

## 第一章 體積的數學與認知結構

### 一. 體積的意義

人們透過自身體驗以及周遭成人的灌輸的交互影響，建立一個信念，即在人的環境中的物質，一定佔有空間而且具有重（質）量。科學的教育進一步把這個信念強化，且賦予數量以描述其大小。

將物質例如黏土或細沙做無空隙的堆積使其形狀大小和另一物體完全相同，這就是體積的複製。體積的複製是體積的單位數量描述的基礎。

生活中的體積經驗很多，例如人體的胖與瘦，種子或水果的大與小，積雪、積土，積水的多寡，即使是米飯量，常人也是以體積推估的。

### 二. 體積、容積、液量、容量

體積：物質所佔空間的大小。

容積：某一具有確定三度空間的周界內的空間的大小，通常此空間有容納物質可以隨時存取的功能。例如冰箱內部的容積。

液量：流動的液態物質的量，如水量。

容量：可以裝盛液體的容器，將液體裝到滿的量。

由於液體也是物質，佔有空間，而且不像空氣這麼容易因壓力而改變其體積，因此實際上，這四種量都可以用體積概念加以統整。按照82年課程或九年一貫課程，強調認知概念的發展，因此一開始，此四量有各自的操作性定義，等到時機恰當再做統整。不過液量的單位仍然會繼續使用，但是cc或立方公分以及立方公尺會用來描述液量。詳見本叢書討論容量那一冊，長度、面積、體積三者有一相似之處。給定空間中兩點，有一直線段可以連接此二點，此一直線段之長即為這兩點之間的距離。給定平面（以紙頁表徵之）上一條簡單封閉曲線，此一曲線內部的區域的大小即其面積。此處並未像一維的情形，另外給一個名字。一般學童常混淆此一曲線之長及其所圍成的區域之面積。給定空間中的簡單封閉曲面，此一曲面內部空間的大小即其體積。

### 三. 體積之直接比較

由於兩物體無法於同時佔有同一空間，而且一物體所佔有之空間又無法加以存留，因此不像長度或面積可以疊合。因此何謂體積的直接比較？一種是兩物體的等比例相似，明顯到可以由感官加以確認後，再由直接比較對應點的距離，確認一物體可以想像合於另一物體之內。例如比較籃球和排球的大小，或比較兩個紅蘿蔔的大小。一種是兩物體皆為長方體，可以經由長、寬高的直接比較，知道大長方體的長寬高皆大於小長方體的長寬高，確認小長方體可以想像含於大長方體之內。由於體積之單位在數學上一定選正方體，更小物體的體積描述，亦以正方體之10等分細分為更小的正方體加以描述，因此做為體積啓蒙之直接比較鎖定於長方體，即已足夠。

### 四. 體積之保留概念

將定量之黏土捏成一種形狀，如球體，再改捏成長條，詢問學生其大小有沒有改變，再改壓成高約 1公分的扁平狀，再問其大小有沒有改變？並可於一開始，即準備一個同大的球體複本做為參考比較之依據，學童是否能從黏土既無添加也無拿走的事實，斷言黏土的大小不會改變？這就是體積的保留概念。亦可將長條狀之黏土切塊再組合。

或有人說，黏土塊在捲曲變形時會捲入空氣，以致影響體積，這種說法，就像把水在瓶子間倒來倒去，有少許水會沾在瓶壁，從而使水量變少完全一樣，是不可避免的。

另外一種做法是以一定數量的白色積木堆成各種形狀，接近條狀、面狀及球狀，然後詢問孩子大小有沒有改變？

### 五. 「體積」一詞引入之時機之商榷

有人認為，必須在學童能使用個別單位的累積來描述之後，才能使用長度、面積、體積的語詞；另一種意見是，只要能夠做到直觀比較，就可以引入，以避免「大小」語詞混淆了焦點。

作者在設計82年版實驗本教案時，最後還是決定採用後者，早早引入面積和體積的語詞，理由是，只要學生覺察到它亦是物質的一種量的屬性，可以因累積或取走而增大、減少即可使用。

## 六. 使用正方體為體積的個別單位的理由

和面積使用正方形為個別單位的理由相同。可做無空隙堆疊且充滿空間的立體就是以可如此平面鋪設的多邊形為底的柱體，其中以長方體和正方體最簡單。但正方體更可以用簡單的乘法點算，可以配合長、寬、高進行。

普遍單位使用公制長度單位為邊長的正方體，使得一般長方體可由長邊、寬邊、高邊的長度單位數量由乘法獲得答案。在不規則形體時，則可以將單位正方體的邊各做10等分的細分，將單位正方體1000等分後，繼續由空間內部累積計數，求更進一步的近似值。透過微積分的方法，可用極限表示理想形體的體積，像球體的公式為  $\frac{4}{3}\pi r^3$ ，就是如此獲得的。至於用排開水的方法測量的方法，詳見本叢書有關容量那一冊。

## 七. 一立方公尺的單位原型

使用瓦楞紙板或塑膠布製作折疊式的1立方公尺的箱子，可使學童對1立方公尺的單位有較實際的感覺。許多小學數學教師都覺得，由報紙製做的1平方公尺可以由10000個一平方公分的方瓦完全覆蓋，以1立方公尺的箱子必需要使用1百萬個白色積木才能堆到與它一樣大，是讓學童親眼目睹1萬以及1百萬的最佳方法。

## 八. 長方體體積的公式之導出

給學童一個長、寬、高皆為整數的長方體，學童先以白色積木複製出此長方體，然後計數共有多少個白色積木。逐漸地，學童即可知不需複製即可由長邊、高邊、寬邊之長度乘出計數時，先算一層，一排是 $l$ 個1立方公分，共有 $m$ 排，故一層為 $l \times m$ 個，然後 $n$ 層，故得 $l \times m \times n$ 個1立方公分。

至於邊長為分數時，最好是透過分數倍的概念，寬邊1公分，長邊a公分，高邊也是1公分時，它的體積是1立方公分的a倍。當寬邊變成b公分時，體積為1立方公分的 $a \times b$ 倍，當高邊變成c公分時，體積為1立方公分的 $a \times b \times c$ 倍。在長方體體積 $= a \times b \times c$ 的公式中，必須強調單位的配合。

## 九.化聚

在國小教材中，體積只有1立方公分和 1立方公尺兩種單位。因此1立方公尺和多少立方公分合起來一樣大是教學重點，這可以從 1立方公尺的邊長來求即可。在實際生活中體積的化聚並不常見。