第二章　小學面積課程之數學結構

第一節　平面區域

・和平面區域概念相關的生活經驗

一般的臥室或客廳的地板由牆腳圍住，形成一個確定的平面區域。運動場跑道以埋磚方式圍成，跑道內部亦形成一個平面區域。許多物體的表面是平直的，如方形紙盒，它的每個面也是一個平面區域。在這些例子中，都可以指出區域的周界及其內部。

有些地面不避免會有些起伏，把它視爲平面區域必須故意忽略這些起伏。假定牧場內皆栽植牧草，但房屋、水塘當然除外。在計算栽植牧草的量時，可以將牧草生長的地面視爲一個平面區域。這樣看待的平面區域是有洞的，它的邊界是由幾個分離的封閉曲線所構成。

小物體的表面是可移動的，如書本的表面，地面則是不可移動的。可移動的表面的比較可以用疊合的方式，覆蓋在另一平面區域上，這是直接比較或個別單位複製的運作。兩個不可移動的表面的比較，則需透過複製後才能疊合比較。

在平面的幾何概念中，平面是空間中某些特殊的點的集合，但是用紙表徵面時，因爲紙張都是兩面，所以容易造成錯誤概念。像牆壁的表面、地面，或書本表面都只有一面，雖然操作不如紙張容易，但是對形成平面區域的概念還是有必要的。

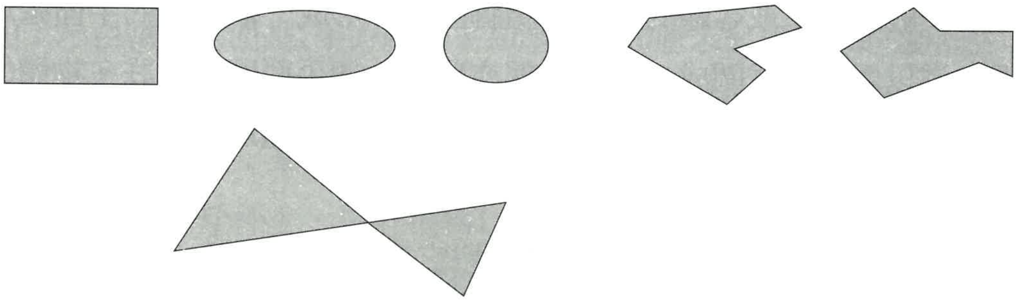
就如同彎曲物的長要拉直後才能比較一樣，曲面的面積也必須攤平才能比較，像柱體或錐體的表面，都可以切開後攤平，在幾何上稱爲可展平的曲面。但是像球體表面就不能攤平了，即使切開後也不行。它的面積一定要用極限方式來討論。

・平面區域的認識

長度是描述直線段的大小，面積則是描述平面區域的大小。最單純的平

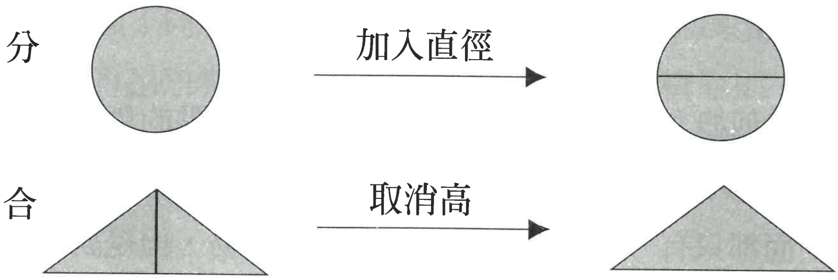
面區域是由封閉的、不自己相交的平滑曲線或折線段爲周界所圍成。例如橢圓曲線的內部、長方形的內部、八邊形（含凹）的內部等都是很單純的平面區域。

較複雜的平面區域可能由多個不相連的封閉曲線或折線段形成其周界，但區域本身仍然是連通的。



·平面區域的分與合

兩平面區域若共有一段周界，則可將共有的周界部分取消，形成一個新的平面區域，此爲平面區域的合成。反之，可以在一個平面區域內加以分割，使形成兩個不相連的子平面區域，此爲平面區域的分解。



