P1-32

一位資深高中教師使用學習前導架構的故事

臺北市第一女子高級中學　許秀聰

壹、研究的背景和動機

Brown 和 Borko（1992），Leinhardt（1989），及 Westerman（1990）等人均指出，初任教師正值努力發展自己的教學實施（Teaching Practice），在教育理想與教學現實的抗衡下，他們的數學和數學教育信念很容易受到挑戰，致使教學的實施與信念不會完全一致。當初任教師面對理想與現實的衝突時，其自身教學觀念的重整可說是兼具「立即性」及「動機強烈」這兩項特質。但是，對於已有多年教學經驗的資深老師而言，在面對這樣的衝突時，也許就不盡相同了。

其實，大部分的教師都是一直在轉變的，小轉變是發生在教室組織或課程上，至於提升後的二階轉變（Second-Order Change）則含不同的思考、教學和學習方式。Chin 和 Benne（1969）曾提出教師有計畫轉變的三種型態，其中的標準-再教育轉變是教師自願的自然轉變，透過賦予教師自治權 （Autonomy），以協助其形成一個有利於提高解決問題能力的系統。本文作者提出的資深教師轉變，即傾向上述之標準-再教育轉變。

資深教師除了對學生的教學責任外，有時尚需承擔部分輔導實習教師的輔導工作。在輔導實習老師時，除了需要反思本身的教學之外，尚須對實習教師起示範帶領的作用，像是一位師資培育者。這種資深教師同時擔任實習輔導老師的情形，在 92 學年度（92.7－93.6）正好發生在研究者身上。大學畢業至今，除了剛開始被分發在北市國中任教四年之外，個人已在這所公立女子高中教數學長達十二年。有感於教師的教學實施應以教學知能的提升爲目標，遂進入數學教學碩士班進修。92 學年度除再度教授兩班高一數理資優班，還接受某大學委託，輔導一位數學科的實習教師。就這樣，本著對自己教學的持續省思，加上輔導教師教

學的實際需求，而開啓了個人教學概念與教學實施再發展的契機。

進修可接觸到教學概念及技能的理論課程，尤其是那些跟自己教學特質和教學思維契合的主張，自然會有將它們引進自身教學場域試行的念頭。爲了進行這樣的教學與思維的實驗，我們會反覆分析某些教學主張，以符合自己的教學目標和教學環境。從理論到實際的通道，即在於－－學理構念的再脈絡化。

學理構念的再脈絡化：學習前導架構

你的一生並沒有浪費，你需要時間來學習剛才學會的東西。

~王石珍譯《為自己出征》~

個人相信，「若能在一開頭塑造數學的學習環境上用心，應該可以激勵學生用正面而且積極的態度與眼光來看數學」。但是，學生應在什麼起始環境下接觸數學概念？在思考這個問題的答案時，個人期望教學知能的成長及教學信念、態度的轉換，能兼顧「數學的易學」和「學生的樂學」。

要落實以上的想法，個人認爲第一步就是，於教學活動中同時呈現數學的易學及促成學生的樂學。研究者並非一個初任老師，教學改變的原因不是現實與理想的衝突，而是「關懷學生」，希望數學對學生能產生提升智力水平的作用。對學生有意義的數學必須是易學的，因爲"理解的本身就是喜悅與滿足的泉源"（Skemp, 1989; 請見許國輝譯, 1995, p.183），也就會兼顧樂學，而且"曾經由理解而獲得滿足感的學習者，都願意再付出努力以求取得另一次滿足"（ibid, p.43）。

教學活動是爲了學生的學習而設立的。就如 Skemp 所說，學習猶似開拓邊陲地帶的活動，邊陲地帶雖然不是我們能力範圍以內的領域，但是，學習就在這個地帶發生。教師所需做的，並不是代替學生學習，因爲，我們無法取代學習者腦海內第二系統的工作；反而要與學習者合作，藉提供良好的學習情境和材料，盡力幫助學習者自己學習。由於學習是要將我們不能充分勝任的新開闢地域劃入版

圖內，所以 Skemp 提醒數學教師注意，有時應讓學習者重回安全的已知地帶，而且在繼續開發新領域前，要提供機會（包括時間和學習材料）讓其鞏固一個已開發的新領域。這需要一個連結既有基模與新知識的機制，例如奧蘇貝爾（Ausubel）的”定錨（Anchoring） ”概念（施良方, 1996, p.243）：

> 學生首先應該學習最一般的、包攝性最廣的觀念，然後根據具體細節對它們逐漸加以分化。教師有意識地用這種方式來安排教學內容的話，就能使學生的學習達到最佳水平。換言之，當學生認知結構中已有的、包攝性較廣的、與新知識特別有關的概念能被用來作爲理想的固定點時，學習和保持新知識就最爲有效。

這個教學原則的配套做法是，前導架構或先行組織者（Advance Organizer）的概念（ibid, p.245-246）：

> 促進學習和防止干擾的最有效策略，是利用適當相關的和包攝性較廣的、最清晰和最穩定的引導性材料，這種引導性材料就是所謂的組織者。由於這些組織者通常是在呈現教學內容本身之前介紹的，目的在於用它們來幫助確立意義學習的心像，因此又被稱爲先行組織者。奧蘇貝爾認爲，先行組織者有助於學生認識到：只有把新的學習內容的要素與已有認知結構中特別相關的部分聯繫起來，才能有意義地習得新的內容。

從 Skemp 的見解個人得到的啓示是：教學對學習者的幫助在創造一個有益的學習環境，而且個人的學習無法由他人取代。這表明了，一位關心學生實際學習是如何發生的數學教師，應創造一個學生主動學習、盡情大膽思考的學習環境。配套的措施是在課前設想合適發展數學概念的情境和材料，在課堂中帶領討論，引導並提升數學探究的過程。奧蘇貝爾的主張則引領關心學生認知過程的教學者，瞭解實際對學生有幫助的教學活動，應依循一般整體架構到分化的程序，並以內容前的引導材料促進有意義的學習。

上述的學理構念和個人的意圖教學構想能否改善課堂教學，而重新構築個人

既有的數學教學概念？關鍵應在於教學實踐。在 Ensor（2001）的研究中，初任教師將數學教學方法課程再脈絡化（Recontextualizing），以應用於學校教學。「再脈絡化」的概念來自 Bernstein（1977, 1990）和 Dowling（1996），指的是”當人們身處不同社會脈絡下，需適應轉變，將之前對論述內容的體會及實現重新具體化”（Ensor, 2001, p.297）。在本研究中，個人要將學理構念在自身教學場域再脈絡化，須做到融合不同的學理構念和調整教學的實施。因此，個人從對 Skemp 和 Ausubel 兩人主張的理解出發，再針對本校資優班學生學習的探究取向，架構此次教學行動研究的教師及學生課堂活動脈絡。

貳、研究的問題和目的

總結來說，基於個人的數學教學特質和教學理念，長期以來心中一直希望有機會嘗試將數學教學活動帶向另一個層次。因此，想經由此次研究自己的教學，試試看能否讓教室中的數學教學活動涵蓋更多的「易學性」和「樂學性」？所以，本研究的四個問題是：

1. 如何重新建構資深數學教師的教學概念？
2. 數學教學活動要如何整合數學學習的知識、情意和動機面？
3. 數學教學活動要如何兼顧數學的易學及學生的樂學？
4. 如何促使學生更主動地探究數學的內涵？

