

37~76

優等

## 國小四年級學生與學障兒童在數學文字語言理解的

### 困難及其模式建立之研究

秦麗花老師

高雄市内惟國小

摘要

有鑒於數學語言的理解與應用，已成為日常生活必備的之能，也成為當前數學領域重要的課程能力指標，數學語言具有相當特殊性，包含文字、符號與圖示語言，根據文獻分析：數學語言是數學教育的核心，也是數學概念獲得的表徵，因此探討一般兒童與學習障礙兒童在數學語言理解上的表現、學習困難、其錯誤類型分析及建立數學語言理解模式成為本研究四個主要研究動機。

因此本研究以測驗調查和教學晤談的方式，對國小 336 位四年級學生，及 10 位已被鑑定為學障兒童為對象進行研究，以「數學作圖理解測驗」為核心，採實作評量的方式，探討其對數學文字語言的理解表現、學習困難及其錯誤類型分析，並應用驗證性因素分析方式，建立數學文字語言的理解模式及其適合度討論。

研究結果顯示：一般兒童在數學語言理解能力中等，其錯誤類型約有九種，學習障礙兒童的學習困難主要來自語文閱讀障礙、數學專門詞彙概念理解困難，而研究者所建構的數學文字語言理解模式中，一般語文理解能力、數學先備知識、和數學詞彙理解為三大主軸，根據上述研究結果，分別對教師教學及出版商提供具體建議。

關鍵字：數學語言理解、學障兒童、數學語言理解模式

## 壹、研究緣起

美國數學教師協會 (The National Council of Teachers of Mathematics, 2000, 簡稱 NCTM) (2000) 明示在快速改變的世界中，擁有流暢的數學學習能力是必要的技能，因為每天生活中有一些與數學與科技有關的閱讀材料快速增加，如購物的決定、健康計畫的擬定---等 (Keeble, 2004)，因此數學語言閱讀能力的提昇成為當務之急，但很多兒童和學習障礙的兒童在這方面都有學習困難，以下分別從九年一貫課程有關數學語言的能力指標、數學語言的特殊性與內涵、數學語言與數學閱讀的相關研究，和學習障礙兒童在數學語言學習的困難---等向度，來說明本研究的研究動機與目的。

### 一、數學語言理解是數學重要能力指標，也是數學教育的本質

在教育部 (2001) 九年一貫課程數學領域基本理念中明白指出：數學與生活息息相關，數學視野與技術的基本素養是終身學習的利器，因此強調數學教學不但要重視數學內在的連結，也要重視數學外在的連結，在「連結」的能力指標中，明確指出有關數學語言學習的能力指標有六條：

C-T-2 能將情境中數量形之關係以數學語言表達出來。

C-C-1 了解數學語言的內涵 (符號、用語、圖表、非形式化演譯)。

C-C-2 了解數學語言與一般語言的異同。

C-C-3 能用一般語言與數學語言說明情境與問題。

C-C-5 用數學語言呈現解題的過程。

C-C-6 能用一般語言與數學語言說明解題的過程

在教學部分，更明確建議教師應培養學生能以數學語言或方法分析批判週遭事物的精神，由此可見數學語言的學習與理解，是當前數學教育的重要目標。因為數學是一種語言，不僅可作為協助思考的工具，也是一種發現程序、解決問題或得到結論的工具 (Baroody, 1993)，況且數學語言中的符號圖表，無不充斥於日常生活之中，如建築、報章雜誌等也常用以傳達、解釋、說明、協助做決定的依據，因此理解兒童數學語言的學習困難是必要的。

NCTM (1989) 更指出大量數學符號的運用，都具有其一定的屬性，且在不同處有不同的意義，如  $\frac{1}{2}$  和  $10^2$ ，其中的 2 個代表不同的意思，學生要有彈性思考，及理解數學語言真正概念的能力，才有助於數學語言的掌握，其次數學語言抽象及簡約的特殊性，也是一般兒童理解困難的主要原因 (秦麗花, 2003a)。因此了解國小兒童數學語言理解的困難及其錯誤類型，是本研究的動機之一。

## 二、數學語言的特殊性與內涵

### (一) 數學語言的特殊性

數學是一種語言，而且是一種科學的語言，具有非常高的精確性，因此數學語言具有可被證明、可被展示、及可被推衍---等特質(Bauers,2002)。

Russell(1900)引用 Adler(n.d.)的看法，認為數學是一種科學的語言，是一種唯一將一些可用程式以術語正確表達其概念的語言，所以數學語言不祇包含公式，還敘述定義和術語，而這些敘述通常與語文的習慣表達有所不同，數學語言具有相當精確性，首先是它的字彙有特別的意義，不像看小說一樣可以猜測其意，例如看到有理數(rational number)，一定要同時出現有理數的含義，才能賦予意義，完成閱讀理解的任務。

Esty(2003)認為數學語言有它的句法(syntax)、詞彙(vocabulary)、詞序(word order)、同義字(synonyms)、否定詞(negations)、慣例(convention)、縮寫(abbreviations)、句子結構(sentence structure)、和段落結構(paragraph structure)，這些跟一般語文理解有所不同，因此數學閱讀有些特殊性，數學語言有特別的思考方式與表達形式，所以數學閱讀是一種將讀者帶入到數學的、抽象的、表達的理解層次，因為它具有多種形式表達相同概念的特質，如用圖示、用定義、用文字縮寫、用公式、用符號等，學生一定要具備某種先備知識才能閱讀理解，甚至語文能力也會限制其數學知識的獲得(Kober,2003)。

## (二) 數學語言的內涵

因為數學是以數字、符號和詞彙去表示質與量關係的應用科學(Roe,Stoodt, & Burns, 1995)，邵光華(2002)認為數學語言包含文字語言、符號語言和圖示語言，以下分別敘述這三種數學語言的內涵。

文字語言包含很多數學詞彙的語言，這些詞彙包含一般性詞彙(general vocabulary)、數學專門詞彙(matheamtical technical vocabulary)、數學特殊詞彙(matheamtical special vocabulary)、方位詞彙(positional vocabulary)(National Association for Language Development in the Curriculum,簡稱NALDIC,1999)，Jacobson(1998)認為學科閱讀包含很多專門術語和新的概念，這些詞彙包括專門的詞彙(technical vocabulary)、特殊的詞彙(special vocabulary)、不熟悉的詞彙(unfamiliar words)、和代詞(anaphora)這些詞彙是數學概念獲得的關鍵，也是數學文字重要

內涵之一。

而數學符號語言包含各種運作符號、關係符號、集合符號、---等 (Miller, 2004)。蔡亞倫(2001)認為語言、符號都是一種表徵，唯有了解概念，才能運作符號，因此數學符號理解涉及數學概念的獲得，因而影響閱讀的成效。

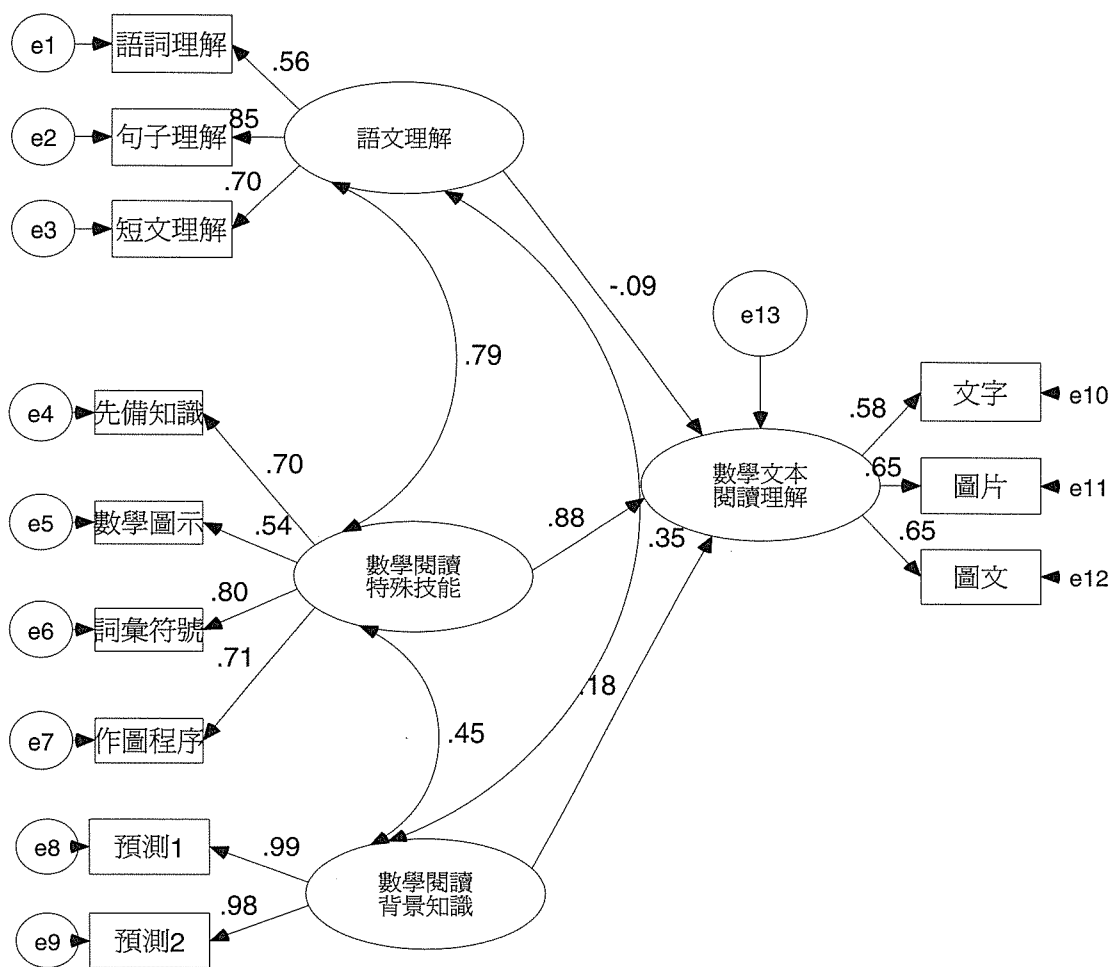
數學圖示是數學學習的視覺成分，它具有訊息表徵的功能，數學圖示語言具有多樣性：如相片式圖示 (picture)、插圖式的圖示 (illustration)、幾何圖示 (diagrams)、函數圖 (graph) ----等 (Lomas, 2004)，這些都是數學語言的內涵。

### 三、數學語言與數學閱讀理解的相關研究

#### (一) 數學閱讀理解成份的相關研究

數學閱讀理解的成份是什麼？Cloer(1981)認為數學詞彙知識、語文段落閱讀和聯貫各細節技能是三個影響數學閱讀理解的關鍵。Astrid(1994)引用 Krygowska(n.d.)的見解認為數學文本閱讀理解需要數學背景知識、先前的經驗和相當的智能，雖然討論數學閱讀理解的成份這麼多，但大都未以實徵研究為基礎，為了了解數學閱讀理解的關鍵成份，秦麗花、邱上真(2003)以 Mckenna 和 Robinson(2002)的學科閱讀三種主要核心技能為基礎，編製數種測驗為工具，以角度單元為範疇，用高雄市三百多位四年級學生進行調查研究，建立起數學閱讀理解的模式，如圖一所示。

在這模式中，可看出影響數學閱讀理解的關鍵成分分為三部份，一是一般的語文理解；二是數學閱讀的特殊技能，包含數學學科先備知識，數學圖示閱讀、數學詞彙、符號和程序性語言知識的理解；三是數學學科閱讀的背景知識，在這模式中，也發現低成就者普遍在這些向度上都比一般兒童有明顯的學習困難。



圖一：秦麗花、邱上真（2003）建構的數學閱讀理解模式圖（P127）

上述的研究是建立在學生對整個數學文本的閱讀理解上，但在數學閱讀中，事實上數學特殊技能對數學閱讀理解所佔的貢獻量最大，而其成分仔細分析即為數學語言的核心，因為數學語言包含文字語言、符號語言和圖示語言(邵光華，2002)，其中文字語言又包含很多數學詞彙的語言，這些詞彙包含一般性詞彙、數學專門詞彙、數學特殊詞彙和方位詞彙等 (NALDIC,1999)，所以研究兒童數學語言理解的困難對教師教學的進行有其特殊的意義。

## (二) 影響數學語言學習的相關研究

有關數學語言學習的相關研究到目前為止，並未見有系統性的研究，研究者整理相關文獻，發現下列五個因素會影響兒童的數學語言學習，以下分別敘述：

### 1. 語文能力低落影響數學文字語言理解

語文與數學一直是學校課程的主軸，在小學階段，兩者之間有高相關，加上長期以來學校數學課程傾向以語文主導，以語文當作媒介來教學，所以語文能力會影響數學閱讀理解。蔣大偉(2001)由工作記憶角度來探討數學障礙兒童的表現，發現語文與數學是正向關係，因為數學的工作記憶與語文的工作記憶有顯著相關；其次，語文的工作記憶與學生在校數學成績達.61的顯著相關，可見語文在正式數學學習歷程中扮演相當重要的角色，尤其在數學閱讀中，以語文為基礎的文字呈現，識字與理解便是基本入門。

秦麗花(2003b)對不同語文理解與數學先備知識四類學生進行研究，以理解不同程度兒童在數學閱讀理解上的困難所在，結果發現：語文能力弱，而數學先備知識強者這一組，其對於文本中的詞彙概念會執著於字面意思，或望文生義的一些概念，而不是以數學語言來界定數學詞彙的意義。如

“平平的角是平角，直直的角叫直角”(1303, 1410)

“平角是水平方向來回轉的角。”(1311)

而語文與數學先備知識均弱的兒童，其所顯現的最大困難是自最初閱讀文本上文字即顯現出來，其在閱讀行為上顯現出下列四大特徵：一是閱讀時，僅限於用嘴巴動口“唸”，而未做思索，因而有所讀錯誤而未覺察的情形產生，例如指著平角的圖，唸周角的定義，其次，閱讀時有一些閱讀障礙的現象，如常唸錯語詞而不自覺，如「測量」唸「測驗」，「一度角」唸成「一角度」，第三個特徵是對於數學特殊詞彙與不熟悉詞彙有理解上的困難，會以字面或同音意思解釋數學上的專門詞彙，如「終邊在中間」，「乙線在甲線的對面，稱為對邊」，第四種困難是閱讀理解，即使順利唸了文字說明，仍無法理解其意。可見語文能力弱會影響兒童數學文字語言的理解。