第二節　平面區域大小的比較

·直接比較

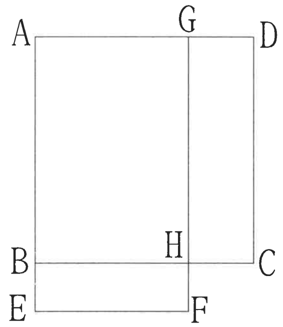
可移動的物體的平直表面可以緊密覆蓋在另一個平面區域上。假若其中一個平面區域可以完全落在另一個平面區域中，這時兩個平面區域的大小就

能夠決定。這個道理和直線段物體可以用互相疊合的方式比較長短的方式類似。

·間接比較

如果A、B兩個平面區域皆不可移動，則可以用紙、布複製其中之一，例如A，設此一次複製物爲C，則A和C面積大小一樣，記做A=C，再拿C與B做直接比較，而以C和B的比較結果推論A和B的結果。

·個別單位比較



上述的直接比較或間接比較，對於任意的兩個平面區域常常是無效的，因爲它不像直線段可以對齊一端，檢視另一端。以右圖的長方形爲例，不易判斷AEFG和ABCD兩個長方形的大小。有兩個方法可以解決這種問題。

一個方法是把BEFH切下來和GHCD比較，如果還不行就再切補。我們稱此法爲切割拼湊，在古代中國算書上則稱爲出入相補。有關出入相補法會放在等積異形中再討論。另一個辦法就是利用個別單位區域的合成來複製被提出比較的兩個平面區域A、B。

可以用做個別單位的平面圖形應具備下列兩類條件：

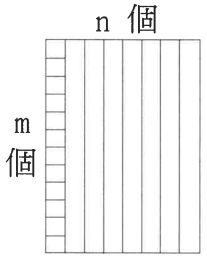
1.可在平面上做出向四面八方延伸的無空隙鋪設。例如：正方形、長方形、凸四邊形、三角形、正六邊形。

2.在計數時，可以運用乘法簡化運算。

符合條件1又符合條件2的原型只有正方形和長方形。如果又要配合平面直角座標系，以便在微積分學中推廣，則只有正方形一種。只要選擇的正方形夠小，就可以在平面區域A、B的內部，分別覆蓋這些同大的正方形，覆蓋時不重疊亦不留空隙。把這些同大的正方形合起來，就等於複製出平面區域A和B了。我們可以用個別單位正方形的數量的多少來判斷平面區域A和B的大小。

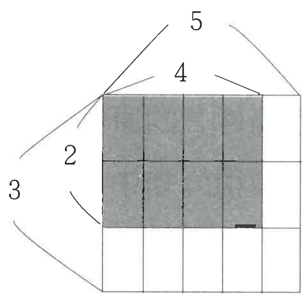
第三節　三角形、特殊四邊形和圓形的面積公式

·單位正方形的累積與等分割



將單位正方形以紙卡表徵，若緊密以邊相合成一直排，假設用了m 個。則此m個正方形區域合起來，形成一個新的平面區域，此平面區域面積的大小應該是單位正方形區域面積的m倍。若單位正方形的邊長爲 1公分，則稱爲m平方公分。若將此直排橫向鋪設，總共鋪設了 n 個拷貝，則形成一個大長方形區域，此區域的面積爲m平方公分的n倍，故爲 $m \times n$平方公分，此長方形的一邊長m公分，另一邊長n公分。

