

壹、緒 論

一、數概念

本教材將學童運思方式，依序分為四個發展階段，因為針對八十二年國小數學課程標準設立的「國小數學課程實驗研究小組」認為：學童對問題的理解方式，以及解題的策略，都會受到運思方式的約制。第一階段，序列性合成運思期：此運思將數個「1」合而為一，形成一個集聚單位（數個「1」所合成的一個集合體，學童可以將這個集合體視為一個整體，但是這個集合體尚未變成可以被計數的單位，例如將10個「1」合成一個10）；第二階段，累進性合成運思期：此運思可以使用一個集聚單位（例如10）為基礎，繼續合成新的「1」，而形成新的集聚單位，例如以10為起點，繼續合成3個「1」，而形成新的集聚單位13；第三階段，部分—全體運思期：此運思掌握「1」與以「1」為元素所合成的集聚單位（例如10）間的部分—全體關係，明顯地區分兩者的意義，故而在混合使用兩種以上的被計數單位時，不混淆其計數的意義（例如先使用數詞序列「一、儿、、厶丩、厶、、×∨，……」點數有幾個「1」，再使用相同的數詞序列點數有幾個「拾」時，不會混淆唸出的數詞是描述幾個「1」，或是描述幾個「拾」），可以將數個集聚單位和數個「1」單位合而為一，形成新的集聚單位，例如能區辨3個「拾」與3個「1」這兩個3具有不同的意義，將「33」視為3個「拾」與3個「1」的合成結果。第四階段，測量運思期：此運思以掌握「1」單位與集聚單位（例如10）間的部分—全體關係為基礎，進而能掌握集聚單位（例如「拾」）與以其為元素所合成的另一個集聚單位（例

如 10 個「拾」) 間的部分—全體關係，故而是同時掌握兩個層級的部分—全體關係。

依據目前對學童發展的瞭解：八十二年課程標準下的部編本國小數學教材（以下簡稱本教材）在第一冊中，以序列性合成運思為活動的最基本要求；自第二冊起，逐步協助學童發展與應用累進性合成運思；待第六冊以後，再進行以部分—全體運思為基礎的教學活動，以配合學童的發展；自第八冊起，則以部分—全體運思為基礎，逐漸地培養測量運思的發展。

• 低年級階段各運思的成就

在低年級階段，本教材區分序列性合成運思、累進性合成運思、以及部分—全體運思，作為數與計算教材設計的基礎。以下概略描述在低年級階段，這三種運思對數學問題可能產生那些不同層次的意義或理解。

這三種運思方式，表現在「數詞的認識」上，可能產生下列不同層次的意義或理解，以認識數詞「23」為例：序列性合成運思期的學童將「23」視為23個「1」的合成結果；累進性合成運思期的學童可以使用「20」為集聚單位（或其他集聚單位），將「23」視為以「20」為基礎，再往上累積3個「1」的合成結果，也可以使用「25」作為集聚單位（或其他集聚單位），將「23」視為以「25」為基礎，再往下拿走2個「1」的結果；部分—全體運思期的學童可以區辨「拾」集聚單位（或其他集聚單位）與「1」單位的計數意義，將「23」視為2個「拾」和3個「1」的合成結果。

這三種運思方式，表現在「數詞關係」上，可能產生下列不同層次的意義或理解，以「比較18和21兩數的大小」為例：序列性合成運思期的學童將18及21視為兩個獨立且皆由數個「1」合成的集聚單位，這兩個集聚單位間沒有直接的關係，學童必須透過「做數活動」，將這兩個集聚單位用「1」單位重新表現出來，例如學童分別畫出21個圓圈和18個圓圈表徵21和18，再透過「一對一對應」的比較方式，解決21個圓圈和18個圓圈「誰多？誰少」的問題，也就是說，序列性合成運思期的學童只能解

決兩量的多少問題，無法理解兩數的大小問題；累進性合成運思期的學童，可以將「21」視為「18」再累積3個「1」的合成結果，或「18」是「21」去掉3個「1」的結果，因此較小的數包含於比較大的數之內，可以開始討論兩數的大小問題；部分—全體運思期的學童可以區辨「拾」集聚單位與「1」單位的計數意義，可以使用「高階單位比較」的策略，來解決兩數的大小問題，「21」之中有2個「拾」，而「18」中只有1個「拾」，故而21比18大（因為最多只相差9個「1」，而1個「拾」比9個「1」大）。

這三種運思方式，表現在「合成或分解」活動時，亦產生不同解題活動方式。以問題「 $19 + 12 = ()$ 」或「 $31 - 12 = ()$ 」為例：序列性合成運思期的學童，必須將「19」和「12」分別用「1」表現出（進行兩次的做數活動，例如分別拿出19個與12個花片，或畫出19個與12個圈），再將這兩個集聚單位合而為一，由1開始計數新集聚單位內的個數，得到答案是31；或者先將「31」用具體物表現出來，再在31個具體物中，做出「12」個具體物拿走，再計數剩下的集聚單位內的個數，得到答案是19。換句話說，序列性合成運思的學童，必須序列性地進行兩次做數活動及一次數數活動，才能夠得到答案。

累進性合成運思期的學童，可以由一個集聚單位為起點，進行累加或累減的活動，來形成新的集聚單位，故而可以使用「向上數」的策略，以「19」為起點，累進性地逐次增加12個「1」，來解決合成的問題；相對，也可以使用「向下數」的策略，以「31」為起點，逐次減少12個「1」，來解決分解的問題。

部分—全體運思期的學童，可以區辨「1」單位與「拾」單位的計數意義，因此可以對以「拾」、「1」為被計數單位的計數結果，分別進行合成或分解的活動，而不混淆計數的意義，再配合「拾」、「1」兩單位間的化聚活動（將以「拾」為被計數單位的描述化為以「1」為被計數單位的描述，或將以「1」為被計數單位的描述，聚為以「拾」為被計數單位的描述）

，進行成人所習慣的「加減算則」。例如：9個「1」和2個「1」合起來是11個「1」，也就是1個「拾」1個「1」，1個「拾」加1個「拾」是2個「拾」，再加1個「拾」是3個「拾」，3個「拾」1個「1」合起來是31個「1」，得到答案是31；相對地，1個「1」減2個「1」不夠減，先在3個「拾」中拿1個「拾」化成10個「1」，10個「1」和1個「1」合起來是11個「1」，11個「1」減2個「1」是9個「1」，3個「拾」拿走1個「拾」，剩下2個「拾」，2個「拾」減1個「拾」是1個「拾」，1個「拾」9個「1」合起來是19個「1」，得到答案是19。

爲了因應學童的個別差異，當學童表現較低層次的運思時，教師也應該接受，使學童先有成功解題的經驗，保留空間，讓學童在觀摩討論中，逐漸發展與調整運思方式；當學童表現較高層次的運思時，教師宜協助學童說明他的解題觀點，但不強求其他學童模仿，這是本教材活動中所強調的淡化處理原則。

· 部份—全體運思的成就

在部分—全體運思的發展下，學童可以區辨不同的被計數單位，故而在混用兩種被計數單位時，不會混淆其計數的意義，但此時區辨的基礎，只是各個被計數單位，皆與「1」有特殊的關係，例如：1個「仟」是一千個「1」，1個「佰」是一百個「1」，1個「拾」是十個「1」，而兩個異於「1」的被計數單位間（例如「拾」與「佰」），則不一定滿足部分—全體關係（學童不一定將1個「佰」視爲十個「拾」的合成結果）；學童能同時掌握兩個階層的部分—全體關係，是測量運思的成就。

測量運思期的學童能同時掌握兩個階層的部分—全體關係，例如1個「佰」是十個「拾」的關係，在1個「拾」是十個「1」的合成的關係中，「拾」是全體（「1」是部份），但是在1個「佰」是十個「拾」的合成的關係中，「拾」卻是部分（「佰」是全體），因此在「佰」、「拾」、「1」三個被計數單位的相互關係中，「拾」同時具有全體與部分雙重角色，因此須掌握兩個階層部分—全體關係，也就是發展出測量運思後，學童才能掌握1個

「佰」是十個「拾」的關係。

透過部分—全體運思的掌握，學童可以混合使用數個被計數單位，來描述總量，例如「1張一千元、2張一百元、3個十元和1個一元」，由於學童可以掌握各個被計數單位與「1」被計數單位間的關係，所以能理解其總量為「1 2 3 1」元。相對地，學童亦可理解「1 2 3 1」這個數量，可以用1個「仟」、2個「佰」、3個「拾」和1個「1」來重新描述。而在此過程中，學童只須要掌握「1」與各被計數單位間的關係，並不須要用到測量運思。

部分—全體運思期的學童可以掌握「1」單位與以「1」為元素所合成的集聚單位間的部分—全體關係，故而可掌握「1」與「拾」間的部分—全體關係，亦可掌握「1」與「佰」間的部分—全體關係，以「1」與其他被計數單位間部分—全體關係的掌握為基礎，可以明顯地區辨「1」、「拾」、「佰」等被計數單位，而不混淆其計數的意義。但是，在此階段，「拾」與「佰」被計數單位間的部分—全體關係尚不明顯，是透過其分別與「1」單位間的關係來加以掌握，例如十個「拾」合起來是一百，1個「佰」也是一百，因此可以使用十個「拾」來換1個「佰」，而「拾」並未明顯地成「佰」的組成元素。將「拾」視為「佰」的組成元素，進而掌握「1」、「拾」、「佰」三者間相互的部分—全體關係，是測量運思的成就。