參、「學習前導架構」研究的設計

個人進行研究設計時，先依教師個人特質及教學理念，凝聚「四取向」試驗性的教學構思內容，再依循四取向設計教師活動及學生活動。此四取向為：

1. 傾向非傳統型的數學教學信念，認同學習的促進者、佈置者、和檢核者的教師教學身分
2. 結合數學學習的知識、情意、動機層面，引入學習的前導架構和知識的歷史

脈絡

3. 從數學的易學性與學生的樂學性，構思概念的啓蒙例

4. 調整教學活動的結構和內容，透過自學素材、學前評量、課堂探究，引動學生的自主學習

本行動研究的最終目的是：提升自我的數學功力（Mathematical Power）、教學功力（Pedagogical Power）和反思功力（Reflective Power）。數學功力的提升是指個人比起以往，在數學解題中抽取更爲深入的數學概念，更加注重概念間的數學連結，也就是逐漸將所學數學知識透過深層理解形成綿密的網絡。教師有更進一步的數學理解，抓到數學世界中的核心圖像，將對數學教學形成較好的刺激，也就是說，個人數學功力的提升亦促成教學功力的成長。因爲，較熟悉數學知識的本質，又能以同理心看待學生的數學理解歷程，以致有辦法找出適合自身教學風格的教師教學活動與學生學習活動。反思功力則借助前兩項功力的提昇，設法在方法、內容與層次上尋求突破。反思功力與前兩項功力是相輔相成的，個人因反思功力的深化而能促成數學和教學功力的提升，也因數學和教學功力的提昇，而更清楚知道自己該如何又爲何需要進行教學反思。

綜上所述，個人教學概念重構的「五元素」包括：界定教學身份、增強學習動機、潛藏情意成分、強調概念啓蒙、及調整教學技巧以引發學生探究。

本研究採用「行動研究法（Action Research）」，教師藉由一次次的活動設計，針對正面臨的教學情境擬定教學計畫，據以進行教學實施、實地觀察成效、並做詳實的記錄。教學後逐一反思教學過程與成效，並藉此再修正下回的教學計畫，以改進教師的教學。行動研究中問題解決策略的機制是，「計畫、行動、觀察、反思、再計畫」的自我循環反思歷程，這樣的螺旋式循環使得教師的專業發展能夠不斷地向前和提升。行動研究的另一特徵是重視團體合作，強調職場以外專家的指導。他們常從學術專業的角度對教師們呈現的問題提供不同見解，幫助他們

注意潛在的學術意義，且使研究人員在自我查核下避免盲目的做研究。

本研究設計的理念是設計研究（Design Research）或稱發展研究（Development Research）（Freudenthal, 1973, 1991）。三個研究的核心要素是：

1. 教師事前預想學生的學習進程。
2. 融入數學史及似真（Experientially Real）生活情境脈絡為學習的起始點。
3. 鼓勵學生用探究的態度重新創始課堂上的數學內容，並賦予個人意義。

根據以上所述的三個核心構念，本研究共分成研究的開展、研究的過渡及研究的修正等三階段，它是一個動態循環的發展歷程。第一階段（92 年 7 月到 93 年 1 月），初步設定教師扮演學習的促進者，想以學習前導架構幫助學生從舊有的基模出發，經驗兼顧認知、情意和動機面的學習素材。當學生在第一階段已經初步經驗和習慣使用前導架構後，下一階段的研究設計主要在於，延續和加強學生這種數學學習的精神。

個人設計在寒假期間進行第二階段（93 年 1 月到 2 月）的研究。由於是在寒假中進行教學，而且又是第二回施行學生自學學習活動，因此，學生的觀點應該比較能在此階段顯露。這階段因為沒有實施正式的課堂教學，所以，設定教師角色為學習情境的佈置者。關於教師活動部分，重心是擺在提供學生更完善的自學素材，增強前導架構對學生學習的輔助。這個過渡階段的研究設計和第一階段有兩點不同：自學素材強調預備教學的作用，也在假期結束時施行假期作業考，以檢視自學成效；另一點是，嘗試透過電腦應用軟體來輔助學習，藉多媒體的輔助，應可提高學生的自學效果。

第三階段研究（93 年 2 月到 93 年 7 月）的重點在修正計畫，這階段學生學習的內容較為抽象，故須使用不少符號表徵，並須加強學生一般化數學內容的能力，故教師角色定位在學習的檢核者。個人的策略是經由教師目標導向的設計與

活動方式，鼓勵學生進行反思並轉化現有的基模，以幫助理解。

肆、研究的限制

質性分析用的實徵資料，即是質性研究之果實。這樣的研究自有其無法避免的限制，我們也認為完整無缺的質性分析是不存在的。像研究場域是台北市的一所公立女子高中，學生成績屬於全國頂級，個人任教的班級為這所學校的資優班，學生在進行數學探究時，所需的基礎能力較一般班級學生更為充足。本研究乃以特定資優班級為研究場景，是否能平行轉移至其他學校場域的數學教學，則仍然是個問題。而方法學、研究人員、及信效度等方面，本研究透過教室觀察、問卷等多種類別資料的分析，並配合實習教師王老師形成三角檢核與校正，應該可以稍微降低這些研究限制。

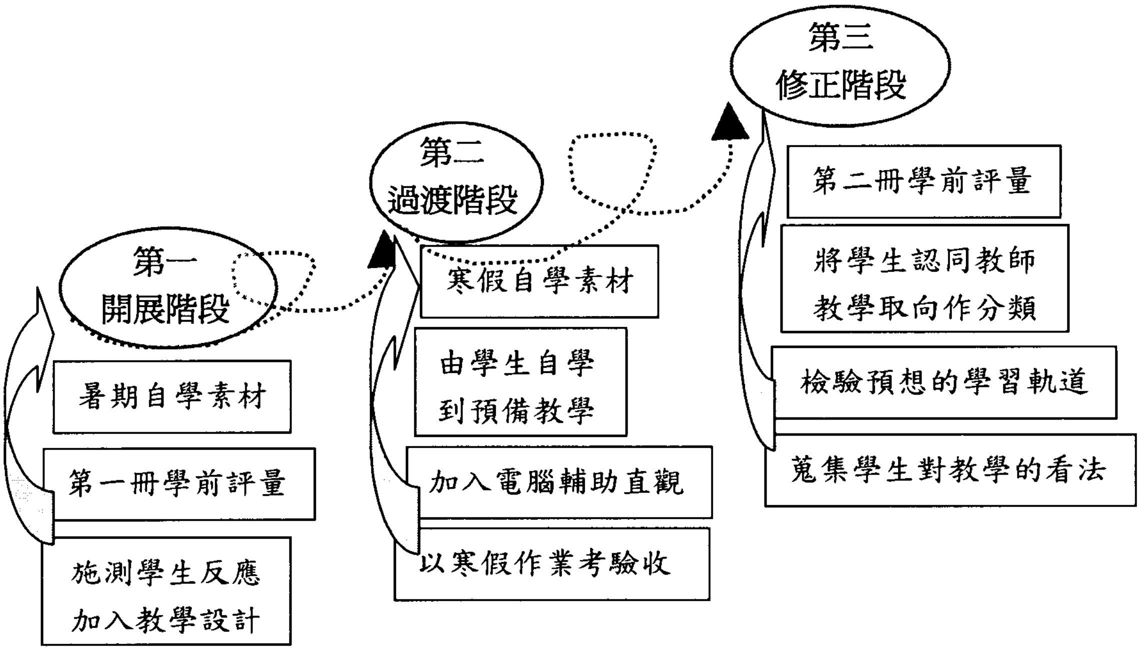
為盡量減少扭曲研究結果的真實性與可信度，個人盡力做到 Patton（吳芝儀和李奉儒譯, 1995, p.308）所說的"質的分析的規範和嚴謹性，有賴於詳實地呈現描述性的資料，故經常被稱為「厚實的描述（Thick Description）」。如此方式的描述，才能使別人閱讀了分析結果之後就能理解，並能夠做出自己的詮釋"。Tzur（2001）在研究中呈現資料的手法即是經驗片段的回顧，他說明"這些敘事片段必須能鮮活地敘述和解釋這些個人經驗"（ibid, p.263），如此一來，即使背景故事為個人獨有，卻會在不同研究者間，發現研究成果有趣的關聯，如 Tzur（2001）驚喜地發現他與 Zaslavsky & Leikin（1999）的研究頗能產生共鳴。

