏土製作燈籠的骨架。</p> <p>4.讓學生發表製作燈籠骨架的過程。</p> <p>學生的發表中若未澄清「共點的三支竹籤都不等長」、「使用的 12 支竹籤的性質」，老師宜逐步追問。</p> <p>5.教師提問「用了幾支竹籤？」、「用了幾種長度的竹籤？」、「每種用了幾支？」。</p> <p>6.教師說明 12 支竹籤就是長方體的邊。請學生指出哪些邊一樣長？長方體骨架上有幾個頂點？共用頂點的邊是哪幾條？</p>
6	7	5	<p>透過觀察正方體和長方體，經驗正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點，長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。</p> <p>1.課前準備每組一套如下的積木或盒子： 甲：長方體；乙：長方體（共頂點的三邊都不等長）； 丙：長方體（共頂點的三邊中有兩邊等長）。</p> <p>2.每一組拿出甲（乙或丙）積木，問學生積木是什麼形狀以及指出積木的 6 個面並點算面的個數。</p> <p>3.教師提問「6 個面全等嗎？」請學生證明面的全等，學生可用描繪後比較的方法驗證全等。</p> <p>4.教師提問「這個積木有幾條邊？這些邊都等長嗎？」。請學生證明邊的等長，學生可用尺量或描下其中一邊再與其他的邊做比較。</p> <p>5.教師提問「這個積木有幾個頂點？」</p>
9	11	1	<p>(1)將一堆三～七邊形的圖卡，根據邊的個數加以分類並命名，命名為五邊形、六</p> <p>• 準備各類多邊形圖卡、五枝等長的吸管穿線並貼上磁鐵、等角但不等邊長的五邊形。</p>

邊形、七邊形後，將全部命名為多邊形。

(2) 討論給定的五（及六）邊形圖卡，檢查邊、角是否相等，由此認識正五（及六）邊形。

1. 請學生在一堆多邊形圖卡中找出五邊形。

2. 對各類多邊形命名，並指出唯有三角形不以邊來命名成三邊形。

3. 請學生找出正三角形、正方形、正五邊形。

4. 拿出穿線的五枝等長的吸管，與學生討論五邊均等長的五邊形一定是正五邊形嗎？

5. 知道正五邊形的條件除了要五個邊相等外，同時五個角也要相等。

第三節 關係

學童在了解圖形的構成要素及構成要素與圖形的關係後，就可以進一步探索圖形的內在屬性關係，以及各類圖形之間的包含關係，例如：兩雙對邊相等的四邊形一定是平行四邊形，對角線等長且互相平分的四邊形一定是長方形。而透過幾何物件間的關係，學童則可以由實測到推論到局部的幾何體系建立。因此本節將基本形體的關係分為三部分來討論，分別是構成要素間的關係、幾何物件間的關係與實測到推論到局部體系的建立。

一、構成要素間的關係

在分析構成要素間的關係時，基本上也是分為平面圖形與立體圖形兩部分來討論，在平面圖形上我們主要討論兩線之間的關係，例如：兩線之間的夾角與平行關係，而線段間的長度關係或兩點間的距離的討論，可參考前節「三、形體的構成要素」，下面我們將構成要素間的關係的討論分為垂直與平行的關係、柱體與錐體的結構及由構成要素定義的基本形體三部分來討論，關於角度在此則略過，讀者可參考本叢書另一冊的《體積和角度》一書。

(一) 垂直與平行關係及其相關推理

1. 平面上垂直與平行關係及其相關推理

平面上兩相異直線之間的關係，可由兩直線相不相交，相交後所成的角有多大來描述。若兩直線相交，則所成的角有四個部分，合起來為一周角，對頂角相等，鄰角互補；若兩直線不相交，則此兩直線互相平行；若兩直線相交，且其交角中若有一個為直角，則其餘三個亦必為直角，此時稱兩直線互相垂直。實際上我們無法每次都精確地延長一直線至隨心所欲的程度，因此雖然知曉延長的意義，對於任意延長，永不相交的意義，無法從具體的活動中來了解，所以本教材採用另一個可以具體實施的平行定義，即兩直線若同時垂直於第三直線，則此二直線互相平行。

本教材採用與第三條直線同時垂直來定義平面上兩線的平行，也符合認知發展與數學上的結構。因為認知心理學家發現，人腦中有專責判斷直線傾斜度的神

經細胞，以此來看平行的關係，則平行的認知來自傾斜度相同。亦即若有第三條相截直線參照，則其傾斜度的控制，來自與截線的交角。從畫平行線的製作觀點來看，使用與第三條直線垂直的方式也是最有效的方式之一，建築設計師在繪圖上使用沿著桌邊滑行的丁字尺繪製平行線就是應用此理。

2. 立體圖形上垂直與平行關係及其相關推理

在形體上要把平面上成立的垂直平行關係推展到立體中，可以利用打開盒子或將長方體切成全等的兩個三角柱的方法，讓察覺的學生驗證另有一條邊亦與討論中的邊平行。在平面上，兩直線若同時平行於第三直線，則此二直線互相平行，學童可以透過平行的定義了解，但是此結果不適用於此處長方體的情形。

利用長方體各面均為長方形的事實，可推得長方體各邊的垂直平行關係，我們希望學生在此能練習簡單推理，但是不勉強學生。若學生還是用三角板檢查，亦可接受。

認識直線垂直於平面的關係後，可用來探討平面垂直於平面的關係。先從生活中看到的牆壁或圍牆垂直於地面的現象開始。接著用三角板的一邊固定在紙板上，另一邊在桌板上轉動（旋轉的角度在 30 度至 60 度之間即可），顯示紙板垂直於桌面。然後再探討長方體的面與其相鄰的面的垂直關係。接著再觀察三角柱體的某些相鄰的側面作為反例。

對於直線垂直於平面：五年級我們讓學童認識到相交兩直線決定唯一的平面同時包含此二直線，並將此二直線的交角看成是將量角器放在此平面上測量的結果。然後我們以測量直線交角的方法，判定直線是否與一平面垂直。

另一方面，兒童從旗竿、爬竿、電線桿、柱的觀察，以及以繫繩立柱的實作可以從生活中認識直線垂直於平面的現象。垂線與水平面垂直的現象也很容易觀察。這些現象和地心引力都有關，所以在介紹後，要再將平面與直線兩者之間的相對狀態固定，將整個系統轉動，再與兒童溝通「直線仍然垂直於平面」。

接著我們再用長方體的邊與其相交的面來觀察，透過此邊與相交的面所含的另外兩邊皆垂直的證據，但不必再拿三角板檢查垂直，判定長方體的邊與其相交的面皆垂直。

由觀察桌面和地面平行的現象，解讀為桌面和地面同時垂直於桌腳。在長方體上可以看到類似的現象：長方體中相對的面互相平行。教學時可以採用多面體上的反例來讓學生判定面和面的平行關係，但這部分就不實際用紙板模擬。

在觀察單槓上的橫槓與地面平行的現象，解讀為支持橫槓的柱子和地面垂直也和橫槓垂直。模擬此一現象時，用三角板檢查，認識直線平行於平面的數學意義。在長方體上看到類似的現象：上邊和面的平行現象。教師亦可採用面體上的反例來讓學生判別上邊和面的平行關係。

3. 垂直與平行關係及其相關推理之活動目標

由表 3-1-1 可以發現，在已經驗垂直（平行）意義的活動後，透過觀察實驗了解甲和乙互相垂直（平行），並進一步透過這個意義，可以使用工具，畫出過指定點做直線垂直（平行）於已知直線。

表 3-3-1

八十二年版活動目標			核心布題	
6	9	2	<p>(1)從比較三角板的角認識直角。</p> <p>(2)認識直角三角形。</p>	<p>• 準備三角板一付、紙摺的直角。</p> <p>1.比比看，一付三角板中有沒有一樣大的角，這樣一樣大的角叫做直角。</p> <p>2.用三角板的直角，找找看哪裡有直角？</p> <p>3.像這樣有直角的三角形，可以叫做什麼三角形？</p>
6	9	3	<p>(1)知道正方形、長方形有四個直角。</p> <p>(2)透過複製直角活動，經驗垂直的意義。</p> <p>(3)用紙摺出直角。</p>	<p>• 準備四邊形圖形、三角板和紙摺的直角。</p> <p>1.檢查看看，四邊形圖卡哪裡有直角？正方形和長方形有幾個直角呢？</p> <p>2.怎樣在某一條線上畫出直角？</p> <p>3.怎樣用紙摺出直角？</p>
6	9	4	<p>(1)從四邊形的邊中，找出垂直的邊。</p> <p>(2)從垂直同一個邊的兩個邊，經驗平行的意義。</p>	<p>• 準備四邊形圖卡、三角板和紙摺的直角</p> <p>1.請學生指出四邊形中與某邊垂直的邊。</p> <p>2.找找看，長方形中有哪兩個邊同時垂直於另一邊？這兩個邊有什麼關係？</p> <p>3.找找看，四邊形圖卡中哪裡有平行的邊呢？你怎</p>

			麼知道的？	
6	9	5	<p>經驗以量角器做為刻度尺，報讀角的大小。</p>	<p>1.學生複習舊經驗，能做出直角張開的程度。</p> <p>2.藉量長度要用「尺」的工具，引導學生用量角器量角度的大小。</p> <p>3.認識量角器上的刻度標記與數字關係，及其中心點。</p> <p>4.能用三角板上已知的直角比對量角器，以確認及報讀量角器上的角度，經由分析量角器上的角度使用，從標 0 的線到另一邊對齊的是標 90 的線，而能報讀 90 度。</p> <p>5.經由三角板上 60 度、30 度、45 度角在量角器上操作，進而培養報讀角的大小的能力。</p>
7	3	1	<p>透過指定一邊，做出直角另一邊的方式，察覺垂直的意義。</p>	<p>1.讓學生畫出一個直角，並說出畫法。</p> <p>2.用三角板檢查圖形中可能是直角的角，並標示直角的記號。</p> <p>3.討論「甲線垂直於乙線」、「乙線垂直於甲線」，可簡單說成「甲、乙兩線互相垂直」。</p> <p>4.不管延長甲線或延長乙線或同時延長甲、乙線，都可說是甲線和乙線互相垂直。</p> <p>5.過線外一點，做一條和此線垂直的線。</p>
7	3	2	<p>察覺一線平行於另一直線的意義為同時垂直於第三直線。</p>	<p>• 準備若干平行或不平行的情境圖(例如：長方形、梯形、加上補助線的兩平行線、未加上補助線的兩平行線、上下底邊平行的六邊形等)。</p> <p>1.討論長方形中，四個邊的垂直和平行關係。</p> <p>2.延長長方形的邊長，討論長方形原來平行的邊，是否可以說是互相平行的線。</p> <p>3.討論情境圖中線的平行關係。</p>
8	3	7	<p>(1)認識銳角和鈍角。</p> <p>(2)使用量角器畫出指定度數的角。</p>	<p>1.畫一個比直角小的角，檢驗後並命名「銳角」。</p> <p>2.畫一個比直角大的角，檢驗後並命名「鈍角」。</p> <p>3.直觀判斷三角形中的銳角、直角和鈍角。</p>
9	15	1	<p>在一個長(正)方體中找出</p>	<p>• 準備展開圖黏合成立體盒子兩個、三角板一付、</p>

		和指定邊互相垂直的其他邊。	<p>不同顏色的粗彩色筆六枝。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.請學生用三角板檢驗黑板上垂直與不垂直的兩線。 2.請學生找出長方形的四個直角。 3.請學生指出長方形中相交並互相垂直的邊，並用直角記號標記。 4.請學生在長方體盒子中找出相交的邊。 5.請學生在長方體盒子中找出相交而互相垂直的邊，並標示直角的記號。
9	15.2	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相平行的其他邊。	<p>• 準備展開圖黏合成立體盒子兩個、三角板一付、不同顏色的粗彩色筆六枝。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.請學生找出黑板上互相平行的線，複習平行的概念。 2.請學生找出長方形中互相平行的邊。 3.形成長方形有兩雙互相平行的邊的共識。 4.請學生在長方體盒子中找出互相平行的邊。
9	15.3	<p>(1)認識空間中相交兩直線決定一平面，且可直接度量此相交兩直線所形成的角之大小。</p> <p>(2)認識一直線與一平面垂直的意義。</p> <p>(3)經驗一直線若與平面上兩直線垂直，即垂直於此平面。</p> <p>(4)討論長方體上邊和面的垂直現象。</p>	<p>• 準備厚紙板、鐵絲、三角板、盒子、彩色筆。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.請學生想想，可以被幾個厚紙板包含(一根鐵絲黏在厚紙板上轉動厚紙板)；兩根鐵絲可以被幾個厚紙板包含，以此形成兩直線決定一平面的經驗。 2.請學生在厚紙板上量出相交的兩直線的角度，再抽掉厚紙板，討論是否可以量出相交的兩直線的角度。 3.透過一鐵絲與一厚紙板互相垂直，並交於○點，請學生量量看厚紙板上通過○點的直線是否都會垂直(會)。 4.透過一鐵絲與一厚紙板不互相垂直，並交於○點，但此鐵絲會與厚紙板上某一通過○點的直線垂直，請學生量量看厚紙板上其他通過○點的直線是否都會垂直(不會)。 5.找出長方體中和指定邊互相垂直的面，並用三角板檢驗。 6.找出長方體中和指定面互相垂直的邊，並用三角

			板檢驗。
10	7	2	<p>由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 準備厚紙板、三角板、紙盒、三角柱積木。 1.讓學生藉由鐵絲垂直厚紙板以三角板一邊緊靠鐵絲來檢查的經驗，來檢驗垂直的兩平面。 2.以同樣的方式請學生檢驗不互相垂直的兩平面。 3.請學生以三角板檢驗長方體紙盒互相垂直的面。
10	7	3	<p>由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 準備紙盒、教室裡的櫃子與事先在黑板上畫好的三條互相垂直的線段。 1.討論三條互相垂直的線段中，誰與誰互相垂直，誰與誰互相平行，並指出互相平行可藉由共同垂直第三邊來檢驗。 2.再以桌子為例，檢驗桌腳與地板是否垂直，桌腳之間是否平行，桌面與地板是否平行。 3.拿出紙盒以同樣的方式討論互相平行的面。
10	7	4	<p>由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 準備三支長棍棒、一張厚紙板、紙盒與彩色筆。 1.教師以三支長棍棒表示單槓，讓學生用三角板檢互相垂直的部分。 2.引出橫杆與地面互平行的現象，形成「面和直線互相平行」的共識。 3.在紙盒上以同樣的方式檢驗邊與面的平行關係。