· 測量運思的成就

測量運思期的學童掌握「1」單位、集聚單位（例如「拾」）與新集聚單位（例如「佰」）三者間的相互關係，集聚單位（「拾」）是以「1」單位為元素的全體，而且是組成新集聚單位（「佰」）的元素，故而「1」單位與新集聚單位（「佰」）間的關係，可以用集聚單位（「拾」）為測量單位來重新詮釋，例如：「十個1」合成的集聚單位的十倍是一百，同時一百也包含十個「十個1」的合成，或者將一百等分成十份是「十個1」，至此時，乘、除法互相成為逆運算。

重新以「1」、「5」、「3 5」三者間的關係為例：在部分—全體運思

下，「5」是5個「1」的合成，「35」是35個「1」的合成，雖然可以不混淆地重複製作7個「5」來形成「35」，但尚未掌握「5」為「35」組成元素的意義；在測量運思下，「5」是5個「1」的合成，但是「35」不只是35個「1」的合成，亦是7個「5」的合成，在同時掌握兩個階層的部分—全體關係下，可以先在7個「5」中，分別抽取一個元素「1」，合成新集聚單位「7」，用盡「5」中所有的元素，而形成5個「7」，因此將7個「5」與5個「7」間的等價關係視為當然，進而掌握乘法交換律。也就是說，測量運思期的學童，可以彈性地互換單位量與單位數的角色，而不影響對全體意義的掌握。

測量運思期的學童可以同時掌握兩個階層的部分—全體關係（例如「1」與「5」；1個「5」與7個「5」），進而也可以掌握乘法對加法的左、右分配性質（左、右分配的名稱視乘號位置而定）；例如可以將「5」的全體視為「2」和「3」兩個部分的合成（部分—全體運思的成就），將此兩個部分個別地複製7份，亦即將「 $(2 + 3) \times 7$ 」視為「 $2 \times 7 + 3 \times 7$ 」，而掌握乘法對加法的右分配性質；同時，也可以將7個「5」視為3個「5」與4個「5」的合成，而將「 $5 \times (3 + 4)$ 」視為「 $5 \times 3 + 5 \times 4$ 」，而掌握乘法對加法的左分配性質。

• 第三冊引入乘法問題，第四冊引入除法問題

累進性合成運思期的學童，可以將一個數視為一個集聚單位（數個「1」所合成的一個集合體，學童可以將這個集合體視為一個整體，但是這個集合體尚未變成可以被計數的單位），以解算式填充題「 $5 + 3 = ()$ 」為例，學童可以將5視為一個整體，再以此為起點，進一步地累加3個「1」，以形成另一個集聚單位8。如果8是學童首次做出的集聚單位，這個8並不是一個可以被計數的單位（此時，「1」是一個可以被計數的單位），要讓8成為一個新的可被計數的單位，首先要有很多做集聚單位8的經驗，能夠一再地複製8，並且知道這些做出的集聚單位8彼此之間都相等（等價），進而可以點數有多少個相同的8，此時，「8」開始成為一個可以被計數的單

決包含除問題（12個1可以做出幾個4）；累進性合成運思期的學童，也可以在協助下，進行逐一分配的解題活動，先做出3個單位，再逐一的將12個「1」平分到這3個單位，再點數每一個單位中有幾個「1」，理解等分除問題的題意，並嘗試解決等分除問題（12個1，平分成3堆，一堆中有幾個1）。

二、數學結構

• 乘法問題的範圍

在整數乘以整數的乘法問題中，同時存在兩種不同的單位，再以問題「1隻狗有4條腿，5隻狗有多少條腿？」為例，問題中同時存在「隻」與「條」兩種單位，這兩種單位中，被乘數與積數都是以「1條」為被計數的單位，而乘數是描述有多少個被乘數（有5個4條），學童較易掌握被乘數的意義，因此，本教材在布題時通常考量乘數範圍的限制。

在解題活動部份，希望學童先能透過合成活動的方式解決乘法問題，當學童掌握多單位加減策略的意義後，則希望學童能將被乘數視為多個單位的合成（例如將68視為6個「拾」8個「1」），透過各個單位分別進行倍的活動及合成活動的方式解決問題。本教材透過討論「（幾個百）幾個十幾個一的幾倍」運算策略，協助學童使用此策略來解乘法問題，並引入乘法直式紀錄格式。

在低年級階段，只布積數未知的乘法問題，除了要求用有乘號的算式記錄解題活動與結果，也要求用有乘號的算式填充題記錄問題。在進行活動時，為了讓學童將注意力集中在形成乘法概念上，常要求倍的問題的單位量為12以內，單位數為15以內，並限制合成量（積數）在100以內。

在第五冊，除了要求學童自製「十十乘法表」外，也引入單位量在1000以內，單位數在5以內，而合成量（積數）在1000以內的倍的問題，希望學童透過合成活動來解決問題。在第六冊，則將範圍擴充至單位數在10以內，而合成量在2000以內。在第七冊，則先處理幾十幾倍的

問題，要求學童使用「幾個百幾個十幾個一的幾倍」的方法，解決被乘數為三位數，乘數為一位數的乘法問題，並用直式記錄解題過程。在第八冊，則將範圍擴充至乘數為兩位數，在第九冊，再將範圍擴充至乘數為三位數。在相同的數量範圍，也進行了被乘數或乘數未知問題的解題活動，為學童形成乘除互逆的概念鋪路。

8 2 年課程標準教材綱要中整數乘法部份只安排至四年級，內容部份只安排至三位數乘以二位數的範圍，五年級並沒有要求安排整數乘法的活動。本教材認為，如果學童只進行乘數是兩位數的乘法活動，其經驗無法幫助學童透過類比的方式，自行發展出乘數為三位數（或三位數以上）的乘法活動，因此在第九冊繼續進行乘數是三位數的乘法活動，要求學童使用「幾個百幾個十幾個一的幾倍」的方法，解決被乘數為三位數，乘數為三位數的乘法問題，並用直式記錄解題過程。期望學童在日常生活中遇到乘數是四位以上的問題時，也能進行解題活動。同時，也安排了用「幾個十幾個一的幾倍」的方法，解決積數為三位數，（被）乘數為二位數的乘數（被乘數）未知的問題，做為討論乘除法互為逆運算活動的預備經驗。

• 乘法問題的解題策略

本教材預期二年級學童是累進性合成運思期，因此自第三冊第三單元開始引入倍的問題，累進性合成運思期的學童可以重複製作一個集聚單位（例如 5），並對此重複製作的集聚單位進行點數的活動，因此可以理解「4 個 5」的意義，可以使用「又一倍」（又一個集聚單位）的累加策略解決倍的問題。以問題「 $5 \times 4 = ()$ 」為例：累進性合成運思期學童的想法是：有 1 個 5，再來 1 個 5 是 10，再來 1 個 5 是 15，再來 1 個 5 是 20，學童是使用加法當做解題的工具，來處理乘法（倍的）問題。

預期三、四年級學童的數概念已由累進性合成運思期進入部份—全體運思期，但尚未到達測量運思期。部分—全體運思期的學童可以明顯地區分「1」與集聚單位（例如 5）的計數意義，也掌握了「又一（有 1 個 5，再來一個 1 是 6，再來一個 1 是 7）」與「又一倍（有 1 個 5，再來 1 個 5 是 10

，再來 1 個 5 是 1 5)」間活動的差別，進而可以發展出「又幾倍 (2 個 5 是 1 0 ，再來 2 個 5 是 2 0 ，再來 2 個 5 是 3 0)」或「又十倍 (1 0 個 5 是 5 0 ，再來 1 0 個 5 是 1 0 0 ，再來 1 0 個 5 是 1 5 0)」的活動，來簡化乘法問題的解題過程。同時，延伸多單位加減策略的概念，學童可以用多單位的觀點來理解被乘數，而在各個被計數單位上進行倍的活動，再透過各單位間的化聚活動，以及加法算則，整合最終的結果，以問題「 $358 \times 3 = (\quad)$ 」為例，學童先將被乘數視為 3 個「百」、5 個「拾」及 8 個「1」的合成結果，然後在每個被計數單位上，進行倍的活動，算出 3 個「百」的 3 倍是 9 個「百」，5 個「拾」的 3 倍是 1 5 個「拾」，8 個「1」的 3 倍是 2 4 個「1」，再將各個被計數單位的運算結果，透過化聚活動，將 1 5 個「拾」聚成 1 個「百」5 個「拾」，2 4 個「1」聚成 2 個「拾」4 個「1」，最後再透過加法算則，獲得答案是 1 0 7 4。本教材將此種策略稱為「(幾個百)幾個十幾個一的幾倍」的算法。

再以問題「 $25 \times 34 = (\quad)$ 」為例，部分—全體運思期的學童可以透過「又幾倍」的方式，由 2 5 的 1 0 倍是 2 5 0 開始，2 5 0 加上 2 5 0 是 5 0 0，即為 2 5 的 1 0 倍又 1 0 倍的合成結果；掌握目前已完成 2 0 倍 (即 5 0 0)，再加上 2 5 0，即又加上 2 5 的 1 0 倍是 7 5 0，完成了 3 0 倍 (上述的過程簡稱為「又十倍」的活動)，再加 1 0 倍就會超過 3 4 倍，故而改採「又一倍」的活動，7 5 0 加上 2 5 是 7 7 5，完成 3 1 倍，7 7 5 加上 2 5 是 8 0 0，完成 3 2 倍，繼續又一倍的活動，直到獲得 2 5 的 3 4 倍是 8 5 0 (第七冊第十二單元)。