底下將依據三階段教學行動研究設計，詳實地陳述和分析個人的研究心得與蒐集到的相關實徵資料。

伍、「學習前導架構」研究結果

在使用或呈現實徵資料時，有時會選取一些關鍵且值得留意的故事片段或某些對話，以陳述個人的察覺和教學思考，並幫助讀者了解個人曾經面對的教學難

題和決定。希望讀者可以感受到學生學了什麼，教師又學了什麼。就像 Zaslavsky, Chapman 和 Leikin（2003）所揭示的"當人們想要對教學這種複雜、十分依賴脈絡的領域，學著以新方法加以思考，故事可能比理論式的評註更有幫助"（p.888）。



圖一　「學習前導架構」進展流程

（一）研究的開展：第一階段

第一階段的研究希望能夠透過個人教學觀念和角色的轉變，促進學生課堂探究及自主學習，建立以學生想法爲導向的課室環境，使學生在這種環境中重新創始數學知識。

1. 自學素材

本研究的的第一個教師活動是，在本校高一新生入學之前先編寫一份暑期自學的教材。本校都會發給新生一本數學暑假作業，個人將過去的暑假作業改編爲自學素材，希望學生不僅僅是做題目而已。與概念重構的第二個元素中的「動機」有關，個人預先設定一個「引領學生進入高中數學殿堂」的目標，想讓她們

體驗數學概念的精髓和結構。因此，在自學素材的第一頁，個人爲了傳達新生一些想法而寫道：

> 學數學完全因爲自己愛數學，教數學則是爲了把數學的美讓大夥一起領略。自學，就是自己學，自己決定選哪些來學，自己安排時間來學。老師的立場是想得到的、各方面的資料都提供，讓有需求的人能得到最妥善的照顧。我並不預期每個人能解出每一道題目，但我想大家都能看看一些你所喜歡的部分，試試你所感興趣的問題，看你想到什麼。那麼，你和高中數學的距離又拉近了一些。

第一階段的自學素材，是想發展學生自己的興趣與能力，故而將整個第一冊的數學內容用多面向的方式呈現。內容除了練習題目之外，又加入概念性的故事、操作性的工作、數學家小傳、科普書欣賞等，希望學生能在比正式課堂教學自由、輕鬆的氣氛下，展開一學期的數學學習。

2. 第一冊學前評量

學前評量問卷著重於個人在認知和情意面的教學設計。目的不在於區分學生能力的等級，而是與概念重構的第二個元素中的「動機」、第三個元素中的「情意」有關，想讓學生透過思考評量問卷的內容，將其個人舊有的認知基模與新知識聯繫，而部分化解學習的困難。例如，複數數系的擴充，這是高中與國中數學內容的一個重要分野，於是爲了讓學生接納虛數，同時察覺虛數與實數特質的差異，就設計以數值比大小之三一律來挑戰學生這方面的認知（題目請參見附錄一）。這份問卷和自學素材即扮演此階段學習前導架構的角色，藉此引出上學期即將學習的主題，希望藉此引起學生主動學習的動機。再從問卷中反應良好（例如會認真訂正）的學生中挑出幾位，看看她們在自學素材部分的表現，比對兩份資料以了解學生的學前學習偏好。

學前評量問卷的內容包括邏輯、函數、無窮數列和多項式的代入，挑選重要

或學生容易產生衝突的概念，設計一些概念判斷的題目，希望她們能「預覽」學習的數學主題，進而找出自己的先備知識或迷失概念（Misconception）。這些題目曾在上學期的高三資優班中試測，依據測試的反應將問卷修訂，並增補其他單元題目。問卷的架構如下：

a. 單選題：包括真實事件中的關係 4 題，數與式的次序關係 5 題，平面圖形的關係 3 題，數式與圖形聯結關係 3 題，此部分共 15 題。

b. 問答題：包括虛數比大小、無窮循環小數、無窮級數求和、多項式代入各一題，此部份共 4 大題。

經由問卷找出幾個學生的迷思概念後，再將其融入教學活動的課程裡，讓學生的想法也成爲個人教學設計的一部分。希望在課堂上拋出學生想法，以學生已有的觀念爲教學的出發點。如此一來，這份問卷的內容除了在一開始用以牽引未來學習的數學概念之外，在整個教學進行中會經常回溯到這個部分的內容，達到教與學動態互動的作用。

根據前測問卷的施測學生反應，篩選之後加入教學單元的對應情形如下：

a. 單選題 4（睡美人說法） →1-1 邏輯

b. 問答題 2 學生訂正（$1=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}=0.\overline{9}$） →2-2 有理數、實數

c. 問答題 1（虛數 i>o,=0,<0） →2-4 複數

d. 問答題 2，3（$0.\overline{9}>1,=1,<1$；

Zeno（芝諾）「神龜賽跑」詭辯） →3-2 無窮級數求和

e. 問答題 4（多項式改寫型式的代入求值） →4-2 餘式定理

以下舉 b.爲例，詳細說明在教學上的運用情形。這題曾造成不少學生的認知衝突，她們往往在承認$0.\overline{3}=\frac{1}{3}$之下，卻又直觀地否定$0.\overline{9}=1$。即使，當她們發

現$0.\overline{3}\times 3$會等於$0.\overline{9}$時，情況卻仍未有顯著地改善。當我回收學生的訂正時，學生 104 在她的筆記本上寫道：

> 我想到從前看過的課外書上，有一段內容在講$0.\overline{9}=1$，記得它是這樣寫的，
>
> $\frac{1}{7}+\frac{6}{7}$=0.142857142857…+0.857142857142…，
>
> 即　1 =0.999999999999…。
>
> 這樣我能接納$0.\overline{9}=1$的事實了！

由於這樣的知識重構，似乎主動地化解了這位學生的迷思概念；在 2-2 有理數與實數這個單元教學時，個人再請這位學生向全班分享她使用分數化成循環小數來理解$0.\overline{9}=1$的看法。王老師也在下課與研究者討論見習心得時，特別提到這一段。他說"2-2 這節我對 1/7 +6/7 =1 用來解釋 0.9999999…=1 這部分很感興趣，…，它能幫助學生信服我們將在第三章解釋的循環小數 0.9999999…是真的等於 1"。個人就再進一步請他想一想，這個內容本來是由學生在學前評量卷的訂正筆記上提出的，而個人卻放在此處請她分享，那麼她爲什麼會去想起這段內容呢？王老師和個人都認爲這位學生的回顧，源頭應該是學前評量問卷。而個人這樣的教學設計和師生課堂互動過程，也同時是想讓王老師明瞭，教學的功力可由各章節的概念介紹，提升到融合學生數學思考和教學設計的模式。因此，運用學前評量問卷的結果和訂正，應可讓課室中師生協商的時間點，提前到實施課堂教學之前。

這份學前評量問卷是開學第一節施測，然後收回，研究者與王老師利用第二節空堂批改，到了第四節即當場一個個發回。學生在知道這麼快就能拿回自己的問卷而又知道對錯時，都很高興地拍手，這個動作似乎顯現出她們很熱切地想知道自己舊有的認知，在面臨新內容的學習時會是如何。接著，研究者表示她們

可以利用這節課互相討論學前評量卷，學生立即熱烈地展開討論。後來又有一意外收穫，個人希望學生自己能夠主動處理、掌控自己的整學期學習狀況，所以請她們翻閱課本內容，知道出錯處如何修正，一星期後再收回筆記，看看她們在這樣的要求下作了什麼。結果看到有些學生很用心地訂正，還找課外書整理一些相關資料。當我看到這些，心裡很感動，覺得學前評量是有用的，它真的引動了一些學生的主動學習，並將其新舊知識連結（學生訂正整理，請參見附錄二）。