(二) 柱體與錐體的結構

由空間中兩個全等且平行的封閉平面區域及在全等對應關係下，連接這兩個區域的對應點之所有直線所成的集合稱為柱體。其中的兩個全等且平行的封閉平面區域，成為柱體的底，底以外的其餘表面成為柱體的側面。柱體一般以其底面的形狀來命名。若其底為多邊形則稱為角柱；若其底為圓形，則成為圓柱。

給定空間中的一個封閉的平面區域及不在此平面區域上的一點，則連接此給定點與平面區域上的任意點的所有線段的聯集稱為錐體。決定此錐體的平面區域稱為錐體的底，不在底上而決定此錐體的給定點，一般稱為錐體的頂點，底以外的錐體表面稱為側面。

1.角柱

一般角柱的側面為平行四邊形，若角柱的側面為長方形，這種角柱稱為直角柱。在小學階段探討的對象一般以直角柱為主，故皆以「角柱」來稱呼。下面為直角柱的一些通性：

- 底為全等的多邊形區域。
- 底面互相平行。
- 側面是長方形。
- 側邊等長。
- 側邊和底面互相垂直。
- 側邊互相平行。

2.角錐

底為多邊形的錐體。角錐中，不在底上的頂點與底的頂點之連線段稱為側邊。角錐的側面皆為三角形。角錐一般以其底的形狀分別命名：底為三角形者，稱為三角錐；底為四邊形者稱四角錐，依此類推。角錐有下列共同性質：

- 側邊為三角形。
- 側邊皆相交於同一頂點。

3.圓柱

底面為圓形區域的柱體；數學上又可如下定義：在空間中給定一直線段，則空間中所有與此直線段等距離的點的聯集稱為圓柱面（側面），圓柱面和其內部聯集稱為圓柱體。圓柱體的周圍為曲線，故其側面為曲面。圓柱的底半徑簡稱為圓柱的半徑。

當圓柱體的兩底之圓心連接線段和底面互相垂直時，稱此種圓柱為直圓柱。在小學教材中皆以直圓柱為討論對象，所以皆以圓柱稱呼。下面為圓柱的一些通性：

- 底面為全等的圓形區域。

- 底面互相平行。
- 兩底圓心之連接線段和底面互相垂直。

4.圓錐

底為圓形的錐體。圓錐的底半徑簡稱為圓錐的半徑。若過圓錐的頂點向底所做的垂直線通過底的圓心，此種圓錐稱為直圓錐。本課程在圓錐體部分的討論，並不特別限制在特殊的錐體，僅探討一般錐體的通性，因此皆以圓錐稱呼。

高年級階段學童的幾何思考能力大都已進入 **Van Hiele** 的分析層次，在五年級探討長方體及正方體結構關係，角柱的結構和長方體有不少相似之處，六年級時仿照分析長方體結構的模式，引導學童探討各種形狀的（直）角柱之構成要素間的關係。此時的學童已有鑑別較有效率的解題策略的能力，並能進行簡單的推論。因此，可視學童反應狀況規劃討論的程序，如（1）引導一個項目的討論之後，其他項目開放給學童自行（小組）討論一個或幾個問題；（2）引導一個，開放一個的方式，依次進行。此外，在某些特質的判斷與說明時，可期待學童先嘗試推論，若學童無法推論時，再暗示使用較低層次的檢驗法，以促使學童能進階到比較高級的思考層次。例如：「角柱的側面是什麼形狀？」，可先觀察學童是否能使用「側面四邊形的四個角都是直角，所以是長方形」來說明，然後要求其檢查是否正確具有直角的特性；又如：「角柱側面各邊的長度有什麼關係？」可先觀察學童能否以「側面為長方形，長方形的對邊等長」來描述。若沒有學童進行這種討論，再暗示其使用尺量各個側邊的長來判定，由於測量時，常會產生誤差，教師應允許其適當誤差程度並將其淡化處理。

角柱側面有些不平行，有些可能平行，平行性質並非角柱的通性，故在討論角柱構成要素間的關係時，不宜提問側面的平行關係。

學童對長方體的高，大都有很多觀察測量的經驗，本冊中對於柱體的高，不先加以定義，而採取先觀察學童認知狀況，需要時再加以引導的原則，若學童無法自行認識兩底間的距離為高，則可引導其回憶兩平行線間的距離概念，再討論兩平行面間的距離。

在討論角錐「頂點、邊和面的個數」、「側面的形狀為三角形」和「側面共同

的頂點為尖頂」的性質時，若學生提出為何不點數圓錐的頂點、邊和面的個數，或討論側面的形狀，教師可說明「我們只討論直直的邊和平平的面，而圓錐沒有直直的邊，側面是彎曲的面，所以不討論」。

5.柱體與錐體的結構之活動目標

表 3-3-2

八十二年版活動目標		核心布題
11	11 1	<p>透過由一堆立體中找出像柱子的立體的活動，認識柱體。</p> <p>• 準備圓柱、圓錐、角柱、角錐、長方體、正方體與非柱體、非錐體等的物品。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.讓學生討論為什麼用堆疊的方式造柱子。 2.請學生找出柱子的實物。 3.請學生檢查所找出的柱子是否從上到下的粗細都一樣、上下面是否互相平行、側面的形狀為何。 4.對柱體的命名活動，以底面形狀為主。 5.區分直角柱與斜角柱的不同在於側面是否垂直底面。
11	11 2	<p>透過由一堆立體中找出像尖頂的立體的活動，認識錐體。</p> <p>• 準備各種立體形體的實物，與立體模型。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.討論骨架的構造。 2.討論四角錐的底面與頂點，命名錐體。 3.討論錐體的命名是以底面形狀為主。 4.介紹底面是圓形的錐體是圓錐。
11	11 3	<p>透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數、底面全等、側面為長方形、側邊一樣長且垂直於底面、底面互相平行、側邊互相平行。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.柱體上下兩面叫做底面、周圍其餘的面叫做側面、兩相連在一起的側面的共用邊叫做側邊。 2.討論長方體的性質(頂點數、邊數、面數、全等的面、等長的邊、垂直平行關係)。 3.討論角柱的性質(頂點數、邊數、面數、全等的面、等長的邊、垂直平行關係)。 4.討論上下底面的形狀和大小並推至全等關係。 5.討論頂點數及數法；討論邊數及數法；討論面數及數法。

			<p>6.側面是什麼形狀？你怎麼知道是長方形？</p> <p>7.側邊的長度一樣長嗎？你怎麼知道的？</p> <p>8.側邊和底面互相垂直嗎？你怎麼知道的？</p> <p>9.兩個底面互相平行嗎？你怎麼知道的？</p> <p>10.分組討論一種角柱的特性並上台報告。</p> <p>11.(綜合學生發表的特性)比較看看角柱有共同的特性嗎？</p>
11	11	4	<p>透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等、底面互相平行。</p> <p>1.討論圓柱體的性質(上下底的形狀、大小和關係，兩底面是否互相平行)。</p> <p>2.討論上下底面的形狀和大小並推至全等關係。</p> <p>3.討論兩底面是否互相平行。</p> <p>4.討論不同圓柱的性質。</p> <p>5.(綜合學生發表的特性)比較看看圓柱有共同的特性嗎？</p>
11	11	5	<p>透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數、側面的形狀為三角形和側面共同的頂點為尖頂的性質。</p> <p>1.討論角錐的性質(底面的形狀、頂點數、邊數、面數、側面的形狀、側面共同的頂點位置)。</p> <p>2.討論頂點數、邊數、面數及數法。</p> <p>3.討論側面的形狀。</p> <p>4.討論側面共同的頂點在哪裡。</p> <p>5.(綜合學生發表的特性)比較看看角錐有共同的特性嗎？</p>

(三) 由構成要素定義的基本形體

1. 三角形的構成要素與活動目標

表 3-3-3

八十二年版活動目標			核心布題
5	6	1	<p>• 準備大小不等的三角形、正方形、長方形圖卡及每生白紙一張。</p> <p>1.請學生從一堆圖形中，找出三角形並進行描繪活動。</p> <p>2.請學生說說看，描或畫的時候，畫了哪些東西。</p>

				3.針對畫的線、相接的點、尖尖的地方進行命名。
5	6	2	透過複製三角形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備白紙、直尺、三角板。 請學生依序將三角板的邊、角、頂點，分別描下來，並問學生是否每一部分，都畫出來了。

2.四邊形的構成要素與活動目標

在不同階段我們有不同描述平行四邊形的方式，在了解構成要素並探索其關係時，我們對平行四邊形的定義採用「兩雙對邊互相平行」的性質，因為它與平行四邊形的名字最符合。

若以竹籤製作平行四邊形而論，則「兩雙對邊分別等長」的性質最適合。因此為了避免困擾，本課程先定義平行四邊形，並順勢定義其他特殊四邊形，再進行以竹籤製作各種特殊的四邊形後加以分類的活動。

在三年級，兒童已注意到多邊形的構成要素：邊和角的特徵；並進一步以正方形和長方形上的角形，引出直角概念。按照 Van Hiele 的幾何認知發展理論，此時期的兒童正處於由視覺期過渡到分析期的階段，學童經由觀察與實驗開始辨認圖形的特徵，可從完整的圖形來辨認部分的要素。

學生在一年級上學期認識簡單平面圖形時，係以圖形的整體感覺作為辨認及稱呼的依據。因此正方形和長方形的印象是很不相同的。到了四年級，要求學生改口說正方形是長方形的一種，並不容易。所以此時的教學較有彈性，不以包含關係作為教學的目標。但要求學生面對一個正方形的圖形時，強調它有「四個直角」的肯定回答，而不要求學生一定要接受正方形是長方形的一種。對於四邊形的包含關係，因學童的幾何認知發展不容易了解性質之間的推導關係，因此在小學階段，並不強調包含關係，只是做了前置的準備。

表 3-3-4

八十二年版活動目標				核心布題
5	6	3	透過描繪活動，認識四邊形的邊、頂點及角。	<ul style="list-style-type: none"> • 準備白紙、三角形圖卡、剪刀。 1.請學生用剪刀將三角形圖卡，剪去一個角。 2.將剪出來不是三角形的圖卡，描繪下來，並問學

			生描了哪些東西。 請學生說說看，邊、頂點、角各有幾個。
5	6	4	進行四邊形的命名活動。 • 準備一些不同的四邊形圖卡。 1. 請學生說說看，這些圖卡有什麼相同的地方。 2. 你們想為這些圖形，取什麼名字呢？
5	6	5	透過複製四邊形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。 • 準備四邊形圖卡、直尺和白紙。 1. 請學生依邊、頂點、角分別將四邊形圖卡，描繪下來。 2. 請學生說說看、是否每一個邊、角、頂點都描下來了。
6	7	2	透過描述「由一堆長方形圖卡拼湊以圍成一長方體紙盒」的活動過程，在討論中突顯長方體有 6 個面、12 條邊。 1. 用習作附件的長方形圖卡嘗試拼排長方體紙盒並討論。 2. 讓學生說出長方體紙盒的製作過程（重點在說出選用三種長方形的圖卡，每一種用了 2 張；圖卡相接的邊一樣長）。 3. 指認長方體的面並說出面的個數，找出長方形中全等的面並塗上相同的顏色。 4. 數出長方體盒子上有幾條邊。 5. 將長方體紙盒剪開成展開圖（剪開的展開圖必須能攤平在桌上，並保持完整仍連成一整片）。最後將展開圖再摺回成一個盒子。
6	9	2	1. 從比較三角板的角認識直角。 2. 認識直角三角形。 • 準備三角板一付、紙摺的直角。 1. 比比看，一付三角板中有沒有一樣大的角，這樣一樣大的角叫做直角。 2. 用三角板的直角，找找看哪裡有直角？ 3. 像這樣有直角的三角形，可以叫做什麼三角形？
6	9	3	(1) 知道正方形、長方形有四個直角。 (2) 透過複製直角活動，經驗垂直的意義。 (3) 用紙摺出直角。 • 準備四邊形圖形、三角板和紙摺的直角。 1. 檢查看看，四邊形圖卡哪裡有直角？正方形和長方形有幾個直角呢？ 2. 怎樣在某一條線上畫出直角？

			3.怎樣用紙摺出直角？
6	9	4	<p>(1)從四邊形的邊中，找出垂直的邊。</p> <p>(2)從垂直同一個邊的兩個邊，經驗平行的意義。</p>
			<p>• 準備四邊形圖卡、三角板和紙摺的直角。</p> <p>1.說說看，圖形中垂直於*邊的有哪些邊，你怎麼知道的？</p> <p>2.找找看，長方形中有哪兩個邊同時垂直於另一邊？這兩個邊有什麼關係？</p> <p>3.找找看，四邊形圖卡中哪裡有平行的邊呢？你怎麼知道的？</p>
7	9	1	<p>認識平行四邊形和梯形，並加以命名。</p>
			<p>• 準備四邊形圖卡（包括平行邊及非平行邊）。</p> <p>1.檢查四邊形中，哪些圖形中有互相平行的邊，並做記號。</p> <p>2.找出有兩雙互相平行邊的圖形並嘗試命名。</p> <p>3.介紹「平行四邊形」的名稱。並嘗試命名。</p> <p>4.介紹「梯形」的名稱。</p>
7	9	2	<p>透過對稱關係製作箏形、菱形，並加以命名。</p>
			<p>• 準備菱形和箏形的圖形若干個（將每個圖形的對角線以虛線相連）。</p> <p>1.拿出一些箏形的圖卡，請學生將圖形沿著虛線對摺觀察並說出各邊的關係。</p> <p>2.根據圖形特徵，嘗試命名。</p> <p>3.介紹「箏形」的名稱。</p> <p>4.判斷「箏形」是否為對稱形。</p> <p>5.仿前述 1~4 進行「菱形」的命名活動。</p>
8	5	8	<p>將一堆三角形依據邊長或角的大小關係，加以分類並命名。</p>
			<p>依據邊的長短關係或角的大小關係，將三角形圖卡分類並命名。</p>
8	5	9	<p>(1)認識對角、對邊的概念與名詞。</p> <p>(2)經驗後察覺三角形中最大邊對最大角（或最大角對最大邊）及最小邊對最小角（或最小角對最小</p>
			<p>1.從一個三角形中認識被標記角的對邊或被標記邊的對角。</p> <p>2.找出一個三角形中最大的邊，再找出三角形中最大的角，看看最大邊與最大角的對邊與對角關係。</p> <p>3.同樣地，看看最小邊與最小角的對邊與對角關係及第二大邊與第二大角的對邊與對角關係。</p>