在上述的解題過程描述中，學童逐次的進行「又幾倍」的活動，當累積至 3 4 倍時，則停止活動獲得最終的結果，學童並不是事前能夠預測 3 4 倍是 3 0 倍與 4 倍的合成結果 ($25 \times 34 = 25 \times (30 + 4) = 25 \times 30 + 25 \times 4$)，此項預測能力的發展必須先掌握乘法對加法的左分配性質，這是測量運思的成就。

當學童掌握多單位加減策略的意義後，就可以進一步地在各個被計數單

位上進行倍的活動，例如「3 個十的 5 倍是幾個十？」(第七冊第四單元)，「3 個十的 4 0 倍是幾個十？」(第七冊第十單元)，綜合上述活動經驗後，可以討論「幾個十幾個一的幾十幾倍」策略，來解乘數為兩位數的乘法問題。

同樣的，以問題「 $25 \times 34 = (\quad)$ 」為例，在限制使用「幾個十幾個一的幾倍」的要求下，學童將被乘數 25 視為 2 個十 5 個一，在各個被計數單位上，進行倍的活動，2 個十的 34 倍是 68 個十，也是 6 個百 8 個十，5 個一的 34 倍是 170 個一，也是 1 個百 7 個十，合起來是 850 (第八冊第二單元)，在「2 個十的 34 倍是 68 個十」以及「5 個一的 34 倍是 170 個一」部分，學童仍可能使用「又幾倍」的方式來完成。

• 乘法問題的紀錄格式

累進性合成運思期的學童使用「又一倍」策略解題時，是透過合成活動的觀點來處理乘法問題。因此在解題活動紀錄部份，本教材分成兩個階段來處理，以問題「 $5 \times 4 = (\quad)$ 」為例：第一階段是初次引入倍的活動，建議使用多步驟加法算式紀錄的格式來反映解題過程，例如記成「 $5 + 5 = 10$ ， $10 + 5 = 15$ ， $15 + 5 = 20$ 」，一方面反映了學童目前的活動方式，一方面也突顯了有 4 個集聚單位「5」，方便解題進度的掌握及解題活動的反省，並為引入乘法算式(強調二個單位)鋪路；因為題目是乘法問題，應該使用乘的語言來記錄，當學童熟悉乘法算式意義後，第二階段開始引入乘法算式紀錄格式，用「 $5 \times 4 = 20$ 」來代表算完 4 個 5 後獲得 20 的活動過程，建議教師要求學童採用多步驟乘法算式紀錄格式來反映解題過程，例如記成「 $5 \times 2 = 10$ ， $5 \times 3 = 15$ ， $5 \times 4 = 20$ 」，一方面反映學童進行「又一倍」活動的特性，進一步地掌握與反省解題活動類型，一方面幫助學童逐漸熟悉基本乘法事實。

當學童能使用「又幾倍」的解題策略時，可以要求學童用多步驟算式記錄格式，來記錄解題過程，以問題「 $25 \times 34 = (\quad)$ 」為例，可以使用「 $25 \times 10 = 250$ ， $25 \times 20 = 500$ ， $25 \times 30 = 750$ ， 25

$\times 31 = 775$ ， $25 \times 32 = 800$ ， $25 \times 33 = 825$ ， $25 \times 34 = 850$ 」來進行記錄，這樣的記錄方便於反省進行了幾次「又十倍」的活動，以及幾次「又一倍」的活動，是下一階段學習乘法算則的預備經驗。

當學童發展多單位觀點，使用「(幾個百)幾個十幾個一的幾倍」的策略進行乘法問題的解題活動時，可以引入直式紀錄的格式。「(幾個百)幾個十幾個一的幾倍」的策略，尚不是成人的乘法算則，成人乘法算則是將被乘數及乘數均視為多個單位的合成結果，例如在討論「3個十的3個十倍是9個百」時，將面臨單位乘以單位而獲得新單位的問題，例如：「拾」單位乘以「拾」單位得到「佰」單位，這是學童無法理解的活動。因為在直式紀錄的格式中只能看到結果，而不易看出這個結果是怎樣得到的，因此當直式紀錄不易分辨學童的實際解題過程時，教師應要求學童澄清直式紀錄的意義。

與加減文字題的問題紀錄相同，當學童累積倍的文字題解題經驗，能夠預期倍的問題的解題活動類型，並且已熟悉使用乘法算式紀錄代表倍的活動經驗後，即可引入倍的問題的問題記錄活動，要求使用算式填充題的格式記錄解題計畫（第四冊第四單元）。本教材亦引入乘數未知的倍的文字題（第五冊第九單元），以及被乘數未知的倍的文字題（第七冊第八單元），與加減文字題的問題紀錄相仿，當學童尚未掌握乘除互逆關係前，宜接受使用乘數未知或被乘數未知的算式填充題，來記錄該類文字題，待高年級之後，再進一步地限制用標準算式填充題來記錄。

• 乘法交換律與乘法結合律

交換律是一種求二元運算之結果與次序無關的規則，在四則運算中，加法和乘法兩種運算滿足交換律。加法交換律是指被加數與加數的角色互換，其運算結果不變的規律，而乘法交換律是指被乘數與乘數的位置交換，而其運算結果不變的規律。

在量的問題情境中，乘法交換律是指可以彈性地將單位量與單位數的角色交換，而其總量不變。以問題「一隻青蛙有4條腿，7隻青蛙有幾條腿？」

爲例，乘法交換律是指在完成計算之前，即可預期它們的結果必然相同，因爲可以以一隻青蛙的4條腿爲單位量，計算出7隻青蛙共有多少條腿，也可以先計數每一隻青蛙的左前腿，再以7條腿爲單位量，去計算出4個部位（左前、後腿，右前、後腿）共有多少條腿。所以當學童能掌握乘法交換律時，他知道所有的乘法問題都可以彈性地對調單位量與單位數的角色（可以先在7個4中，分別抽取一個1，合成集聚單位7，用盡4中所有的1，而形成4個7，因此將7個4與4個7間的等價關係，視爲當然），所以「 4×7 」與「 7×4 」的積數一定相同。請注意：乘法交換律不是描述當學童使

結合律是指在求若干數之和數或積數時，將其各項分成數群，任意加之或乘之，其和數或積數不變的約規。加法結合律是指計算 a 、 b 、 c 三數的和數時，先算 $a + b$ 的和數後，再算 $(a + b)$ 加 c 的和數，與先算 $b + c$ 的和數後，再算 a 加 $(b + c)$ 的和數，其結果相同。乘法結合律是指當計算 a 、 b 、 c 三數的積數時，先算 $a \times b$ 的積數後，再算 $(a \times b)$ 乘以 c 的積數，與先算 $b \times c$ 的積數後，再算 a 乘以 $(b \times c)$ 的積數，其結果相同。

· 除法問題的範圍

本教材由單位量轉換觀點，來處理乘除問題的教材，相對於乘法問題，包含除是解決單位數未知的問題，等分除是解決單位量未知的問題。以包含除問題「小明有12顆糖，4顆裝成一盒，可以裝成幾盒？」爲例，小明的糖原來是用1顆爲單位量來描述，共有12顆，而目前題目要求用1盒或4顆爲單位，重新描述總量，回答這裡有幾盒糖。以等分除問題「小明有12顆糖，平分裝成3盒，一盒有幾顆糖？」爲例，小明的糖原來是用1顆爲單位量來描述，共有12顆，而目前要求使用另一個新的單位量1盒來描述，而這個新的單位量尚未用1顆爲單位量來描述，換言之，新單位量是未知，只知用此新單位量來描述時，是有3盒。所以包含除是新單位數未知的單位量轉換活動，而等分除是新單位量未知的單位量轉換活動。

在非負整數除法問題中，本教材通常考量商數範圍的限制，來配合學童

目前的運思方式。由於包含除是單位數未知的單位量轉換問題，而等分除是新單位量未知的單位量轉換問題，當學童尙未能彈性地轉換單位數與單位量的角色以前，或尙未掌握乘法交換律以前，本教材將包含除與等分除視為兩類問題，逐漸地協助學童整合此兩類問題。

本教材在第四、五冊教材中，是以累進性合成運思為基礎，介紹包含除與等分除問題（第四冊第二單元）；在第六冊教材中，透過「一輪一次分一個」方法的限制，協助學童以包含除問題的觀點，來理解等分除問題，並限制使用連減的方法來解包含除或等分除問題，建立以部分—全體運思為基礎的除法活動（第六冊第二單元）；在第七冊教材中，以部分—全體運思為基礎，引入有除號的算式，來摘要記錄包含除或等分除問題的解題活動與結果（第七冊第一單元），並要求混合乘法與減法算式，重新描述解題過程，一方面簡化連減的過程紀錄，一方面累積乘、除法互為逆運算的經驗（第七冊第四單元），在累積使用除法算式的經驗後，本教材進一步要求使用有除號的算式填充題來記錄問題（第七冊第十單元）。在第八冊教材中，延伸學童使用乘法和減法算式記錄解題過程的經驗，協助學童解決商數為二位數的除法問題（第八冊第四單元），並首次引入除數未知與被除數未知的（整除）問題（第八冊第六單元），及形成使用直式格式記錄包含除與等分除解題活動的共識，但是此時進行的還不是成人的除法算則，只是幫助學童將自己的乘、減算式紀錄，轉換為直式格式（第八冊第十一單元）。