將單位正方形的一邊分割成p等分，過這些分割點做另一邊的平行線，則可將單位正方形區域分割成p個全等的小長方形區域。按照全等平面區域面積相同的共識，每個小長方形區域的面積是單位正方形面積的p分之一倍。若單位正方形的邊長爲1公尺，則其面積可記爲 $\frac{1}{p}$ 平方公尺。若將此小長方形區域的另一未分割的邊，分爲q等分，然後過這些分割點做另一邊的平行線，則可將每個小長方形區域更細分成q個更小等分，其面積爲 $\frac{1}{p}$ 平方公尺的 $\frac{1}{q}$ 倍，故依分數的分數倍概念，更小長方形區域的面積爲 $\frac{1}{p \times q}$ 平方公尺。以這些更小長方形區域爲累積單位，可以累積成邊長分別爲 $\frac{r}{p}$ 公尺和 $\frac{s}{q}$ 公尺的長方形區域，此長方形區域的面積爲 $\frac{r \times s}{p \times q}$ 平方公尺。下圖顯示 $\frac{r}{p}$ 爲 $\frac{2}{3}$，$\frac{s}{q}$ 爲 $\frac{4}{5}$ 的情形。



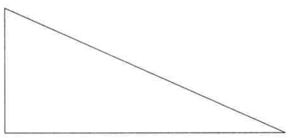
．邊長爲單位長的分數倍的長方形（區域）的面積求法

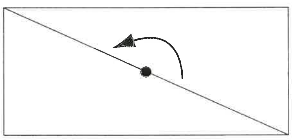
反過來說，設有一長方形區域，其邊長分別爲 $\frac{r}{p}$ 公尺和 $\frac{s}{q}$ 公尺，此處的 $\frac{r}{p}$ 和 $\frac{s}{q}$ 可爲假分數或眞分數。則可以用邊長爲 $\frac{1}{p}$ 公尺和 $\frac{1}{q}$ 公尺的長方形區域加以分割或覆蓋，得出其面積爲 $\frac{r\times s}{p\times q}$ 平方公尺。

另一想法直接運用倍的概念。設一長方形區域，其一邊長a單位，另一邊長b單位，此處a、b可爲整數或分數。此長方形區域之面積爲「一邊長1單位，另一邊長b單位」的a倍。另一方面「一邊長爲1單位，另一邊長爲b單位」的長方形區域之面積爲單位正方形區域面積之b倍，所以合併上述兩個關係，邊長各爲a、b單位的長方區域之面積爲a×b平方單位。

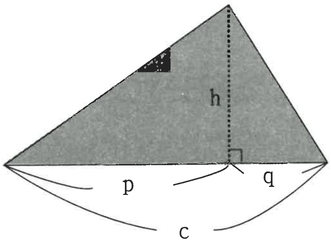
．三角形區域的面積

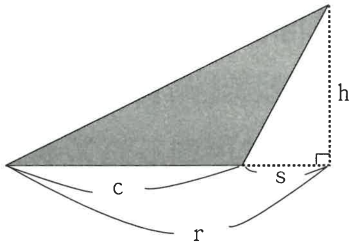
我們先導出直角三角形的面積。將此直角三角形再複製一個全等的直角三角形，然後以斜邊中點旋轉180度，則可拼湊成一個長方形，再按長方形面積公式，可得直角三角形之面積爲兩股邊長乘積之半。





對任意三角形，可以從其中任一點向其對邊做垂線，當垂線在三角形內部時，此三角形可視爲兩直角三角形的合成；當垂線在三角形外部時，此三角形可視爲兩直角三角形的分解。





由長方形區域面積公式，設頂點至垂足之長度爲h。合成時，底邊長c=p+q，三角形面積 $=\frac{1}{2}(h\times p)+\frac{1}{2}(h\times q)=\frac{1}{2}h\times(p+q)=\frac{1}{2}hc$ 。分解時，底邊長c=r−s，三角形面積 $=\frac{1}{2}(h\times r)-\frac{1}{2}(h\times s)=\frac{1}{2}h\times(r-s)=\frac{1}{2}hc$ 。用較古老的口訣

說，就是底乘以高除以2。

・對角線切割法

使用對角線切割法，可以求平行四邊形和梯形面積。因平行四邊形被對角線分割成全等的兩個三角形，由 $\frac{1}{2}$（底×高）的公式，可得平行四邊形的面積為底×高。而三角形的高的概念和平行四邊形的高的概念是相同的。