在施測當時，對第一次看見這種教學設計工具的王老師，個人特意詢問其看法，以便了解在他的眼中這工具的施行效果如何。首先，確認研究者這份評量卷的題目結構，當問道"你明瞭為何會選這幾道題目嗎？"王老師說"我認為是為了扣住第一冊的四章內容"。再來，個人進一步想讓王老師思考這種教學設計的特質，於是詢問"你認為問卷施測和一般口述課程介紹有何不同？"王老師很肯定地表示"有很大的不同！像我也好奇地試做了這份問卷，一開始做題只是憑直覺回答，但是，同樣的類型做多了，就有一些反思，會以更多的數學知識加以檢視。這樣的設計的確可以引動學生的主動思考"。

像這樣，在暑期新生自學素材就開始引動學生的學習動機，之後，再用加強知識面的學前評量問卷，讓學生「預覽」未來的教學主要結構，分析主要的數學概念內涵，並於整學期課程進行中「時時觀照和回溯」到學生的原始想法，修正學生的想法以形成數學概念。同時藉此，幫助學生建立數學學習的前導架構，感受數學的易學性，希望，藉此間接培養學生樂學數學的態度。

（二）研究的過渡：第二階段

由於本研究設計中預想的學習模式亦涵蓋課堂外的部分，因此，個人需要為學生佈置假期的自學進程。同時，成為研究中的一個彈性的過渡階段，也可以為學生進入下階段（92 學年度下學期）的課堂學習預做準備。

寒假自學素材的功能，除了鞏固學生前一階段學習的既有基礎之外，亦可發展學生個人特有的學習方式。由於，學生對暑假自學素材很有感覺，也很喜歡，她們主動地探究數學內容並多了一份對老師的信賴感；讓學生預覽上課的主題，也拉近了學生和個人之間的距離。因此，寒假自學素材仍然接續學習的知識面和情意面，不同的是，它的內容只鎖定一個較困難的單元「三角函數」。因為，個人覺得學生需較長的時間吸收這個單元的相關數學概念，所以，有為下個學習階段做準備的意圖。為了提高學生自學的成效，教材內容應降低困難度並兼顧學習樂趣。為此，筆者與年級召集人取得共識，一起設計生活情境題，帶領學生開展學習歷程。此外，還加入網路下載的電腦程式繪圖，讓學生經由圖像的直觀，「看見」三角函數的圖形，並強調整合與分析的能力，希望也可以一併提高學生自學的樂趣。

在這樣的學生活動中，教師的角色是「潛藏的情境佈置者」，讓學生在教師鋪陳的解題脈絡中接觸數學概念。實施之後，大部分學生對這份自學教材反應內容有趣，而且自己就能看懂。學生覺得除了後面介紹到廣義角的部分無法全部了解外，前面銳角三角的定義及三角基本性質部份都能自行吸收，至於電腦繪圖的部分更有輔助學習的功能。

針對自學素材的試驗，個人在這階段結束之前以寒假作業考試（題目請參見附錄三）的方式，驗收學習成果。底下將這份考試題目的結構、計分、及答對率呈現在表一和表二中。

整份考卷共 25 格，其中第 13 格因題意稍有瑕疵，故不計其答對率，其餘 24 格可以分成兩類。第一類考題評估學生的「銳角三角的定義及三角基本性質」概念，學生在這方面的表現（除其中第 4 格混合型、第 10 格涉及轉化能力外）頗佳，平均答對率為 87%。第二類考題則是有關「廣義角」的概念，相對的答對率比較低（尤其涉及較多計算的更易出錯），平均為 63%。

編號	數學概念	計分	答對率	編號	數學概念	計分	答對率
1	銳角三角的定義	4	87%	8	銳角三角的定義	4	100%
2	銳角三角的定義	4	100%	9	銳角三角的定義	4	82%
3	銳角三角的定義	4	93%	10	銳角三角的定義	4	56%
4	銳角三角的定義	4	62%	11	三角基本性質	4	80%
5	三角基本性質	4	100%	12	三角基本性質	4	93%
6	三角基本性質	4	91%	17	鈍角三角函數	4	80%
7	銳角三角的定義	4	98%	23	銳角三角的定義	4	96%

表一　第一類假期作業考試題目評量概念及學生答對率

編號	數學概念	計分	答對率	編號	數學概念	計分	答對率
14	廣義角三角函數	4	69%	20	弧度量	4	75%
15	廣義角三角函數	4	60%	21	弧度量	4	47%
16	廣義角三角函數	4	49%	22	廣義角三角函數	4	47%
18	廣義角三角函數	4	73%	24	廣義角三角函數	4	69%
19	弧度量	4	73%	25	廣義角三角函數	4	65%

表二　第二類假期作業考試題目評量概念及學生答對率

接著，爲了進一步檢驗「是否比較用心於自學的學生，則成績較高？」的猜測，個人還針對其中幾位學生進行選樣對照。在收回寒假自學教材批改時，將作業寫得較好又用心的學生，事先登記在教學日誌上，再於考試後將這些學生成就測驗的分數與全班作比較。結果挑選出來的 8 位學生成績分別是 88、96、88、88、88、92、92、92，平均爲 90.5 分，而全部 54 名學生（1 人缺考）的平均是 76.2 分。

除了學生的成就測驗成績，可反映自學素材對學生學習有正面的成效之外，

個人也在教學時注意觀察這些學生的學習狀況，初步確認有部分正面的效果。當正式課程到了三角單元時，由銳角三角函數推廣到廣義角，一直到各種三角關係式的交錯使用，個人對照於自己以往教學的經驗，覺得這次學習少了大量填鴨的內容，似乎多了點流暢，這也許是拉長學習的接受和醞釀期對她們產生的功效。

（三）研究的修正：第三階段

前兩階段個人在教學概念和身份的重構上，陸續獲得部份學生和王老師的支持性回應，個人也在教學實施時，感受到這種與傳統不同的教學帶著具生產力的特質。個人的教學在試驗的同時即不斷地修正，更因爲持續教學反思而刺激出更細緻的想法。

第三階段的學前評量問卷，由於已經有第一階段施測的經驗，學生的答對率並非觀察重點，讓學生預先認識整學期將學的數學概念，並明瞭自己的學前狀況才是本階段施測的目標。於是在這一階段設計問卷時，先列出 9 個第二冊中的重點數學概念，再針對每個概念設計情境題（評量問卷內容，請參見附錄四）。由此評量，希望學生預先檢視自己的數學概念。學生的作答及訂正情形仍然再次被用爲上課的教材。例如，在介紹 1-1、1-2 指數函數與其圖形時，個人直接由學生填答的問卷中，挑出幾位以直觀感受作答的學生上台分享，引出指數擴充的教學活動；在 2-5 正餘弦定律單元，則以問卷中的角度比到邊長比的想法，揭開此節的定量探索教學活動。

在三階段教學行動研究即將告一段落前，個人爲檢核活動與成效的關聯，自全體學生中選樣 14 位施行問卷調查，問卷主題爲「學生對教學策略看法」。資料蒐集與分析的流程，是先設計一份參酌和修改自 Raymond（1997）的「教師數學信念及上課風格」問卷，在第三階段進入尾聲時（93 年 5 月）實施，由全班學生填寫，施測時間十五分鐘。這是想刺激學生反思學習的內容，並評估研究者設

想的學生自主學習模式的效果。共有 11 道選擇題，提供的選項依序區分成傳統型、混合型、非傳統型等三種數學教學取向。在分析出「教師數學信念及上課風格」問卷的結果後，個人再依據學生的不同反應，挑選 14 位學生（因學生數學學期平均 84 分，故班上成績偏低者所佔比例較少，選樣時不看成績分布，而以前份全班施測問卷裡填答中看法屬傳統型、混合型、和非傳統型各佔 2 位、7 位、和 5 位的方式篩選），由其自行找時間作答進一步問卷「學生對教學策略看法」。目的在檢驗預想的學生學習軌道（Hypothetical Learning Trajectory，簡稱 HLT）是否發生？並由蒐集到的學生看法中，找出下一階段持續教學行動研究的起始點。