8 2 年課程標準教材綱要中整數除法部份只安排至四年級，內容部份只安排至除數是二位數，五年級並沒有要求安排整數除法的活動。但是本教材認為成人常使用估商策略解決除法問題，而部份—全體運思的學童不易掌握使用估商策略解決除法問題，因此將使用估商策略解題的除法算則延至五年級引入。因為本教材通常考量商數範圍的限制，因此先引入用「先算商數最多有幾個十，再算剩下的可以有幾個一」的方法解決商數是二位數的等分除及包含除問題（第九冊第六單元），再引入—使用「先算商數最多有幾個百，再算剩下的最多有幾個十，最後算剩下的可以有幾個一」的方式解決商數是

三位數的等分除及包含除問題（第九冊第十二單元）。

· 除法問題的解題策略

本教材預期二年級學童是累進性合成運思期。累進性合成運思期的學童可以重複地使用「1」單位來複製集聚單位，故而在面臨包含除問題「小明有12顆糖，4顆裝成一盒，可以裝成幾盒？」時，是利用較大集聚單位12中的元素1，來重複製作較小且等價的集聚單位4，其意義為「12個1可以做幾個4？」；學童可能採用累加策略，檢查要累加多少次4顆才可能到達12顆；也可能採用累減策略，12顆減去4顆是8顆，再減4顆是4顆，再減4顆就沒有剩餘了，再回頭計數做了幾次減的活動。相對地，在面臨等分除問題「小明有12顆糖，平分裝成3盒，一盒有幾顆糖？」時，是將大的集聚單位12中的元素1，逐個地分配至3個集聚單位，全部分完後，再計數此3個集聚單位中所累積1的個數；學童也可能先創造3個位置，一邊將代表糖的物件（例如花片或畫圈）逐個地分配至各個位置，一邊計數是否已分完12顆，當分完12顆時，再重新計數每個位置有幾顆，換句話說，學童只能在有具體物的情境下，進行具體的分配活動；學童亦可能使用嘗試錯誤的策略，先猜每盒有2顆，透過累加的活動，檢查是否3盒合起來是12顆，如果還有剩，則嘗試每盒3顆，在逐漸逼近的過程中，找到每盒應有4顆的答案。

本教材預期三、四年級學童已由累進性合成運思期進入部份—全體運思期，但尚未到達測量運思期。部分—全體運思期的學童能夠區分「1」單位與其合成的集聚單位，在解上述包含除問題時，較小的集聚單位4明顯地包含於較大的集聚單位12（但是4仍不是組成12的元素），可以由12中逐次地分離出4的部分，而不混淆1個4與1個1的意義，故而學童可採用累減策略解題，部分學童可能用嘗試錯誤的方式，逐次地增加盒數，而形成累加策略。相對的，在面臨上述等分除問題時，部分—全體運思期的學童能掌握「每次一盒分1顆，會用去3顆」，進而使用包含除的觀點，解決「12包含幾個3」的問題，並掌握須分配的次數，由分配的次數來決定單位量的

數值。部分學童亦可能使用嘗試錯誤的方式，逐次累加一盒裡糖果的顆數，而用乘法運算來檢查預測的顆數是否合理。

部分一全體運思期的學童，尚無法掌握除數為被除數組成元素的觀點，因此在使用估商的方式解決包含除問題「香皂 138 塊，6 塊裝成一盒，可以裝成多少盒？剩下幾塊？」時，雖然可以猜測總量 138 中包含單位量 6 的個數（例如 20 盒），並將總量 138 視為 20 個單位量 6 和殘餘量 18 的合成，但是尚不能預期殘餘量 18 亦是以單位量 6 為元素，而且殘餘量中單位量的個數 3 盒，和原先估計的單位數 20 盒合起來，恰好是總量中單位量的個數 23 盒，因此較不易產生將剩下的繼續分的活動，而這是成人除法算則中相當重要的步驟。本教材透過分段布題的方式，先在「最多可以裝成幾個十盒？」的要求下，進行估商問題；接著在「剩下的可以裝成幾盒？剩下幾塊？」問題下，要求將估商後的剩餘量，繼續進行包含除的活動；最後，在「一共裝成幾盒？剩下幾塊？」問題下，協助學童整合上述活動的結果。對等分除問題，則先透過「一盒一次分 1 塊」的策略，將等分除問題轉換為包含除問題後解題。

• 除法問題的記錄格式

在低年級階段，本教材對於包含除問題，只要求使用加、減算式或圖象，來記錄解題過程，尚不介紹除法的運算符號，而對於等分除問題，則只要求學童能自行解題，口述解題過程，而不強調任何型式的紀錄。

在解題活動紀錄方面，本教材分三個階段進行：(1) 用多步驟減法算式記錄解題過程；(2) 用有除號的算式摘要記錄整個解題活動與結果；(3) 用乘法及減法算式記錄解題過程。在第一階段，首先引入多步驟減法算式來記錄包含除與等分除的解題過程，一方面反映學童目前可以進行的活動方式，一方面透過同為連減的活動，聯絡包含除與等分除兩類問題的關係，以作為介紹除法算式的基礎（第六冊第二單元）。在第二階段，先引入除法算式格式的討論，由於目前是在非負整數範圍內進行除法活動，故依據除法原理，選擇「被除數÷除數=商數...餘數」為一般格式，來摘要記錄除法問題的

解題活動與結果，在格式討論時，強調如何將「13顆糖，4顆裝成一盒，一共裝成3盒，剩下1顆」這個解題活動與結果，用一個算式記錄下來（等分除問題亦同），而形成目前除法算式紀錄格式的共識（第七冊第二單元）。當學童已能使用除法算式填充題記錄問題後，開始進行第三階段，協助學童重整解題經驗，以上述包含除問題為例，學童已用連減的多步驟記錄格式完成解題活動的紀錄，「 $13 - 4 = 9$ ； $9 - 4 = 5$ ； $5 - 4 = 1$ 」，在完成解題過程的討論後，透過詢問「4顆裝成一盒，裝成2盒，是用掉多少顆糖，用算式要怎麼記？」、「裝成3盒，是用掉多少顆糖，用算式要怎麼記？」、「13顆糖，用掉12顆，剩下幾顆，用算式要怎麼記？」，協助學童改採多步驟乘法與減法算式紀錄來描述解題過程，「 $4 \times 2 = 8$ ； $4 \times 3 = 12$ ； $13 - 12 = 1$ 」。此種記錄格式上的轉變，重新組合解題活動的成分，一方面協助學童經驗加減互逆的現象，一方面做為除法算則發展的基礎（第七冊第四單元）。

由於學童在中年級階段，尚無法理解成人的除法算則，故而在商數為一位數的問題中，引入除法直式記錄格式，協助學童認識成人在直式紀錄中，如何呈現問題，如何將原來乘法算式及減法算式所代表的活動，記錄在直式紀錄的格式裡（第八冊第十一單元）。當學童累積相當多包含除與等分除問題的解題經驗，在面臨包含除或等分除問題時，已能預期解題活動的方式，並且能用除法算式摘要記錄包含除與等分除解題活動，以這些經驗為基礎，學童可以仿照以往用算式填充題記錄問題的方式，將其預期解題活動的方式與內容，用算式填充題的格式記錄下來，由於尚未獲得解題的結果，用括號來表示商數與餘數的未知，而形成除法算式填充題，來記錄包含除或等分除問題（第七冊第十單元）。

當學童使用「先算商數最多有幾個十，再算剩下的可以有幾個一」的方法解決商數是二位數的等分除及包含除問題時，本課程希望學童使用多步驟除法直式記錄格式記錄解題活動，協助學童將自己的乘、減算式紀錄，轉換為直式格式，並滿足成人的一些直式紀錄原則。

三、以「單位量轉換」觀點處理「乘除問題」的教材

· 不透過「連加」的方式處理「整數乘法」的教材

依據 6 4 年課程標準編寫的數學課本，是透過「連加」的方式引入乘法算式，並將乘法視為加法的速算，而本教材則透過「單位量轉換」的觀點引入乘法算式，現概略描述為什麼要捨棄「連加」的方式，選用「單位量轉換」的觀點引入乘法算式。

當學童第一次使用乘法算式摘要地記錄解題過程與結果時，乘法算式只能有一種意義。6 4 年課程是透過「連加」的方式引入乘法算式，「 $3 + 3 + 3 + 3$ 」可以記成「 3×4 」，理由是：學童可以很快地掌握乘法算式的意義，因為被乘數及乘數都是正整數的倍的問題，很容易轉換為連加的問題（請自行命一些乘數是正整數的乘法問題，這些問題是否都能夠使用連加的方式解題），並使用乘法算式摘要地記錄解題過程與結果。

當乘法問題的被乘數由正整數擴充為分數或小數，而乘數仍是正整數時，將分數或小數連加整數次尚有意義，學童可以類比被乘數及乘數都是正整數的乘法問題，透過連加的方式解題，並使用乘法算式摘要地記錄解題過程與結果。以問題「一杯水有 0.1 公升，5 杯水合起來有多少公升？」為例，學童可以使用將 0.1 連加五次的方式解題，並將解題過程與結果記成「 $0.1 \times 5 = 0.5$ 」。但是當乘法問題的乘數擴充至分數或小數時，將一個數連加非整數次變成沒有意義，學童無法類比乘數是整數的乘法問題，透過連加的方式解題，因此無法使用乘法算式摘要地記錄解題過程與結果。以問題「一瓶水有 2 公升，0.3 瓶水有多少公升？」為例，2 加 0.3 次是沒有意義的，因此當乘數是分數或小數時，6 4 年課程改用倍的語言引入乘法算式，透過「2 的 0.3 倍是 0.6」引入乘法算式「 $2 \times 0.3 = 0.6$ 」。