		邊)。	
8	5	10	<p>認識等腰三角形和正三角形的特性。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 從一個三角形中找出有相等的兩個邊，並分別檢查相等的兩個邊的對角是否一樣大。 2. 學生畫出二等邊三角形，檢查二等邊的對角是否相等。 3. 學生畫出二等角三角形，檢查二等角的對邊是否相等。 4. 將 1、2、3 中的這類三角形命名為「等腰三角形」。 5. 從一個三角形中逐一找出邊長兩兩相等，並討論邊長相等的遞移關係，再討論邊長相等時，是否可推論對角相等。 6. 將三個邊相等，三個對角也相等的三角形命名為「正三角形」。
9	11	1	<p>(1) 將一堆三~七邊形的圖卡，根據邊的個數加以分類並命名，命名為五邊形、六邊形、七邊形後，將全部命名為多邊形。</p> <p>(2) 討論給定的五（及六）邊形圖卡，檢查邊、角是否相等，由此認識正五（及六）邊形。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 準備各類多邊形圖卡、五枝等長的吸管穿線並貼上磁鐵、等角但不等邊長的五邊形。 <ol style="list-style-type: none"> 1. 請學生在一堆多邊形圖卡中找出五邊形。 2. 對各類多邊形命名，並指出唯有三角形不以邊來命名成三邊形。 3. 請學生找出正三角形、正方形、正五邊形。 4. 拿出穿線的五枝等長的吸管，與學生討論五邊均等長的五邊形一定是正五邊形嗎？ 5. 知道正五邊形的條件除了要五個邊相等外，同時五個角也要相等。
11	7	5	<p>知道線對稱圖形的對應點的連線被對稱軸垂直平分。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 準備雙面複寫紙與圖釘。 <ol style="list-style-type: none"> 1. 這個圖形本來是線對稱圖，這條虛線是對稱軸，虛線的另一部分被塗掉了，想完成這個線對稱圖，該怎麼做呢？ 2. 如果不能用對摺的方法，要怎麼完成呢？ 3. 觀察對應邊與對稱軸有什麼關係？ 4. 老師畫出兩線段互相平分，互相垂直的兩種情況，來討論「平分」與「垂直」的關係。

二、幾何物件間的關係

(一) 兩角的關係—直角與鈍角、銳角

銳角和鈍角是特殊角的角，它的特殊是因為和直角做了比較後而產生的。大於 90 度的角，稱為鈍角；小於 90 度的角稱為銳角。在教學上，除了定義銳角和鈍角外，也從實際圖形中直觀判斷鈍角、直角或銳角。這是很基本的兩角關係的探討。

(二) 圖形的對稱

從對摺疊合到對應點連線以對稱軸為垂直平分線。對摺後，被摺線分成的兩部分是完全疊合的圖形稱為線對稱圖形，這是學童可以具體操作檢驗或製作的定義，但不是平面幾何學中的定義。

當學童完成線對稱圖形後，提醒學童注意對應點連線和摺線的關係，由此引導到摺線是垂直平分線的認識。

(三) 多邊形的全等關係

在前一節中，全等概念只談全等概念中的視覺觀點的全等，透過操作來經驗全等的意義，是屬於全等的初步概念。從外觀、操作疊合來檢驗兩圖形是否全等，不從圖形的構成要素（邊長、角度）來探討全等的意義。剛開始的活動，先從觀察圖形的異同著手，後來再引入摺紙或疊合動作來說明檢驗是否為全等。

在學生了解構成要素後，比對構成要素的關係，有利於判斷全等，但是疊合法仍是判斷全等較快且有效率的方法，學生拿到兩個多邊形，可以利用有特色的要素，當作比對或疊合的線索，如以最長邊先疊合，如果不全等只要翻轉再試一次（因為只有兩面），就能判斷是否全等。

(四) 相似形與比例尺

使用直線段圖形去逼近自然畫下來或拍照下來的圖形，是自古以來的做法，即使是電腦圖像處理也是如此做的，因此放大縮小從直線段圖形進入是合理的。

將兩個直線段圖形放在觀看者眼前比較時，首先注意到的是兩者的「形似」，亦即把兩者擺成同一方向，如果「直立」對此圖形有意義，則一般會擺成直立的样子。此時便可注意上下及左右了。

本課程先以全等圖形來從舊經驗中導入點和線段的一一對應；其次利用 \sphericalangle 、 \sphericalangle 、 \square 等熟悉的符號點出頂點對應的現象，並將對應的語詞從全等對應到放大，再擴充到縮小。最後，在沒有 \sphericalangle 、 \sphericalangle 、 \square 的指引下，反過來使用對應的語詞，將兒童原本可以視覺感知的事實以語言和行動表現出來。

相似形為人類視覺感知的基礎，本課程採用影印機作為參考，未採用照片，是由於照片除遠近外，另有取景角度的問題。

比例尺是一種抽象的內涵量概念，它並不是像量長度的直尺，可以拿來直接測量實物的長短，學童必須先了解擴大(縮小)圖與原圖邊長的倍率關係後才能理解的一種「表示原物與擴大(縮小)圖擴大(縮小)的倍率關係」。因此在放大圖與縮小圖處理後，介紹比例尺概念及應用，溝通比例尺所表示的意義，並以標有比例尺及某些辦公或活動場所的學校地圖或兒童較熟悉的地區街道圖，讓兒童利用比例尺探討一些地點間的大致距離與比例尺的關係，以增進其對比例尺功能的認識與分析推理能力。

(五) 幾何物件間關係的活動目標

由表 3-3-5 可以發現，從直角、鈍角、銳角的意義開始，利用邊和角在放大、縮小時不同的特性（邊長會放大縮小，但角度不變）探討放大圖與縮圖的對應關係。

表 3-3-5

八十二年版活動目標			核心布題	
8	3	7	(1)認識銳角和鈍角。 (2)使用量角器畫出指定度數的角。	1.畫一個比直角小的角，檢驗後並命名「銳角」。 2.畫一個比直角大的角，檢驗後並命名「鈍角」。 3.直觀判斷三角形中的銳角、直角和鈍角。
9	11	2	以疊合方式檢驗兩個多邊形圖卡完全疊合後，確定此二個多邊形逐邊、逐角皆相等，由此認識兩多邊形全等時，各對應邊皆相等、各對應角皆相等。	• 準備全等的圖形卡、半透明的描圖紙。 1.請學生拿出圖形卡找出全等的圖形，並形成用邊和角均完全疊合來判斷全等圖形。 2.請學生指出全等圖形所對應的角、對應的邊與對應的頂點。

			3.用半透明的描圖紙來判斷圖形的全等與否，並介紹角的記法，例如：「 $\angle 1$ 」。
10	14	1	<p>由操作影印機的活動，經驗放大的意義，進而檢查原圖與放大圖之間的對應關係。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.連結學童日常生活中使用影印機的經驗。 2.複習全等圖形對應邊、對應角的關係，以作為檢查放大圖和原圖對應邊、對應角關係的預備經驗。 3.讓學生觀察「由數個幾何圖形所拼湊的圖」和它的「放大圖」之間各元素（幾何圖形）的對應關係。 4.讓學生利用頂點的標示符號，找出對應的頂點。 5.讓學生利用線段兩端點標示的符號，找出對應的線段，並檢查對應線段的關係。 6.讓學生利用頂點或線段兩端點標示的符號，找出對應的角，並檢查對應角之間的關係。 7.讓學生利用線段兩端點標示的符號或圖形相對的線段、角關係，找出對應的線段，並檢查對應線段的關係。 8.讓學生利用頂點的標示符號或圖形相對的線段、角關係，找出對應的角，並檢查對應角的關係。
10	14	2	<p>由操作影印機的活動，經驗縮小的意義，進而檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.讓學生觀察「由數個幾何圖形所拼湊的圖」和它的「縮小圖」之間各組成圖形的對應關係。 2.在未標示記號的圖形上，讓學生利用圖形的相對位置、線段或角的相對關係，找出對應的頂點。 3.讓學生利用線段兩端點標示的符號或圖形相對的線段、角關係，找出對應的線段，並檢查對應線段的關係。 4.讓學生利用頂點的標示符號或圖形相對的線段、角關係，找出對應的角，並檢查對應角的關係。
11	13	3	<p>把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以放大2倍，檢查原圖與放大圖之間的對應關係。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.這裡有兩張圖，乙圖是甲圖放大為2倍的放大圖，說說看和甲圖的頂點\sphericalangle點對應的是乙圖的哪一個點，和線段\sphericalangle對應的是哪一個線段，和角甲對應的角有沒有一樣大呢？ 2.如果不用影印的方法，要怎麼畫出放大2倍的圖呢？ 3.說說看，你是怎麼畫的？

			4.先在圖形上畫出格子，再畫出放大圖，說說看，為什麼可以這樣畫呢？
11	13	4	<p>自己畫格子做 2 倍放大圖，並利用與原圖同大的方格紙作 2 倍放大圖。</p> <p>1.大家想想看，如果用格子來幫忙把圖形放大 2 倍，可以怎麼做？</p> <p>2.說說看，你是怎麼畫的？你怎麼知道是放大成 2 倍，要怎麼檢查呢？</p> <p>3.有的同學的格子一下大、一下小，這樣可以嗎？檢查看看，你的格子是原來格子放大的 2 倍嗎？</p>
11	13	5	<p>(1)把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以縮小為 $1/2$ 倍，檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。</p> <p>(2)畫出 $1/2$ 倍縮小圖，並利用與原圖同大的方格紙作 $1/2$ 倍縮小圖。</p> <p>1.把甲圖用影印機縮小成 $1/2$ 倍的乙圖，格子圖的丙圖也用影印機縮小 $1/2$ 倍成丁圖，我們把甲圖和丙圖合併成戊圖，把乙圖和丁圖合併成己圖。</p> <p>2.把戊圖用影印機縮小 $1/2$ 成為庚圖，比較庚圖和己圖，想一想，他們兩個圖形全等嗎？</p> <p>3.如果我們用格子把圖形縮小 $1/2$ 倍，可以怎麼做呢？</p> <p>說說看，你是怎麼知道這個方格圖是縮小成 $1/2$ 倍呢？</p> <p>4.想想看，你要怎麼在縮小的方格紙上，標出對應的縮小圖呢？</p>
11	13	6	<p>在製作放大(縮小)圖之後，知道原圖是放大(縮小)圖的縮小(放大)圖。</p> <p>1.請你畫出甲圖的 2 倍放大圖(乙圖)，檢查看看，你所畫的乙圖是不是甲圖的 2 倍？</p> <p>2.請你畫出乙圖的縮小 $1/2$ 倍的圖，稱為丙圖，檢查看看，你畫的對不對？</p> <p>3.檢查看看，甲圖和丙圖是否全等呢？</p> <p>4.以乙圖為基準，可以怎麼說甲圖和乙圖的關係呢？</p>
12	12	1	<p>認識邊長關係的比例尺，並運用於地圖的閱讀。</p> <p>• 配合課本的放大圖準備街道地圖、室內平面圖、投影機以及圓規、直尺、計算機。</p> <p>1.讓學生在地圖上找出特定的符號並討論其意義。</p> <p>2.讓學生在地圖上找出往目的地的不同路線。並嘗試設計旅遊路線圖。</p> <p>3.討論比例尺的意義與地圖上的長度與實際長度的</p>

	關係。 4.能用比例尺算出指定的實際地面直線距離。
--	------------------------------

三、從實測到推論再到局部體系之建立

(一) 從實測到推論到局部體系的建立

兒童在了解圖形內在屬性關係及各圖形間的包含關係後，已漸次發展簡單推理，例如：利用三角形內角和來推求長方形及四邊形的內角和；利用對稱點連線被對稱軸垂直平分的關係，完成線對稱圖形或判斷該指定直線是否為此圖形的對稱軸。

(二) 從實測到推論到局部體系的建立活動目標

由表 3-3-6 可知，小學階段學習的幾何局部推理有「三角形內角和為 180 度」；以及「多邊形內角和的推理」；與「找出線對稱的對稱軸，或完成線對稱圖形」。

表 3-3-6

八十二年版活動目標		核心布題
11	7 2	<p>(1)利用長方形的切割，推知直角三角形的內角和是 180 度。</p> <p>(2)由拼湊一般三角形的角，測量檢驗一般三角形的三個角的角度和。</p> <p>(3)把一個三角形分成兩個直角三角形，推知這個三角形的內角和。</p>
		<p>• 準備長方形圖卡、量角器、剪刀、色筆。</p> <p>1.用量角器量出長方形的四個角，並算出四個角合起來是幾度？</p> <p>2.沿著長方形的虛線(對角線)剪開，這兩個三角形全不全等？一個直角三角形的三內角合起來是多少度呢？</p> <p>3.把三角形的三個角剪下來拼成一個角，這個角看起來平平的，我們怎麼稱呼它呢？</p> <p>4.把一個三角形分成兩個直角三角形的方法，算出原來三角形的三個角合起來是多少度呢？</p>
11	7 3	<p>透過「將一個四邊形分成兩個三角形」與「三角形的內角和是 180 度」，求出四邊形的內角和。</p>
		<p>有什麼辦法可以不用量角器量，就能知道四邊形的四個內角和呢？</p>
11	7 6	<p>能利用對稱點連線被對稱軸垂直平分的關係，完成線</p>
		<p>• 準備線對稱圖形的一部分的圖卡。</p> <p>1.用直尺與三角板，利用「對應點的連線垂直平分</p>

		對稱圖形。	對稱軸」的關係做出線對稱圖形的另一部分。 2.想想看，為什麼這樣畫，找出來的點會和原來的點疊合呢？
11	7	7 能透過圖形中指定直線兩邊的對應點的連線，是否被指定直線垂直平分的關係，判斷該指定直線是否為此圖形的對稱軸。	1.有哪些方法可以檢查，這條虛線是不是這個線對稱圖形的對稱軸呢？ 2.為什麼可以這樣檢查呢？。

附件一 圖形與空間教學活動設計示例

示例一、「對稱圖形」教學活動設計

活動 11-7-4：透過剪紙(複寫或壓印)製造線對稱圖形，並對上述的製造活動進行反思，察覺摺痕兩邊的圖形摺疊後會重合，即全等。

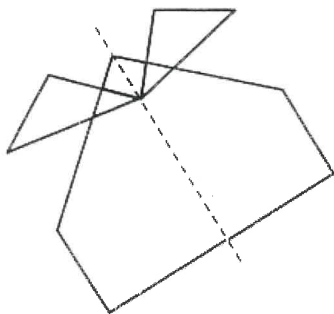
預備經驗：

- 1.透過摺紙和剪紙的活動，經驗對稱現象。(第三冊第八單元活動 7、8)
- 2.以疊合方式經驗兩多邊形全等時，各對應邊皆相等，各對應角皆相等。(第九冊第十一單元活動 2)

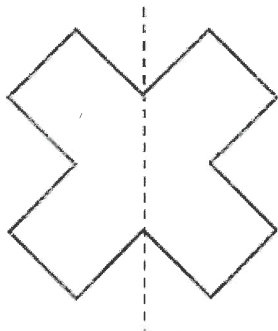
情境布置：

- 1.每位學生一張色紙、複寫紙和一把剪刀。
- 2.上課前，請學生先將習作附件 4 取下來。教師準備放大的附件 4 以便演示。

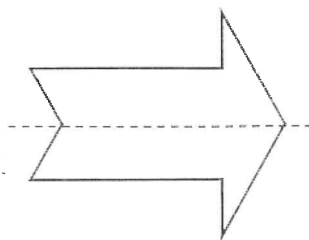
(1)