### 2. 對數學符號缺乏認知導致數學概念不足

周筱亭(1993)認為數學符號是一種數學語言(取自蔣治邦,1996)，數學符號是數學概念的表徵，它具有傳達、溝通、解釋數學概念的功能，因為符號與概念是一體的兩面，若學生無法將符號與既有概念做連結，也會導致學習上的困難。甯自強(1993)認為數學符號使用有兩個層次

的發展：在初階階段，符號代表具體活動經驗，可作為溝通工具，但在使用此符號時，需使用具體物件或心像重演活動經驗始能繼續運作，在第二階段，當活動類型成分被進一步理解，成為可逆溯的運思（reversible operation），則符號的意義演化為代表抽象的具體活動經驗意義，因此使用此符號時，符號成為運思的材料，因而可以以符號為媒介來進行學習活動。

數學用了很多簡單而明確的標記(notation)來傳達某些概念，例如函數  $f(x)$ ，如果閱讀者沒有將意義內化，是無法閱讀理解的。因為學童要使用符號的某種意義來進行運思活動，必須先發展對此符號特定意義的掌握，例如：「56」是一個數字符號，「56」有 5 個「10」，6 個「1」，「56」也是 7 的 8 倍，「56」也可以說成有 56 個「1」，學生需具有彈性思考的能力，才能應用自如的使用數學符號來學習與溝通。

蔣宇立(2000)對學生學習數學符號所產生的焦慮研究指出：學生學習符號的困難有：(1)對符號的意義不熟悉；(2)對符號的策略性知識不足；(3)缺乏對符號的反思能力；(4)不清楚符號運用的時機，尤其是低數學成就的學生，對符號理解較死板，不是以概念為主軸，而是以記憶符號為主，因而更易使概念學習與符號理解脫節。

秦麗花（2003b）研究顯示數學先備知識弱者，其在數學閱讀時的獨特困難之一是不理解數學符號的意義，如箭頭代表方向性與順序性看不懂。第二是學習類化能力弱，在動態評量中有教學引導的功能，但這一組學生，雖經概念教學，但類化速度很慢，需經兩次以上的引導和提醒，且每次引導的步驟要小，否則無法閱讀理解。可見對數學符號缺乏認知也會導致數學概念不足。

### 3. 缺乏後設認知影響數學圖示語言理解

Lomas（2004）認為數學圖示是數學學習的視覺成分，它具有訊息表徵的功能，但因為數學圖示具有多樣性，且多數教師除了幾何圖示會教外，對於其他圖示則很少給予教導，甚至不知道數學文本中一些相片式圖示與插圖式圖示所要表達的數學概念，難怪學生在數學圖示理解能力最弱（葉千綺、林素微，1997；秦麗花，2003b），例如只能抓到圖示片段的訊息，因而有會錯意的情況產生，例如文本中運用多線條代表動態旋轉的概念，但兒童無法理解其意，只抓其中一條線段，代表角的某一邊，而無法理解平角、周角的意思，或以某一角中箭頭數的多寡來判斷角的大小。

其次，秦麗花（2003a）從各版本的圖示語言中，發現其所要表達

的概念較為隱含，也常是片段的觀念，理解較為困難，需要較強的概念知識為基礎，所以圖示語言的閱讀理解涉及較多後設推理的能力。

#### 4. 口語語言理解不足影響數學語言理解

口語理解與書寫系統理解是閱讀理解的兩大支柱 (Hoover & Gough, 2001)，缺一不可，若從這個角度來看，閱讀能力的發展不是從讀文字，接受學校正式教育才開始，而是從出生即開始 (Cartwright, 2001)，因為閱讀能力是建立在口述語言的覺察上，兒童剛開始以為字是獨立的單位，與口語能力無關，直到他們認字、寫字才連貫在一起，有學者 (Dickinson, & Tabors, 1991; Snow, 1991) 認為口述語言所以支持往後閱讀理解的發展，是因為生活中有兩種語言，一種是脈絡化語言 (contextualized language)，一種是非脈絡化語言 (decontextualized language)，脈絡化語言能緊密的與環境結合，兒童有很清楚的脈絡可理解其意，但非脈絡化語言，則需要兒童發展某些心智能力去表徵他們的想法，如在晚餐時，告訴父母他們上午在庭院發生的事，這樣的語言沒有中介的內容，可反映過去、未來、及想像的事件，這便是將來閱讀理解發展的重要技能，因為閱讀的材料大多是非脈絡化語言，所以口語理解的發展會影響其文字閱讀。

#### 5. 數學文本設計不良影響數學語言理解

Durkin 和 Shire (n.d.) 認為數學語言在文本中的呈現常會有四方面曖昧不明的現象產生 (取自 Astrid, 1994)：一是字彙的形式；二是一般詞彙應用在數學的例子；三是特殊術語在數學文本中的敘述；四是兒童理解數學術語的能力。由此可見數學語言的特殊性，使數學閱讀理解與學習者的語言、教師的語言和數學中的語言呈現著不可分割的關係。

研究者認為 Astrid 對數學語言與口語語言的區辨，基本上與 Vygotsky 所說的「自發性概念」(spontaneous concepts) 與「科學性概念」(scientific concepts) 相似 (引自谷瑞勉, 2001)，口語語言是一種自發性的語言能力，而數學語言則是一種科學性的語言，從自發性的語言進入到科學性的語言，基本上是需明示教學，因而教師的中介指導角色就更顯得重要。

Chassapis (1999) 根據 Vygotsky (1987) 的說法，解釋自發性概念與科學性概念之別有二：自我覺知 (self-awareness) 和自願的控制 (voluntary control)，自發性概念的學習，因為不是刻意的學習，所以自我的覺知與自願的控制上較弱，而科學性概念的學習在自我覺知與自願的控制上都較強。Artigue 和 Robinet (1982) 也提出這兩種概念



區分的三個向度：(1)整體與部分；(2)靜態與動態；(3)明示與暗示（取自 Chassapis,1999），一般而言，科學性的概念都是整體的、動態的和明示的。

根據上述的文獻發現，數學語言教學要如何做？Astrid(1994)研究主張數學教育工作者在談到如何教、如何學數學的過程中，不能忽略三個議題：一是學習者的語言(the language of the learner)；二是教師的語言(the language of the teacher)；三是數學的語言(the language of the mathematics)。

學習者的語言是一種從出生即發展的一種口語能力，它是閱讀理解的基礎，其與數學語言有很多的不同：1.在字母、詞彙和文法造句上有所不同；2.數學命名有其單獨的向度，不像口語那麼多向度；3.在數學語言中的形容詞是不重要的；4.數學語言中的文法和句型較口語英語沒有彈性。因此教室中的學習要靠教師的語言做中介，教師的語言功能是協助學生移除閱讀上的障礙，如應用簡單的句子，重複關鍵字、提供特殊的閱讀指導和提供更多的表徵。

根據上述文獻，研究者希望更進一步理解學障兒童在數學文字語言理解困難的原因，以作為教師教學介入的參考。

#### 四、學障兒童的數學語言學習

根據 Homan (1970) 的研究認為影響學生數學學習成效有五大因素（取自郭靜姿、蔡明富，2002），其中數學語言理解困難是一大主因，而根據數學學障的相關研究顯示：學習障礙兒童在數學學習時都有理解及使用數學語言、符號的困難（Bley & Thornton,1995），尤其對數學語言理解上的困難，包括數學概念知識的不足（秦麗花，1995）、無法將關係句的形式轉換為陳述句（Mayer,1985），不理解數學符號與術語所代表的意義（陳麗玲，1993；蔣宇立，2000）；國外學者 Mercer（1987）、Lerner（1997）和國際失讀症協會（1998）也指出學習障礙兒童語言溝通、閱讀能力、數學詞彙、算術的口語練習不足，而導致其無法運用數學語言與符號來學習數學。

從學習障礙的類別來看，Badian(1983)研究顯示：中小學學生中，大約有 6.4% 的學生表現有數學障礙的現象，有 4.9% 有閱讀障礙現象，其中 56% 的閱讀障礙有數學低落的事實，而 43% 的數學障礙有閱讀成就低落的情況，可見學習障礙的人口中，有近一半語文與數學的相互影響是很明顯的，因為數學學習必須仰賴語文思考與推理，甚至語文的理解與表達，所以語文會影響學障兒童的數學閱讀理解。

根據美國國際失讀症協會(The International Dyslexia Association, 簡稱 IDA) (1998)的報告指出：失讀症兒童在學習數學概念、數學詞彙和應用數學符號上都有困難，這些困難包括數學語言和概念獲得有困難，像空間、方向和一些經常性的詞彙(如之前、之後、兩者之間)，或數學詞彙(如分子、分母、質數)對他們來說都是一種挑戰。其次是程序性知識(procedural knowledge) 需概念性知識(conceptual knowledge) 做支持，學習有障礙者，概念性知識不足，導致其無法執行程序性知識，因而也影響其解題步驟的理解能力，因為解題涉及閱讀、書寫、推理、和應用數學符號與概念的能力。甚至可能涉及文化上的差異，因為數學有其專門語彙、符號和特殊格式表徵，而低成就者的語意理解困難勝於內容和過(Kober,2003)。秦麗花(1996)針對 Marshall(1987)所提的三種解題知識(陳述性知識、程序性知識和基模知識)對國小資源班與普通班學生進行研究，發現資源班有特殊需求學生在三種解題知識上都偏低，因而導致解題失敗，有 73.8%的答對率都在 0.4 以下，可見數學詞彙、符號的理解可能是數學閱讀理解的關鍵。另一方面，Bley 和 Thornton (1995) 認為數學障礙學生在解題時的另一項缺陷是抽象推理能力弱，無法運用適切表徵，和將所學的數學概念用口語或文字陳述出來，因而導致其在數學閱讀理解上的困難。本研究基於上述文獻發現，感到有必要對數學學障的數學語言進行進一步的探究，以了解影響數學學障兒童數學語言理解的相關因素，此為本研究的主要動機之二。

基於上述的文獻發現：數學語言的多樣性，複雜性與抽象性使數學語言成為數學閱讀中的核心能力，MacGregor 和 Price (1999) 認為提昇學生後設語言的覺知 (metalinguistic awareness)，或語言處理過程的能力 (language processing ability) 能增進對數學閱讀理解。MacGregor 和 Price (1999) 將這樣的能力分為兩個類別，一是對數學詞彙或符號的覺知 (mathematical words or symbol awareness)，另一是對數學句法的覺知 (mathematical syntax awareness)。而本研究的目的之一是希望探究國小四年級學生與學習障礙學生在數學語言中的文字理解的困難，及其錯誤類型為何？此為本研究的研究動機之三。

本研究的研究動機之四是想了解影響數學語言理解的關鍵性因素，並進一步應用驗證性因素分析的模式計算出語文理解、數學先備知識、和數學詞彙理解能力對數學文字語言理解的貢獻量為何？探討哪些要素可有效解釋數學語言的理解？是否可透過實徵性的資料建立數學文字語言理解模式？其模式適合度如何？

## 貳、研究目的與名詞解釋

### 一、研究目的

根據上述文獻的分析，和數學語言特殊性探討，提出本研究的幾個研究目的：

- (一) 透過調查實作測驗，探討不同程度兒童在數學文字語言理解剖面圖上的差異。
- (二) 應用文件分析方式，探討國小四年級學生在數學文字語言理解上的困難與錯誤類型分析。
- (三) 運用教學晤談方法，探討學習障礙學生在數學文字語言理解的困難原因。
- (四) 應用驗證性因素分析方式，探討建立數學語言理解模式的可行性，並做模式適合度討論。

### 二、名詞釋義

本研究所討論到的幾個名詞解釋如下：

#### (一) 國小四年級兒童與學障兒童

本研究所指的國小四年級學生是以高雄市九十一學年度在籍的四年級普通班學生為母群體，以不同行政區為畫分抽取 336 人為研究對象。學障兒童是依據教育部（1998）所訂定的「身心障礙及資賦優異學生鑑定原則鑑定基準」中學習障礙兒童的定義，經「高雄市特殊教育學生鑑定及就學輔導委員會」鑑定通過的學障學生，本研究以一所公立學校中四、五、六年級學障學生 10 人為主。

#### (二) 數學語言

本研究所指的數學語言是以邵光華（2002）所說包含三個向度的數學內涵：文字語言、圖示語言、和符號語言，而其能力表現是以其在研究者所編擬的「數學作圖程序理解測驗」上的表現為主，該測驗應用實作評量的方式進行，以學生完成作圖表現來評估其對數學文字語言的理解，測驗成績越高，表示學生的數學文字語言理解能力越好。

## 參、研究方法

### 一、研究對象

#### (一) 國小四年級學生

本研究以高雄市 91 學年度四年級學生為母群體，分別在不同的行政區取樣，因為高雄市已嚴格執行電腦化隨機分班，每一個學校各班學生能力趨於常態，因此研究者選擇代表不同家長社經地位的六個區，採分區叢集取樣方式，每一區各抽一個學校 1-4 個班級，共抽取 336 人進行施測，其樣本分配如表 3-1：

表 3-1 受試樣本分配

行政區	學校名稱	班級數	人數
楠梓區	楠梓國小	1	34
左營區	新上國小	2	68
鼓山區	內惟國小	4	138
前金區	前金國小	1	33
旗津區	中洲國小	1	27
前鎮區	獅甲國小	1	36
合計			336

#### (二) 學習障礙學生

本研究的學障學生是以「高雄市特殊教育學生鑑定及就學輔導委員會」鑑定通過的學障學生為母群體，為研究教學訪談的便利性，以同一所學校中 10 個不同年級的學障的學生，分別是四年級 2 位，五年級 5 位，六年級 3 位，其目的也在理解不同年級的學障學生，在同一數學語言實作測驗中表現的差異，其樣本資料如表 3-2 所示：