當乘數是整數時，透過「連加」的方式首次引入乘法算式，當乘數是分

數或小數時，透過「倍」的語言再次引入乘法算式，這種引入的方式，明顯地讓學童感覺到乘號有兩種不同的意義。一個數學符號有兩種不同的意義，對國小學童而言是不好的，因為學童很容易混淆數學符號的意義。為了幫助學童能擴展數學符號的意義，讓乘數是整數、分數或小數時，乘法算式的意義都相同，本教材改用「單位量轉換」的觀點引入乘法算式。

・同一種量的情境，可以選用不同的單位量來描述

一種量的情境，當使用數字來描述時，可以有許多不同的描述方式。以教室裡黑板的面積為例，以「1 平方公分」為單位來測量時，可以得到黑板的面積是「4 萬」平方公分；以「1 平方公尺」為單位來測量時，可以得到黑板的面積是「4」平方公尺；以「1 個黑板擦」為單位來測量時，可以說黑板的面積和「3 2 0」個黑板擦合起來的面積一樣大，……。也就是說，當使用不同的單位測量黑板的面積時，就會得到不同的數的描述方式。

『 ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 』

再以上圖中 1 2 個蘋果的情境為例，也可以使用不同的數字來描述這 1 2 個蘋果。以「1 個」蘋果為單位，上圖中有「1 2 個」蘋果；以「1 盤」（3 個蘋果裝 1 盤）蘋果為單位，上圖中有「4 盤」蘋果；以「1 片」（1 個蘋果切成 4 片）蘋果為單位，上圖中有「4 8 片」蘋果，以「1 箱」（1 2 0 個蘋果裝 1 箱）蘋果為單位，上圖中有只「十分之一箱」蘋果，……。也就是說，當選擇不同的單位時，就會產生不同的數字來描述這 1 2 個蘋果。為了溝通上的方便，先介紹「單位量」與「單位數」這兩個名詞，以 4 盤（3 個蘋果裝 1 盤）蘋果有 1 2 個為例，指的是 4 個「3」可以合成 1 2 個「1」，其中 3 是由「1」合成的單位，用 3 來描述此單位的數量，稱之為「單位量」，4 則是描述單位量「3」的個數，稱之為「單位數」。

・乘法問題都可以視為單位量轉換的問題

被乘數及乘數都是整數的乘法問題可以視為單位量轉換的問題，以問題

「3 個蘋果裝一盒，4 盒共有幾個蘋果？」為例，問題中蘋果的總量本來是以「1 盒」為單位（不是以 1 個為單位）來描述，共有 4 個單位（每個單位有 3 個蘋果），現在要以「1 個」蘋果為單位重新描述總量，問共有幾個蘋果，也就是說，要學童回答「4 個 3 是多少個 1」。問題中已知單位量（3 個）及單位數（4 個 3），雖然知道新的單位是由 4 個 3

合成的，但是其數值（以 1 為單位的計數結果）尚為未知，解題者要將原來以「盒」為單位的量，轉換為以「個」為單位的量，是一種單位量轉換的活動。

$$\frac{1}{4}$$

被乘數是分數或小數，乘數是整數的問題，也可以視為單位量轉換的問題，以問題「1 片蘋果是 $\frac{1}{4}$ 個，4 8 片是多少個蘋果？」為例，問題中蘋果的總量本來是以「1 片」為單位來描述，共有 4 8 片，現在要求以「1 個」蘋果為單位重新描述總量，問共有幾個蘋果，也就是說，要求學童回答「4 8 個 $\frac{1}{4}$ 是多少個 1」。解題者要將原來以「片」為單位的量，轉換為以「個」為單位的量，也是一種單位量轉換的活動。

乘數是分數或小數的問題也可以視為單位量轉換的問題，以問題「120 個蘋果裝一箱，0.3 箱有幾個蘋果？」為例，問題中蘋果的總量本來是以「1 箱」為單位來描述，共有 0.3 箱，現在要求以「1 個」蘋果為單位重新描述總量，問共有幾個蘋果，也就是說，要學童回答「0.3 個 120 是多少個 1」。解題者要將原來以「箱」為單位的量，轉換為以「個」為單位的量，也是一種單位量轉換的活動。換句話說，透過「單位量轉換」的觀點，可以將被乘數及乘數是整數、分數或小數的問題，都視為單位量轉換的問題。

• 除法問題也可以看成單位量轉換的問題

以包含除問題「有 12 個蘋果，3 個裝成一盒，儘量裝完，可以裝成多少盒？剩下幾個蘋果？」為例，包含除是解決單位數未知的問題，問題中的蘋果原來是用「1 個」為單位量來描述，共有 12 個，而現在要求改用「1 盒（或 3 個）」為單位，重新描述總量，回答這裡有幾盒蘋果。解題者要將原來以「個」為單位的量，轉換為以「盒」為單位的量，所以包含除是新單

位數未知的單位量轉換活動。

以等分除問題「12個蘋果，平分裝成3盒，儘量裝完，一盒有幾個蘋果？剩下幾個蘋果？」為例，等分除是解決單位量未知的問題，問題中蘋果的個數原來是用「1個」為單位量來描述，共有12個，而目前題目要求使用另一個新的單位量「1盒」來描述，而這個新的單位量尚未用「1個」為單位量來描述，換言之，新單位量是未知，只知用此新單位量來描述時，是有3盒。解題者要將原來以「1個」為單位的量，轉換為以「4個」為單位的量（才會平分裝成3盒），所以等分除是新單位量未知的單位量轉換活動。

四、教學方式

所有的數學符號開始時都只是一種紀錄，熟練並內蘊化以後才會成為工具。以加法問題「爸爸有5個蘋果，媽媽有3個蘋果，兩個人共有幾個蘋果？」為例，學童不會加法計算也能夠解決問題，學童可以先畫出5個蘋果的圖像，再畫出3個蘋果的圖像，再透過點數得到共有8個蘋果的答案。當學童算出答案是8個蘋果後，他已經完成了解題活動，應該可以去休息，但是大人還要求學童寫出加法算式「 $5 + 3 = 8$ 」，對學童而言，寫出算式「 $5 + 3 = 8$ 」是多餘的，因為他已經算出答案。大人為什麼要求學童必須寫出加法算式？要求學童寫出算式的第一個理由是溝通，告訴別人他是怎麼算出答案的；第二個理由是希望學童透過不斷的記錄，熟記加法算式後，可以使用加法來替代點數。

當學童解題成功，並首次使用算式「 $5 + 3 = 8$ 」與他人溝通解題活動時，加法算式「 $5 + 3 = 8$ 」只是摘要地記錄解題過程與結果，學童並沒有使用加法當做工具來解決問題，也就是說，學童的解題工具是點數，而加法算式只是解題活動的摘要紀錄。當學童累積許多成功解決加法問題，以及使用加法算式記錄解題活動的經驗後，可能記憶了一些加法算式，當學童再解決某個加法問題時（例如：6個蘋果和3個蘋果合起來有幾個蘋果？），他

可能突然發現點數好麻煩，學童就直接使用記憶中的加法算式（例如： $6 + 3 = 9$ ）來替代點數得到答案，此時，加法算式就由紀錄變成解題的工具，換句話說，剛開始時，加法算式只是解題的摘要紀錄，當學童使用加法替代點數後，加法算式開始擁有雙重的意義，是解題工具，也是解題的紀錄（使用加法當做解題工具）。

相同地，學童不會乘法計算，也能夠解決乘法問題，以問題「1 枝鉛筆賣 3 元，4 枝鉛筆賣多少錢？」為例，學童如何解決這個問題，與他使用什麼方式理解這個問題有關，而學童使用什麼方式理解這個問題，則與學童所擁有的解題工具有關。如果學童不會加法與乘法計算，他手上只有點數這一工具，學童只能將原問題解讀為能使用點數來解題的新問題後，再解決問題，例如學童可能先畫出一枝筆及 3 元的圖像，表示第一枝筆可以換 3 元，再畫出一枝筆及 3 元的圖像，表示第二枝筆可以換 3 元，……，待學童畫出題目中的 4 枝筆及 4 個 3 元的圖像後，就可以透過點數有幾個一元的方式，得到答案是 12 元。如果學童手上多出加法這種工具，就可以使用較有效率的加法解題，學童可以將原問題解讀成連加四次 3 元，再使用加法當做工具解決問題，並使用算式「 $3 + 3 = 6$ ， $6 + 3 = 9$ ， $9 + 3 = 12$ 」記錄解題活動，當然，也可以要求學童將上述的多個加法算式摘要地記成乘法算式「 $3 \times 4 = 12$ 」，請注意，此時的乘法算式只是解題的摘要紀錄，學童是使用加法當做工具解決問題，使用乘法算式記錄解題活動。如果乘法也是學童可以掌握的工具，他就可以用最有效率的乘法解決問題，並將解題過程與結果記成「 $3 \times 4 = 12$ 」。請注意，此時的乘法算式是解題工具，同時也是解題紀錄（使用乘的方式解題）。

首引加法算式時，加法算式是解題紀錄，經過經常使用加法算式記錄解題活動，學童會使用加法算式替代點數活動，而將加法算式變成一種解題的工具；相同的，本教材認為應該透過相同的方式幫助學童使用乘法來替代連加，讓乘法算式由紀錄逐步變成一種解題的工具。以問題「1 枝鉛筆賣 3 元，9 枝鉛筆賣多少錢？」為例，當乘法尚未成為工具之前，對學童而言，加