在「學生對教學策略看法」問卷中，個人問的題目是：「（1）在上下學期開學前的假期，我們各自給予一本「暑期新生自學教材」和「寒假自學教材-三角篇」。請問在你拿到自學教材時，曾覺得增加負擔嗎？不知道自學教材有沒有帶給你什麼作用和感覺？（2）每學期開學的第一堂課，老師都請你們做依這學期將學課程內容而編的「前測問卷」。不知你能否想像一下，老師這樣安排有何用意？一開始做「前測問卷」，是否對你整學期的數學學習產生任何影響呢？」選樣學生的作答，主要是反映她們對「學習前導架構」的看法與感受。學生大都表示由「自學素材」帶來的感受並非僅是假期負擔，而且有一些學生接收到「學前評量」的輔助作用。像有一些學生的回答是這樣：

學生 118：前測問卷能預先了解這學期的上課內容，先思考過，對之後的學習更有興趣。

學生 123：前測問卷老師想讓我們先對整學期的內容做一個初步的認識，對整學期的數學學習的影響是，從以前的認知基礎再向上延伸，具連接作用。

也有學生提出相當實用的建議，譬如：

學生 212：我認爲有自學教材是很好的，如此對未補習的同學是比較公平的。同時我認爲自學教材除了概念的教學以外，可以多一些具代表性的題目，如此才可更熟悉並提

出問題。

教學行動研究應是一個持續的循環歷程，在這回的三階段研究中，個人更清楚了後續研究的方向。底下個人將依據這三階段行動研究的經歷、體驗、和心得，試著與學理構念及重構架構進行對話和省思。

陸、「學習前導架構」討論和省思

這回研究以建立「學生學習前導架構」爲重心，從參酌 Skemp 的「學習地帶」理論及奧蘇貝爾的「先行組織者」概念出發，將學理依研究者的教學特質及場域再脈絡化，構思出可以在課堂教學實際採用的教師活動，並進而影響學生活動，達成學生自主理解數學的研究目標。因著學習前導架構的鷹架功用，這些教學實施以「統整式的學生自主學習」爲核心，個人進一步整合學與教的軌道，盡量做到「以學生爲中心思考概念理解取向的數學教學」和「以數學的樂學和易學性思考可能的教學活動」兩點，也爲了達成這個教學目標而深化了個人的教學功力。

個人如何看出來這些學生態度的轉變呢？在課堂上解數學問題時，並不像一般傳統教室中的學生，只認定教師和教科書爲數學知識的源頭，她們對自己數學學習成果的評價，也並非套用教師或教科書的既定標準。總想著自己才是學習責任的真正負擔者，相信每位學生以自己的直觀方式依情境、脈絡學數學才是比較合適的學習方式。如同 Simon（1994, p.71）所說的，”師生在課堂從事的工作與數學家是可以平行類比的，兩者都在找概念的源頭、重新創始數學、和明瞭應用價值”。在這種活動流程下，學生和數學之間搭起了「值得探究，終有所獲」的關係。

個人的教學行動研究經驗對其他中學數學教師的意義爲何？這牽涉到教師轉變的要素。因爲，教師的發展不可避免地帶著個人特質，跟教師的生活史及發展脈絡相關聯（Ball & Goodson, 1985）。那些對自我效能（Self-Efficacy）較有感觸

的教師，會有較高意願去轉變他（或她）的教室教學實施，同時會感覺到自己能更精密地掌控教學的環境（Sparks, 1988）。McLaughlin（1994, p.31）認爲”專業成長能夠發生，根本上，關乎專業社群的建立”。有了教學社群，教師的成長可以更有動能，尤其是，社群對話（Community Dialogue）可以促使參與教師藉由集體行動，來分析教育意圖與實施之間的關係（Gitlin, 1990），進而質疑自身的教學信念和教學實施，於是產生新的思考及行動模式，就會進一步考慮如何轉變。但是，這樣的數學教師轉變專業發展計畫，若能與師資培育機構協同進行，可使轉變過程更系統化，這才是促使教師轉變的較佳方式。

一般而言，數學教師們對於自己的教學轉換應依據或參照什麼專業成長的理論，通常是無法立即體會得到的。這種由教師個人到客觀理論的通路，若單純地由教師獨自來尋找是件不容易達成的任務，似應借助教育專業人士的引導，讓理論與實務的通道能夠更清晰地浮現在教師的面前。如此一來，也就能大大地提高數學教師進行教學試驗的意願與成功的機會。這樣我們才能期待數學教學事業的全面專業化。個人主張，後續的教學行動研究需著重於「合作、協同學習」的模式，也許會使數學教學問題的改善更有成效。

經由這次個人的教學行動研究，除了引發自身數學教學的重整之外，希望也能提供數學教育研究者及其他中學數學教師教學與研究的參考。深具意義的數學教學轉變絕非一蹴可幾，須花費多人、數年的集體心血投入，這會是一個持續努力的終身事業。而教學事業中的藝術成分，正等待有心、用心的數學教師予以激發，在各個不同眼光之教學重整故事的陸續加入下，以學生爲導向的數學教學新面貌應會逐步地浮現。

參考文獻

一、中文部分

吳芝儀和李奉儒合譯（1995）：質的評鑑與研究。台北縣新店市：桂冠圖書公司。

施良方（1996）：學習理論。高雄市：麗文文化公司。

許秀聰（2005）：一位資深高中數學教師重構教學概念的行動研究。國立台灣師範大學碩士論文。

許國輝譯（1995）：小學數學教育－智性學習。香港：香港公開進修學院出版社。

二、英文部分

Ball, S.J. & Goodson, I. （1985）. Understanding teachers: Concepts and contexts. In S.J. Ball, & I.F. Goodson（Eds.）, *Teachers' Lives and Careers*（pp.1-26）. London: The Falmer Press.

Brown, C.A., & Borko, H. （1992）. Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grouws （Ed.）, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*（pp.209-239）. New York：Macmillam.

Chin, R., & Benne, K.（1969）. General strategies for effecting changes in human systems. In W. Bennis, K. Benne, & R. Chin （Eds）, *The Planning of Change* （2nd ed., pp.32-59）. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Ensor, P. （2001）. From preservice mathematics teacher education to beginning teaching: A study in recontextualizing. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*（3）, 296-320.

Freudenthal, H. （1973）. Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413-435.

Freudenthal, H.（1991）. Revisiting mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gitlin, A. （1990）. Educative research, voice, and school change. *Harvard Educational Review, 60* （4）, 443-465.

McLaughlin, M.W. （1994）. Strategic sites for teachers' professional development. In P. Grimnett, & J. Nevfeld （Eds.）, *Teacher Development and the Struggle for Authenticity* （pp. 31-51）. New York: Teachers College Press.

Raymond, A.M. （1997）. Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* （5）, 550-576.

Simon, M. （1994）. Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 71-94.

Sparks, G.M. （1988）. Teachers' attitudes toward change and subsequent improvements in classroom teaching. *Journal of Educational Psychology, 80* （1）, 111-117.

Tzur, R. （2001）. Becoming mathematics teacher-educator: Conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education , 4*, 259-283.

Zaslavsky, O., Chapman, O., & Leikin, R. （2003）. Professional development of mathematics educators: Trends and tasks. In Alan J. Bishop, M.A. Clements, christine Keitel, Jeremy Kilpatrick, & Frederick K.S. Leung （Eds.）, *Second International Handbook of Mathematics Education* （Part Two, pp.877-917）. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Zaslavsky, O., & Leikin, R. （1999）. Interviewing the training of mathematics teacher educators and the professional development of mathematics teachers. *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* （Vol. I, 143-158）. Haifa: Israel Institute of Technology.