用此法來檢視梯形時，可得梯形面積為 $\frac{1}{2}$（上底×高）與 $\frac{1}{2}$（下底×高）的和，合併之後，即為（上底＋下底）×高÷2的公式。

使用對角線切割菱形時，因菱形的對角線互相垂直，可得菱形之面積為對角線乘積之半的結果。

・等積異形

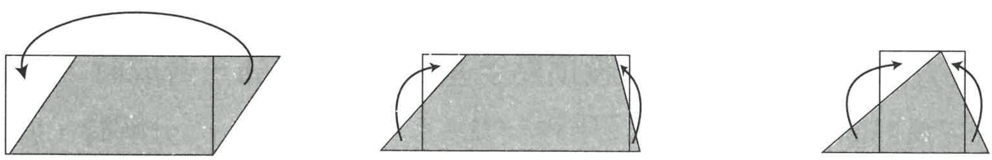
關於等積異形最令人驚奇的結果如下：

兩多邊形（不論凹凸）之面積若相等，則可以使用直線段將其中之一做有限多次的切割，然後拼湊成與另一多邊形全等的區域。由於切割過於細碎，故不具娛樂價值。

所謂七巧板，係將一正方形或長方形切割成等腰直角三角形、菱形、梯形、正方形等共七塊，再由此七塊之部分或全體，拼湊成簡單的幾何圖形，如十字、星形等，為中外皆知之謎件。

Dudenay首次提出，可將正方形切割成四塊後，再重新拼湊成正三角形，而且這四塊之間只用三個絞鍊兩兩相連，使得此一變形可由旋轉完成。

在中國古算經中解釋特殊四邊形或三角形面積公式之由來，多以等積異形之圖解為之。其法如下：



在64年課程之國編本，則以平行四邊形為中心圖形。在求梯形面積時，以梯形的一個不平行邊的中點為軸旋轉其全等的拷貝180度後，獲得一個平行四邊形，如此得（上底+下底）×高÷2的公式。至於平行四邊形之求法同上述。三角形面積求法則與梯形相同。

‧面積公式與代數的關係

代數的精神就是以符號代表數，產生未知數原理和恆等式概念。在面積公式中，以符號代表邊長，可以很簡潔地表達上述求面積的公式，另一方面，藉由簡單的乘法分配律，可以聯絡上述三種導出特殊四邊形面積公式的方法。因此，做為代數發展的初步經驗，將這幾個面積公式以拉丁字母表示是好的。如梯形，$A=\frac{1}{2}(a+b)h$，而且九年一貫綱要要求在六年級教。

‧圓形面積

圓形面積的嚴密求法一定要透過極限過程。使用內接及外切正六邊形，每次增加2倍邊數，就可以達到任意逼近圓面積的任務。

由於這種方法需要一些國中才學的幾何知識，以及開平方的技巧，這是微積分學未興起前的古代解法，所以不適合放在國小。

另一方面，我們可以將互相垂直的兩條半徑各取十等分，然後以這些分點為準，打出邊長是半徑的0.1倍的格子，將這種格子圖樣擴充到整個圓上。然後細數完全在圓內的格子總數，以及和圓域有交集的格子總數。如此得到圓面積的一個下界和上界。如果再把有交集的格子細分成更小的正方形格子後再數，則可以使下界往上提，上界往下降，從而得到圓面積的一個更好的估計。將這個過程用極限的概念來進行，就非常接近微積分學中求積分的概念了。

圓面積的公式為「圓周率×半徑的平方」或「$A=\pi r^2$」，在小學階段要想嚴格證明它，是不可能的。一般的解釋是把圓等分割成8個、16個、32個扇形，然後將這些扇形一半在上，一半在下，排列成一個類似平行四邊形的圖