法是比較有效率的解題工具，學童只能使用加法當做工具解決問題，並使用加法算式記錄解題活動（見圖一），接著，可以要求學童使用有乘號的算式記錄解題活動（見圖二），要求學童使用有乘號的算式記錄解題活動的理由是：第一，乘法算式是一種新的紀錄格式，必須要求學童經常使用，學童才會掌握其意義；第二，要求學童經常使用乘法算式，學童記憶了這些常使用的乘法算式，才能夠使用乘法替代連加解決問題。請注意，在圖一中，加法算式不只是解題紀錄，同時也是解題的工具，但是在圖二中，乘法算式只是解題的記錄，學童是使用加法當做工具來解決問題，而使用乘法算式記錄解題活動。當學童一次只能處理一個「3」時，學童會將解題活動記成圖一或圖二，但是當學童更能掌握「3」這個單位時，學童也可能使用一次累加兩個3的方式（又一倍）解決問題（見圖三），並使用有乘號的算式記錄解題活動（見圖四），其中圖三中的加法算式是紀錄，也是工具，而圖四中的乘法算式只是紀錄，學童還是使用加的方式解決問題。圖五也是學童可能的紀錄，是以加法當做工具情境下最有效率的解題活動，學童先算出兩個3合起來是6，再算出兩個3再加兩個3（ $6 + 6$ ）是12（又二倍），也就是四個3合起來是12，再算出四個3加四個3（ $12 + 12$ ）是24（又四倍），也就是八個3合起來是24，最後再加一個3（又一倍），得到九個3合起來是27的答案。

$$3 + 3 = 6$$

$$6 + 3 = 9$$

$$9 + 3 = 12$$

$$12 + 3 = 15$$

$$15 + 3 = 18$$

$$18 + 3 = 21$$

$$21 + 3 = 24$$

$$24 + 3 = 27$$

（圖一）

$$3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$3 \times 5 = 15$$

$$3 \times 6 = 18$$

$$3 \times 7 = 21$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$3 \times 9 = 27$$

（圖二）

$$3 + 3 = 6$$

$$6 + 6 = 12$$

$$12 + 6 = 18$$

$$18 + 6 = 24$$

（圖三）

$$3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$3 \times 6 = 18$$

$$3 \times 8 = 24$$

（圖四）

$$\begin{array}{llll}
 3 \times 2 = 6 & 3 \times 7 = 21 & 3 \times 9 = 27 & 3 \times 1 = 3 \\
 3 \times 4 = 12 & 3 \times 8 = 24 & & 3 \times 3 = 9 \\
 3 \times 8 = 24 & 3 \times 9 = 27 & & 3 \times 5 = 9 \\
 3 \times 9 = 27 & \text{(圖六)} & \text{(圖七)} & 3 \times 7 = 21 \\
 & & & 3 \times 9 = 27 \\
 & & & \text{(圖八)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 3 \times 1 = 3 & 4 \times 9 & 4 \times 12 \\
 3 \times 3 = 9 & & \\
 3 \times 8 = 24 & 8 \times 3 & 13 \times 3 \\
 3 \times 9 = 27 & \text{(圖十)} & \\
 & & \text{(圖九)}
 \end{array}$$

如果學童經常使用乘法算式記錄解題活動，某一天，學童透過童謠「管你三七二十一」，記住了「 $3 \times 7 = 21$ 」，並將解題活動記成圖六，此時，「 $3 \times 7 = 21$ 」已經由紀錄變成解題的工具，因為學童尚未熟記「 3×8 」及「 3×9 」，因此學童還是使用加的方式（又一倍）算出後續的答案。注意，此時「 $3 \times 7 = 21$ 」是工具、也是紀錄，但是「 $3 \times 8 = 24$ 、 $3 \times 9 = 27$ 」只是紀錄，尚未成為解題的工具。如果學童記住了「 $3 \times 9 = 27$ 」，並使用它替代連加解決問題，此時，乘法已慢慢地變成解題的工具。

如果要幫助學童掌握乘法的意義（使用乘法替代連加），上述這種學習的歷程，每位學童都應該經歷過，只是每位學童將乘法算式由紀錄轉變為工具的時間差可能不同。但是，當學童先背會了乘法表，他還願意依照上述的方式學習乘法嗎？成人常要求學童先背乘法表，主要的原因是：成人將乘法

表視為解決乘法問題的工具，學童必須背會了乘法表，才能夠解決多位乘以多位的乘法問題。如果採用上述方式編寫的乘法教材，就不可讓學童先背乘法表，如果學童先背會乘法表，這種教材對學童而言是沒有意義的。部份坊間編寫的教材將答案記成圖八，主要的原因是坊間編寫教材的成人不了解課程編寫的意義，誤以為使用多個乘法算式記錄的用意是幫助學童背乘法表，因此見到課本中有圖四的記法，就自做主張地將它改成圖八的記法，當學童使用加法當做工具解題時，是不太可能出現圖八這種記法。

如果學童先背了乘法表，就不適合進行本教材所編寫的活動，因為學習的順序不對，有很多學童出現圖九這種記法，主要的原因是學童已經熟背乘法表，早就背出答案是 27 ，但是教師或課本都要求學童使用多個乘法算式記錄解題活動，為了應付成人的要求，只好隨意的亂寫一些乘法算式來應付，有這種表現的學童怎麼可能會喜歡數學？有很多教師問，如果小孩已經背會了乘法表，是否還有補救的方法？請先看圖十中的四個問題：多數成人都認為左邊的兩個問題比較簡單，右邊的兩個問題比較困難，主要的原因是成人將這四個問題視為乘法問題，因為九九乘法表是解乘法問題的基本工具，因此左邊的兩個問題是基本題，比較簡單，右邊的兩個問題不是基本題，必須利用九九乘法表及分配律等工具才能解決問題，因此比較困難。但是換成以加法為工具的角度來看這四個問題，就會發現它們的困難度差異不大， 4 加九次與 4 加十二次，只是後者多加了三次，運作上比較麻煩，但是在概念上，兩者並沒有差異。如果學童已經背會乘法表，可能幫助學童的方法是：請教師在布題時，儘量少出九九乘法範圍內的問題（學童已經將它當做工具），儘量多出九九乘法範圍外的問題（學童尚未將它當做工具），也就是說，左邊這類的問題儘量少出，多出一些右邊這類的問題，強迫學童連絡加法和乘法的關係，幫助學童瞭解乘法算式的意義。

五、成人算則

本教材較嚴格地區分「算則」與「直式」的意義，「算則」指的是解題

策略，是社會上大多數人所使用的解題策略，而「直式」是一種紀錄格式。例如現在社會上大多數成人都使用多單位的策略解決加減問題，而使用多單位策略解決加減問題時，直式紀錄是比較容易溝通且經常被使用的紀錄格式，因此很多人將此種解題策略與紀錄格式合稱為成人加減直式算則。

• 成人乘法算則

以二位數乘以二位數乘法問題「 $68 \times 37 = (\quad)$ 」為例，如果以單位的觀點來分類，可以將問題分為四大類。第一類：將被乘數與乘數都視為以「1」為計數單位；第二類：將被乘數視為多單位的合成結果（例如將68視為6個「拾」8個「1」），將乘數視為以「1」為計數單位；第三類：將被乘數視為以「1」為計數單位，將乘數視為多單位的合成結果；第四類：將被乘數與乘數都視為多單位的合成結果。

如果學童以第一類的觀點看問題，他們可能有下列四種解題策略。第一種：透過又一倍（或又幾倍）的方式，將68累加37次後得到答案；第二種：將被乘數68視為60和8的合成結果，透過乘法對加法的右分配律「 $68 \times 37 = (60 + 8) \times 37 = 60 \times 37 + 8 \times 37$ 」解題；第三種：將乘數37視為30和7的合成結果，透過乘法對加法的左分配律「 $68 \times 37 = 68 \times (30 + 7) = 68 \times 30 + 68 \times 7$ 」解題；第四種：將被乘數68視為60和8的合成結果，將乘數37視為30和7的合成結果，再透過乘對加的分配律「 $68 \times 37 = (60 + 8) \times (30 + 7) = 60 \times 30 + 60 \times 7 + 8 \times 30 + 8 \times 7$ 」解題。這四種策略都是國小學童可以理解的解題策略。

如果學童以第二類的觀點看問題，他們的解題策略可能是：先算出6個十的37倍是222個十（也就是2220個一），再算出8個一的37倍是296個一，222個十和296個一合起來是2516。因為這種解題策略同時使用兩種計數單位，因此學童較偏愛使用直式紀錄的格式記錄解題活動，這種解題策略也是國小學童可以理解的解題策略。

如果學童以第三類的觀點看問題，他們要分別算出68的7倍是多少，

以及 68 的 3 個十倍是多少，再將這兩答個積數合起來得到答案，學童可以算出 68 的 7 倍是多少，但是無法理解 68 的 3 個十倍的意義，這種策略是國小學童無法理解的解題策略。

如果學童以第四類的觀點看問題，他們要分別算出 6 個十的 3 個十倍是多少，6 個十的 7 倍是多少，8 個一的 3 個十倍是多少，以及 8 個一的 7 倍是多少，學童可以算出 6 個十的 7 倍是多少，以及 8 個一的 7 倍是多少，但是學童無法理解 8 個一的 3 個十倍以及 6 個十的 3 個十倍的意義，這種策略也是國小學童無法理解的解題策略。