附錄一　第一冊學前評量問卷

本卷有二個部分，第（一）部份為單選題，共十五個敘述，
請依題意勾選妳的判斷；
第（二）部份有四個問題，請寫出妳的答案，並說明妳的理由。

（一）以下共有十五個敘述，請依題意勾選妳的判斷：

1. 老王稱讚小李：「總經理要大家每天穿制服，會計陳小姐雖然有時穿、有時不穿制服，但你是每天都不穿制服，所以只有你一個人有勇氣對抗總經理，不遵守他的規範。」老王稱讚小李的這段話

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

2. 北一女牌美容霜上寫著：「擦了我，保證你變美麗。」有一位小姐近日變美麗了，我們知道她是擦了北一女牌美容霜。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

3. 若天下雨，則地面會濕。因此，若天沒下雨，則地面必然不會濕。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

4. 睡美人對仙女說：「我怎能嫁予王子，除非我是一位公主？」我認為睡美人心中真正想表達的是；「公主才嫁王子，我不是公主，所以不會嫁給王子。」這樣的說法是

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

5. a、b 是實數，若 $ab=0$ 時，則 $a=0$ 且 $b=0$。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

6. a、b 是實數，若 $a^2+b^2\neq 0$ 時，則 a 不等於 0 且 b 不等於 0。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

7. a、b 是實數，若 $a>b$ 時，則 $a^2>b^2$。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

8. a、b 是實數，若 $\boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{b}^2$ 時，則 $a>b$。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

9. a、b 是實數，若 $a^3 > b^3$ 時，
則 $a > b$。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

10. 若△ABC 是等腰三角形，
則△ABC 是正三角形。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

11. 若△ABC 是正三角形，
則△ABC 是等腰三角形。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

12.在△ABC 和△DEF 兩個三角形中，已知$\angle A=\angle D$ 且 $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{DF}$，則△$ABC$ 和△DEF 相似。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

13.若 $y=f(x)$ 為二次函數，
則此函數圖形和 x 軸必交於兩點。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

14.若 $y=f(x)$ 為二次函數，
點（5，1）和（－7，1）皆落在此函數圖形上，則 f（－1）為函數的最大值或最小值。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

15.若 $y=f(x)$ 為二次函數，
點 A（5，1）為其圖形頂點；
則在 $-1 \le x \le 3$ 時，$y=1$ 為函數的最大值或最小值。

正確　錯誤　我不知道
☐　☐　☐
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

（二）底下有四個問題，請找出你的答案，並說明理由：

有一個數 u，而且 $u^2=-1$；那麼 $u>0$，$u=0$，$u<0$ 哪一個會成立？或都不成立？

你的答案和理由：

2.（1）$0.\overline{3}=0.3333....$，則 $\mathbf{0.\overline{3}>\frac{1}{3}}$，$\mathbf{0.\overline{3}=\frac{1}{3}}$，$\mathbf{0.\overline{3}<\frac{1}{3}}$，哪一個會成立？

或都不成立？

你的答案和理由：

（2）$0.\overline{9}=0.9999....$，則 $0.\overline{9}>1$，$0.\overline{9}=1$，$0.\overline{9}<1$，哪一個會成立？

或都不成立？

你的答案和理由：

3.希臘時代的 *Zeno*（芝諾）學者曾提出一個「古代版的龜兔賽跑」詭辯。芝諾的論述是：當善跑之神與烏龜進行百公里賽跑時，假設善跑之神將速度放慢為烏龜的十倍，並讓烏龜往前進到離起跑線二十公尺處，兩者才一起出發比賽；則在沒有誰打瞌睡的情況下，芝諾堅持烏龜將贏得勝利。理由是：開始時烏龜在善跑之神前面 20 公尺處，等善跑之神追上這段差距時，烏龜又在他前方 2 公尺處：善跑之神再度追趕，而烏龜也盡責的向前跑了 0.2 公尺；…如此一

你的答案和理由：

4. $$\begin{aligned} f(x)=x^4-6x^3-5x^2-2x-7&=(x-7)(x^3+x^2+2x+12)+77 \\ &=(x-2)(x-3)(x^2-x-16)-76x+89 \end{aligned}$$，

（1）求 f（7） 之值

你的答案和理由：

（2）求 f（2）之值

你的答案和理由：

附錄二　第一冊學前評量學生訂正整理

學生 104：

1. 針對$0.\overline{9}=1$，有本書舉了些例子，

（1）1÷7+6÷7 用分數計算是 1，用小數計算是$0.\overline{9}$

（2）我們把 10 個$0.\overline{9}$相加，即$0.\overline{9}\times 10=9.\overline{9}$，再減掉 1 個$0.\overline{9}$，

則 $9.\overline{9}-0.\overline{9}=9,\therefore 0.\overline{9}\times 9=9\times 1,\therefore 0.\overline{9}=1$

重新找過之後，才發現自己老早就想過這個問題，當時不太能夠接受這個…證明，因為它看起來根本是不一樣的東西，所以再遇到同樣的問題，又選了自己始終認定的答案。但過了國中三年訓練，我想我能夠同意它了，只是…怎麼這麼"妙"啊？！還是有那種言語無法形容的感覺…

（這也是一種對無限的探討吧！）

2. 有力的反駁（我個人的想法）

烏龜和善跑之神是進行「百公里」的賽跑，換言之是有距離限制的，若按照芝諾的說法，不斷將兩者的跑步距離以等比級數縮小比較，如此一來他們的比賽勢將無法結束，由此可知芝諾的想法是錯的。

學生 106：

1. 就課本有一段來說，以角度而言 i，也就是所謂的$\sqrt{-1}$是<0, >0, =0 皆不發生，但看了一些計算的介紹後，我倒覺得它像是一個單位，因為這樣才可以使每個方程式都能有解，之前不是無法表示一個數的平方式 2，就創造了$3\pm\sqrt{2}$這樣的符號嗎？應該也是相同的道理，只是它不能表現在數線上而已，但高斯也想辦法用了坐標系來表示它。不過，就這樣看來，我還是認為它跟實數是不同世界，是不能比大小的！
2. 芝諾詭辯就跟課本的龜兔賽跑很像，按照芝諾這樣說，可是那個時間卻還是有限的，再怎樣也不會超過$\dfrac{9}{20}$秒，所以他這樣的說法只代表在短短的時間內會成立，不能和那麼長的時間等同。
3. 請問老師，課本說級數總和不會趨進一個數值，則為無窮的發散級數。那麼若公比為-1，和只可能是 1, 0, -1，卻不會趨進一個值，也算是發散嗎？

學生 122：

1. 令$u=\sqrt{-1}$，不管 u>0, u<0, u=0，皆使得$u^2\geq 0$，但題目中的$u^2=-1$（虛數），則 u 不等於 0，也不會大於 0，不會小於 0。真正表示 u 的其實是虛數 i，這部份屬於 2-4 複數與複數平面的部份。
2. 計算第二、三大題皆是無限循環小數，在 3-2 有介紹，其實這兩題的原始做法是（1）$0.\bar{3}\times 10=3.33333...,0.\bar{3}\times 10-0.\bar{3}=3$，也就是說$0.\bar{3}\times 9=3,\therefore 0.\bar{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

   （2）令烏龜速度 x m/s，善跑神速度 10x m/s，跑步時間 t 秒，

   10xt-（xt+20）=9xt-20 $\because x>0$，t 又不斷正向增加，∴必有 9xt-20>0 之情況，故善跑之神必有贏的時候。
3. 計算第四大題的（1），除了用說明的以外，也可用代數解。其實只要發現到它第一項根本就是 0，算起來就很 easy
4. 單純針對單選那題「不是公主⇒不會嫁給王子」是對的。其實故事原版稅美人是想嫁給平民（她不知就是王子！）

第一部分的前 15 題屬邏輯判斷的部份（高中教材 1-1），邏輯判斷的結果只有真和假，所以這 15 題中沒有「無法判斷的」。這一部分的 5-15 題，皆是利用國中學過的觀念就可以判斷是非，其中最後 3 題函數的判斷，在 1-3 也會提到。

我自己很喜歡邏輯的部份，因為邏輯時常要做反向思考，檢驗敘述的錯誤。其實，我也曾在自學中寫過，我看一本課外書叫「跳出思路的陷阱」，它的 Chap1 就是邏輯。它裡面每一道題目都很有趣，值得深思！