樣。然後指出，當分割數兩倍、兩倍地增加時，這個圖形愈來愈接近長方形，其高為半徑，其底為半圓周長。

· **扇形面積**

扇形是由兩段直線段和一段圓弧所構成。此二直線段必須是圓弧的半徑。由於360度制係將一周角分成360等分，叫做1度。所以每個圓心角為1度的扇形是全等的，故其面積為圓面積的 $\frac{1}{360}$ 。所以扇形面積=圓面積× $\frac{圓心角}{360}$ 。如果此二直線段不是圓弧的半徑，則其面積的求法就必須分解成適當的扇形及三角形來求了。

第四節　地積單位及面積單位換算

· **源自長度公制單位的面積單位**

在小學介紹的長度單位是毫公尺、公分、公尺和公里，因此相對應的應有平方毫公尺、平方公分、平方公尺和平方公里。由於平方毫公尺太小故捨去。因為1公尺=100公分，故1平方公尺=10000平方公分。同理，1平方公里=1000000平方公尺。

· **地積單位**

一般用在表示土地面積的單位有平方公尺、10公尺平方=1公畝，100公尺平方=1公頃及1平方公里，它們之間的倍數都是100倍。

在台灣，甲、分、坪的地積單位都是日據時代遺留下來的，其中以坪最容易被孩子看到，也最容易引起誤會。過去從報上看到的，投標購買土地時，將平方公尺誤為坪，導致訴訟或損失的至少有3起。由於1台尺=0.303公尺，而1坪=6台尺平方，故1坪= $(0.303\times6)^2$ 平方公尺=3.305平方公尺。因為1台尺的長度不像1公尺有可以鑑定的獨立標準，唯一可能是依附公制而存在，如1台斤=600公克，因此提倡以平方公尺代替坪是合理的。

第五節　面積是二維量嗎？

面積是平面區域大小的量化表示，平面是一種二維幾何的概念，可是當我們說，面積是二維量，到底想表示什麼？以下先討論維度。之後，我們將建議，不要使用「面積是二維量」這樣容易引起誤解的話。

・維度的意義

維度的第一義，是空間中點的定位所需實數的個數。例如公路、鐵路上任一點的定位，只需先決定參考原點以及單位長，就可以系統地用一個實數表示之，這一般稱爲一維座標系。平面、或地球表面，則要決定參考原點及兩個方向的刻度方法，如平面用直角座標系，地球表面用經緯度，之後，就可以系統地用兩個實數表示之，這是二維座標系。若是立體空間，則需有第三個向度的數値才能定位，這是三維座標系。如飛機航行時，在空中的定位需有飛行高度加在經緯度之後，位置才能確定。潛水艇在水面下潛行時，需有深度加在經緯度之後，其位置才能確定。

維度的第二義，是描述某類事物所需實數的個數，例如描述長方形，需要長度和寬度，描述正方形，只需要邊長，描述平行四邊形，需要兩邊長和夾角，或者兩邊長和其中一條對角線長，描述梯形，需要上底、下底、高以及其中一條側邊長，或其他四個獨立的長度及角度。這種意義有時也用自由度的名稱。所以長方形的自由度是2，正方形的自由度是1，梯形的自由度是4，一般四邊形的自由度是5。

・面積和維度的關係

既然決定好單位之後，面積量只需用一個實數表示，所以面積的自由度當然是1。那麼長方形的自由度是2，而長方形面積的自由度則是1，要如何解釋呢？數學上稱這樣的關係叫做函數。設長方形的長、寬爲a和b，則面積用A表示時，$A=a\times b$。　設梯形的上底、下底、高及側邊長分別爲a、b、h和c，其

面積爲B，則 $B=\frac{1}{2}(a+b)h$。正因爲面積的自由度變低了，所以不同的長方形才有相同的面積。反過來，有相同面積的長方形的長與寬就不再自由了，它們之間被綁上一個 $A=a\times b$ 的關係，此處的 A 是某一確定值。若 a選定了，則 $b=\frac{A}{a}$ 也會被決定，反之亦然。