成人經常使用的解題策略有下面兩種：第一種是將被乘數與乘數都視為多單位的合成結果：例如將 68 視為 6 個十 8 個一，37 視為 3 個十 7 個一，先算 8 個一的 7 倍是 56 個一，6 個十的 7 倍是 42 個十，再算 8 個一的 3 個十倍是 24 個十，6 個十的 3 個十倍是 18 個百，最後再透過加法算則，利用直式紀錄將上述結果合起來，得到答案是 2516。這種解題策略除了利用乘法對加法的分配律外，還涉及十單位乘以十單位是百單位的概念，對現階段學童而言，可能無法理解為什麼兩個單位相乘會變成另一個單位。

第二種是將被乘數視為多種單位的合成結果，而將乘數視為以 1 為計數單位：例如將 68 視為 6 個十 8 個一的合成結果，先算出 8 個一的 37 倍是 296 個一，再算出 6 個十的 37 倍是 222 個十，最後再透過加法算則，使用直式紀錄將上述結果合起來，得到答案是 2516。成人也可能為了運作方便，透過乘法交換律，先算 7 個一的 68 倍是 476 個一，再算出 3 個十的 68 倍是 204 個十。因為現階段學童無法理解第一種解題策略，故而本教材將第二種解題策略視為乘法算則，但是也協助學童看懂成人使用第二種策略解題後的直式紀錄（特別是利用乘法交換律的策略）。

• 成人除法算則

以四位數除以二位數的除法問題「 $3987 \div 19 = () \dots ()$ 」為例：成人常透過等分除的問題情境，將被除數視為多單位的合成結果，而將除數視為以「1」為計數單位的合成結果：例如將被除數視為 3 個千 9 個

百 8 個十 7 個一的合成結果，由最高階的「仟」單位開始運算，3 個「仟」無法平分成 1 9 等份，因此將 3 個「仟」換成 3 0 個「佰」，加上原來的 9 個「佰」是 3 9 個「佰」，3 9 個「佰」平分成 1 9 等份，每份是 2 個「佰」，剩下 1 個「佰」不夠分，再將 1 個「佰」換成 1 0 個「拾」，加上原來的 8 個「拾」，合起來是 1 8 個「拾」，1 8 個「拾」無法平分成 1 9 等份，因此每份分到 0 個「拾」，再將 1 8 個「拾」換成 1 8 0 個「1」，加上原來的 7 個「1」，合起來是 1 8 7 個「1」，1 8 7 個「1」平分成 1 9 等份，每一份是 9 個「1」，還剩下 1 6 個「1」，合起來每份分到 2 個「佰」0 個「拾」9 個「1」，也就是每份是 2 0 9，還剩下 1 6。因為成人是透過等分除問題情境來描述解題活動，因此在直式紀錄上，被除數及商數的單位是一致的，因此被除數及商數位值的對齊，變成十分的重要。成人習慣的除法直式紀錄如下：

<table style="margin: auto;"> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">千</td><td style="text-align: center;">百</td><td style="text-align: center;">十</td><td style="text-align: center;">個</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">位</td><td style="text-align: center;">位</td><td style="text-align: center;">位</td><td style="text-align: center;">位</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">9</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: right;">1 9</td><td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">3 9 8 7</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black;">3 8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1 8 7</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black;">1 7 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1 6</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>			千	百	十	個			位	位	位	位			2	0	9		1 9	3 9 8 7						3 8						1 8 7						1 7 1						1 6					<table style="margin: auto;"> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">千</td><td style="text-align: center;">百</td><td style="text-align: center;">十</td><td style="text-align: center;">個</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">位</td><td style="text-align: center;">位</td><td style="text-align: center;">位</td><td style="text-align: center;">位</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">9</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: right;">1 9</td><td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">3 9 8 7</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black;">3 8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1 8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black;">0</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1 8 7</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black;">1 7 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1 6</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>			千	百	十	個			位	位	位	位			2	0	9		1 9	3 9 8 7						3 8						1 8						0						1 8 7						1 7 1						1 6				
		千	百	十	個																																																																																																								
		位	位	位	位																																																																																																								
		2	0	9																																																																																																									
1 9	3 9 8 7																																																																																																												
	3 8																																																																																																												
	1 8 7																																																																																																												
	1 7 1																																																																																																												
	1 6																																																																																																												
		千	百	十	個																																																																																																								
		位	位	位	位																																																																																																								
		2	0	9																																																																																																									
1 9	3 9 8 7																																																																																																												
	3 8																																																																																																												
	1 8																																																																																																												
	0																																																																																																												
	1 8 7																																																																																																												
	1 7 1																																																																																																												
	1 6																																																																																																												

雖然使用等分除的觀點很容易解釋這樣的直式紀錄，但是如果改以包含除的觀點解釋，則比較困難，學童必須掌握測量運思，能彈性地調整單位量與單位數的角色，才能夠解釋成功，例如將 3 9 8 7 視為 3 9 個百 8 個十 7 個一，先拿 3 9 個「佰」來分，每 1 9 個「1」分成一堆，最多可以分成幾個「佰」堆？因而得到最多可以分到 2 個「佰」堆，.....等，因此，在介紹

成人除法的直式紀錄，本教材建議先以等分除的情境入手，再介紹包含除的情境。

本教材並不強調成人除法算則，因為學童是透過「一輪一次分一個」方法的限制，將等分除問題視為包含除問題後，才引入除法算式，也就是說，本教材常先進行包含除問題的解題活動，再進行等分除問題的解題活動。因此本教材引入的除法直式紀錄，還不是成人的除法直式紀錄，學童是使用「先算商數最多有幾個百，再算剩下的最多有幾個十，最後算剩下的可以有幾個一」的方法來解題（基本上，學童將被除數及除數都視為以「1」為計數單位，透過先乘後減的策略解題），這樣的解題策略，比較容易在包含除情境下進行，當學童遇到等分除情境問題時，常透過轉換，將等分除問題轉換成包含除問題後再進行解題活動。

本教材在第八冊第十四單元首次引入除法直式紀錄格式，當時並不強調解題策略的限制，而是協助學童學習問題原始條件的記法，以及將自己的乘、減算式紀錄，轉換為直式格式，並滿足如下的一些直式紀錄原則：(1) 記錄問題的原始條件；(2) 記錄使用乘法和減法解題過程的結果；(3) 記錄解題過程時，利用位值概念；(4) 記錄解題結果（包括商數與餘數）。在第九冊第十二單元，則要求使用多步驟除法直式記錄格式，分別記錄使用「先算商數最多有幾個十，再算剩下的可以有幾個一」及「先算商數最多有幾個百，再算剩下的最多有幾個十，最後算剩下的可以有幾個一」的方法，解決商數為二位數及三位數的包含除及等分除問題的解題過程與結果。但是學童的多步驟直式紀錄，可能與成人習慣的直式紀錄尚有差異。

本教材在第十冊才介紹成人的除法直式紀錄，但主張只要幫助學童看得懂此直式紀錄及其所呈現的解題過程即可，在以後的練習或測驗中，不宜以此直式紀錄格式為評量的唯一標準。

六、記錄格式

本教材明顯地區分解題活動與記錄（表徵）活動兩種概念：解題活動探

討各種的解題方式（策略），例如成人習慣使用的加法算則，是一種解加法問題的運算策略；記錄活動側重紀錄（表徵）格式的共識與使用，例如成人習慣使用的直式紀錄格式，是一種記錄加法算則解題過程與結果的紀錄格式。本教材進一步地區分解題活動紀錄與問題紀錄兩類記錄活動。

• 解題活動紀錄

當學童完成解題活動後，利用一組符號來記錄活動經驗，稱之為解題活動紀錄，依據引入的先後次序，本教材區分下列四種格式：(1) 算式摘要紀錄；(2) 多步驟算式紀錄；(3) 直式紀錄；(4) 逐次減項紀錄。

當學童有足夠的成功解題經驗，能夠掌握解題活動的細節，並形成解題活動類型後，就可以引入各種解題活動類型（運算）的算式摘要紀錄，討論運算符號的意義並形成共識，例如使用「 $5 + 4 = 9$ 」記錄「5個和4個合起來是（得到）9個」的解題活動與結果；使用「 $9 - 5 = 4$ 」記錄「自9個中拿走5個是（得到）4個」的解題活動與結果（第一冊第七單元）；使用「 $9 \times 4 = 36$ 」記錄「9個的4倍是（得到）36個」的解題活動與結果（第四冊第二單元）；使用「 $37 \div 9 = 4 \dots 1$ 」記錄「將37個，9個裝成一份，可以裝成4份，剩下1個」或「將37個分成9份，一份得到4個，剩下1個」的解題活動與結果（第七冊第一單元）。上述的算式紀錄，都反映出解題活動的重要元素：起始條件、活動方式以及最終結果，但並未清楚地反映解題過程中的中間步驟，所以算式紀錄只是解題活動的摘要紀錄。

為了協助學童對解題過程的反省，本教材引入多步驟算式紀錄格式，在「把你先算什麼，後算什麼，用算式記下來」的要求下，學童必須將解題過程中的各個重要步驟，分別地用算式記錄下來（第三冊第二單元）。例如累進性合成運思的學童，在解「 $9 \times 4 = (\quad)$ 」問題時，是透過逐次地累加9的方式來解題，2個9合起來是18，再加1個9，3個9合起來是27，再加1個9，4個9合起來是36，在要求使用倍的語言重新描述，以及使用多步驟算式格式記錄的限制下，形成「 $9 \times 2 = 18$ ； $9 \times 3 = 27$ ；