表 3-2 數學學障鑑定證明一欄表

年級	姓名	證明編號	學障鑑定核准文號
四年級	羅 00	92 高市 0249 號	92 高市教四字第 00017668 號
	張 00	93 高市 0407 號	93 高市教七字第 0930006241 號
五年級	吳 00	92 高市 0440 號	92 高市教四字第 00006184 號
	蔡 00	92 高市 0441 號	92 高市教四字第 00006184 號
	林 00	92 高市 0439 號	92 高市教四字第 00006184 號
	劉 00	92 高市 0438 號	92 高市教四字第 00006184 號
	程 00	92 高市 0251 號	92 高市教四字第 00017668 號
六年級	吳 00	93 高市 0410 號	93 高市教七字第 0930006241 號
	莊 00	93 高市 0406 號	93 高市教七字第 0930006241 號
	陳 00	93 高市 0409 號	93 高市教七字第 0930006241 號

## 二、研究工具

### (一) 數學作圖程序理解測驗 (自編)

因為數學閱讀理解中有很多程序性知識的執行，本研究為評量兒童是否具有程序性語言理解的能力，乃以四年級「圖形與空間」等教材內容為範圍，編擬本測驗來評量兒童依說明步驟畫出指定圖的能力，兒童必須以數學概念性知識為基礎，才能執行此程序性知識，題目共 10 題，採實作評量方式，每題採部份給分方式計分，計分方式如下：

- 4分 完整畫出題目要求
- 3分 部份畫出，但主要概念達一半以上
- 2分 部份畫出，但主要概念未達一半
- 1分 有動手畫的跡象，但未畫出來
- 0分 完全沒畫，不會閱讀或沒動機

上述這個計分方法，經兩位評分者(研究者與一位數學系老師)經評分後充份討論，針對其細部計分界定，如表 3-3 所示：

表 3-3 數學作圖程序理解測驗內容、工作數及計分

題號	畫圖內容	指令 工作	計分方式
1	畫不等邊三角形註明長度	2	4分 畫出三角形，並量出長度 3分 畫出三角形，量出長度有誤，或有一邊未填長度，或未用直尺畫，或未用小數表示 2分 畫出三角形，並未量出長度，或有數字未填單位，或單位有錯 1分 有嘗試，但未畫出指定圖 0分 都未畫，不會念題目
2	畫一個圓註明圓心並畫兩條直徑	3	4分 畫出一個圓，註明圓心，並畫出直徑 3分 畫出一個圓，圓心或直徑只完成其一，或未標明 2分 畫出一個圓，未畫出直徑和圓心 1分 有嘗試，但未畫出指定圖 0分 都未畫，不會念題目
3	填寫梯形為平行邊做記號	2	4分 填上梯形(或四邊形)，並為平行線，並做記號 3分 寫出梯形(或四邊形)，但找錯對邊平行

			<p>線，並做記號</p> <p><b>2分</b> 寫梯形(或四邊形)，但未畫出指定記號，或四邊都做記號或寫錯形但找對平行邊</p> <p><b>1分</b> 未寫梯形(或四邊形)又找錯相鄰的邊，並做記號，或在圖形內亂畫線，或寫錯形狀。</p> <p><b>0分</b> 都未畫，不會念題目</p>
4	畫一條平行線畫一條垂直線	3	<p><b>4分</b> 在指定線下方畫出一平行線與一垂直線，並標出<math>\perp</math>和<math>\parallel</math>線</p> <p><b>3分</b> 畫兩條指定線，有一線未註明線段名稱，</p> <p><b>2分</b> 畫出兩線有標示，只畫一條正確線，或畫兩線均未標明線段名稱。</p> <p><b>1分</b> 有嘗試，但兩線都錯誤</p> <p><b>0分</b> 都未畫，不會念題目</p>
5	量三角形中二個角並計算角度差距	3	<p><b>4分</b> 會用量角器量角，寫出二角度數，誤差<math>&lt;5</math>，並計算差距</p> <p><b>3分</b> 會用量角器量角，並寫出二角度數，誤差<math>&gt;5</math>，未計算差距或計算的差距錯誤</p> <p><b>2分</b> 只會用量角器量水平角，或計算兩角差距太大</p> <p><b>1分</b> 有嘗試，但未量出度數，或兩角度數錯誤太大。</p> <p><b>0分</b> 都未量，不會念題目</p>
6	畫等腰三角形	3	<p><b>4分</b> 能在<math>( )</math>內畫出指定線，並畫出等腰三角形</p> <p><b>3分</b> 能在<math>( )</math>內畫出指定線，畫出三角形，是等腰但線段長度不對</p> <p><b>2分</b> 畫出一個圖，是三角形，但不是等腰，或不是以底為4公分畫出來</p> <p><b>1分</b> 有嘗試，但未畫出指定圖</p> <p><b>0分</b> 都未畫，不會念題目</p>

7	畫出兩指針順時針旋轉	3	<p>4分 畫出兩指針，註明始邊與終邊，並標出旋轉方向</p> <p>3分 畫出兩指針，註明始邊與終邊，或標出旋轉方向(只做一種)或始邊終邊寫不完整，或有寫始邊與終邊，和旋轉方向，但未畫指針。</p> <p>2分 畫出兩指針，未註明始邊與終邊，也未標出旋轉方向</p> <p>1分 有嘗試，但未畫出指定圖</p> <p>0分 都未畫未量，不會念題目</p>
8	聯接圓周上指定點並命名圖形分割成兩個指定圖形	3	<p>4分 聯接圓周上指定點，命名並正確分割兩指定圖形</p> <p>3分 聯接圓周上指定點，命名或正確分割兩指定圖形只做其一或線段未用直線，或線段未聯結到圓周黑點上。</p> <p>2分 聯接圓周上指定點，命名或正確分割兩指定圖形有誤或未做，或未命名，或命名錯誤。</p> <p>1分 未聯接圓周上指定點，又多聯接其它線，也未畫出指定圖</p> <p>0分 都未畫，不會念題目</p>
9	畫一指定長度長方形並畫兩條交叉對角線算出三角形個數	3	<p>4分 畫指定長度長方形，對角線，三角形個數</p> <p>3分 畫指定長度長方形，對角線，三角形個數錯其一，或長方形長寬方向錯誤，或長度錯誤</p> <p>2分 畫指定長度長方形，對角線，三角形個數錯其二</p> <p>1分 有嘗試，但未畫出指定圖</p> <p>0分 都未畫，不會念題目</p>
10	畫出指定的85度		<p>4分 畫出具有兩邊，張開85度的角</p> <p>3分 畫出一角，但度數誤差在5度以上</p> <p>2分 畫出一角，但線段不直，或誤差在10度以上，或畫一直線分割兩個角，但未標明哪一邊。</p> <p>1分 有嘗試，但未畫出指定圖</p> <p>0分 都未畫，不會念題目</p>

此測驗研究者為學生準備圓規、直尺、和量角器等用品，並採團體方式

進行，其目的是考驗兒童是否具有理解文字說明來畫圖的能力。分數越高，表示兒童理解說明能力越強，所畫的圖也越正確。此測驗的內容一致性信度達.79，兩位評分者依表 3-3 評分標準進行，評分者信度達.97。

## (二) 數學詞彙與符號理解測驗(自編)

本測驗目的在測量兒童對數學詞彙與符號的理解能力，題目選擇以圖形與空間等單元的相關詞彙為主，以 26 題選擇題來測量兒童對數學詞彙定義和圖形符號的理解，分數越高，表兒童對數學詞彙理解能力越強。這些詞彙以 Jacobson (1998)所提專門的詞彙、特殊的詞彙、不熟悉的詞、和代詞為內容，這些詞彙的基本界定如下：

- 1.專門的詞彙：是指在數學領域中，獨有的，且重要的數學概念，如「半徑」、「直徑」。
- 2.特殊的詞彙：指這個詞彙雖然在數學領域中是一個重要概念，但在別的領域，或生活中又是另外一種不同的概念，如數學角度中的「頂點」，與生活中山的最高頂「頂點」共用。
- 3.不熟悉的詞：這是指生活中，或一般語文中可能會應用到的詞彙，但這些詞彙對兒童來說，可能不是很熟悉，如「疊合」、「描邊」等。
- 4.代詞：指的是替代某些前面已講過的名詞、動詞、副詞---等，如「它們」、「這個」等，但在本研究中應用一些數學符號來替代數學中的某些重要概念，如「大於」、「垂直」等。

其題目分配如表 3-4 所示，合計專門性詞彙有 8 題，特殊性詞彙有 7 題，不熟悉的詞有 7 題，代詞有 4 題，此測驗內容一致性達.80，各題平均難度在.18~.86 之間，平均難度為.61，各題平均鑑別力為.30。



表 3-4：數學詞彙理解測驗的概念與類別

題號	詞彙類別	詞彙概念內容	題號	詞彙類別	詞彙概念內容
1	專門的詞彙	半徑	14	專門的詞彙	邊
2	特殊的詞彙	鈍角	15	不熟悉的詞	疊合
3	特殊的詞彙	頂點	16	特殊的詞彙	旋轉
4	專門的詞彙	直徑	17	代 詞	左邊
5	特殊的詞彙	正三角形	18	代 詞	相對
6	特殊的詞彙	對邊	19	不熟悉的詞	至少
7	專門的詞彙	平行線	20	不熟悉的詞	大於
8	專門的詞彙	始邊	21	專門的詞彙	圓心
9	特殊的詞彙	全等	22	特殊的詞彙	球體
10	代 詞	對應邊	23	不熟悉的詞	描
11	專門的詞彙	垂直	24	不熟悉的詞	相接
12	不熟悉詞彙	相對	25	代 詞	直角 90 度
13	專門的詞彙	兩雙	26	不熟悉詞彙	摺痕

### (三) 語文閱讀理解測驗 (改編)

本測驗是測量學生一般語文理解能力，秦麗花 (2003a) 認為語文閱讀理解應包括語詞、句子、和短文理解，乃改編自邱上真、洪碧霞(1997)、柯華葳(1999)所編的閱讀理解，30 題語文閱讀理解題目，包括語詞理解 10 題，句子語意理解 10 題，短文文意理解 10 題，此測驗題目難度在.31~.84 之間，平均難度為.70，各題鑑別力在.17~.76 之間，此測驗預試結果與學生的月考成績相關為.73，信度為.87(N=32)，相隔三個月的重測信度為.72(P<.01)。

### (四) 數學圖形空間能力測驗(改編)

本測驗主要在測量兒童圖形空間的理解能力，改編自吳裕益(1994)的數學診斷測驗中的分測驗---圖形與空間，研究者乃去除舊課程教材，增加 1996 年新教材內容，並參考九年一貫課程內容而加以增刪，目的在測兒童數學能力中的圖形空間能力，分數越高，表數學圖形空間能力越強，本研究以此分數代表學生學習作圖的先備知識，此測驗與數學月考有相關為.70(n=30)，達統計上.01 的顯著水準。與吳裕益(1994)的數學診斷測驗相關為.53(N=57)(P<.05)，表其內容不同於前者，本測驗內容共 25 題。

### 三、資料蒐集與分析方法

#### (一) 資料蒐集

##### 1. 錯誤類型分析

以文件分析方式，先將各題錯誤依部份得分順序排列，再依其錯誤可能原因加以歸類，並推估其可能產生的原因。

##### 2. 教學晤談

本研究先將「數學作圖程序理解測驗」交由學障學生獨立完成，未完成、或做錯的部分研究者以動態評量方式進行教學晤談，所謂動態評量(dynamic assessment)，是強調評量過程中，評量者與受試者高度的互動與協助性，以檢視受試者的最佳表現(peaks of performance)(莊麗娟, 2000)，本研究參考 Campione 和 Brown(1985)的「漸進提示評量」模式，應用四個逐步提示的方式協助其完成，以觀察其學習困難的原因，再依每個人的學習困難做分類，以討論學障數學語言文字理解的問題。

#### (二) 統計資料分析

##### 1. 基本統計

本研究自編之研究工具，其信效度檢核，以統計套裝軟 SPSS/SPSSWIN 進行分析，求出題目答對率、鑑別度、平均數和標準差，及信度考驗。

##### 2. 組型分析與考驗

以 SPSS/SPSSWIN 進行集群分析與變異數分析，找出不同組型，進行學習特徵之分析和考驗。

##### 3. 模式適合度檢驗

以結構方程模式(structural equation model)軟體 AMOS 對所提模式進行驗證性因素分析，並檢驗本研究所提模式的適切性。

## 肆、研究結果與討論

本研究分別應用調查統計分析法，探討不同程度兒童在數學文字語言的理解能力，並應用文件分析方式，了解學生在數學文字語言理解的錯誤分析，又採教學晤談方式，探討學障學生理解數學語言的困難所在，最後以驗證性因素分析方式，建立數學文字語言理解的模式，及其模式適合度討論，以下分別陳述本研究結果：

### 一、不同程度兒童在數學文字語言理解的能力差異

#### (一) 學生的數學文字語言理解具有不同程度差異

本研究以「數學作圖程序理解測驗」代表數學文字語言理解能力，調查國小四年級學生的能力表現，研究者依學生在此測驗上的表現，以統計方法集群分析方式將學生分成四組，研究者依其答對率表現分別加以命名，如表 4-1 所示：

表 4-1 以集群分析看學生數學文字語言理解表現

組別	人數	平均數	標準差	答對率
高分組	46	35.61	1.47	0.89
中分組	186	27.9	3.33	0.70
低分組	92	17.0	3.34	0.40
極低分組	6	6.67	1.97	0.19
整體	330	25.52	7.34	0.64

從表 4-1 可看出四組學生的答對率有明顯不同，高分組學生答對率近九成，標準差最小，顯示高分組學生彼此程度較為接近。中分組學生最多，表示對數學文字語言的理解能力在中等左右，低分組和極低分組人數也佔將近 1/3，顯示仍有三分之一的學生對數學文字語言理解能力很弱，達對率在 0.4 以下。

若以單因子變異數分析來看（表 4-2），從表 4-2 可看出四組達到統計上的顯著差異，顯示不同組別學生在數學文字語言理解上有顯著差異，若進一步看

表 4-2 四種不同數學語言理解能力者變異數分析

變異來源	平方和	自由度	均方和	F	P
組間	14567.52	3	4855.84	497.98	0.000
組內	3178.53	326	9.75		
總和	17746.35	329			