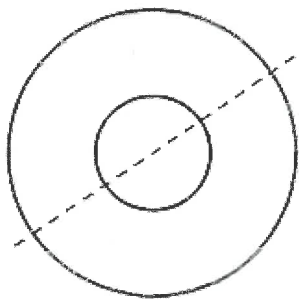
(2)



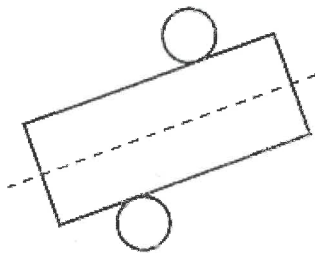
(3)



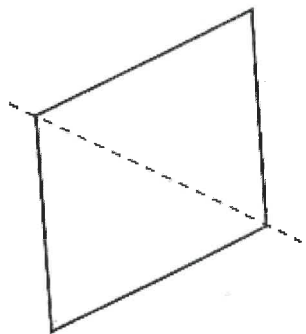
(3)



(4)



(5)



主要問題與活動	說明	評量重點
<p>(分給每位學生一張色紙)</p> <p>1.每個人都有一張色紙，先把色紙對摺。</p> <p>從摺的這邊開始畫，畫出你想要剪的圖形。</p> <p>2.拿出剪刀，照著你畫的圖形剪。</p> <p>3.XXX，把你剪好的色紙拿出來給大家看。</p> <p>4.剪好的圖形中間都有一條線，這一條線是剛才摺的線。比比看，摺線兩邊的圖形有什麼關係？</p> <p>5.這種圖形中間有一條摺線，摺線兩邊的圖形疊合以後，會處處疊合全等，這種圖形稱為「線對稱圖形」，這條摺線稱為「對稱軸」。</p> <p>6.拿出習作附件 4，沿著虛線對摺，檢查看看，哪些圖形對摺後會處處疊合全等？ 哪些圖形是線對稱圖形？</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 教師行間巡視，看學生是否從摺線處開始畫，或圖形是否太複雜或圖形內還有圖形，則要請該生重畫。 • 教師選擇數位學生的作品給大家看。 • 學生可能的說法如下： <ul style="list-style-type: none"> (1)照著摺線對摺以後，兩邊的圖形會處處疊合(全等)。 (2)摺線兩邊的圖形左右相反。 (3)摺線兩邊的圖形一樣大。 (4)其他。 • 在此期望學生能說出類似「處處疊合」或「全等」的語詞，若沒有學生提出，請教師自行提出說明。 • 教師板書「線對稱圖形」和「對稱軸」。 • 二年級時稱為「對稱圖形」，若有學生提起，教師可補充說明「線對稱圖形」比較清楚。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能將色紙對摺，並畫出圖形。 • 能照畫出的圖形剪。 • 能說出摺線兩邊圖形的關係。 • 認識「線對稱圖形」和「對稱軸」的意義。 • 能回答哪些圖形對摺後會處處疊合，哪些圖形是線對稱圖形。

活動 11-7-5：給定一圖形，透過對摺的方式檢驗是否為線對稱圖形。

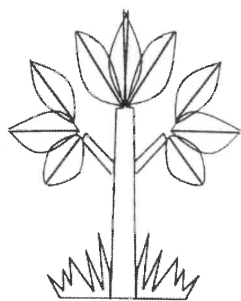
預備經驗：

透過剪紙(複寫或壓印)製造線對稱圖形，並對上述的製造活動進行反思，察覺摺痕兩邊的圖形摺疊後會重合，即全等。(本單元活動 4)

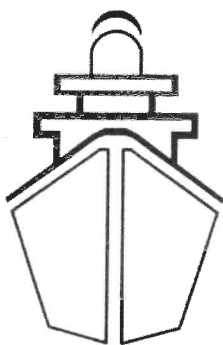
情境布置：

上課前，請學生先將習作附件 5、6 取下來。教師準備放大的附件 5、6 以便演示。

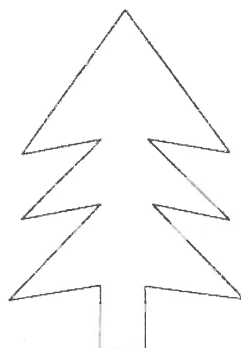
甲



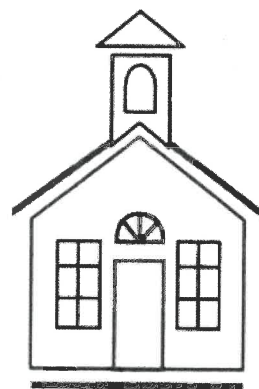
乙



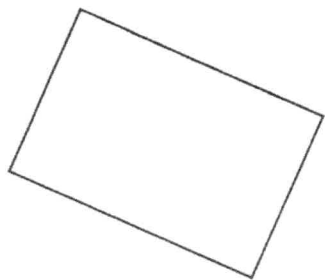
丙



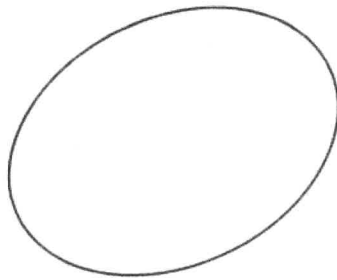
丁



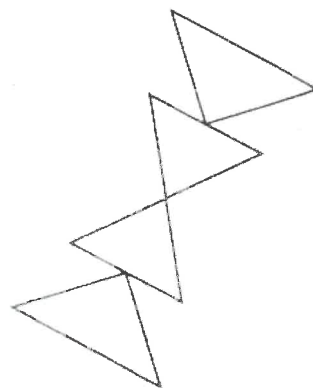
(1)



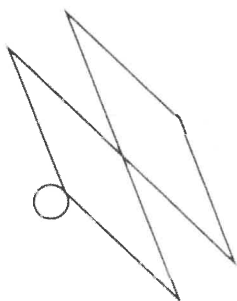
(2)



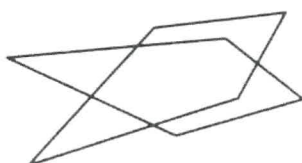
(3)



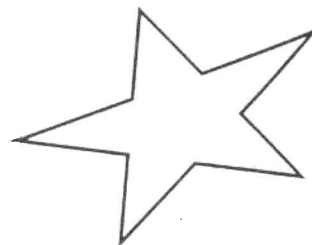
(4)



(5)



(6)



主要問題與活動	說明	評量重點
1. 拿出習作附件 5，對摺檢查看看，哪些圖形是線對稱圖形？	<ul style="list-style-type: none"> • 本活動的圖形沒有給定對稱軸，學生必須自行選擇對稱軸，如果學生有困難，教師宜適時給予指導。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能對摺檢查圖形是否為線對稱圖形。
2. XXX，說說看，甲圖是線對稱圖形嗎？ 你怎麼知道的？	<ul style="list-style-type: none"> • 學生可能的說法如下： <ol style="list-style-type: none"> (1) 因為對摺後，摺線兩邊的圖形全等。 (2) 因為對摺以後兩邊的圖形會處處疊合。 (3) 其他。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能說出是否為線對稱圖形及理由。
3. 甲圖是線對稱圖形，它的對稱軸在哪裡？	<ul style="list-style-type: none"> • 學生可能的說法如下： <ol style="list-style-type: none"> (1) 對稱軸就是中間這條摺線。 (2) 其他。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能指出對稱軸。
4. 乙圖是線對稱圖形嗎？ 你怎麼知道的？ 丙圖呢？ 丁圖呢？	<ul style="list-style-type: none"> • 仿主要問題 2 的方式進行討論，若不是線對稱圖形則追問「哪裡沒有疊合？」，若是線對稱圖形則追問「對稱軸在哪裡？」。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能說出是否為線對稱圖形及理由。
5. 拿出習作附件 6。 對摺檢查看看，哪些圖形是線對稱圖形？ 它的對稱軸在哪裡？	<ul style="list-style-type: none"> • 有些圖形的對稱軸不只一條，學生只要能找出一條對稱軸即可。 • 教師可要求全班窮盡所有對稱軸。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能對摺檢查是否為線對稱圖形。 • 能指出線對稱圖形的對稱軸。

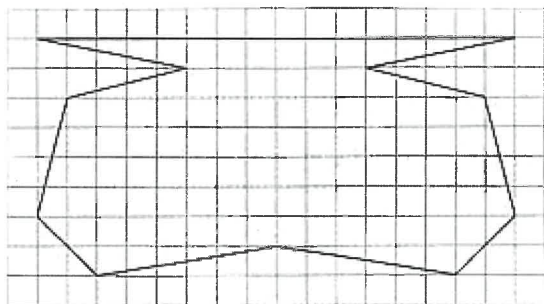
活動 11-7-6：檢驗畫在方格紙上的圖形是否為線對稱圖形，並指出對稱軸兩邊互相對應的頂點、邊和角。

預備經驗：

1. 給定一圖形，透過對摺的方式檢驗是否為線對稱圖形。(本單元活動 5)
2. 由操作影印機的活動，經驗放大或縮小的意義，進而檢查原圖與放大圖或縮小圖之間的對應關係。(第十冊第十四單元活動 1、2)

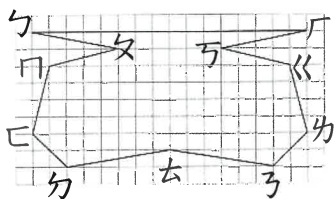
情境布置：

上課前，請學生先將習作附件 7 取下來。教師準備放大的附件 7 和簽字筆以便演示。



主要問題與活動	說明	評量重點
1. 拿出習作附件 7，甲圖畫在方格紙上，檢查看看，甲圖是線對稱圖形嗎？ 你怎麼知道的？	<ul style="list-style-type: none"> • 學生必須要對摺檢查。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能對摺檢查，並說出怎麼知道。
2. 這條摺線稱做什麼？ 對稱軸分成的左右兩半是全等的圖形嗎？ 你怎麼知道的？	<ul style="list-style-type: none"> • 請教師標出對稱軸的位置。 • 學生可能的說法如下： (1) 對稱軸兩邊的圖形對摺後，會完全疊合，所以全等。 (2) 其他。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能說出對稱軸。 • 能說出是全等圖形及理由。

3.對稱軸兩邊的圖形互相全等，所以兩邊的圖形會互相對應。為了方便討論，所有的頂點都要標上編號。說說看，要怎麼標呢？



4.ㄅ點對應的頂點是哪一個？

你怎麼知道的？

5.ㄆ點對應的頂點是哪一個？

你怎麼知道的？

ㄇ點呢？...

ㄏ點正好在對稱軸上，對應的頂點是哪一個？

6.我們說ㄅ點和ㄆ點是「對應點」，ㄆ點和ㄅ點也是對應點...

7.邊ㄅㄆ對應的邊是哪一個？

• 學生可能的說法如下：

(1)照順序標上甲乙丁... (ㄅㄆㄇ...或ABC...)

(2)其他。

• 請教師讓全班建立頂點編號方式的共識，並依照建立的共識，將圖形的頂點標上編號。此處以ㄅㄆㄇ...為例。

• 教師也可要求全班的學生像老師一樣加上編號，以便討論。

• 學生可能的說法如下：

(1)因為ㄅ點和ㄆ點都在同一條線上，離對稱軸都是8格。

(2)因為ㄅ點和ㄆ點沿著對稱軸對摺後會剛好重合。

(3)其他。

• 教師板書「對應點」。

• 學生可能的說法如下：

(1)因為ㄅ點的對應點是ㄆ

• 能說出頂點編號的方式，並建立編號方式的共識。

• 能指出對應點，並說明理由。

• 能指出對應點，並說明理由。

• 能認識「對應點」的意義。

• 能指出對應邊，並說明理由。

<p>你怎麼知道的？</p>	<p>點，\sphericalangle點的對應點是\sphericalangle點，所以邊\sphericalangle對應的邊是邊\sphericalangle。</p> <p>(2)因為邊\sphericalangle沿著對稱軸對摺後，會和邊\sphericalangle剛好重合。</p> <p>(3)其他。</p>	
<p>8.邊\sphericalangle對應的邊是哪一個？你怎麼知道的？邊\sphericalangle呢？…</p>		<ul style="list-style-type: none"> • 能指出對應邊，並說明理由。
<p>9.我們說邊\sphericalangle和邊\sphericalangle是「對應邊」，邊\sphericalangle和邊\sphericalangle也是對應邊…。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 教師板書「對應邊」。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能認識「對應邊」的意義。
<p>10.\sphericalangle角對應的角是哪一個角？你怎麼知道的？</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 學生可能的說法如下： <p>(1)因為\sphericalangle點的對應點是\sphericalangle點，所以角\sphericalangle對應的角是角\sphericalangle。</p> <p>(2)因為角\sphericalangle和角\sphericalangle沿著對稱軸對摺後會剛好重合。</p> <p>(3)其他。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 能指出對應角，並說明理由。
<p>11.角\sphericalangle對應的角是哪一個？</p>		<ul style="list-style-type: none"> • 能指出對應角，並說明理由。
<p>12.我們說角\sphericalangle和角\sphericalangle是「對應角」，角\sphericalangle和角\sphericalangle也是「對應角」…。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 教師板書「對應角」。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能認識「對應角」的意義。
<p>◎教師可多舉幾個有格子線對稱圖形，讓學生練習找對應點、對應邊和對應角。</p>		

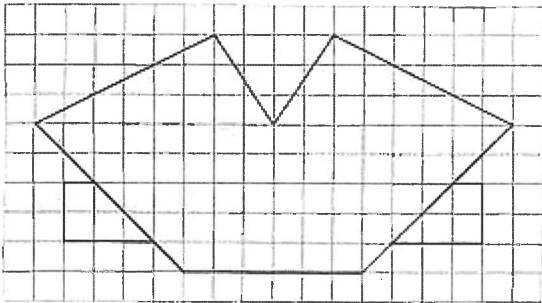
活動 11-7-7：指出嵌入方格紙上的線對稱圖形：(1)對應點之連線和對稱軸互相垂直，(2)對稱軸平分對應點之連線。

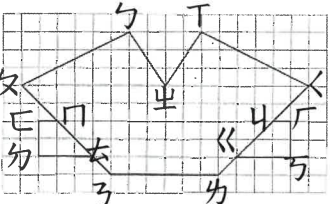
預備經驗：

檢驗畫在方格紙上的圖形是否為線對稱圖形，並指出對稱軸兩邊互相對應的頂點、邊和角。(本單元活動 6)