學生 203：

1. 虛數不等於 0，不小於 0，不大於 0，∴無法比較大小。
2. 關於芝諾詭辯的問題，我曾在「跳出思路的陷阱」一書中看過，芝諾還有另一類似矛盾：有一跑者推理：「在我抵達終點前，我得先經過中點，然後再經過剩下一半，即 3/4 處；然後在我跑完最後 1/4 前，我必須先經過另外一半的一半，再經過一半的一半的一半，…沒完沒了，我永遠到不了終點。」芝諾的觀點就是把時間和空間都分離成無限個不連續的點，才會照成此矛盾的。

學生 217：

1. 令$x=0.\bar{3}, 10x=3.\bar{3}, 9x=3.\bar{3}-0.\bar{3}=3, x=\frac{1}{3}$

   令$x=0.\bar{9}, 10x=9.\bar{9}, 9x=9.\bar{9}-0.\bar{9}=9, x=\frac{9}{9}=1$
2. 設烏龜速度為 1 m/s，善跑之神為 10 m/s，起跑後過 2 秒時，烏龜跑在（20+2）

m 處，善跑之神在 20m 處；但若距起跑後 4 秒，烏龜在（20+2+2）m 處，善跑之神卻在 40m 處。芝諾的理論，提出來我覺得是正確的，但他並無考慮到實際上的狀況。0.002m, 0.0002m 的差距，以跑步來說，相差 0.000002m 等於沒差多少，一下就可以趕過了。再一次證明，理論和現實是不能相提並論的。

學生 221：

1. 睡美人對仙女說：「我怎麼能嫁予王子，除非我是一位公主？」其實她心中想表達的是：「我不是公主，所以我不會嫁給王子。」這題的用意是告訴我們，原命題和逆否命題是等價的，兩者必同時為真或同時為假。

$\therefore$ "我嫁給王子 $\rightarrow$ 我是公主" ≡ "我不是公主 $\rightarrow$ 我不會嫁給王子"

（原命題和逆否命題意義相同，適用於反證法。）

2. 有一個數 u，而且 $u^2=-1$，那麼 $u>0, u=0, u<0$ 哪一個會成立？或者都不成立？

答案是都不成立，但若採直接證法，由 $u^2=-1 \Rightarrow u=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow u$ 不是實數

只能推到 u 不是實數，卻無法證明只有實數能比大小，所以應採反證法。

假設 $u>0, u=0, u<0$ 其中之一成立，則 u^2 必為正整數或 0，與 $u^2=-1$ 矛盾，

$\therefore$ 得知 $u>0, u=0, u<0$ 都不成立。

3. 若…則…的邏輯關係中，從前提到結論的推導過程中，只有當前提為真，結論卻為假的命題才不成立，其餘三種關係都是成立的。（當前提為假時，不管結論如何都成立。）

4. 在整理真假值的過程中，發現三式相等的關係

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p \equiv \neg p \vee q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

補充：邏輯謬論

（1）「這句話有八個字」的敘述，其本身以及反敘述都是錯的。

本身：這句話有八個字（F，只有七個字）

反敘述：這句話沒有八個字（F，有八個字）

類似的「這句話是錯的」的敘述，同樣也不能是對的，也不能是錯的。

$\Rightarrow$ 形容自己的敘述，不能判定真假或對錯。

附錄三　假期作業考試

填充題：本大題共 25 格每格 4 分

- 曉玲爲了要測塔高 $\overline{AB}$，在離塔底 B 處 50 公尺的 D 點處打了一根標竿 $\overline{CD}$，並在 $\overline{BD}$ 的延長線上找到 E 點，使得 A、C、E 三點成一直線，已知 $\overline{CD}$=6.06 公尺，且 $\overline{DE}$=3 公尺，則塔高爲＿＿＿①＿＿＿公尺。

※貼心複習

銳角三角函數的定義：

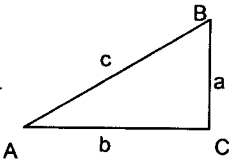
設直角ΔABC 中，∠C=90^0，現以∠A 爲例，各邊與∠A 關係如右圖，

則三邊中**任兩邊之比**叫做∠A 的六個三角函數值，定義如下：

（1）∠A 的正弦：sinA=$\frac{a}{c}$　　（6）∠A 的餘割：cscA=$\frac{c}{a}$

（2）∠A 的餘弦：cosA=$\frac{b}{c}$　　（5）∠A 的正割：secA=$\frac{c}{b}$

（3）∠A 的正切：tanA=$\frac{a}{b}$　　（4）∠A 的餘切：cotA=$\frac{b}{a}$



繼續作答

- 如果∠A=32^0，∠B=48^0，請比較下列各式的大小：
  （1）sin A＿②＿sinB
  （2）tan A＿③＿secA（塡入＜＞＝）
- 求下列各式的值：
  （1）sin 30^0-cot 60^0+sec 30^0-tan 45^0=＿＿④＿＿
  （2）$\sin^2 38^0+\sin^2 52^0$=＿＿⑤＿＿【注意：$\sin^2$A 即爲（sin A）^{2}】
  （3）sin 23^0 csc 23^0-$\tan^2 71^0$+$\sec^2 71^0$=＿＿⑥＿＿
- 在ΔABC 中，∠C=90^0, sin B=$\frac{3}{5}$
  （1）若 $\overline{BC}$=12 公分,則 $\overline{AC}$ =＿＿⑦＿＿公分
  （2）若ΔABC 周長 60 公分，則ΔABC 面積＿＿⑧＿＿平方公分
- 等腰三角形 ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=5, \overline{BC}=6$, 則
  （1）sin B+cosC=＿＿⑨＿＿
  （2）sin A=＿＿⑩＿＿
- 已知 cos A=$\frac{2}{3}$ 且∠A 爲銳角，則 $\frac{\tan A+\sec A}{\cot A+\csc A}$ =＿＿⑪＿＿
- 一飛機以每秒 500 公尺等速朝東北的方向爬升，以 45 度爬升到達飛行高度

10000 公尺需時＿＿⑫＿＿秒。。($\sqrt{2}=1.41, \sqrt{3}=1.73$)

- 若距飛機起飛 6 公里處有一高山 3000 公尺飛機起飛時的仰角至少要超過＿＿⑬＿＿度

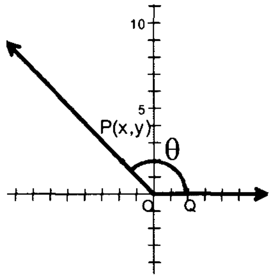
※貼心複習

廣義角三角函數的定義：
若∠POQ=θ（可以不是銳角）且 P 點座標爲（x, y），$\overline{OP}=r$ 則

（1）θ的正弦：$\sin\theta=\frac{y}{r}$　（6）θ餘割：$\csc\theta=\frac{r}{y}$

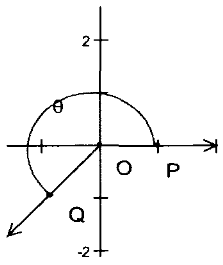
（2）θ的餘弦：$\cos\theta=\frac{x}{r}$　（5）θ正割：$\sec\theta=\frac{r}{x}$

（3）θ的正切：$\tan\theta=\frac{y}{x}$　（4）θ餘切：$\cot\theta=\frac{x}{y}$



繼續作答

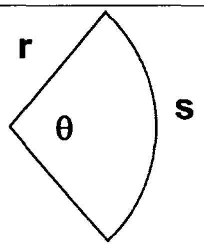
- 如右圖若∠POQ=θ 且 Q 點座標爲（-1, -1）則 $\sin\theta+\tan\theta$=＿＿⑭＿＿