四組學生在 10 題測驗上的表現剖面圖如圖 4-1 所示：

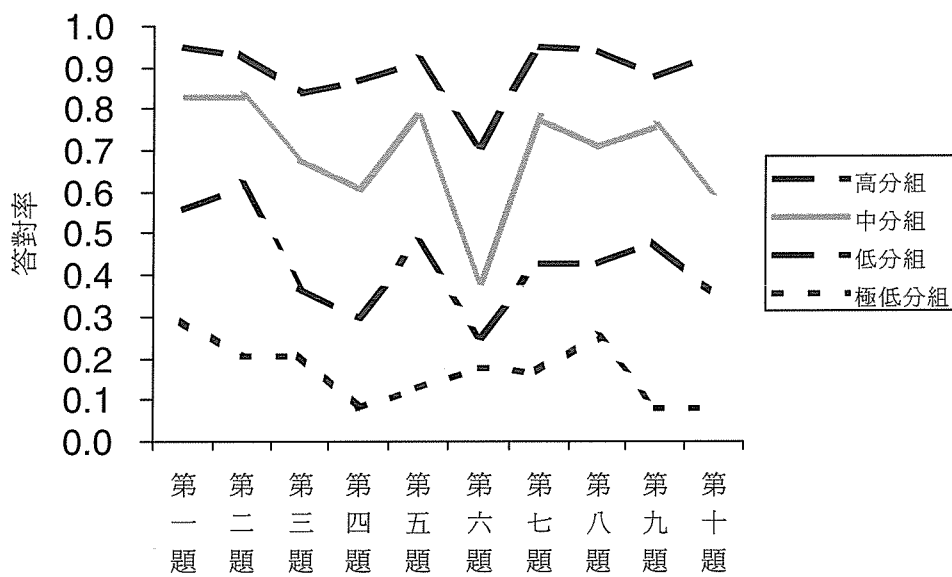


圖4-1不同數學語言理解能力者在各題表現剖面圖

以 tukey HSD 作事後檢定，則發現在 10 題的測驗中，仍有 6 題（3、4、6、7、8、10）無法區分低分組與極低分組，顯示在執行作圖步驟時，低分組與極低分組有相同的困難，其困難點可能與語文閱讀理解困難所致，待後續再討論；第 9 題高分組與中分組表現沒有明顯差異，可能題目難度不高的原因。

### （二）不同程度兒童在數學語言理解差異比較

未進一步探討一般的語文理解與數學先備知識在數學語言理解時所扮演的角色為何？本研究將所調查的三百餘位受試者依表 4-3 標準選出四組不同程度學生，以比較這四組學生在數學語言理解上的差異表現，以進一步探究其數學語言理解困難的原因：

表 4-3 不同數學圖形空間能力和語文閱讀理解能力樣本選定

類別	選擇標準	特點
第一組	數學圖形空間測驗成績在平均數以上 1 個標準差 語文閱讀理解測驗成績在平均數以上 1 個標準差	數學先備知識優、 語文閱讀理解優
第二組	數學圖形空間測驗成績在平均數左右 語文閱讀理解測驗成績在平均數以下 1 個標準差	數學先備知識中等 語文閱讀理解差
第三組	數學圖形空間測驗成績在平均數以下 1 個標準差 語文閱讀理解測驗成績在平均數左右	數學先備知識差 語文閱讀理解中等
第四組	數學圖形空間測驗成績在平均數以下 1 個標準差 語文閱讀理解測驗成績在平均數以下 1 個標準差	數學先備知識差 語文閱讀理解差

各組人數及其在數學語言理解上的表現如表 4-4 所示：

表 4-4 四組不同語文與先備知識程度學生在數學語言理解上的表現

四組特質	人數	平均數	標準差
第一組-數學先備知識優、語文閱讀理解優	24	31.5	5.61
第二組-數學先備知識中等，語文閱讀理解差	12	21.9	5.73
第三組-數學先備知識差，語文閱讀理解中等	15	22.9	5.11
第四組-數學先備知識差，語文閱讀理解差	18	17.2	7.60

這四組學生中，以數學先備知識、語文閱讀理解兩者能力均弱者，其個別差異較其他組大，且在數學語言理解能力也最弱，顯示語文閱讀理解和數學先備知識都會影響兒童對數學文字語言的理解。相對的，兩者能力均高者，數學語言理解能力也較好，為進一步了解這四組之間的差異，研究者以單因子變異數分析來作考驗，其結果如表 4-5 所示：

表 4-5 不同語文先備知識學生在數學語言理解變異數分析

變異來源	平方和	自由度	均方和	F	P
組間	2244.53	3	748.18	19.98	0.000
組內	2433.76	65	37.42		
總和	4678.29	68			

從表 4-5 可看出這四組學生在數學語言理解有顯著差異，但若進一步以 tukey HSD 作事後檢定，則發現二、三組未達顯著差異，表示語文與數學先備知識任何一種能力弱的學生，其在數學語言理解上都有困難，而二、四組也未達顯著差異，表示語文能力弱者與兩種能力弱者都對數學文字語言理解有相同的困難，研究者推估在數學語言理解上一般語文的閱讀能力可能是影響學生數學語言理解的關鍵所在，至於其所產生的問題為何？留待後續討論。

## 二、國小四年級學生在數學語言理解上的錯誤類型分析

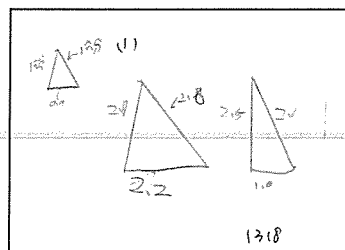
數學語言有一定的句法、詞彙、詞序、同義字、句子結構、段落結構，這些特有的語言格式與一般語文理解有所不同(Esty, 2003)，為進一步了解學生在數學文字語言理解上的難題，研究者應用所施測的「數學作圖程序理解測驗」作逐題的文件分析，再綜合看這十題所產生的問題。

### (一) 從微觀細看十題的個別錯誤類型

#### 1. 第一題 畫一個三邊不等長的三角形，並用公分為單位註明長度

這一題是十題中答對率最高者 (0.66)，其主要產生的錯誤有下列六種：

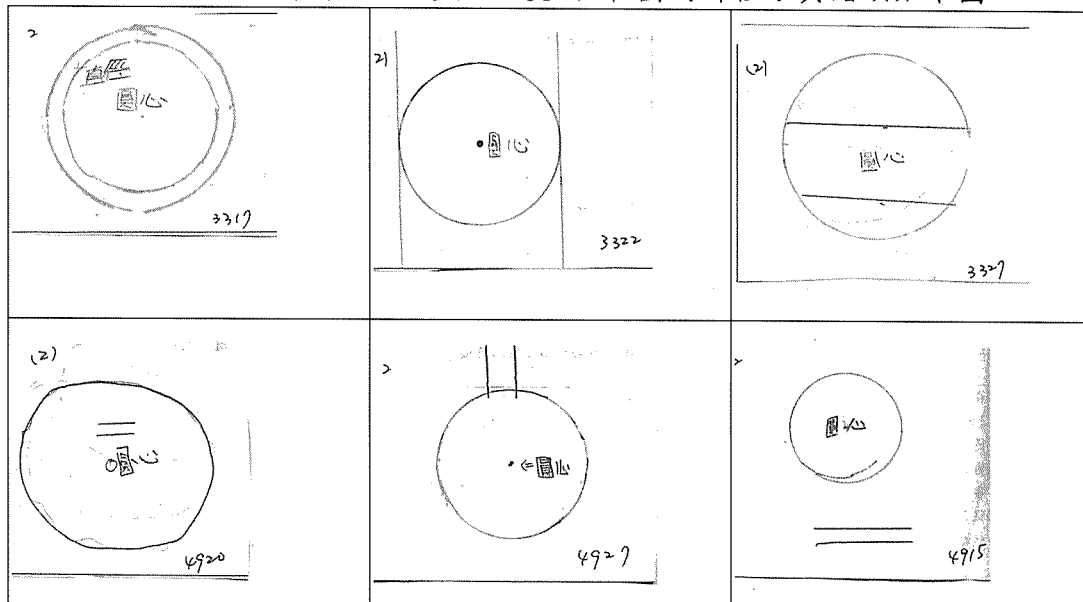
- (1) 語意理解錯誤—如畫一個三邊不等長的三角形，卻畫三條不相等的邊，而未組合成一個三角形，或畫三個不同的三角形，其困難可能來自對三角形的組合概念不熟所致。
- (2) 對測量單位不明---如公分、公尺混淆，m、cm 分不清。
- (3) 未理解小數意義---如以分數代替小數，或用逗點代表小數點，如 (3, 5) 座標形式，或不會命名直尺上的小數點，如 1.7 誤以為 1.07。
- (4) 未完成指定步驟---本題共有 3 個步驟，有的只完成一個，有的完成兩個，如只畫三角形，未註明長度，或只註明一邊長度，或長度只寫數字，未寫單位。
- (5) 不會使用工具---雖然本測驗已提供每個學生必要工具，但仍有未用直尺畫三角形者。
- (6) 不知所畫內容為何---如右圖所示：從學生的錯誤可看到語意理解、測量單位概念、數學詞彙概念和工具應用的熟悉度影響學生正確完成工作的程度。



2. 第二題 用圓規畫圓，註明圓心並畫兩條直徑

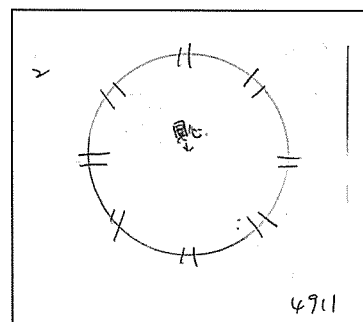
這一題學生答對率為 0.65，所產生的錯誤有下列五種：

- (1) 對直徑概念不清---如畫直徑未通過圓心，或將直徑與半徑混淆，或畫兩條平行直徑，最嚴重的是不知道直徑在圓的哪裡？其錯誤如下圖：



- (2) 對圓心概念不清---如不知圓心在哪裡？誤以為半徑就是圓心。  
 (3) 不會使用圓規或直尺等工具---不會運用圓規畫圓，或不會使用直尺畫直徑。  
 (4) 不會聯結前後步驟的關係---只對每一個個別的要求視為獨立的作業，而不會將其組織成一個圖示。  
 (5) 不知所畫內容為何---如右圖所示：

在這一題，除了有第一題數學專門詞彙概念不清、工具運用不熟的問題外，又加入數學語言前後連結的問題，這顯示出 MacGregon 和 Price(1999)所說學生對句法的覺知和對數學詞彙符號的覺知可能是兩個類別的能力，值得繼續探究。



3. 第三題 命名圖形名稱，並找出平行邊作記號

這一題學生的答對率為 0.5，但產生兩個明顯的錯誤：

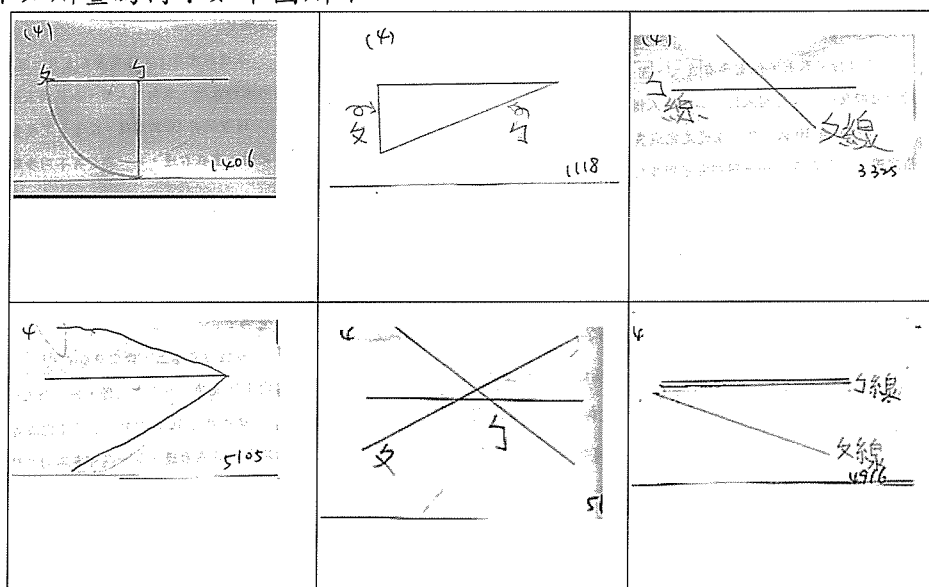
- (1) 不知「互相平行」為何---誤以為平行就是兩條線相等，或對邊就是平行，甚至以為對角線就是平行。  
 (2) 不會命名四邊形---有的會命名，但不會寫字、或寫錯字，有的是不會命名。

不會命名可能反應出部分學生對圖形概念無法正確掌握，如同蔣宇立(2000)所研究，低成就學生對數學詞彙與符號理解不是以概念為主軸來記憶，因此很容易忘記所學符號或詞彙的意義。

4. 第四題 在一條指定線下畫一條平行線，和另一條垂直於它的垂直線

這一題學生的答對率明顯的降至 0.5 以下，其所產生的錯誤有兩種：

- (1) 不知什麼叫「平行」---有的將平行線與垂直線混淆，有的只理解一半的訊息，直接在指定線上命名平行線，未在其下方另畫一條平行線，其所產生的錯誤可能是對方位詞彙理解困難所致，如同美國國際失讀會(1998)所提學生在經常性的詞彙，方位詞彙上有理解的困難。
- (2) 未註明線段名稱—未註明哪一條是平行線？哪一條是垂直線？
- (3) 不知所畫為何？如下圖所示：



由上述這些圖示來看，兒童對於「平行」「垂直」等概念仍不清，如同 Adler 所言，數學語言具有相當精確性，不像小說可以猜測其意，兒童未完整理解數學語言背後的概念，則無法完成題意要求。