情境布置：

上課前，請學生先將習作附件 8 取下來。教師準備放大的附件 8 和數支不同顏色的簽字筆以便演示。



主要問題與活動	說明	評量重點
<p>1. 拿出習作附件 8，這個圖形是線對稱圖形嗎？</p> <p>2. 為了方便討論，所有的頂點都要標上編號。</p>  <p>3. ㄅ點的對應點是哪一個頂點？</p> <p>不用疊合的方法，要怎麼知道呢？</p>	<p>說明</p> <ul style="list-style-type: none"> 請教師依照建立的共識，將圖形的頂點標上編號。此處以ㄅㄅ…為例。 教師也可要求全班的學生像老師一樣加上編號，以便討論。 <p>學生可能的說法如下：</p> <p>(1) 因為ㄅ點和ㄙ點都在同一條線上，離對稱軸都是 2 格。</p> <p>(2) 其他。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 能說出是線對稱圖形，並指出對稱軸。 能指出對應頂點並說明方法。

4.把 \sphericalangle 點和它的對應點 Γ 點用直線連起來。

5.觀察看看，對應點的連線 \sphericalangle 和對稱軸有什麼關係？

6.對應點連線 \sphericalangle 和對稱軸互相垂直嗎？

你怎麼知道的？

7.對稱軸把對應點連線分成兩段，對稱軸兩邊的線一樣長嗎？

你怎麼知道的？

8.我們說對稱軸平分對應點連線 $\sphericalangle\Gamma$ 。

9. \sphericalangle 點的對應點是哪一個頂點？

不用疊合的方法，要怎麼知道道呢？

把 \sphericalangle 點和對應點連起來。

10.對應點的連線 $\sphericalangle\Gamma$ 和對稱軸互相垂直嗎？

對稱軸平分了對應點連線 $\sphericalangle\Gamma$ 嗎？

• 學生嘗試回答即可。

• 學生可能的說法如下：

(1)我用三角板來量。

(2)線 $\sphericalangle\Gamma$ 和對稱軸剛好都在正方形格子相鄰的邊上，這兩條線剛好成直角，所以互相垂直。

(3)其它。

• 學生可能的說法如下：

(1)我用尺來量。

(2)每個格子都一樣大，我數格子兩邊一樣多格，所以一樣長。

(3)其他。

• 能將對應點連起來。

• 能嘗試說出對應點連線和對稱軸的關係。

• 能回答互相垂直並說明理由。

• 能說出一樣長並說明理由。

• 能知道對稱軸平分對應點連線 $\sphericalangle\Gamma$ 的意義。

• 能找出對應點並連起來。

• 能說出垂直和平分。

◎教師可多舉幾個頂點，讓學生討論對應點連線和對稱軸「垂直和平分」的關係。

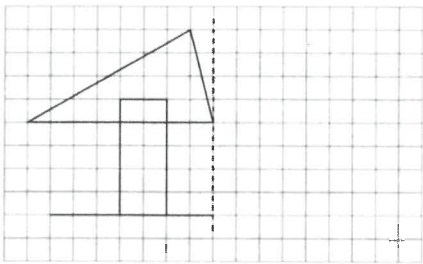
活動 11-7-8：在方格紙上畫出線對稱圖形。

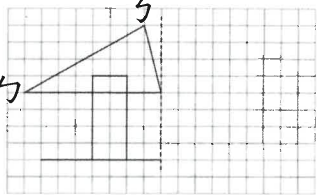
預備經驗：

指出嵌入方格紙上的線對稱圖形(1)對應點之連線和對稱軸互相垂直，(2)對稱軸平分對應點之連線。(本單元活動 7)

情境布置：

習作甲本第 38 頁。教師準備放大的習作上的圖和簽字筆，以便討論。



主要問題與活動	說明	評量重點
<p>1. 翻開習作甲本第 38 頁。這個格子圖上有一個線對稱圖形，虛線是它的對稱軸，可是這個線對稱圖形有部分的圖形不見了，請你把它完成。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 請學生試試看，教師行間巡視，若發現學生不會畫，則先討論畫法，討論內容為： <ol style="list-style-type: none"> 必須先找出所有頂點的對應點的位置。 將對應點連起來，畫出所有對應邊。 	<ul style="list-style-type: none"> 能嘗試完成線對稱圖形。
<p>2. 為了方便討論，老師把頂點都標上編號。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> 請教師依照建立的共識，將圖形的頂點標上編號。此處以ㄅㄟ... 教師也可要求全班的學生像老師一樣加上編號，以便討論。 	
<p>3. 說說看，你怎麼畫的？</p>	<ul style="list-style-type: none"> 學生可能的說法如下： <ol style="list-style-type: none"> 我先找出ㄅ點和ㄟ點的對應點，再把這兩個對應點連起來，... 	<ul style="list-style-type: none"> 能說明畫法。

(2)其他。

- 教師可追問學生怎麼知道對應點在這在裡。

示例二、「放大圖與縮小圖」教學活動設計

活動 11-13-3：把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以放大 2 倍，檢查原圖與放大圖之間的對應關係。

預備經驗：

由操作影印機的活動，經驗放大的意義，進而檢查原圖與放大圖之間的對應關係。(第十冊第十四單元活動 1)

情境布置：

1. 教師將習作附件中本活動用到的圖卡放大做成投影片，以供展示用。
2. 將附件 28、29 的乙圖和丁圖的合併圖形影印後製成投影片，以供展示用。(見主要問題 16~17)

注意事項：

教師應與學生溝通清楚：圖上頂點的名稱不是圖形的一部分，僅為清楚溝通之用。

本活動流程摘要如下：

檢查原圖(甲圖)與放大圖(乙圖)之間的對應關係(此為第十冊第十四單元放大縮小的複習活動)：主要問題 1~7



提出「不用影印機時，如何畫出 2 倍放大圖」的問題，並要求學生進行製作 2 倍放大圖：主要問題 8~9



提示有人利用打格子的方式來製作放大圖：主要問題 10



呈現兩張格子圖(丙圖和丁圖)，其中丁圖為丙圖的 2 倍，要求學生進行相關的檢查：主要問題 11~14



利用投影機展示甲、丙合併的圖形及乙、丁合併的圖形，並要求學生想像甲、丙合併圖形放大 2 倍後的圖形為何：主要問題 15~16

學生自行選擇標示的方式，但最後必須一致。

- 此處選擇同第十冊的 $\angle 1$ 、 $\angle 1 \dots$ 的方式。
- 教師可將甲、乙兩圖上所有對應的頂點都問完。

3. 甲圖的線段 $\angle \angle$ 對應的是乙圖的哪一條線段？
和線段 $\angle \angle$ 對應的呢？

- 指名學生回答。
- 教師可將甲、乙兩圖上所有對應的線段都問完。

• 能正確地指出甲、乙兩圖形的對應線段。

4. 甲圖的角 \angle 放大後，是乙圖的哪一個角？
甲圖的角 \angle 對應乙圖的哪一個角？

- 指名學生回答。
- 教師可將甲、乙兩圖上所有對應的角都問完。

• 能正確地指出甲、乙兩圖形的對應角。

5. 甲圖的每一條線段，在乙圖上都有一條對應的線段。
我們說乙圖是甲圖放大為2倍的放大圖，是什麼意思？

- 若學生無法回答，可以請學生針對線段及其對應線段加以逐個檢驗後，再指出放大為2倍的意義。

• 能檢查後發現乙圖的每一條線段的長度，是甲圖對應線段的2倍長。

乙圖的線段 $\angle 1$ 、 $\angle 1$ 的長是甲圖的線段 $\angle \angle$ 的2倍。

- 若學生會正確回答，則按原計畫進行。

量量看，算算看。

- 學生檢查的方法可能如下：

乙圖的線段 $\angle 1$ 、 $\angle 1$ 和甲圖的線段 $\angle \angle$ 呢？

(1) 量每條線段的長度，發現乙圖的線段對應甲圖的線段，每一線段都放大2倍。

(2) 以甲圖的線段長為單位來實測乙圖的線段，發現乙圖的線段對應甲圖的線段，每一線段都放大2倍。

(3) 其他。

- 教師宜提出乙圖的各線段以及甲圖和它對應的線段，讓學生檢查乙圖的每一條線段都是甲圖上對應線段的2倍長。

<p>6.甲圖的每一個角，在乙圖上都有一個對應的角。</p> <p>乙圖上每一個角和甲圖上的對應角，有沒有一樣大？檢查看看。</p> <p>7.把甲圖用影印機放大成乙圖之後，乙圖的每一條線段都是甲圖上對應線段的2倍，而乙圖的每一個角和甲圖上的對應角相等，我們就說「乙圖是甲圖放大為2倍的放大圖」。</p>	<p>• 學生檢查的方法可能如下：</p> <p>(1)把對應的角疊合比較，發現對應的角都一樣大。</p> <p>(2)用量角器量一量，發現對應的角都一樣大。</p> <p>(3)其他。</p>	<p>• 能檢查後發現乙圖的每一個角和甲圖對應的角相等。</p>
<p>8.想想看，如果不用影印機，要怎麼畫出2倍放大圖？</p> <p>9.試試看，請你畫出一個甲圖的2倍放大圖。</p> <p>說說看，你是怎麼畫的？</p>	<p>• 學生可能的回答為：</p> <p>(1)根據「對應的線段放大2倍、對應角不變」的原則，利用尺和量角器來畫。</p> <p>(2)先畫出其中一條對應線段的2倍，再畫出第二條，把這些放大2倍的對應線段組合起來。(零件組合法)</p> <p>(3)其他。</p> <p>• 在此試畫的目的主要在於讓學生體會利用尺和量角器來畫時，可能不太容易掌握。</p> <p>• 學生可能的說法為：</p> <p>(1)先利用尺及量角器將三個邊畫出，第四個邊則利用兩個端點來連接，最後，檢查第四個邊是否為原圖形對應線段的兩倍，其構成的2個角度是否都與原對應角相等。</p> <p>(2)其他。</p>	<p>• 能回答利用尺和量角器，根據「對應線段放大2倍、對應角不變」的原則來畫。</p>

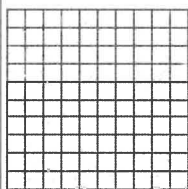
10. 有些人常常因為工作或其他需要，要畫放大圖，比如像畫電影海報看板的工作者，常常要在看板前畫出一個比海報放大好幾倍的圖來，他們在畫看板時，都是利用打格子的方式，先將原圖打上格子，後來再根據要放大的倍數，先將格子放大，再用格子來畫出原來圖形的放大圖。

- 教師說明一般人在製作放大圖時，通常會運用打上格子的方式來幫助作圖。
- 配合課本第 139 頁。

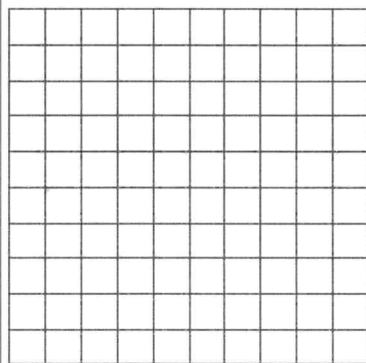
11. 現在，讓我們研究一下，打了格子會怎樣？(教師展示情境布置中的丙、丁兩張圖卡)

- 習作附件 27 的丙圖卡、附件 29 的丁圖卡如下：

丙圖卡：



丁圖卡：



12. 丙圖卡是一張格子圖，再用影印機放大成 2 倍，就成了丁圖。說說看，丙圖和丁圖上的每一個格子都是什麼形狀？

- 指名學生回答。

- 能回答是正方形。

13. 想想看，丁圖格子上的邊長是丙圖的格子邊長的幾倍？

- 指名學生回答。

- 能回答 2 倍。

14. 量量看，是不是兩倍？

15. 現在，把丙圖卡放在甲圖上，注意，讓甲圖上的每一個頂點都在丙圖的格子點上，這兩個圖合併起來，我們稱做戊圖。

再以同樣的方式，把丁圖放在乙圖上，也要讓乙圖上的每一個頂點都在丁圖的格子點上，乙、丁兩個圖合併起來，我們把他們稱為己圖。

• 指名學生回答。

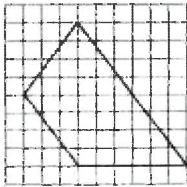
• 在本活動中，為對教師說明方便，才用戊圖、己圖來稱呼甲和丙、乙和丁合併之圖形，用庚圖來稱呼甲、丙合併之 2 倍放大圖。教師在進行主要問題 15 至 18 的教學時，只要手指出即可區別。

• 主要問題 15~18 可圖示如下：

• 能檢查後發現丁圖的格子邊長是丙圖的 2 倍。

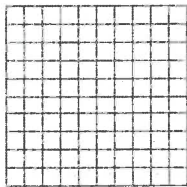
• 能正確地將丙、丁兩圖分別放在甲、乙圖上，甲、乙兩圖形對應的頂點均在格子點上。

(甲圖)



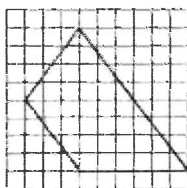
+

(丙圖)

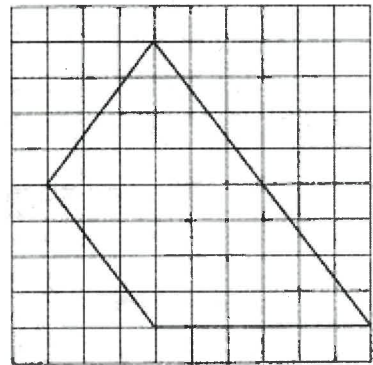


↓

(戊圖)

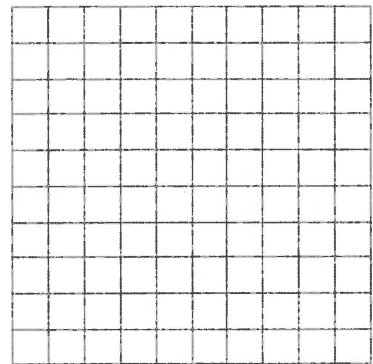


(乙圖)

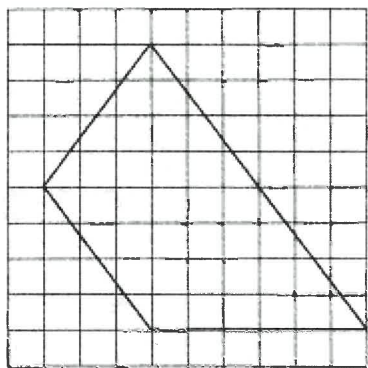


+

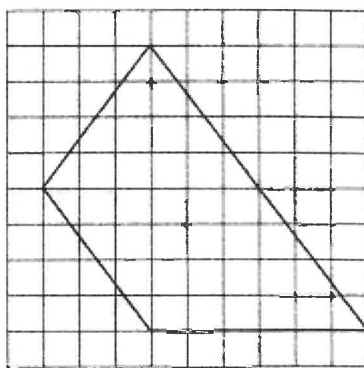
(丁圖)