- 求下列各式的值：
  （1）$\sin 330^0+\cos 225^0$=＿＿⑮＿＿
  （2）$\tan 210^0+\sin 120^0-\cot 135^0$=＿＿⑯＿＿
- 若 $90^0<\theta<180^0$ 且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 則 $\tan\theta$=＿＿⑰＿＿
- 若 $270^0<\theta<360^0$ 且 $\cos\theta=\frac{3}{5}$ 則 $\cot\theta$=＿＿⑱＿＿

※貼心複習

扇形中 $\frac{弧長S}{半徑R}$ 的『比值』與角度θ　（360^0 制）成一對一對應關係，所以可以用『比值』來表示一個角的度量，我們稱此『比值』爲角的弧度量，但弧度量單位經常省略。

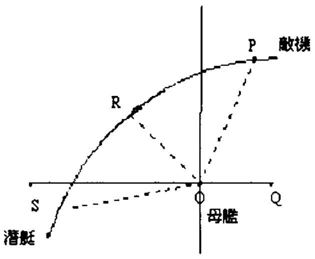


※繼續作答

- 一扇形弧長 10 公分半徑 5 公分則此扇形的圓心角θ=＿＿⑲＿＿（弧度）=＿＿⑳＿＿度（以π表示）
- 半徑爲 15 公分，圓心角爲 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形周長爲＿＿㉑＿＿
- $\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{11\pi}{6}-\sec\frac{\pi}{3}$=＿＿㉒＿＿
- 漢光 10 號海軍砲兵演習時，有一『敵機』發射深水炸彈，欲攻擊海面下的

潛水艇。

在此潛水艇前方海面上，有一護航的驅逐艦 O，艦上的砲兵試圖在下列幾個指定點攔截砲彈。



（1）第一攔截處 P（$200,200\sqrt{3}$）砲兵需向前方仰射 θ（$\angle POQ$）角,則 $\theta=$_____㉓________

（2）第二攔截處 R（$-200\sqrt{3},200$）砲兵需轉動砲台從前方轉向後方共轉動 ϕ（$\angle ROQ$）角，則 $\phi=$___㉔_____

（3）第三攔截處 S 需砲台續轉至海平面下，則轉動角度由一開始到最後定點為 γ（$\angle SOQ$）角，若 $\gamma=\dfrac{4\pi}{3}$ 且 $\overline{OS}=300$ 則 S 點座標為_____㉕______

新春愉快

附錄四　第二冊學前評量問卷

本卷有二個部分，第（一）部份為單選題,共 13 個敘述，請依題意勾選妳的判斷；
第（二）部份有三個問題，請寫出妳的答案，並說明妳的理由。

（一）以下共有 13 個敘述，請依題意勾選妳的判斷：

1.若 a 為一正實數，

則 $(a^2)^3+(a^3)^2-(a^2)(a^4)=a^6$

正確　錯誤　我不知道
□　□　□
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

2.若二自然數 x,y 且 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^y$

則 x＞y 。

正確　錯誤　我不知道
□　□　□
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

3.設 n 是一個自然數，則 a＞b 時，
$a^n>b^n$ 。

正確　錯誤　我不知道
□　□　□
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

4.A、B 兩城鎮今各有人口 5 萬人，A 城鎮由於都市更新計畫，每年將增加 3 萬人，B 城鎮多年來一直維持人口年增率為 30%。則 6 年後，A 城鎮人口比 B 城鎮人口多。

正確　錯誤　我不知道
□　□　□
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

5.據報導，某醫院發生碘 131 的輻射滲漏意外。該意外發生於 16 天前，卻直至今日才被檢舉揭發；原能會馬上對院內人員進行全身殘餘劑量檢測，結果身上有最高輻射劑量的人是 0.05 毫西弗。原能會人員表示，碘 131 的半衰期為 8 天，安全含量上限是 1 毫西弗，所以這人 16 天前雖被感染但未超過安全標準值。

正確　錯誤　我不知道
□　□　□
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

6. 已知 3：4 ＝ 6：8 ＝ 9：12，
若 a：b＝3：4，
則 （a+1）:（b+1） ＝4：5 。

正確　錯誤　我不知道
□　□　□
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

7. 若△ABC 的三邊長 a:b:c=4:5:6，則△ABC 的周長可以用 15k（其中 k 是正數）來表示。

正確　錯誤　我不知道
□　□　□
（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

8. 若△ABC 的三邊長 a:b:c=3:4:5，則△ABC 是直角三角形。

正確 ☐ 錯誤 ☐ 我不知道 ☐

（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

9. 若△ABC 中 $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，則 $\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=1:2:3$ 。

正確 ☐ 錯誤 ☐ 我不知道 ☐

（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

10. 若△ABC 中∠C 為直角，則 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 之值可由∠A 的角度唯一確定。

正確 ☐ 錯誤 ☐ 我不知道 ☐

（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

11. 點 A、B、C、D 在以 O 為圓心的圓上，如果∠AOB 和∠COD 皆為銳角，且∠AOB＞∠COD，則 A 到 $\overline{OB}$ 的距離比 C 到 $\overline{OD}$ 的距離長。

正確 ☐ 錯誤 ☐ 我不知道 ☐

（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

12. 若一函數 f（x）對所有實數 x 皆滿足 f（x＋6.2）＝f（x），則 f（20）＝f（1.4）。

正確 ☐ 錯誤 ☐ 我不知道 ☐

（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

13. 想像我們使用一種複數平面的導航系統，即直角座標系的（a,b）以 Z= a+bi 表示。若一警察位於 $Z_1=0+0i$ 處，原本預定朝 $Z_2=3+0i$ 前進，正要出發時突接獲通知須趕至位於 $Z_3=2+2\sqrt{3}i$ 的大樓查看，則這位警察該調整他的直線前進方向為逆時針旋轉 $60°$ 。

正確 ☐ 錯誤 ☐ 我不知道 ☐

（理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）

（二）以下有三個問題，請找出你的答案，並說明理由：

1. 指數律為：若 $a,b\in N$，則 $2^a\cdot 2^b=2^{a+b},(2^a)^b=2^{a\cdot b},2^a\cdot 3^a=(2\cdot 3)^a$ 。

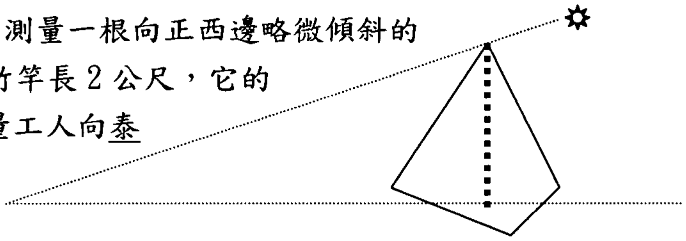
如果希望在承襲指數律之下，試著從 $2^5=2\times 2\times 2\times 2\times 2$（2 連乘 5 次）擴充訂定 2^{-5} 時，你會如何定義之？

你的答案和理由：

2. 現在有一部機器，會將輸入的數值以一固定模式計算後輸出結果。
已知輸入 3，則輸出結果為 1 ； 輸入 6，則輸出結果為 2 ；
輸入 12，則輸出結果為 3 ； 輸入 24，則輸出結果為 4 ；
輸入 48，則輸出結果為 5 。
則在同一部機器在輸入 1536 時，會搭配怎樣的輸出結果？

你的答案和理由：

3. 就如同「曹沖量大象重量」、「阿基米德檢測純金皇冠」一般，希臘時代流傳泰勒斯幫埃及法老王丈量金字塔高度的智慧故事。傳說是這樣的：太陽從正東方的地平線冉冉升起，泰勒斯忙著測量一根向正西邊略微傾斜的竹竿及其影子的長度；泰勒斯量得竹竿長 2 公尺，它的影子長度是 4 公尺。就在此刻，丈量工人向泰勒斯回報說：「金字塔的影子長度正好是 100 公尺。」泰勒斯得此數據後，計算出金字塔高度是 57.7 公尺。泰勒斯算對了嗎？還是你認為傳說者將正確數據弄錯？



你的答案和理由：