5. 第五題 用量角器量三角形內的角，並比較兩角相差幾度？

這一題答對率為 0.58，比較明顯的錯誤有五個：

- (1) 不會使用量角器---如會量有水平方向的角，但不會量沒有水平方向的角，隨意填個數字，或不會用量角器量角。
- (2) 將角度與長度混淆---運用長尺來量角度為○公分○毫厘。
- (3) 對角度沒有量感觀念---如將三個角分別量為 10、12 和 7 度，未建立三角形三內角和為 180 度的概念。
- (4) 不知題目要求—題目要求是  $\angle$  -  $\square$ ，但學生寫成  $\angle + \square$  或  $\angle + \angle + \square$ 。
- (5) 答案計算錯誤。

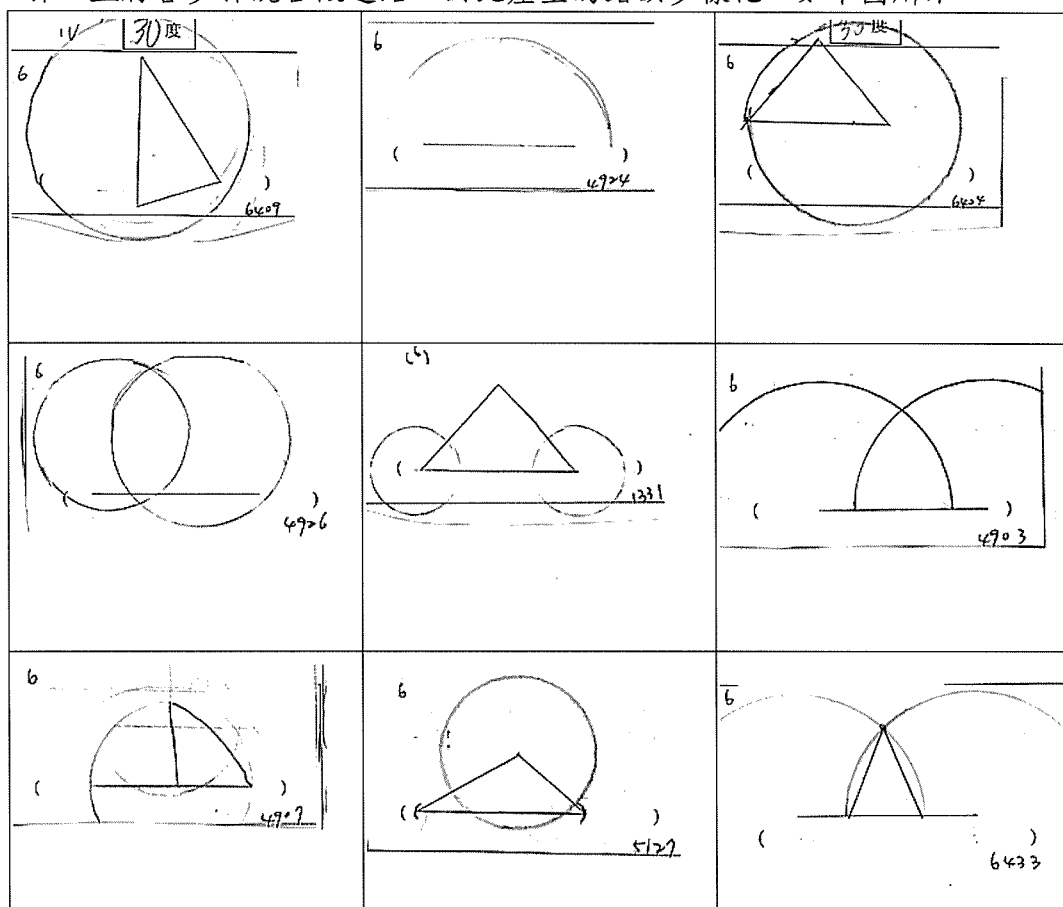


從上面所呈現的問題來看，工具應用、詞彙混淆、無法運用已有知識偵測答案的合理性，無法將題目中的文字敘述轉換為算式來計算，導致數學程序語言執行有困難。

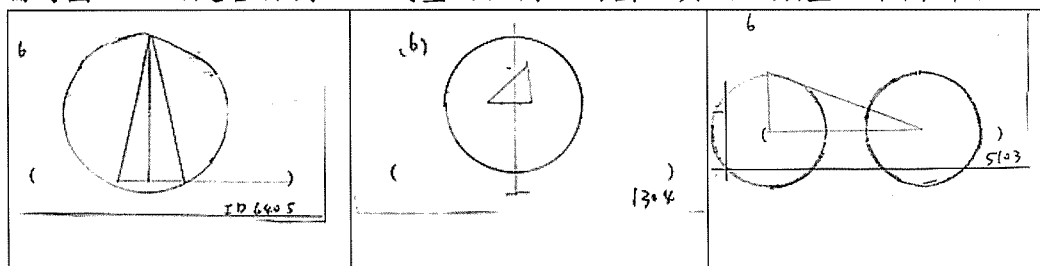
6. 第六題在指定線上畫兩個相交的圓，並連接交點成等腰三角形

這一題的答對率最低，只有 0.38，只有高分組的答對率為 0.71，其他各組都在 0.5 以下，其所產生的錯誤有兩種：

(1) 抓取部分題意—如只抓題目部分訊息，如「兩圓」、「等腰」、「一直線」卻無法將上述訊息做整合，也有可能未依題目要求，一步驟做完再做一步驟，並將各步驟統合做連結，因此產生的錯誤多樣化，如下圖所示：



(2) 能獨立理解單句，但無法整合為全體訊息—如所畫兩圓不是以直線上兩端為圓心，而是各自獨立，或畫兩個獨立的圓，其錯誤類型如下圖所示：

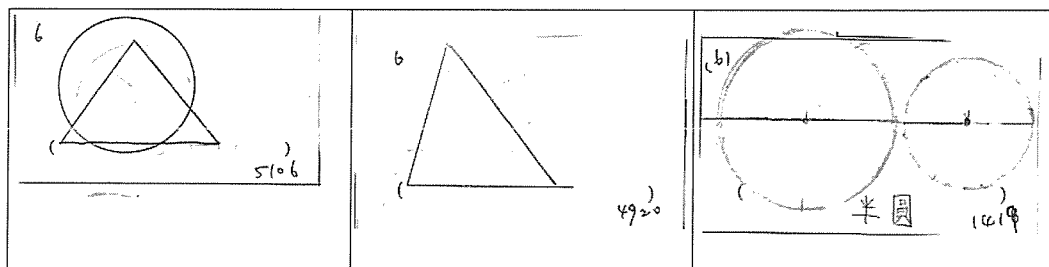


(3) 不會用直線兩端當圓心畫圓—如以直線上任兩點為圓心畫圓，或以直

線中間一點為圓心，或所畫兩圓未相交。

(4) 不會使用圓規畫圓--

(5) 未依題目要求作答—題目雖要求畫等腰三角形，但只隨意畫一個三角形，或未畫出指定4公分的直線，或所畫直線與兩圓無關。如下圖：



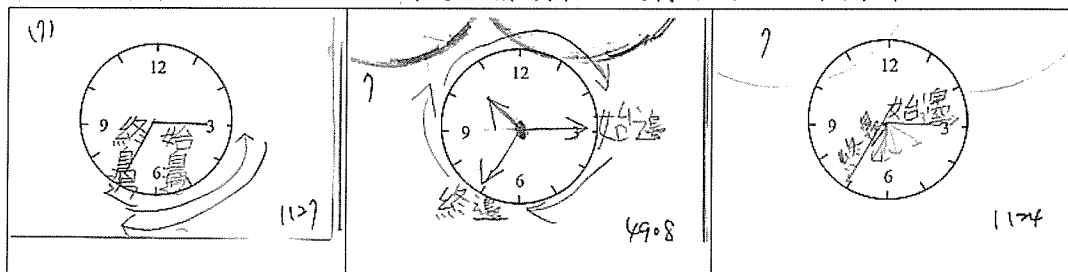
上述結果顯示出學生整合段落中部分訊息的能力很弱，大都只依題目中的部分訊息作答，而從其錯誤表現來看，對數學專有詞彙缺乏理解，不會使用工具造成其執行上的困難。

7. 第七題 在鐘面指定位置上畫線並註明始邊、終邊與旋轉方向

這一題答對率為 0.59，有兩個明顯的錯誤：

(1) 不理解專門詞彙意思—如會畫指針到指定位置，但不會註明「始邊」和「終邊」。

(2) 不理解符號應用---不知如何應用箭頭表示旋轉方向，如下圖所示：

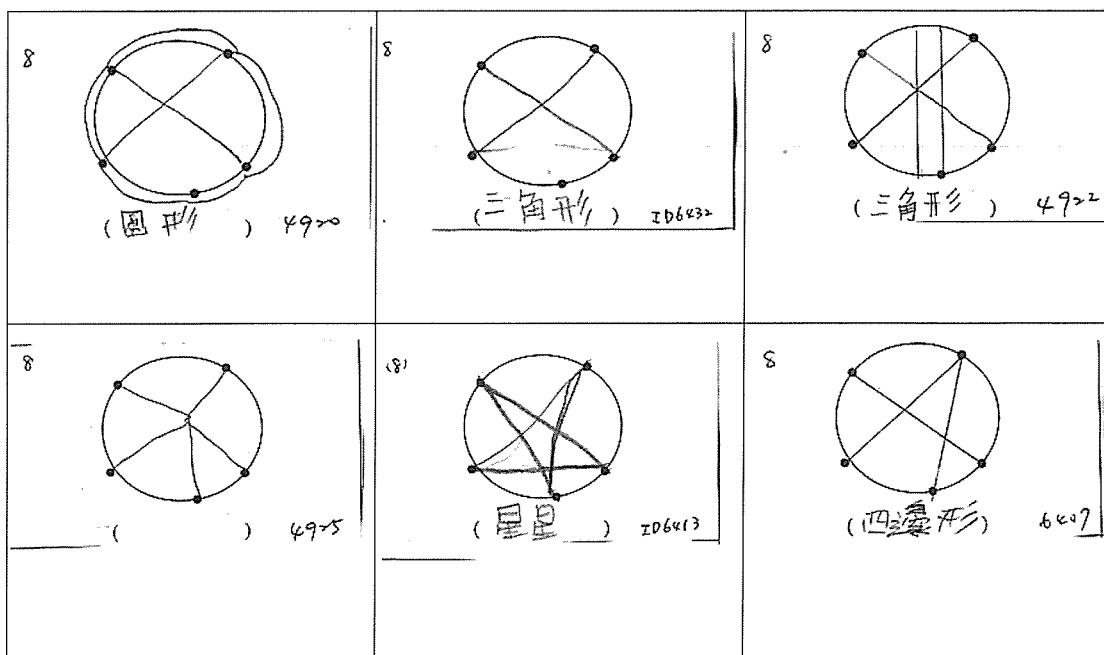


這結果與陳麗玲(1993)蔣宇立(2000)研究有些相同，很多學生不理解數學符號與詞彙所代表的真實意義。

8. 第八題 連接圓周上的五點，寫出圖形名稱，並用一直線切割成一個三角形和一個四邊形

這一題答對率為 0.58，主要錯誤是：

(1) 直線連接的錯誤—包括未用直線連接，或各點之間交叉連接，或個別點之間連接，因而無法成為一個五邊形，進而影響命名。其主要產生的錯誤型態如下圖所示：

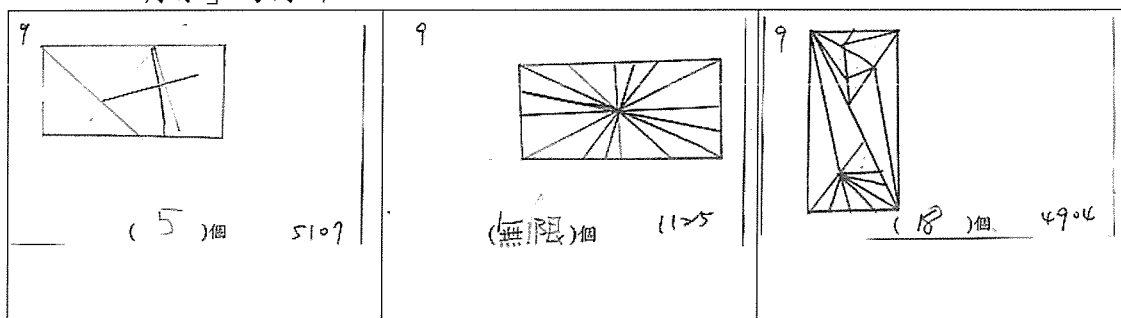
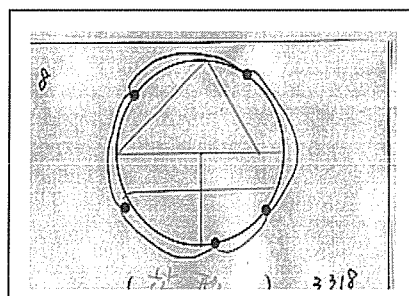


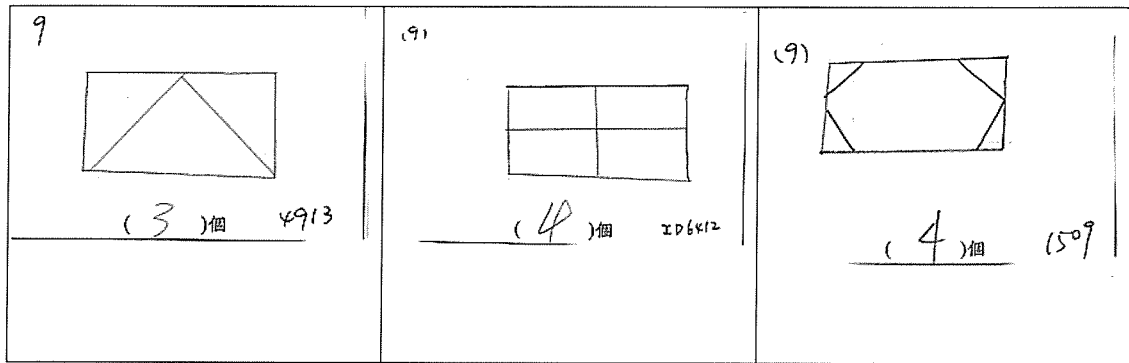
- (2) 不會用直尺連接點—改用弧形方式連接圓周上各點。
- (3) 不知「切割」之意—如只要求用一直線切割，卻用數條線切割，甚至連接到圓心。
- (4) 命名錯誤—將所畫圖形命名為三角形、正方形、星星和花型。
- (5) 不知所畫為何—如右圖所示：