「 $9 \times 4 = 36$ 」的紀錄（第四冊第二單元），一方面反映學童進行逐次又一倍的解題步驟，一方面協助學童掌控解題的進度，計數累加 9 的次數。至於個人的解題過程紀錄應多麼詳細，建議教師採彈性的標準，視各個學童的發展狀況，加以調整，以學童實際進行的活動為基準，當已掌握及熟習數個步驟的活動意義時，可以使用摘要的方式記錄，若對於活動的進行尚不熟悉，則反省每個步驟，並作出紀錄，對學童的學習與發展較為有益。

直式紀錄格式強調位值概念的應用，當部分—全體運思學童能使用多單位的觀點來解讀數字（詞），在各個單位上進行運算活動，並透過各單位間的化聚活動來整合運算結果時，透過「用直式把你的做法記下來」的限制，要求學童使用直式紀錄的格式來溝通解題過程（第六冊第八單元）。直式紀錄包括三個部分：(1) 題目的原始條件；(2) 解題過程視窗；(3) 最終結果。而解題過程視窗內記錄解題過程中間步驟的結果（直式紀錄中只能看到結果，而無法看到如何得到結果的過程），當學童已掌握及熟悉數個步驟的活動意義時，可以省略或簡化視窗內的紀錄。由於配合位值概念來溝通紀錄中數字的意義，在使用直式紀錄格式記錄解題活動與結果時，應要求下列的限制：(1) 利用位值概念，對齊數碼的位置，例如個位、十位皆要對齊；(2) 利用位值記錄幾個十加幾個十的活動時，不必在個位上記「0」；(3) 一個位置上記的數字不能超過 9。

在第八冊第十四單元，本教材引入兩步驟加減問題解題活動的逐次減項紀錄格式，透過「 $12 - (15 - 7)$ 」、「 $12 - 8$ 」、「4」三者間的比較活動，先協助學童掌握等號的遞移性質；再在兩步驟問題情況下，討論逐次減項紀錄格式的記法及意義，使用「 $12 - (15 - 7) = 12 - 8 = 4$ 」的記錄格式，來取代原先的多步驟算式紀錄格式「 $15 - 7 = 8$ ； $12 - 8 = 4$ 」；並形成共識，在「用逐次減項的記法，把你的做法記下來」的要求下，要用一個式子，透過連等的方式（蘊涵等號遞移性質的認識），把原始問題、解題中間步驟與最終結果都記錄下來。

• 問題紀錄

問題紀錄是用算式填充題的格式，摘要記錄文字題的題意或解題計劃，在學童理解文字題的題意，形成解題計畫後，要求將預期解題活動中的重要成分選取出來，用算式填充題格式來描述，因此，問題紀錄形成在執行解題活動之前（第二冊第九單元），以追加型問題「小明有 5 元，爸爸再給他多少錢，他就會有 9 元」為例，學童可以使用算式填充題「 $5 + () = 9$ 」記錄題意（解題計劃），描述預期進行合成活動，以 5 為合成的起點，而 9 為合成後的結果。由於問題紀錄是在解題活動之前，在布完問題後，會先要求學童「把問題用算式填充題記下來」，再進一步地要求解題、以及解題過程的紀錄。

本教材使用「列式活動」這個名詞，來描述特別要求的問題記錄活動：使用標準算式填充題（未知數在等號右邊的算式填充題）來記錄問題。例如部分—全體運思的學童，掌握了加減互為逆運算概念，能夠使用分解問題的觀點，來理解加數（被加數）未知的合成問題，也就是說，能夠限制學童使用減法標準算式填充題的格式，來記錄加數未知的問題，以問題「姊姊有 29 顆葡萄，媽媽給了她一些葡萄後姊姊有 46 顆，媽媽給她多少顆？」為例，在「用等號右邊只有括號的算式填充題把問題記下來」的限制，要求學童形成標準算式填充題「 $46 - 29 = ()$ 」的問題紀錄（第六冊第六單元）。

在第八冊第十二單元，本教材引入併式填充題（使用括號區分運算次序）的討論，例如使用「 $12 - (15 - 7) = ()$ 」的格式，記錄兩步驟加減問題。由於部分—全體運思學童，已能將兩數的差視為一個數學物件，不須實際地執行其所代表的活動，亦能在概念上將它當作下一個運算活動的對象，因此可以在「用算式填充題，把你預備先做什麼，後做什麼記下來」的要求下，使用併式填充題的格式，把解題計畫記錄下來，並形成共識，使用括號來表示預備要先做的部分。

• 乘法算式紀錄

以問題「3 個蘋果裝一盒，4 盒共有幾個蘋果？」為例，學童以「3」

為單位量，累積 4 個 3 得到「4 個 3 合起來是 12」的答案後，要求學童透過語言轉換，先將「4 個 3 合起來是 12」改用「3 的 4 倍是 12」來描述，再要求學童將「3 的 4 倍是 12」的結果記成「 $3 \times 4 = 12$ 」。「4 個 3 合起來是 12」比「3 的 4 倍是 12」簡單易懂，要求透過語言轉換引入乘法算式的理由是：乘法問題中同時呈現兩種單位，一種是以「1 個」蘋果為單位，共有 3 個蘋果（單位量），一種是以「1 盒」為單位，共有 4 盒（單位數），東方人認為先確定單位量（蘋果的個數）比較重要，習慣將單位量記在乘法算式的前面，而將單位數（盒數）記在乘法算式的後面（將解題過程與結果記成 $3 \times 4 = 12$ ），而西方人則認為先確定單位數（盒數）比較重要，習慣將單位數記在乘法算式的前面，將單位量（蘋果的個數）記在乘法算式的後面（將解題過程與結果記成 $4 \times 3 = 12$ ），因為文化傳承上的需要，本教材選用東方人的記法。當要求學童使用東方人的記法記錄時，如果不透過語言轉換（人們習慣先說的先記），學童會將「4 個 3 合起來是 12」記成「 $4 \times 3 = 12$ 」，因此透過語言的轉換，將「4 個 3 合起來是 12」改用「3 的 4 倍是 12」來描述後，再要求學童使用文化傳承的記法「 $3 \times 4 = 12$ 」記錄解題活動。

· 除法算式紀錄

在第四、五冊的活動中，包含除與等分除問題會引發截然不同的兩種解題活動，在引入「一人一輪（次）分一個」的策略，協助學童使用包含除問題的觀點來理解等分除問題後，學童才可能進行相同的解題活動，來解決不同語意的兩類除法問題；唯有在使用相同的解題方式下，學童才可能使用統一的除法算式格式，來摘要描述兩類不同問題的解題過程，才能夠開始討論除號（ \div ）的意義。

以包含除問題「小明有 12 顆糖，4 顆裝成一盒，結果裝成 3 盒」為例，「 $12 \div 4 = 3$ 」摘要地記錄了這是分裝的活動，原來有 12 顆糖，進行了 4 顆分裝成一盒的活動後，得到 3 盒的結果；以等分除問題「小明有 12 顆糖，平分裝成 4 盒，一盒有幾顆？」為例，透過「一輪一次分一顆」的策

略，學童可以理解一次要分掉 4 顆，進而將等分除問題轉換成包含除問題「小明有 12 顆糖，一次分掉 4 顆，可以分幾次？」的觀點，經由與包含除問題相同的解題活動，獲得可以分 3 輪之後，學童亦能理解「一輪一次分一顆，3 輪分得 3 顆」，因此「 $12 \div 4 = 3$ 」也同樣地摘要記錄了解題活動方式、內容與結果。請注意，在等分除問題的算式紀錄中，「4」有雙重的意義，由解題活動的觀點來看，它是一次分掉 4 顆，而由原題意的觀點來看，由於要分裝至 4 個盒子中，所以一次要分掉 4 顆；「3」亦有雙重的意義，由解題活動的觀點來看，它是分了 3 輪，而由原題意的觀點來看，分 1 輪一人得到 3 顆，分 3 輪是得到 3 顆。教師在進行形成等分除問題解題紀錄時，宜強調解題活動的觀點，而討論紀錄時，宜檢查除數與商數的雙重意義。

依據除法原理：若有 A、B 兩個自然數，則必可找到 Q、R 兩個非負整數，滿足 $A = B \times Q + R$ 的關係，且 $B > R \geq 0$ 。在上述的描述中，除法問題中有 Q、R 兩個未知數，因此解決除法問題時，會產生 Q、R 兩個結果，本教材依據除法原理，選擇「被除數 ÷ 除數 = 商數...餘數」為一般格式，來摘要記錄除法問題的解題活動與結果。

依據除法原理，選定「被除數 ÷ 除數 = 商數...餘數」為除法算式的一般格式，這樣格式對嗣後的教材有兩項重要的影響：第一，在嗣後的整數除法問題中，皆描述兩個待解的問題，同時詢問商數與餘數兩個問題；第二，將以「被除數 ÷ 除數 = () ()」為整數除法算式填充題的標準格式。也就是說，教師在布除法問題時，不必刻意地選擇可以整除的情境，整除只是除法問題的一個特例。

在形成除法算式的一般格式後，教師宜再重新處理整除的問題，協助學童使用一般格式來記錄整除的結果，在沒有剩下時，用 0 來表示餘數的數量，以完整地記錄除法的解題活動與結果（餘數為 0 亦是重要的結果）。同樣地，在討論過程中，宜注意商數與餘數是不同被計數單位的計數結果，教師應檢查與澄清它們的意義。