(庚圖)



(己圖)



全等



16. 想想看，甲圖和丙圖合併之後再用影印機放大 2 倍，結果會怎樣？

(教師展示情境布置 2 的圖片)

17. 甲圖和丙圖合併之後，用影印機放大 2 倍，就成了庚圖，想想看，庚圖和己圖有沒有全等？

18. 我們已經知道庚圖和己圖全等，也就是說甲圖和丙圖合併之後的 2 倍放大圖(庚圖)，和丁圖及乙圖合併之後的己圖全等。

說說看，甲圖、丙圖合併之後的 2 倍放大圖和乙圖、丁圖合併之後的圖有沒有全等？

說說看，你怎麼知道的？

解題過程合理性
的討論參考模式

19. 現在，我們已經知道畫電影海報看板的工作者，怎樣

• 指名學生回答。

• 指名學生回答。

• 學生可能的回答為：

(1) 甲圖和丙圖合併成為戊圖。將戊圖放大 2 倍就成了庚圖。庚圖和己圖全等。而已圖是乙圖和丁圖合併所成的圖，所以甲圖、丙圖合併之後再放大 2 倍，和乙圖、丁圖合併之後所成的圖是全等的。

(2) 其他。

• 指名學生回答。

• 能說出應該和乙、丁合併後的圖形一樣。

• 能說出兩個圖應該全等並進行檢查。

• 能回答兩個圖全等並說明原因。

• 能說出利用打格子來畫出 2

◆ 國小數學教材分析

利用打格子的方式來畫放大圖了，可不可以請你說說看，如何利用打格子的方式來畫 2 倍放大圖呢？

(1) 先在原圖上打格子，然後在另一張紙上畫上原來格子的 2 倍圖，利用格子的放大來把圖形放大。

(2) 其他。

倍放大圖的方式。

活動 11-13-4：自己畫格子做 2 倍放大圖，並利用與原圖同大的方格紙作 2 倍放大圖。

預備經驗：

1. 由操作影印機的活動，經驗放大的意義，進而檢查原圖與放大圖之間的對應關係。(第十冊第十四單元活動 1)
2. 把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以放大 2 倍，檢查原圖與放大圖之間的對應關係。(本單元活動 3)

情境布置：

1. 教師將習作附件 27 的辛圖卡放大，以供展示用。
2. 學生每人準備一張白紙。

注意事項：

教師應與學生溝通清楚：圖上頂點的名稱不是圖形的一部分，僅為清楚溝通之用。

本活動流程摘要如下：

討論不用影印影機時如何畫出 2 倍放大圖：主要問題 2



利用原圖打格子製作放大圖形(格子需放大)的討論、實作：主要問題 3~7



利用打好的格子(其格子邊長為原來格子邊長的 2 倍)來製作放大圖：主要問題 8

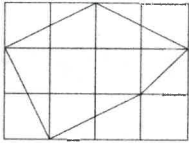


利用相同格子的方格紙製作放大圖的討論、實作：主要問題 9~12



了解如何利用相同的格子來畫出放大圖：主要問題 13

主要問題與活動	說明	評量重點
1. 請你拿出習作附件 27 上的辛圖卡。	• 習作附件 27 上的辛圖卡如下：	

<p>2.想想看，如果不用影印機，要怎麼畫出 2 倍放大圖？</p> <p>3.大家想想看，如果要用格子來幫忙把圖形放大 2 倍，可以怎麼做？</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>解題過程合理性 的討論參考模式</p> </div> <p>4.在辛圖卡上已經打上格子了，現在，請你模仿電影看板工作者的方式，也就是利用打格子的方式，在白紙上畫出一個辛圖的 2 倍放大圖來。</p> <p>5.XXX，請你到前面來展示你</p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p>• 學生可能的回答為：</p> <p>(1)根據對應的線段放大 2 倍、對應角不變的原則，利用尺和量角器來畫。</p> <p>(2)先畫出其中一條對應線段的 2 倍，再畫出第二條，…，把這些放大 2 倍的對應線段組合起來。(零件組合法)</p> <p>(3)先在原圖加上格子，然後在另一張紙上畫上原來格子的 2 倍圖，利用格子的放大來把圖形放大。</p> <p>• 學生可能回答為：</p> <p>(1)先將原圖打格子，再打一個 2 倍大的格子，格子打好後，將頂點標上去，標好之後連起來，最後把格子擦掉。</p> <p>(2)先將原圖打格子，再打一個 2 倍大的格子，格子打好後，將頂點標上去，把格子擦掉，最後把標好的頂點連起來。</p> <p>(3)其他。</p> <p>• 在此主要目的為讓學生實地經驗利用格子來將圖形放大。</p> <p>• 教師指名數個學生展示圖</p>	<p>• 能說出不用影印機時可將圖形放大的合理方法。</p> <p>• 能說出用格子把圖形放大的方法。</p> <p>• 學生實地經驗利用格子畫出一個辛圖的 2 倍放大圖。</p>
--	---	--

畫的圖。

6.說說看，你是怎麼畫的？

形。

• 學生可能的說法如下：

(1)先量出辛圖格子的長度，並且數出辛圖的長邊和寬邊各有幾個格子，然後畫出辛圖格子長度 2 倍、數量和辛圖一樣多的格子。再根據辛圖頂點的位子來畫出新的圖形的頂點，將頂點連起來，就是辛圖的 2 倍放大圖了。

(2)其他。

7.說說看，你怎麼知道是放大成 2 倍的？你要怎麼檢查？

• 學生可能的說法如下：

(1)量量看，如果新圖與辛圖每一個對應的線段都是放大 2 倍，對應的角都是一樣大的話，就是 2 倍放大圖形。

(2)先量量看，新圖的格子是否都是辛圖格子的 2 倍，再檢查看看新圖的頂點所標示的位置和辛圖相對應頂點的位置是不是一樣，如果一樣，就是 2 倍放大圖形。

8.現在，我們已經知道如何利用格子來畫出放大圖形了，但是自己要打格子似乎是比較麻煩，有些同學格子打得不太像正方形，結果畫出來的圖形就不太像 2 倍放大圖。現在請每一個人打開習作甲本第 70 頁，請利用上面的格子再畫一次辛圖的 2 倍放大圖。

在開始畫之前，請先檢查，習作甲本上的格子邊長是不是辛圖格子邊長的 2 倍？

• 學生在習作甲本的格子上進行 2 倍放大圖的製作。

• 在進行製作 2 倍放大圖之前，要提示學生檢查格子的邊長是否為原圖格子邊長的 2 倍。

• 能說明其製作的方法。

• 能合理說明檢查的方法。

• 能在已標示好的格子上畫出 2 倍放大圖。

(重新布題)

9.現在市面上有販賣方格紙，可以方便圖形製作。但是，市面上的方格紙往往都是同樣大小的，想想看，如何利用同樣大小的格子來製作一個2倍的放大圖？

想想看，你要怎麼標出第一個頂點？

• 此處讓學生有較充分的討論，並要求學生嘗試說明。

• 學生可能的說法如下：

(1)把2個格子當作1個格子。

(2)在原來的格子上重新畫格子，把2個格子的邊長當作是新格子的邊長，來打出新格子，再利用新格子來標出頂點的位置，然後把線連起來。

(3)其他。

• 若學生出現第(1)種說法時，教師應再追問：是水平方向2個格子呢？或是垂直方向2個格子。還是水平和垂直兩個方向各2個格子。

• 學生可能的說法如下：

(1)任意找一個原圖的頂點，也在空白方格紙上任意找出一個位置來標示，之後再根據對應線段的2倍來標出其他的頂點。

(2)任意找一個原圖的頂點，根據它距離右(上、下、左)框2倍的位置來標示，之後再根據對應線段的2倍來標出其他的頂點。

(3)任意找一個原圖的頂點，根據它距離右上(右下、左上、左下)框的距離，然後在空白方格紙的右上(右下、左上、左下)框距離2倍的位置來標示，之後再根據對應線段的2倍來標出其他的頂點。

(4)重新打出邊長為原格子2倍的新格子，將任意選取原

• 學生嘗試說明製作的方法。
• 能判斷別人的說法是否合理。

<p>10. 打開習作甲本第 70 頁，把第二題的圖形放大為 2 倍，畫在習作下方的空白方格紙上。</p>	<p>圖上的頂點標出，之後再標出其他的頂點。</p> <p>(5) 其他。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 能在方格紙上嘗試畫出原圖形的 2 倍放大圖。
<p>11. XXX，請你到前面來展示你所畫的 2 倍放大圖。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 指名學生上臺展示。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能展示圖形。
<p>12. 說說看，你怎麼知道是放大成 2 倍的？你要怎麼檢查？</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 學生可能的說法為： <p>(1) 量量看，如果新圖與原圖每一個對應的線段都是放大 2 倍，對應的角都一樣，就是 2 倍放大圖形。</p> <p>(2) 利用格子來數數看，如果新圖每一個線段的格子數都是原圖每一個對應線段的格子數的 2 倍，就是 2 倍圖形。</p> <p>(3) 其他。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 能合理說明檢查的方法。 • 能判斷別人的說法是否合理。
<p>13. 把你所畫的放大圖和原圖比較看看，如果要用格子來畫原圖的 2 倍放大圖，除了利用把原來的格子放大 2 倍外，還可以怎麼做？</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 學生可能的說法為： <p>(1) 直接數出原來格子的 2 倍來進行標示，就可以畫出 2 倍放大圖。</p> <p>(2) 其他。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 能說出不用放大格子的方式來將原圖放大的方法。

活動 11-13-5：(1)把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。(2)畫出 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖，並利用與原圖同大的方格紙作 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

預備經驗：

- 1.由操作影印機的活動，經驗縮小的意義，進而檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。(第十冊第十四單元活動 2)
- 2.把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以放大 2 倍，檢查原圖與放大圖之間的對應關係。(本單元活動 3)
- 3.自己畫格子作 2 倍放大圖，並利用與原圖同大小的方格紙作 2 倍放大圖。(本單元活動 4)

情境布置：

- 1.教師將習作附件中本活動用到的圖卡放大製成投影片，以供展示用。
- 2.將附件 30 的乙圖卡和丁圖卡的合併圖形影印後製成投影片，以供展示用。(見主要問題 2~4)
- 3.準備投影機。

注意事項：

教師應與學生溝通清楚：圖上頂點的名稱不是圖形的一部分，僅為清楚溝通之用。

本活動流程摘要如下：

呈現兩張圖形(甲圖及乙圖)及兩張格子圖(丙圖和丁圖)，其中乙圖為甲圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖，丁圖為丙圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖：主要問題 1



利用投影機展示甲、丙合併的圖形及乙、丁合併的圖形，並要求學生想像甲、丙合併圖形縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍後的圖形為何：主要問題 2



呈現甲、丙合併圖形縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍後的圖形，並與乙、丁合併的圖形進行全等的檢

驗，並進行結論：主要問題 3~5



討論如何利用原圖打格子來製作縮小圖形(格子需縮小)：主要問題 6



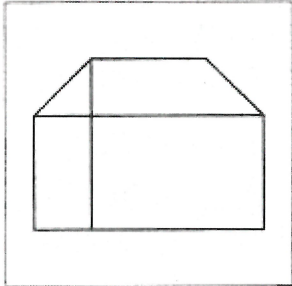
利用打好的格子(其格子邊長為原來格子邊長的 $\frac{1}{2}$ 倍)進行縮小圖的實作並檢驗：
主要問題 7~12



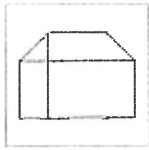
利用格子的方格紙製作縮小圖的討論、實作：主要問題 13~16



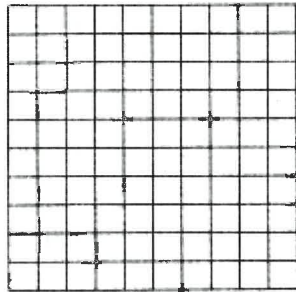
了解如何利用相同的格子來畫出縮小圖：主要問題 17

主要問題與活動	說明	評量重點
◎教師在進行本活動主要問句 1~4 時愈能模仿活動 3 的主要問句 15~18 的步驟進行，愈能讓學生經驗到縮小與放大的相似性。		
(教師展示情境布置中的甲、乙、丙、丁四張圖卡。)	<p>• 習作附件 29~31 上的甲、乙、丙、丁圖卡如下：</p> <p>甲圖卡</p> 	

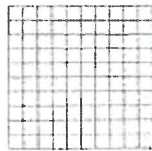
乙圖卡：



丙圖卡：



丁圖卡：



1. 甲圖用影印機縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，就成了乙圖。丙圖是一張格子圖，用影印機縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍後，就成了丁圖。

2. 現在，把丙圖卡放在甲圖上，注意，讓甲圖上的每一個頂點都在丙圖的格子點上，這兩個圖合併起來，我們稱戊圖。

再以同樣的方式，把丁圖放在乙圖上，也要讓乙圖上的每一個頂點都在丁圖的格子點上，乙、丁兩個圖合併起來，我們稱為己圖。

• 教師宣告甲、乙圖的關係以及丙、丁圖的關係。

• 在本活動中，為說明方便，才用戊圖、己圖來稱呼甲和丙、乙和丁合併之圖形，用庚圖來稱甲、丙合併之 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。教師在解說主要問題 2 至 3 時，只要手指出即可區別。

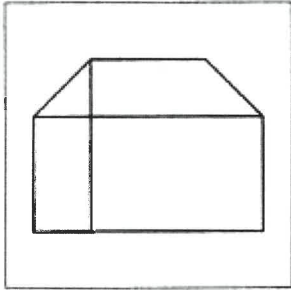
• 能正確地將丙、丁兩圖分別放在甲、乙圖上，甲、乙兩圖形對應的頂點均在格子點上。

想想看，甲圖和丙圖合併之後再用影印機縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，結果會怎樣？

- 指名學生回答。
- 主要問題 1~4 可圖示如下：

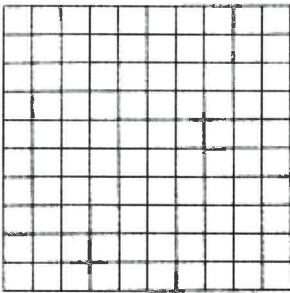
• 能說出應該和乙、丁合併的圖一樣。

(甲圖)



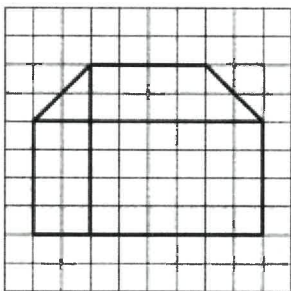
+

(丙圖)