9. 第九題 畫一個指定長度的長方形，並在  
其內畫兩條對角線，數出所切割不重疊的三角  
形個數

這一題答對率為 0.55，主要錯誤包括：

- (1) 不會數不重疊的三角形個數—有的 3 個、7 個、2 個和 0 個，其原因可能是不了解「不重疊」的意思。
- (2) 不理解「對角線」的意思—有的誤以為兩條交叉線，有的畫兩條垂直線，有的畫三條以上的線，如下圖所示，其可能原因是不了解「對角線」為何所致。





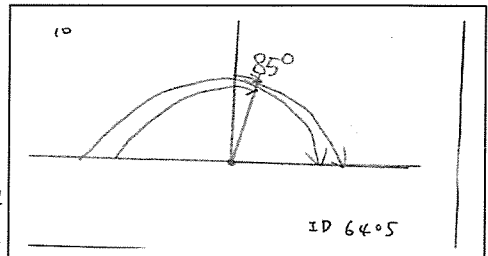
(3) 不會畫長方形---畫成三角形和圓形，有可能不了解長方形的組成特色。

### 10. 第十題 畫一個 85 度的角

這一題的答對概率在 0.5 以下，主要錯誤是：

(1) 角度畫對，不會做記號---不知道角度的記號怎麼做？或畫成右圖方

式，有的度數量對，連接兩點時，將其中一點誤以為是直線的中心點，而產生連接錯誤的現象。

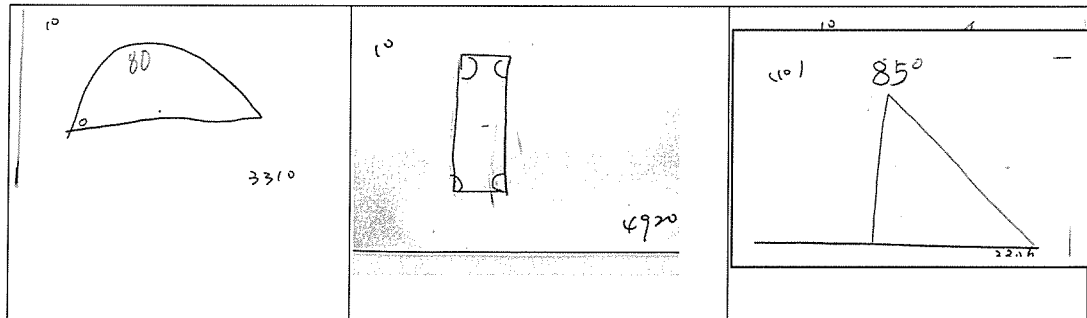


(2) 不會使用量角器---因此所畫的角度誤差過

大，有的在 5-10 度之間，有的在 70-75 度之間，或用量角器不夠熟練，將內外兩圈數字搞混。

(3) 把角度畫成三角形---不知哪裡是 85 度，如右圖所示：

(4) 不知所畫為何---如下圖所示：



從學生錯誤圖示可看出學生對角度概念不清，甚至將角度與三角形混淆，造成其執行失誤。

(二) 從巨觀角度審視學生數學語言理解上的困難

綜合上述十題的錯誤類型，可歸納國小學生在執行以畫圖為主的數學文字語言理解時，會有下列幾個錯誤產生：

1. 不會使用工具，包括直尺、圓規、和量角器的使用，導致無法理解其意。
2. 對測量單位不清，如將長度和角度測量單位混淆，對公尺公分沒量感。
3. 不理解數學專門詞彙的精確定義，如直徑、半徑、平行、垂直、等腰三角形、

對角線、始邊和終邊等詞彙。

4. 不理解一些特殊詞彙的意思，如切割、不重疊。
5. 對圖形概念不清——如不會命名梯形、五邊形、不會畫等腰三角形。
6. 不會使用數學符號紀錄，如互相平行的邊，旋轉的方向。
7. 能獨立理解單句要求，但無法連結整體訊息，因此所畫圖示一一獨立，而無法整合。
8. 只掌握部分步驟片段訊息，無法了解整句意思，而有所畫圖示不知為何的現象產生。
9. 無法閱讀，有些兒童可能對閱讀文字有困難，而無法作答。

從上述兒童在數學語言理解的實作表現錯誤類型來看，影響國小四年級學生數學語言理解的因素有二；一是數學的因素，一是語文的因素，兩大因素中又可分為直接與間接相關的能力。在數學方面，直接相關的能力包括數學概念理解，數學詞彙和符號的意義，數學單位概念與量感，間接相關的能力包括數學工具的操作使用技能。在語文方面，直接相關的能力包括對經常性詞彙、專門性詞彙，與生活詞彙的區辨能力、閱讀理解能力，間接相關的能力則是連結句子中各細部訊息的整合能力，關於連結句中各細部訊息的能力這一點與 Cloer(1981)研究相同，因此提升兒童數學語言的理解，可從這兩方面四個小主題來著手。

### 三、學障兒童在數學語言理解上的困難分析

本研究以 10 個已通過鑑定的學習障礙兒童為對象，以其在「數學作圖程序理解測驗」上的表現，採教學晤談的方式，一一進行訪談，應用動態評量逐步提示的方式，探求其數學語言閱讀理解困難的原因，發現下列因素造成其理解上的困難：

#### (一) 不會閱讀

有些文字學障兒童即有閱讀上的困難，如不會讀「垂直」、「註明」、「切割」或一些簡單的字，如「這」、「再」。

#### (二) 閱讀上有障礙

有的兒童在閱讀過程中有替代、省略、跳行和唸錯音的現象。如將「不重疊」唸成「不重跌」(6 陳 00)「不重壘」(5 劉 00)(6 莊 00)，將「平行」唸成「評航」(4 羅 00)，唸成「評橫」(5 程 00)，「註明」唸成「芳名」(5 劉 00)，像這樣唸錯誤的音，當然無法理解其意。

有些兒童閱讀時產生替代的情況也很普遍，如將「度數」唸成「度線」，「直線」唸成「直角」，「圓規」唸成「圓周」(5程00)，「直徑」唸成「直線」(5吳00)，研究者認為學障兒童這樣的錯誤，是造成他們在閱讀理解上有相當困難的重要原因，而與前後句子無法產生連結，更不知題目要他們做什麼？

### (三) 不理解一些方位詞彙及代詞的意義

如「旁邊」、「下方」或「相同」的意思，有些語詞在敘述中要跟前後連接，才知道此代詞所代表的事務，如「兩圓」、「以所畫直線」、「箭頭」等，但學障兒童回顧前據來協助理解的能力很弱，因而使其閱讀理解只呈現片段訊息的現象。

### (四) 不了解專門詞彙的意思

在作圖程序語言中，包含很多基本概念的專門詞彙，如「長方形」、「直徑」、「平行」、「垂直」等，但有將近8/10的學障學生都有理解的困難，或誤解其意的現象，如以為「直徑」是一條線，卻不明白它與圓的相對關係為何(5蔡00)？，以「平行」為例：

老師：什麼是「平行」？

6蔡00：兩邊都一樣。

5林00：兩邊剛好一樣長，兩條線都一樣平，沒有歪掉。

6陳00：就是垂直。

5吳00：一樣長，長度相等的邊。

綜合學障的錯誤，研究者推估其可能產生的原因：一是課本中的圖示讓學生產生錯覺所致，二是教師在講解數學概念時，並未將概念說明清楚，或未提供足夠的正反例說明，學生只是學習到外顯圖像與符號，並未真正深入數學實質的學習，而導致概念上的混淆。

### (五) 應用生活詞彙解釋特殊詞彙

所謂「特殊性詞彙」是指這詞彙在學科及生活領域中共用，但兩種具有不同概念，兒童將生活中的詞彙帶至學科學習中，也就是以「自發性概念」代替「科學性概念」，因而影響其閱讀理解。如以為「0度線」就是量角器上沒有數字的線(6陳00)，有一個學障學生在唸完「用一直線把這個圖形切割成一個三角形和一個四邊形」，卻楞在那裡！

老師：要怎麼切割？

陳00：要切嗎？沒有刀子怎麼切？

老師：它叫你怎麼切？

陳00：切割就要刀子，切成三角形，就去掉三個點(用手指出來)，那另兩個怎麼辦？

(老師再協助導讀一遍，指明用一直線切割)

陳 00：(可畫出一直線) 沒有三角形，沒有四邊形。

老師：(指著圖示告訴他) 這就是三角形，那四邊形在哪裡？

陳 00：沒有啊？已經切掉，哪裡有四邊形？

可見學生執著於生活詞彙的概念，不知變通，則會像 NCTM(1989)所說；數學符號應用與理解，要有彈性思考概念，否則不能彈性思考變通，也會影響其數學語言的閱讀理解。

#### (六) 能識字但無法理解

有的學障學生雖然能勉強唸完文字，但不懂其意，會不安的尋求老師的協助，如唸完「邊長」，馬上問：「老師，什麼叫邊長？」「什麼叫等腰三角形？」「什麼叫文字註明？」〈4 羅 00〉〈4 張 00〉，甚至什麼是「直的」，什麼是「橫的」，搞不清楚〈5 程 00〉，有的唸完後不懂其意，需老師再加以提示才能作答〈6 陳 00〉，有的代唸一遍，可以理解，有的仍無法理解〈5 吳 00〉，所以閱讀理解困難，可能是學習障礙兒童數學語言理解的致命傷。如同 Kober(2003)所說語文能力是限制低成就兒童數學知識獲得與理解的最大障礙。

#### 〈七〉 不會使用工具

有的學障兒童對於測量工具有混淆的現象，如「圓規」、「量角器」搞不清楚，有的不會看直尺上的刻度，不會使用量角器測量角，不會使用圓規畫圓，或者用直尺未對齊 0，用量角器不會將圓心對齊角的頂點，不會將 0 度線對齊角的其中一邊，都是影響其無法做出正確反應的一項重要原因，所以動手操作能力也是影響學障兒童數學語言閱讀理解困難的重要因素。

#### (八) 沒有測量單位觀念與量感

在數學文字敘述中，尤其在量與實測方面，經常涉及很多測量的工具與單位應用，但缺乏量感的學障兒童，對不同位階單位混淆現象經常發生，如將 3 公分寫成 3 公尺，30 度寫成 5 度，甚至在不同測量之間也產生混淆，將度數測量誤以為長度測量，量出一個角是 x 公分 x 公厘，也不覺得有誤。

#### (九) 運用已知概念取代閱讀內容

有半數以上學障學生，在閱讀個別句子時，問他其中個別語詞意思均能理解，但整句話合起來則不知其意，如「以所畫直線兩邊為圓心，雖然能理解「所畫直線」，也能指出「兩邊」所在的位置，知道「圓心」是畫圓的必要條件，但真正畫出來的圓，卻是以直線的中間為圓心(5 蔡 00)(5 林 00)，研究者推估其可能原因是：學生將課本中的圖示過度類化的結果，誤以為直線一定是圓的直徑，圓心一定在直線的中間，所以雖然其閱讀時知道是以直線兩邊為圓心，但其概念仍存著圓心在一條直徑中間的心像，而影響其執行結果。

#### (十) 能掌握局部，卻無法整合全部訊息

Cloer(1981)認為數學詞彙知識、語文段落閱讀和聯貫各細節技能是三個影響數學閱讀理解的關鍵。在本研究中，作圖程序理解測驗，是依3個以上步驟逐一說明作圖方法，每個步驟之間環環相扣，但半數以上的學障兒童，經常將每個步驟間所畫的圖示獨立，而不會將它串聯起來，例如畫一個長4公分寬2公分的長方形，卻畫出一個長4公分和寬2公分的兩個長方形，研究者推估其可能原因是無法整合局部訊息所致。所以貫穿各步驟間的閱讀技能，可能也是學障兒童在數學語文理解中缺乏的重要技能，另依方面，數學程序語言的理解，需以概念性知識為基礎，而學障兒童概念知識不足，導致其無法執行程序性知識。

#### (十一) 手眼不協調，影響執行結果

有少數學障兒童有手眼協調不佳的情形，即使用直尺畫線，仍畫出歪七扭八的線(5程00)，甚至嘴裡念著三角形，手上卻畫出四邊形(6陳00)。

上述狀況並未因學障兒童年級不同而有比較明顯的差異，也就是說以上十一個影響學障數學語言理解的因素，並不因學障兒童年級較高而有所不同，因此教師應針對其困難，在教學歷程中適度調整自己的教學方式，以改善其學習困難。

### 四、數學文字語言閱讀理解模式建立及其適合度討論

研究者根據文獻回顧，和以往的研究結果，大膽的提出假設，認為影響兒童數學語言理解的因素，可能跟學生本身的語文理解、數學先備知識、和數學詞彙有關，因而以結構方程模式(structural equation model)軟體 AMOS，對所提模式進行驗證性因素分析，並檢驗本研究所提模式的適切性如何？以下分別討論。

#### (一) 研究者建構數學語言閱讀理解模式驗證

圖 4-2 是研究者建構的數學文字語言理解的模式，在這模式中，一般的語文閱讀理解、數學先備知識、和數學詞彙理解都佔有相當的貢獻量，這是在沒有測量誤差的情況下，標準化的回歸係數，可以看到語文閱讀理解對數學語言理解可以有.28的貢獻，數學先備知識有.34的貢獻，數學詞彙理解有0.29的貢獻，這三個變項對數學語言理解的整體預測達69%。



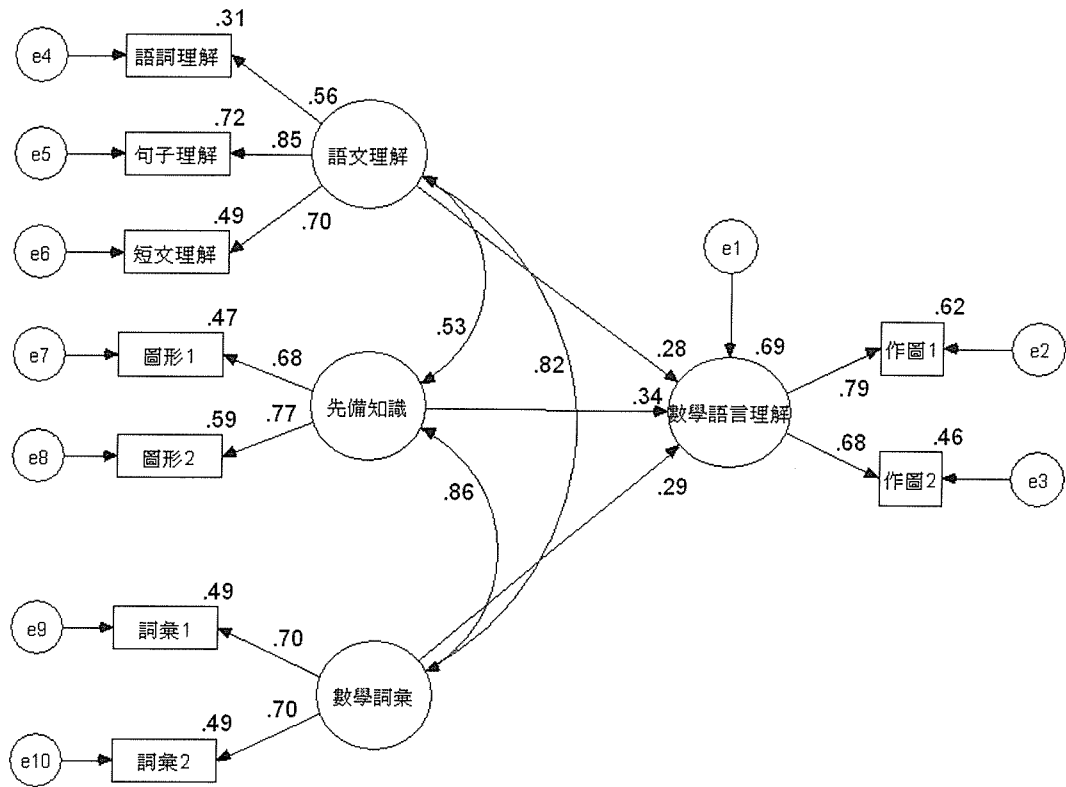


圖 4-2 研究者建構的數學語言理解的模式圖

但這樣的統計數字卻未達統計上的顯著水準(三條回歸線的 p 分別是 .38、.38、和 .62，見表 4-6)，顯示研究者所建構的這個模式，就目前的這些實徵資料來看，仍是不穩定的現象，造成這樣的結果，可能跟三變項間的高相關所造成統計上的共線性有關，因此研究者所提的模式顯然就現有資料來看是不適切的，必須去除一個變項再找出最適當的模式。

表 4-6 研究者建構數學語言理解模式 驗證性因素分析之參數估計值

	未標準化		標準化	R <sup>2</sup>
	估計值	t值	估計值	
程序知識 <--- 語文理解	0.584	1.240	0.299	
程序知識 <--- 圖空知識	0.630	1.313	0.374	
程序知識 <--- 數學詞彙	0.455	0.585	0.265	
解題1 <--- 程序知識	1.000		0.794	0.631
解題2 <--- 程序知識	0.925	10.87**	0.683	0.466
語文3 <--- 語文理解	1.000		0.703	0.495
語文2 <--- 語文理解	1.068	11.857**	0.836	0.699
語文1 <--- 語文理解	0.582	8.960**	0.564	0.318
圖形2 <--- 圖空知識	1.000		0.775	0.601
圖形1 <--- 圖空知識	0.794	10.468**	0.699	0.488

	未標準化		標準化	R <sup>2</sup>
	估計值	t值	估計值	
詞彙2 <---數學詞彙	1.000		0.712	0.507
詞彙1 <---數學詞彙	0.935	11.38**	0.712	0.507
語文理解<-->圖空知識	1.785	6.350**	0.571	
數學詞彙<-->圖空知識	3.043	8.127**	0.853	
數學詞彙<-->語文理解	2.540	7.687**	0.827	

(\*\*表 p<.01)

## (二)最適切數學語言理解模式探究

研究者根據上述驗證結果，擬將三變項做兩兩組合，探究所形成三個模式的適切性討論，以找出對兒童數學語言理解最適切的解釋預測模式。

模式一是以數學先備知識與數學詞彙來預測，模式二是以數學先備知識與語文理解來預測，模式三是以語文理解與數學詞彙來預測，其三個模式的模式圖分別為圖 4-3、4-4、4-5 所示：

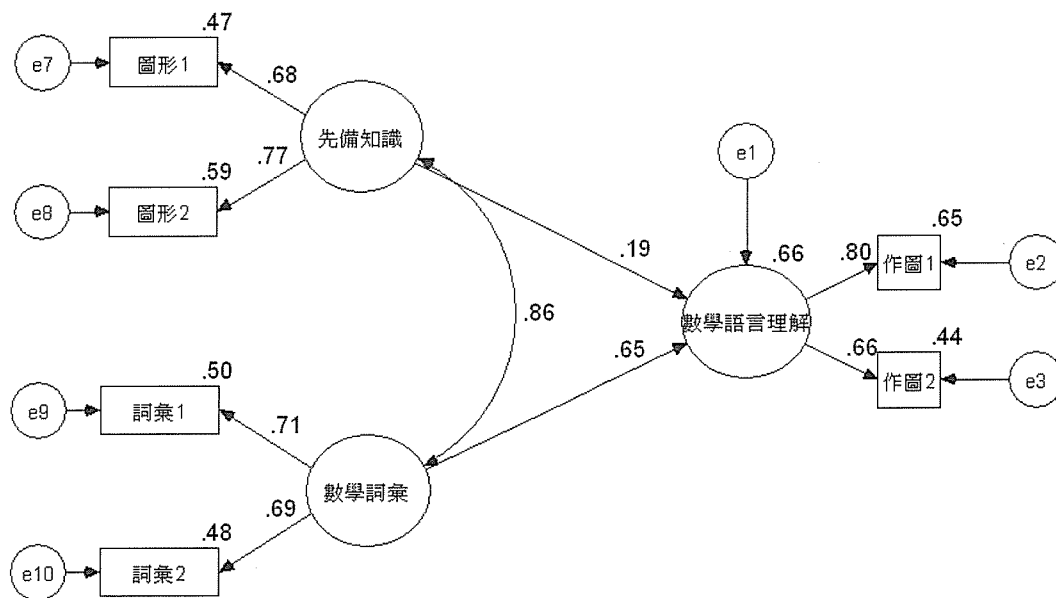


圖 4-3 數學語言理解模式圖一

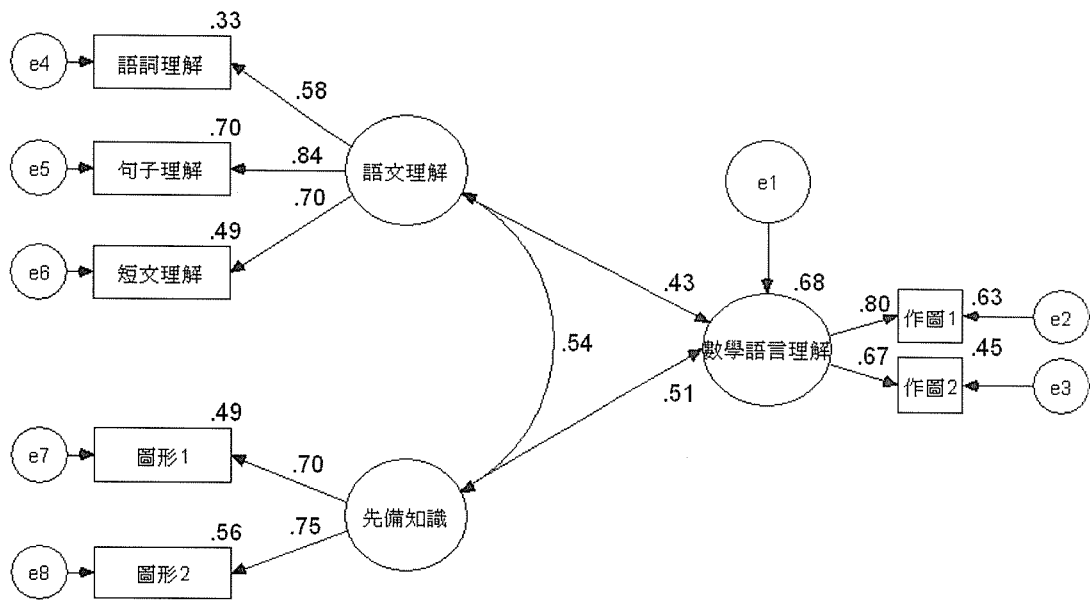


圖 4-4 數學語言理解模式圖二

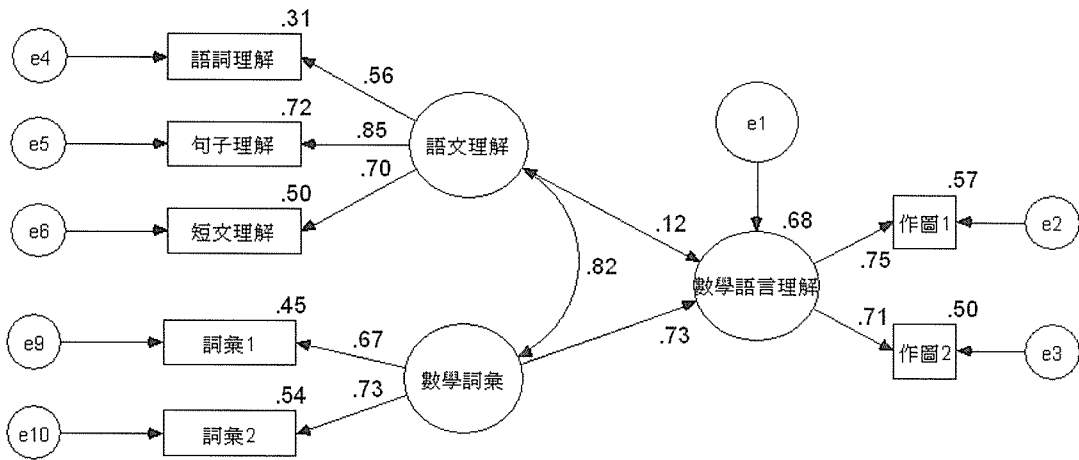


圖 4-5 數學語言理解模式圖三

各模式詳細的統計數字如表 4-7 所示：

表 4-7 數學語言理解三模式 驗證性因素分析之參數估計值

	模式一			模式二			模式三		
	未標準化		標準化	未標準化		標準化	未標準化		標準化
	估計值	T 值	估計值	估計值	T 值	估計值	估計值	T 值	估計值
數學語言 < ---語文理解				.839	4.92**	.431	.215	.60	.116
數學語言 < ---圖空知識	.315	.756	.185	.880	5.18**	.510			
數學語言 < ---數學詞彙	1.140	2.52**	.646				1.14	3.33**	.729
作圖1 < ---數學語言	1.000		.803	1.000		.795	1.00		.753
作圖2 < ---數學語言	.891	9.18**	.665	.909	9.59**	.672	1.02	9.58**	.709
語文3 < ---語文理解				1.000		.703	1.00		.704
語文2 < ---語文理解				1.071	10.5**	.835	1.09	11.4**	.849
語文1 < ---語文理解				.604	8.60**	.577	.59	8.55**	.558
圖形2 < ---圖空知識	1.000		.766	1.000		.748			
圖形1 < ---圖空知識	.779	9.60**	.684	.819	8.36**	.701			

詞彙2 < ---數學詞彙	1.000		.694				1.000		.734
詞彙1 < ---數學詞彙	.946	9.66**	.710				.847	9.77**	.672

從三個模式驗證性因素分析參數估計值來看，就現有資料顯示模式二可能是目前最適切的模式，在這模式中，語文閱讀理解和數學先備知識對數學語言理解有相當的貢獻量，這模式經 AMOS 驗證性因素分析發現：標準化的所有估計值都沒有負的誤差變異，且誤差變異都達顯著水準，符合模式的基本適配標準(陳正昌、程炳林, 1994)，標準化的第一階因素負荷量介於.58~.84 之間， $R^2$  則介於.33~.70 之間；若以一個回歸預測公式來說，是這樣：

$$\text{數學文字語言理解} = .43 \text{ 語文閱讀理解} + .51 \text{ 數學先備知識} + 0.06 \text{ 測量誤差}$$

在這模式中，仍有 0.06 的測量誤差，研究者經由上述所有資料的整合分析，發現數學測量工具應用與連貫各細節技能是兩大要素，雖然對數學語言理解貢獻量不是很大，但仍有其不可忽視的力量，尤其對一些低成就的學障而兒童，它可能是影響很大的關鍵。

### (三) 模式適合度檢驗與討論

模式二的適合度指標如表 4-8 所示：

表 4-8 數學語言理解模式之適合度指標(N=299)

	$\chi^2$	df	p	NFI	RFI	IFI	TLI	CFI
本研究模式	21.195	11	.03	.967	.915	.984	.957	.983
虛無模式	634.68	.28	.00	.000	.000	.000	.000	.000
飽和模式	0	0		1.00		1.00		1.00

所謂虛無模式是指各變項彼此間獨立無關的假設，此時自由度大，模式越精簡，但不具實用價值；而飽和模式則相反，而研究者的實證資料顯示：在自由度降低的情況下， $\chi^2$  也明顯降低，各種不受樣本人數限制的適合度指標也接近於 1(1 代表適合度最佳)，此說明本研究模式的外在品質適合度佳，就其模式化約的功能來說，其簡約性指數 AIC(Akaike information criterion)、BCC(Browe-Cudeck criterion)，表示越有可能找到適合的模式(吳裕益, 2001)，而本研究的模式二簡約性指數相較於虛無模式與飽和模式，是可達化約的目的(見表 4-9)。

表 4-9 數學語言理解模式之簡約性指數(N=299)