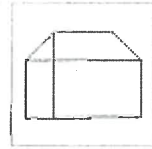


↓

(戊圖)

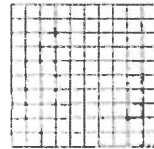


(乙圖)



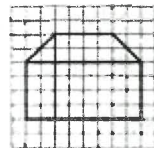
+

(丁圖)



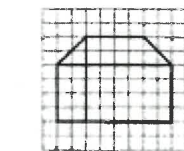
↓

(己圖)



↕全等

(庚圖)



縮小

→

(教師展示情境布置 2 的圖片)

3. 甲圖和丙圖合併之後，用影印機縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，就成了庚圖，想想看，庚圖和己圖有沒有全等？

4. 我們已經知道庚圖和己圖全等。也就是說甲圖和丙圖合併之後縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖，和丁圖和乙圖合併之後的己圖全等。說說看，甲圖、丙圖合併之後縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖，和乙圖、丁圖合併之後的圖有沒有全等？

5. 說說看，你怎麼知道的？

6. 現在大家想想看，我們如果要利用格子來把圖形縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，可以怎麼做？

- 指名學生回答。
- 同活動 3 說明 17。
- 教師可以就學生的回答情形追問下列問話：

- (1) 說說看，你要怎樣檢查？
- (2) 對應線段都一樣長嗎？
- (3) 對應角也都一樣大嗎？

- 指名學生回答。
- 學生可能的回答為：

(1) 甲圖和丙圖合併後成為戊圖。將戊圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍就成了庚圖。庚圖和己圖全等。而已圖是乙圖和丁圖合併所成的圖，所以甲圖和丙圖合併之後再縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，和乙圖及丁圖合併之後所成的圖是全等的。

(2) 其他。

- 學生可能的回答為：

(1) 先將原圖打格子，然後另外在白紙上再打一個原來格子的 $\frac{1}{2}$ 倍的格子，格子打好後，將頂點標上去，標好之後連起來，最後把格子擦掉。

(2) 先將原圖打格子，然後另外在白紙上再打一個原來格子的 $\frac{1}{2}$ 倍的格子，格子打好後，將頂點標上去，把格子擦掉。最後把標好的頂點連起來。

- 能說出兩個圖應該全等並進行檢查。

- 能回答兩個圖全等並說明原因。

- 能說出用格子把圖形縮小的方法。

(重新布題)	(3)其他。	• 能回答 $\frac{1}{2}$ 倍。
7.請打開習作甲本第71頁。習作上的甲圖卡上已經打上格子了。旁邊也有一張空白的方格紙。	• 指名學生回答。	
量量看，這張空白方格紙的格子邊長是甲圖格子邊長的幾倍？		
8.如果我們要畫一個甲圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖，可不可以用這張空白方格紙？	• 指名學生回答。	• 能回答可以。
9.請你利用這張方格紙畫出甲圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。	• 在此主要目的為讓學生直接利用製作好的方格紙進行圖形縮小的實作。	• 學生實地經驗利用格子畫出一個甲圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。
10.XXX生，請你到前面來展示你畫的圖。	• 教師指名數個學生展示圖形。	
11.說說看，你是怎麼畫的？	• 學生可能的說法如下： (1)先量出甲圖格子和空白方格紙上的格子長度，檢查看看空白方格紙上的格子邊長是不是甲圖格子邊長的 $\frac{1}{2}$ 倍。再根據甲圖頂點的位置，在空白方格紙上畫出新的圖形的頂點，最後將頂點連起來，就是甲圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖了。 (2)其他。	• 能說明其製作的方法。
12.說說看，你怎麼知道是縮小成 $\frac{1}{2}$ 倍的？你要怎麼檢查	• 學生可能的說法如下： (1)量量看，如果新圖與甲圖每一個對應的線段都是縮小	• 能合理說明檢查的方法。

?

(重新布題)

13.市面上的方格紙往往都是同樣大小的，想想看，如何利用市面上的方格紙來製作一個 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖？

解題過程合理性的討論參考模式

想想看，你要怎麼標出第一個頂點？

$\frac{1}{2}$ 倍，對應的角都是一樣大的話，就是 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖形。

(2)如果對應線段的格子數都是一樣多的話，量量看，格子長度是不是原來格子長的 $\frac{1}{2}$ 倍。

(3)其他。

• 此處讓學生有較充分的討論，並要求學生嘗試說明。

• 學生可能的說法如下：

(1)把一個格子當作 2 個格子。

(2)在原來的格子上重新畫格子，把 $\frac{1}{2}$ 個格子的邊長當作是新格子的邊長，來打出新格子，再利用新格子來標出頂點的位置，然後把線連起來。

(3)其他。

• 若學生出現第(1)種說法時，教師應再追問：是水平方向 $\frac{1}{2}$ 個格子？還是水平和垂直兩個方向都是 $\frac{1}{2}$ 個格子？

• 學生可能的說法如下：

(1)任意找一個原圖的頂點，也在空白方格紙上任意找出一個位置來標示，之後再根據對應線段的 $\frac{1}{2}$ 倍來標出其

• 學生嘗試說明製作的方法。

• 能判斷別人的說法是否合理。

• 能嘗試說明如何標示的方法。

他的頂點。

(2)任意找一個原圖頂點，根據它距離右(上、下、左)框的距離，然後在空白方格紙的右(上、下、左)框距離 $\frac{1}{2}$ 倍的位置來標示，之後再根據對應線段的 $\frac{1}{2}$ 倍來標出其他的頂點。

(3)任意找一個原圖的頂點，根據它距離右上(右下、左上、左下)框的距離，然後在空白方格紙的右上(右下、左上、左下)框距離 $\frac{1}{2}$ 倍的位置來標示，之後再根據對應線段的 $\frac{1}{2}$ 倍來標出其他的頂點。

(4)重新打出邊長為原格子 $\frac{1}{2}$ 倍的新格子，將任意選取原圖上的頂點標出，之後再標出其他的頂點。

(5)其他。

14.打開習作甲本第71頁，把乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，畫在習作下方的空白方格紙上。

想想看，你有沒有什麼困難？

15.XXX生，請你到前面來展

• 此問句的目的在於提示學生是否注意到，原圖形的某一線段為方格的奇數倍，以進行後來子活動 5-1 討論。

• 學生若尚未察覺，則直接進行製作縮小圖形的實作，待實作過程中，學生提出困難時再進行子活動 5-1 的討論。

• 指名學生到臺前展示。

• 能在與原圖相同大小格的方格紙上嘗試畫出乙圖形的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

• 能展示圖形。

示你所畫的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

16.說說看，你怎麼知道是縮小成 $\frac{1}{2}$ 倍的？你要怎麼檢查？

17.把你所畫的縮小圖和乙圖比較看看，如果要用格子來畫出乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖時，除了利用把原來的格子縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍外，還可以怎麼做？

• 學生可能的說法為：
 (1)量量看，如果新圖與乙圖每一個對應的線段都是縮小 $\frac{1}{2}$ 倍，對應的角都是一樣大的話，就是 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖形。
 (2)利用格子來數數看，如果新圖每一個線段的格子數都是乙圖每一個對應線段的格子數的 $\frac{1}{2}$ 倍，就是 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖形。
 (3)其他。

• 學生可能的說法為：
 (1)直接利用原來格子的 $\frac{1}{2}$ 倍來進行標示，就可以畫出 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。
 (2)其他。

• 能合理說明檢查的方法。
 • 能判斷別人的說法是否合理。

• 能說出不用縮小格子的方式來將原圖縮小的方法。

子活動 5-1

主要問題與活動	說明	評量重點
<p>1.乙圖上的$\sphericalangle$$\sphericalangle$邊的距離為2個格子數，現在，我們要畫出2個格子的$\frac{1}{2}$倍，那麼，兩個頂點的距離應該要怎麼標示？</p>	<p>• 指名學生回答。 • 學生可能的說法如下： (1)先標示出其中之一(如\sphericalangle點)，再根據$\sphericalangle$$\sphericalangle$距離的$\frac{1}{2}$來算出對應$\sphericalangle$頂點的位置，所以應該是$\sphericalangle$下面1個格子數的地方。 (2)其他。</p>	<p>• 能正確回答。</p>

2. 我們已經知道乙圖的 $\frac{1}{2}$ 縮小圖中對應 \sphericalangle 、 \sphericalangle 頂點的位置。現在，請你算算看乙圖上的 \sphericalangle 頂邊的距離為幾個格子數？

那乙圖的 $\frac{1}{2}$ 縮小圖中對應 \square 點的位置應該在哪裡？

3. 我們已經知道乙圖的 $\frac{1}{2}$ 縮小圖中對應 \square 點的位置。現在，請你算算看乙圖上的 \square 頂邊的距離為幾個格子數？

那乙圖的 $\frac{1}{2}$ 縮小圖中對應 \square 點的位置應該在哪裡？

• 指名學生回答。

• 指名學生回答。

• 指名學生回答。

• 學生可能的說法如下：

(1) 已經知道 \square 點的位置，而且 \square 在 \square 的上方，所以丙圖的 $\frac{1}{2}$ 縮小圖中對應 \square 頂點的位置應該也在對應 \square 頂點的上方，根據 \square 頂距離的 $\frac{1}{2}$ 來算出丙圖的頂點 \square 在縮小為 $\frac{1}{2}$ 的距離，也就是 1.5 個格子數。

(2) 其他。

• 能回答 4 個格子數。

• 能回答在 \sphericalangle 點右方 2 個格子數的位置。

• 能回答 3 個格子數。

• 能回答在對應 \square 點上方 1.5 個格子數的位置。

活動 11-13-6：在製作放大(縮小)圖之後，知道原圖是放大(縮小)圖的縮小(放大)圖。

預備經驗：

- 1.自己畫格子作 2 倍放大圖，並利用與原圖同大的方格紙作 2 倍放大圖。(本單元活動 4)
- 2.自己畫格子作 2 倍縮小圖，並利用與原圖同大的方格紙作 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。(本單元活動 5)

情境布置：

- 1.教師將習作附件 32 的圖卡製成投影片，以供展示用。
- 2.準備投影機。
- 3.準備方格紙(略薄，有點透明，以便學生在進行放大、縮小圖形的製作時，可以直接嵌入來進行標示)。

本活動流程摘要如下：

製作甲圖的 2 倍放大圖(乙圖)：主要問題 1



製作乙圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖(丙圖)：主要問題 2



丙圖與甲圖的比較(兩者全等)：主要問題 3



甲圖與乙圖的關係：主要問題 4~5



(重新布題)

製作丁圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖(戊圖)：主要問題 6



製作戊圖的 2 倍放大圖(己圖)：主要問題 7

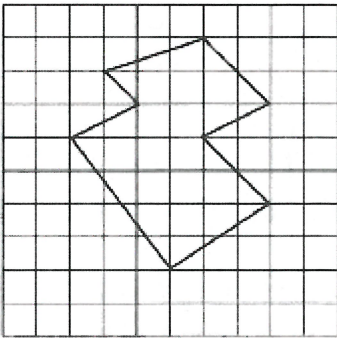
己圖與丁圖的比較(兩者全等)：主要問題 8

丁圖與戊圖的關係：主要問題 9~10

結論：

甲圖與其放大圖(乙圖)的雙向關係：主要問題 11~12

丁圖與其縮小圖(戊圖)的雙向關係：主要問題 13~14

主要問題與活動	說明	評量重點
<p>(教師展示情境布置 1 的甲圖卡。)</p> <p>1.請你畫出甲圖的 2 倍放大圖。</p> <p>檢查看看，你所畫的圖是不是甲圖的 2 倍？</p> <p>2.現在，我們已經知道畫出來的新圖是原來甲圖的 2 倍放大圖，我們把它稱為乙圖。</p> <p>請你畫出乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖。</p> <p>檢查看看，你所畫的圖是不</p>	<p>• 習作附件 32 上的甲圖卡如下：</p>  <p>• 此為活動 4 的舊經驗，教師可行間巡視，並指導尚未精熟的學生進行 2 倍放大圖的製作及檢查。</p> <p>• 同上，此為活動 5 的舊經驗，教師可行間巡視，並指導尚未精熟的學生進行 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖的製作及檢查。</p> <p>• 在本活動中，為說明方便，才用甲圖、乙圖、丙圖來稱</p>	<p>• 能製作出甲圖的 2 倍放大圖，並能檢查新圖是甲圖的 2 倍放大圖。</p> <p>• 能製作出乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，並能檢查新圖是乙圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。</p>

是乙圖的 $\frac{1}{2}$ 倍？

3. 我們已經知道畫出來的新圖是乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，現在把它稱為丙圖。

乙圖是甲圖的 2 倍放大圖，而丙圖是乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，請你檢查看看，甲圖和丙圖全等嗎？

說說看，你要怎麼檢查？

對應線段都一樣長嗎？

對應角也都一樣大嗎？

4. 我們已經知道，乙圖是甲圖的 2 倍放大圖，丙圖是乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，而丙圖又與甲圖全等。

5. 現在以乙圖為基準，可以怎麼說甲圖和乙圖的關係？

呼各圖形，教師在解說問題 1 至 4 時，只要手指即可區別，至問題 6 重新布題前，甲、乙、丙圖均應撤走。所以此時以手來指出即可。

- 指名學生回答。
- 主要問題 3~4 為複習全等圖形對應邊、對應角關係，此為學生的舊經驗。

- 學生的方法可能如下：

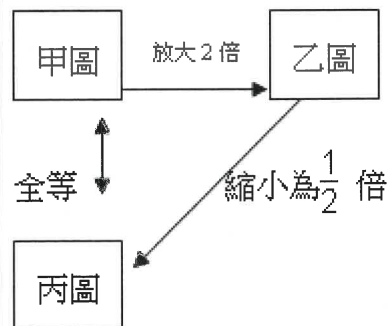
(1) 把甲、丙兩張圖形疊合，看看每一個邊、每一個角是否完全疊合。

(2) 用尺和量角器來量，看看對應線段是否一樣長、對應角是否一樣大。

(3) 其他。

- 教師可在黑板上畫出甲、乙、丙三圖的關係。

- 為說明方便，教師可直接將實際圖形代替甲圖、乙圖、丙圖等文字貼在黑板上，再呈現其間之關係會較清楚。



- 指名學生回答。
- 學生可能的說法如下：

- 能檢查後發現，丙圖與甲圖兩圖形全等。

- 能說出「甲圖是乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖」，並說明理

你怎麼知道的？

解題過程合理性
的討論參考模式

(1)乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍之後成了丙圖，而丙圖與甲圖全等，所以可以說甲圖是乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖。

(2)其他。

由。

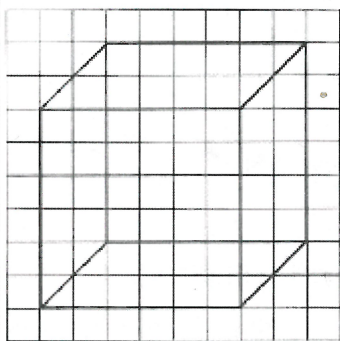
(重新布題)