	AIC	BCC
本研究模式	69.195	70.514
虛無模式	648.677	649.062
飽和模式	70.000	71.924

從數學語言理解模式的分析中，在本研究中顯示語文理解、數學先備知識兩變項可有效預測數學語言理解 68%，這樣的研究結果與本章第一節的統計資料吻合，也與第二節學生的錯誤類型分析中得到佐證，數學文字語言理解能力植基在兩大基礎能力上，因此教師在提升兒童的語文理解能力之時，應可從這兩大變項作為教學切入點。

## 伍、結果與討論

### 一、結論

本研究應用測驗調查、文件分析、教學晤談、和驗證性因素分析等方式，分別探討一般兒童和學障兒童在數學語言理解上能力表現、錯誤類型，及學習困難原因探究，並試圖建立數學語言理解模式，研究結果如下：

#### (一) 不同程度兒童在數學語言理解上有差異

##### 1. 語文閱讀理解是影響兒童數學語言理解的關鍵

本研究以「數學作圖程序理解測驗」上的表現可有效區分四種不同數學語言理解能力者，分別是高分組、中分組、低分組、和極低分組。整體而言，學生的數學語言理解並不高，平均答對率為 0.64，標準差為 7.34，顯示個體之間差異很大，低分組與極低分組（約佔 1/3 受試）在測驗上有 6/10 的題目具有相同的語文閱讀理解困難問題，顯示在低成就群體中，語文閱讀理解是影響其數學語言理解的關鍵。

##### 2. 數學先備知識與語文閱讀理解是支持數學語言理解的兩大支柱

本研究以數學先備知識與語文閱讀理解為兩項向度指標，分別自全體受試中找出四種不同程度兒童來看其數學語言理解的表現，研究結果顯示：數學先備知識與語文閱讀理解兩者均優者，數學語言理解也較好，反之，兩者均弱者，數學語言理解也較差，而數學先備知識與語文閱讀理解兩者其中一項能力弱者，兩組學生在數學語言理解上沒有差異，顯示數學先備知識與語文閱讀理解兩者對數學語言理解同等重要。

#### (二) 學生的作圖錯誤類型顯示數學語言理解困難的多樣性

研究者從微觀的角度仔細分析學生在「數學作圖程序理解測驗」上的錯誤類

型，發現影響學生數學語言理解的困難約有下列幾種不同的原因，分別是：在語文方面，語文閱讀有困難，和缺乏整合細部訊息為整體的連貫能力，在數學方面，對測量沒有清楚概念和量感、不理解數學專門詞彙、特殊詞彙、數學符號紀錄和不會使用工具。

### （三）學障兒童的數學語言理解困難關鍵在語文閱讀理解

經由教學晤談發現，學障兒童的數學語言理解困難因素有十一種，但其中一半以上的因素是因為受限於語文閱讀理解的關係，和缺乏閱讀技能所致，如閱讀時的替代、省略、跳行、唸錯音、不理解一些方位詞彙、代詞、專門詞彙、甚至應用生活詞彙解釋特殊詞彙，而導致概念的模糊，其他像沒有測量單位概念與量感，運用已知概念取代閱讀內容、無法連結各細部訊息，和手眼不協調等，都是導致學障兒童數學語言理解困難的主要原因。

### （四）數學語言閱讀理解模式可提供教師教學的指南

數學語言理解與應用是數學教育的核心，本研究所探究的數學語言理解模式在模式適合度指標和模式化約功能兩向度都達到理想的指標，數學語言閱讀理解模式顯示：語文閱讀理解和數學先備知識兩要素可掌握 68% 的變異量，可有效協助學生數學語言閱讀理解，因此可作為實務教師教學的重要參考指南。

## 二、建議

根據本研究結果，分別對實務教師教學及出版商出版教科書提供幾點具體建議：

### （一）對實務教師教學而言

1. 測量工具應用是影響學生數學語言理解不可忽視的因素，教師教學時不可輕忽其對學生數學學習的影響。
2. 重視學障學生在語文閱讀上的替代、省略、跳行和唸錯音的現象，能提供報讀的服務，以克服學障兒童閱讀上的障礙。
3. 重視學生自發性概念影響數學科學性概念獲得的影響，教師教學時應應用清晰的數學語言來解釋數學專門詞彙的概念，以提供正反例辨正機會，協助學生概念澄清，以避免學生應用生活詞彙解釋數學專門詞彙或特殊詞彙的情形產生。
4. 教師語言可做好學生與數學文本間的良好溝通橋樑，文本中呈現的圖示是一種無聲的語言，也是一種視覺概念表徵，但在本研究中發現：學生有將課本圖示過度類推的現象，以為圓心一定要在一條線的中間，所以教師的語言功能可引導學生進入數學文本語言的作用。
5. 強化兒童語文閱讀細部連接的能力，閱讀能力弱者大都只抓取片段訊息，無法整合全部關係，因此教師教學應強化學生這方面的能力。

(二) 就出版商而言

1. 在文本呈現數學專門詞彙方面，不但要用清晰的數學文字語言，更應重視圖示多樣性的呈現，以免兒童在概念獲得變得刻板化。
2. 為避免學生以生活詞彙來解釋數學專門詞彙、特殊詞彙的現象，在教科書中能對這些詞彙以不同色體來呈現，以提醒教師教學與學生學習上的重視。

(三) 就未來研究而言

1. 針對研究者的發現，學障兒童因受限於語文閱讀上的障礙，無法掌握數學專門詞彙概念，和不會使用測量工具，而影響其數學語言的理解，若能進一步以實驗法的方式繼續探討，應能更精確掌握這些變項對數學語言理解的影響程度與教學方式的介入策略。
2. 本研究發現近 50% 的學生在數學語言的細部訊息連結上有困難，這顯示數學語言句法的特殊性，到底數學語言在句法、句子結構、和段落結構上與一般語文理解有哪些明顯的不同，值得作為繼續探究的題材。

參考書目



- 谷瑞勉譯(2001)。教室裡的維高斯基---仲介的讀寫教學與評量。台北市：心理。
- 吳裕益(1994)。國民小學數學診斷測驗(三)圖形與空間。教育部訓委會專案。臺北市：教育部。
- 吳裕益(2001)。線性結構模式分析。高雄師範大學特殊教育研究所上課講義，未出版。
- 邵光華(2002)。數學閱讀—現代數學教育不可忽視的課題。2002.03.28.取自中國學習網站  
<http://www.learningchina.com/jxyj/xkxj/00jxb10/>
- 邱上真、洪碧霞(1997a)。國民小學四年級國語成就測驗。行政院國家科學委員會專題研究成果報告，未出版。
- 邱上真、洪碧霞(1997b)。國民小學五年級國語成就測驗。行政院國家科學委員會專題研究成果報告，未出版。
- 邱上真、洪碧霞(1997c)。國民小學六年級國語成就測驗。行政院國家科學委員會專題研究成果報告，未出版。
- 柯華葳(1999)。閱讀理解困難篩選測驗。行政院國家科學委員會專題研究成果報告，未出版。
- 秦麗花(1995)。國小數學學習障礙兒童數學解題錯誤類型分析及其相關研究。輯於國立臺南師院 83 學年度輔導區國民教育  
 論文集。
- 秦麗花(1996)。國小低年級數學診斷測驗之編制及其功能之研究。高雄市内惟國小，未出版，高雄市。
- 秦麗花(2003a)。數學文本閱讀理解模式之建立及其驗證之研究。國立高雄師範大學特殊教育系博士論文，未出版。
- 秦麗花(2003b)。不同程度兒童數學文本閱讀理解困難原因之探究。輯於中華民國特殊教育學會 2003 年會年刊—特殊教育的危機與轉機，411-431 頁。
- 秦麗花、邱上真(2003)整合閱讀與數學建立數學閱讀理解模式之研究。高雄師範大學主辦 輯於第八屆課程與教學論壇  
 「九年一貫課程改革與教學實務對話」學術研討會會議手冊 199-207 頁。
- 陳麗玲(1993)。國小數學學障學生計算錯誤類型分析之研究。彰化師範大學特殊教育研究所碩士論文，未出版，彰化。
- 莊麗娟(2000)。系統化多元評量模式之發展—從動態評量的觀點出發。2003.07.05 取自高雄師範大學網站  
<http://www.nknu.edu.tw/~edu/item/item4-article.file/item4-article46.htm>。
- 教育部(2001)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北：教育部。
- 郭靜姿、蔡明富(2002)。解脫「數」縛—數學學障學生教材設計。台灣師範大學特教中心。
- 蔡亞倫(2001)。學前與國小一年級兒童數學符號表徵能力與數能力的關係。國立中正大學心理學研究所碩士論文，未出版，  
 嘉義市。
- 蔣大偉(2001)。由工作記憶角度探討數學障礙兒童的表現。國立中正大學心理學研究所碩士論文，未出版，嘉義縣。
- 蔣宇立(2000)。學習數學符號所產生焦慮之研究—從後設認知的觀點對國一學生進行研究。國立彰化師範大學數學系碩士  
 論文，未出版，彰化市。
- 蔣治邦(1996)。由表徵的觀點看格式的選擇。輯於嘉義師範學院 84 學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編，169-179。
- 甯自強(1993)。國小低年級兒童數概念發展研究(I)—「數概念」類型研究(I)。國科會專題研究計畫報告。NSC  
 82-0111-S-023-001
- Astrid, D.(1994).*The Readability of the Mathematics textbook: With special reference to the mature student.*  
 2003.06. 26, Retrieved from UMIProQuest Digital Dissertations.  
<http://www.lib.umi.com/dissertations/fullcit/MQ44873>.

- Asplin , R. ( 1999 ) .'*Defining a Role: the EAL teacher in maths*', NALDIC Occasional Paper 12, 1999.930202 Retrieved from <http://inclusion.ngfl.gov.uk/index.php?brsList=2:1&brsOpts=17:17&ri=3&ti=114&i=121>
- Badian, N. A.(1983).Dyscalculia and nonverbal disorders of learning. In H.R.Myklebst(Ed.).*Progress in Learning Disabilities*(pp235-264). New York:Stratton.
- Baroody, J. A. ( 1993 ) .Problem solving,reasoning and communicating. *K-8 Helping Children Think Mathematically*,99-117.
- Bauers, M. J.(2002). *Mathematical Language*. 2003.04.24 , Retrieved from the World Wide Web : <http://www.netfunny.com/rhf/jokes/88q1/25370.7.html>
- Bley, N. S. & Thornton, C. A. ( 1995 ) .*Teaching mathematics to students with learning disabilities*. ( 3<sup>rd</sup>ed ) .Austin Texas:Pro-ed.
- Campione , J. C., & Brown, A. L.(1985). *Dynamic assessment: One approach and some initial data*. Technical report No.361. Nation Inst. of Child Health and Human Development, Washington, DC.(ERIC Document Reproduction Service No.ED 26973).
- Cartwright, K. B.(2001).*Reading Development Begins at Birth*. 2002.03.11, Retrieved from the World Wide Web: <http://www.shpm.com/articles/parenting/literacy.html>.
- Chassapis, D.(1999).The Mediation of Tools in the Developments of Formal Mathematical concepts: The compass and the circle as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, 37,275-293.
- Cloer, T. J. ( 1981). *Factors Affecting Comprehension of Math word problems- -A Review of the Research*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Reading Forum. (2<sup>nd</sup>, Sarasota, FL, December 10-12, 1981)
- Dickinson, D. K., & Tabors, P.O.(1991).Early literacy: Linkages between home, school and literacy achievement at age five *Journal of Research in Childhood Education*,6,30-46.
- Esty, W. W.(2003).*The Language of Mathematics*. 2003.04.24, Retrieved from the World Wide Web: <http://server35.hypermart.net/augustusmath/>
- Hoover, W. A.,& Gough, P. B. ( 2001 ) . *A reading acquisition framework*. 2003.06.01, Retrieved from the World Wide Web: <http://www.sedl.org/reading/framework/overview.html>
- Jacobson,J.M.(1998).*Content Area Reading Integration with the Language Arts*. DIman Publishers.
- Lerner, W. ( 1997 ) . *Learning disabilities : theories,diagnosis,and teaching strategies*. ( 7<sup>th</sup>ed. ) .Boston : Houghton Mifflin.
- Lomas ,D. ( 2004 ) *Diagrams in Mathematical Education: A Philosophical Appraisal*. 930303 , Retrieved from the World Wide Web: <http://www.ed.uiuc.edu/EPS/PES-Yearbook/1998/lomas.html>
- Keeble , R. ( 2004 ) . *Reading and mathematics comprehension*.930404 , Retrieved from the World Wide Web:

<http://jwilson.coe.uga.edu/GMTL.Final6990/KeebleFinal.doc>

Kober, N. (2003). *What special problems do children whose native language is not English face in learning math?*

2003.05.03, Retrieved from the World Wide Web:

<http://www.enc.org/topics/equity/articles/document.shtm?input=ACQ-111329-1329>.

MacGregor, M., & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and Algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 449-467.

Mecer, C. D. (1987) .*Student with learning disabilities*. (3<sup>rd</sup>ed.) .Columbus, OH:Meorill.

Miller, J. (2004) . *Earliest Uses of Various Mathematical Symbols*. 93.0302. Retrieved from

<http://members.aol.com/jeff570/mathsym.html>

Roe, B. D., Stoodt, B. D., & Burns, P.C.(1995). *The Content areas (4ed)*. Houghton Mifflin Company.

Russell, B.(1990). *Mathematics as a Language*.

2002.04.23, Retrieved from the World Wide Web:<http://www.astro.uio.no/~hke/maun/mode16.htm/>

Snow, C.(1991).The theoretical basis for relationships between language amd literacy in development. *Journal of Research in Childhood Education*, 6,5-10.

The International Dyslexia Association.(1998).*Mathematics and Dyslexia*. Perspectives, 2003.07.04, Retrieved from the World Wide Web:[http://www.1donline.org/ld\\_indepth/math\\_skills/ida\\_math\\_fall98.html](http://www.1donline.org/ld_indepth/math_skills/ida_math_fall98.html)

The National Council of Teachers of Mathematics. (1989) .*Curriculum and evaluation standards for mathematics*. Reston, VA:The Council.

The National Council of Teachers of Mathematics. (2000) . *Curriculum and evaluation standards for mathematics*. Retrieved from the World Wide Web:<http://standards.nctm.org/document/chapter1/index.htm>.