(教師展示情境布置 1 的丁圖卡。)

6.請你畫出丁圖的 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖。

檢查看看，你所畫的圖是不是丁圖的 $\frac{1}{2}$ 倍？

• 習作附件 32 上的丁圖卡如下：



• 同說明 2。

7.現在，我們已經知道畫出來的新圖是原來丁圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，我們把它稱為戊圖。那麼，請你畫出戊圖的 2 倍放大圖。

檢查看看，你所畫的圖是不是戊圖的 2 倍。

8.我們已經知道畫出來的新圖是戊圖放大 2 倍的放大圖，現在把它稱為己圖。戊圖是丁圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，而己圖是戊圖的 2 倍放大圖，請你檢查看看，丁圖和己圖全等嗎？

• 同說明 1。

• 在本活動中，為說明方便，才用丁圖、戊圖、己圖來稱呼各圖形，教師在問題 7 至 10 時，只要手指即可區別，至問題 11 重新布題前，丁、戊、己圖均應撤走。所以此時以手來指即可。

• 指名學生回答。

• 同說明 3。

• 教師可視學生的回答情形進行下列問話：

(1)說說看，你要怎麼檢查？

(2)對應線段都一樣長嗎？

(3)對應角也都一樣大嗎？

• 能製作丁圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，並能檢查新圖是丁圖的 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖。

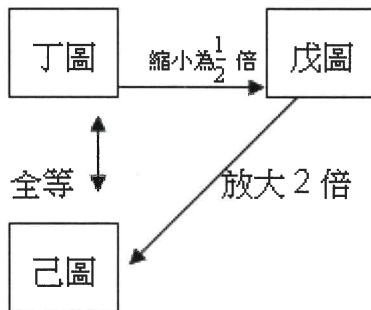
• 能製作出戊圖的 2 倍放大圖，並能檢查新圖是戊圖的 2 倍放大圖。

• 能檢查後發現丁圖與己圖兩圖形全等。

9.我們已經知道，戊圖是丁圖的縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，而已圖是戊圖的2倍放大圖，而已圖又與丁圖全等。

• 教師可在黑板上畫出丁、戊、己三圖的關係。

• 為說明方便，教師可直接將實際圖形代替丁圖、戊圖、己圖等文字貼在黑板上，再呈現其間的關係會較清楚。



10.現在以戊圖為基準，可以怎麼說丁圖和戊圖的關係？

解題過程合理性
的討論參考模式

- 指名學生回答。
- 學生可能的說法如下：
 - (1)戊圖放大2倍之後成了己圖，而已圖與丁圖全等，所以可以說丁圖是戊圖的2倍放大圖。
 - (2)其他。

◎主要問題 11~12 的主要目的為重新強調原圖與放大圖之間的雙向關係。

◎主要問題 13~14 的主要目的為重新強調原圖與縮小圖之間的雙向關係。

(重新布題)

11.在一開始時，我們畫了甲圖的2倍放大圖，也就是乙圖，我們是怎麼稱呼乙圖和甲圖的關係？

- 指名學生回答。
- 此處主要在溝通原圖與放大圖之間的雙向關係。
- 此時教師再一次展示甲、乙兩圖，而其他的圖均已撤走。

• 能說出「乙圖是甲圖的2倍放大圖」。

12.以乙圖為基準時，可以怎麼說甲圖和乙圖的關係？

- 指名學生回答。

• 能說出「甲圖是乙圖縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖」。

<p>13. 後來，我們畫了丁圖縮小為$\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖，也就是戊圖，我們可以怎麼稱呼戊圖和丁圖的關係？</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 指名學生回答。 • 此處主要在溝通原圖與縮小圖之間的雙向關係。 • 此時教師宜先撤走甲、乙兩圖，再展示丁、戊圖。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能說出「戊圖是丁圖縮小為$\frac{1}{2}$ 倍的縮小圖」。
<p>14. 以戊圖為基準時，我們可以怎麼說丁圖和戊圖的關係？</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 指名學生回答。 	<ul style="list-style-type: none"> • 能說出「丁圖是戊圖的 2 倍放大圖」。

附件二 八十二年部編本圖形與空間教材活動目標

一、平面圖形教材活動目標

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	3	透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。
1	6	4	透過說、讀、聽、做等練習，加強三角形、正方形、長方形和圓形等術語與圖卡、書空、…等的聯結。
1	6	5	透過塗色活動，加深學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。
1	6	*2	熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。
1	6	*3	能用單一的平面圖形造出圖案，以加深對圓形、三角形的認識。
1	6	*4	(1)熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。 (2)找出圖形的規律。
1	6	*6	增強辨認顏色、形狀、大小。
2	6	1	在有背景或其他圖形下辨認三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。
2	6	2	透過觀察及套描活動，知道圖形板與其外框是同形狀。
2	6	3	在釘板上用橡皮筋圍出圖形。
2	6	4	用兩塊全等(形狀、大小一樣)的色板拼出一個圖形。
2	6	5	經驗一個圖形可由兩塊一樣的圖形所構成。
2	6	6	用一些三角形、正方形或長方形拼成一個指定的圖形。
2	6	7	用一些正方形或長方形拼成一個指定的圖形。
2	6	8	(1)由實際的拼排，經驗一個圖形可由幾個全等的圖形所構成。 (2)會將數據填入設計好的表中。

2	6	*1	(1)熟練三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。 (2)透過操作的活動，知道圖形板與其外框是同形狀。
2	6	*2	用竹籤在桌子上排出圖形。
3	8	1	(1)憑直觀找出圖中不同的地方。 (2)用疊合的方法，說出這些圖形都是全等。
3	8	2	從一堆圖形中，找出全等的圖形。
3	8	3	透過剪、疊的活動知道兩個圖形是全等的。
3	8	4	描出全等的圖形。
3	8	7	透過摺紙的活動，觀察對稱的現象。
3	8	8	透過剪紙的活動，經驗對稱的現象。
3	8	*1	(1)透過對摺的方式，將原圖形分解成四個或八個全等的部分。 (2)將分解後的各部分拼回原圖形。
5	6	1	(1)描述三角形的畫法或描法。 (2)進行三角形的邊、頂點及角的命名活動。
5	6	2	透過複製三角形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。
5	6	3	透過描繪活動，認識四邊形的邊、頂點和角。
5	6	4	進行四邊形的命名活動。
5	6	5	透過複製四邊形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。
6	7	7	透過張開扇子的活動及其結果的描繪，認識角及其構成要素。
6	9	2	(1)從比較三角板的角認識直角。 (2)認識直角三角形。
6	9	3	(1)知道正方形、長方形都有四個直角。 (2)透過複製直角的活動，經驗垂直的意義。 (3)用紙摺出直角。

6	9	4	(1)從四邊形的邊中，找出垂直的邊。 (2)從垂直於同一個邊的兩個邊，經驗平行的意義。
6	9	5	經驗以量角器做為刻度尺，報讀角的大小。
6	11	4	認識周界和周長。
7	3	1	透過「指定一邊，做出直角另一邊」的方式，察覺垂直的意義。
7	3	2	察覺一線平行於另一直線的意義為同時垂直於第三直線。
7	7	5	(1)復習辨認圓形與非圓形。 (2)透過具體操作活動，認識圓周、圓心、半徑和直徑。
7	7	6	(1)用圓規畫圓。 (2)透過用圓規畫圓的活動，加深了解圓周、圓心和半徑。
7	9	1	認識平行四邊形和梯形，並加以命名。
7	9	2	透過對稱關係製作箏形、菱形，並加以命名。
8	3	4	透過量角器認識度的意義。
8	3	5	在度量化的情境下，解決兩個角的合成、分解問題，並以算式記錄。
8	3	6	在鐘面圖上，用度量化的方式，描述旋轉角的角度。
8	3	7	(1)認識銳角和鈍角。 (2)使用量角器畫出指定度數的角。
8	5	8	將一堆三角形依據邊長或角的大小關係，加以分類並命名。
8	5	9	(1)認識對角、對邊的概念與名詞。 (2)經驗後察覺三角形中最大邊對最大角(或最大角對最大邊)及最小邊對最小角(或最小角對最小邊)。
8	5	10	認識等腰三角形和正三角形的特性。

9	11	1	(1)將一堆三~七邊形的圖卡，根據邊的個數加以分類並命名，命名為五邊形、六邊形、七邊形後，將全部命名為多邊形。 (2)討論給定的五(及六)邊形圖卡，檢查邊、角是否相等，由此認識正五(及六)邊形。
9	11	2	以疊合方式檢驗兩個多邊形圖卡完全疊合後，確定此二個多邊形逐邊、逐角皆相等，由此認識兩多邊形全等時，各對應邊皆相等，各對應角皆相等。
10	3	1	將圓周率的近似值暫定為 3 倍多，從直徑算出圓周長或由圓周長算出直徑。
10	3	2	認識扇形及其構成要素—頂點、邊、圓心角和圓弧。
10	14	1	由操作影印機的活動，經驗放大的意義，進而檢查原圖與放大圖之間的對應關係。
10	14	2	由操作影印機的活動，經驗縮小的意義，進而檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。
11	7	1	(1)透過兩個直角的旋轉的合成，認識始邊與終邊成一直線的旋轉角，並命名為平角。 (2)將三角形三內角的旋轉角合成變為一平角。
11	7	2	(1)利用長方形的切割，推知直角三角形的內角和是 180 度。 (2)由拼湊一般三角形的的角，測量檢驗一般三角形的三個角的角度和。 (3)把一個三角形分成兩個直角三角形，推知這個三角形的內角和。
11	7	3	透過「將一個四邊形分成兩個三角形」與「三角形的內角和是 180 度」，求出四邊形的內角和。
11	7	4	透過剪紙(複寫或壓印)製造線對稱圖形，並對上述的製造活動進行反思，察覺摺痕兩邊的圖形摺疊後會重合，即全等。
11	7	5	給定一圖形，透過對摺的方式檢驗是否為線對稱圖形。
11	7	6	檢驗畫在方格紙上的圖形是否為線對稱圖形，並指出對稱軸兩邊互相對應的頂點、邊和角。
11	7	7	指出嵌入方格紙上的線對稱圖形：(1)對應點之連線和對稱軸互相垂直，(2)對稱軸平分對應點之連線。
11	7	8	在方格紙上畫出線對稱圖形。

◆國小數學教材分析

11	13	3	把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以放大 2 倍，檢查原圖與放大圖之間的對應關係。
11	13	4	自己畫格子做 2 倍放大圖，並利用與原圖同大的方格紙作 2 倍放大圖。
11	13	5	(1)把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。 (2)畫出 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖，並利用與原圖同大的方格紙作 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。
11	13	6	在製作放大(縮小)圖之後，知道原圖是放大(縮小)圖的縮小(放大)圖。
12	12	1	(1)閱讀簡介圖。 (2)認識邊長關係的比例尺，並運用於地圖、室內平面圖的閱讀。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

二、立體圖形教材活動目標

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	1	透過積木及實物的造形活動，經驗平面和非平面的區別。
1	6	2	透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。
1	6	*1	(1)從觸摸中感覺物件的特色，如平平的、尖尖的、圓圓的、...。 (2)增強辨認長方體、圓柱體、球體、圓錐體等。
1	6	*5	複製球、盒子、圓柱、圓錐。
4	6	1	運用學生的語詞，進行正方體和長方體的命名活動。
4	6	2	將實物與平面立體圖對照，使學生能從平面立體圖認出實物。
4	6	3	透過說、讀、聽等練習，加強實物與平面立體圖的聯結。
4	6	4	學生用自己的話來描述造形的過程和想法。
4	6	5	仿造一個實心的正方體或長方體，其大小和事先準備的實物一樣。
4	6	6	用數量一定、形狀及大小相同的數學積木，堆積成各種可能的長方體或正方體。
4	6	*1	透過說、讀、聽等練習，加強實物與平面立體圖的聯結。
6	7	1	透過描述「由一堆正方形圖卡拼湊以圍成一正方體紙盒」的活動過程，在討論中凸顯正方體有 6 個面。
6	7	2	透過描述「由一堆長方形圖卡拼湊以圍成一長方體紙盒」的活動過程，在討論中凸顯長方體有 6 個面，12 條邊。
6	7	3	透過描述「由一堆竹籤組成一個正方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中凸顯正方體有 8 個頂點，12 條邊。
6	7	4	透過描述「由一堆竹籤組成一個長方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中凸顯長方體有 8 個頂點，12 條邊。

6	7	5	透過觀察正方體和長方體，經驗正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點，長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。
6	7	6	透過將長方體和正方體的骨架與視圖對照的活動，在視圖中補上三條虛線得到透視圖。
8	8	1	從日常生活中找出球體的物品。
8	8	2	察覺球體的截面都是圓形，並認識半球體。
9	15	1	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相垂直的其他邊。
9	15	2	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相平行的其他邊。
9	15	3	(1)認識空間中相交兩直線決定一平面，且可直接度量此相交兩直線所形成的角之大小。 (2)認識一直線與一平面垂直的意義。 (3)經驗一直線若與平面上兩直線垂直，即垂直於此平面。 (4)討論長方體上邊和面的垂直現象。
10	7	2	由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。
10	7	3	由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。
10	7	4	由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。
11	11	1	透過由一堆立體中找出像柱子的立體的活動，認識柱體。
11	11	2	透過由一堆立體中找出像尖頂的立體的活動，認識錐體。
11	11	3	透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數、底面全等、側面為長方形、側邊一樣長且垂直於底面、底面互相平行、側邊互相平行。
11	11	4	透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等、底面互相平行。
11	11	5	透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數、側面的形狀為三角形和側面共同的頂點為尖頂的性質。

本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。

參考文獻

教育部(民 82)：國民小學課程標準。台北：作者。

國立編譯館(民 89)：國民小學數學教學指引第一~十二冊。台北：作者。

國小數學教材分析——幾何

主 編：周筱亭 黃敏晃

編著者：謝堅 朱建正 魯炳寰 廖淑麗

發行人：何福田

發行所：國立教育研究院籌備處

地 址：臺北縣三峽鎮三樹路二號

電 話：(02) 8671-1100

展示處：中華民國政府出版品展售中心 地址及電話：

國家書坊台視總店：台北市八德路三段 10 號

TEL：(02)25781515 轉 643

五南文化廣場：台中市中山路 2 號

TEL：(04)22260330

印 刷：承印實業股份有限公司

地 址：板橋市中山路二段 465 巷 81 號 2 樓

電 話：(02)29555282

中華民國九十五年四月初版

統一編號

1009500809

ISBN 986-00-4770-7



9 789860 047707

95.4,3000

工本費210元