

## 半斤八兩

設計者：簡進國

### 壹、教學計劃

#### 一、設計理念

分數概念的學習，對學童而言是很大的負擔及困難(呂玉琴，民 80；林福來、黃敏晃、呂玉琴，民 85；楊瑞智，民 89)。教師在教學法的應用越發重要。目前傳統教學法，強調教師為中心的教學，對於學童的認知發展、解題過程、自然想法、思辯質疑的能力都被教學者所取代。另外是以認知學派的建構主義的教學，主張學生為主體，教學是一種合作性歷程，重視學童的自然想法、解題過程及質疑討論的民主風度(林文生、鄒瑞香，民 88)。

本課程設計理念如下：

##### (一)採用 Vygotsky 的社會建構主義之教學主張

教師所要作的就是幫助學生建立學習的鷹架，使學生們在社會互動中建構自己的知識(Vygotsky(1978, p. 84))。採用下列教學步驟：

###### 1. 教師布題

教師整合學童認知發展和分數的認知結構，提出核心問題，每節課一至二個問題，前面一個問題情境是下一個問題情境的基礎。

###### 2. 學生解題

採用合作學習的異質分組學習，將本班分成四組，每組四到五個人，以利於學生分組討論的模式合作解題。

###### 3. 質疑辯證

各組發表過程中，教師為指導者，讓學生發表解題過程，並透過民主的程序：溝通、協商，建立共識，建構數學知識。

###### 4. 內化

透過意義化學習的歷程，鼓勵學童發表自己已建構的解題歷程，達成學習者的內化。再質疑他人的解法後，請學生再解說，達成內化。

##### (二)採用皮亞傑的認知發展論(張春興，民 87)

###### 1. 就具體的情境或熟悉的經驗

由於四年級處於皮亞傑的認知發展階段的具體運思期(4~11 歲)設計以學童生活上常接觸的柳丁、蘋果等具體物，作為發展假分數、帶分數的概念的具體活動情境，引發學習經驗。

###### 2. 序列合成運思

例：一包糖果有 15 顆，一顆為  $\frac{1}{15}$  包，二顆為  $\frac{2}{15}$  包……，5 顆為  $\frac{5}{15}$  包。

本單元會利用此運思概念作為推演假分數或帶分數。

###### 3. 累進性合成運思

本單元會利用「分數是累積單位分數後的結果」，如能把  $\frac{3}{4}$  視為 3 個  $\frac{1}{4}$  (單位分數)，同時把 3 個  $\frac{1}{4}$  看作  $\frac{3}{4}$ 。

###### 4. 分類的概念

依據皮亞傑的認知發展，學童在此階段有簡單分類的概念，會從外形、顏色、大小等特徵作分類(張春興，民 87)。

### 5. 推理思考能力

本活動設計的問題，以培養學童的推理、思考的能力，使學童能夠透過數學思考來解決問題。

### (三) 以問題為中心的建構主義教學模式

#### 1. 解決單向問題的缺失

目前國小數學課程，所設計的問題大部分是單向度標準化的問題、課程假設過於理想化及缺乏社會互動等，造成學生解題刻板化(林文生、鄒瑞香，民 88)。

#### 2. 問題的情境應在最佳發展區

最佳發展區的界定是那些尚未成熟，但已在成熟的進程中的功能(Vygotsky, 1978, p. 84)，數學問題必須融入學生的生活經驗、生活語言等，才能契合學生的學習經驗，引發解題興趣。

#### 3. 布題應考慮兒童的觀點

教師要瞭解兒童的溝通語言，布題時要特別注意語言上的用法，避免過多成人語言或成人思考，讓學童自由發展其原始的自然想法，建立學習者鷹架，才能達到最佳發展區。

### (四) 評量原則

採用兼顧評量者和被評量者的內在認知變化的第四代評量(楊龍立，民 86)。有學習單、學生日記、觀察與討論記錄、實作等的評量方式。

## 二、教學活動與能力指標

### (一) 學習活動與能力指標

設計對象以本校四年忠班 20 位學生，總節數為五節共 200 分鐘。教材來源：康軒版四上，內容為單元五分數。活動名稱、能力指標標書寫如下表：

活動名稱	教學時間	能力指標
活動一：熱情款待	40	N-2-5 在等分好、整體 1 能明顯出現的具體情境中，能以真分數來描述單位分數內容物為多數個個物的幾分，進行同分母真分數的合成、分解活動，並理解等值分數的意義。
活動二：平分秋色	40	
活動三：腦力激盪	40	
活動四：不可能任務	40	N-2-6 在具體情境中，能以假分數或帶分數描述具體的量，並能解決分數成分解的合成、分解以及簡單整數倍的問題。
活動五：小小工程師	40	

### (二) 教學目標

- 認識真分數、假分數、帶分數的意義。
- 了解假分數、帶分數和整數的互換。
- 在等分好、整體 1 能明顯出現具體出現的具體情境中，以真分數來描述單位分數內容物為多數個個物的幾份。

## 貳、教學實施

### 一、教學活動

#### 活動一：熱情款待

預備經驗：檢驗學生三年級的分、等分、真分數、分子分母等概念（學習單一）。

活 动 流 程	說 明	評 量
1.引起動機：現在每個同學手上都有一顆柳丁，如果家中來了四位朋友，要如何切，才會很公平並使客人吃得很開心？	提示等分	切成四等份
2.這一顆柳丁平分成幾片呢？老師拿其中一片柳丁是幾分之幾顆柳丁呢？	生：回答	回答4片和 $\frac{1}{4}$ 顆柳丁
<b>布題一、如果老師再拿二片柳丁合起來多少顆柳丁？</b>		說出 $\frac{3}{4}$ 顆柳丁的意義
1.說說看，你怎麼知道的？	生：回答	
2.請用式子將你說的表達出來？	上台作答並說出式子的意義	寫出數學式子 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
3.那麼 $\frac{3}{4}$ 顆柳丁和3片 $\frac{1}{4}$ 顆柳丁相同嗎？	生：回答	一樣多
4.若再一片柳丁是幾分之幾顆柳丁呢？又可以說是幾顆柳丁？	生：回答	回答 $\frac{4}{4}$ 和1顆柳丁
5. $\frac{4}{4}$ 顆柳丁等於1顆柳丁，算式要如何寫呢？ (整組活動)	各組寫在白板並說明式子	寫出 $\frac{4}{4} = 1$
<b>布題二：現在每組都有<math>\frac{4}{4}</math>顆柳丁，再加上你們這組的<math>\frac{1}{4}</math>顆柳丁，合起來是多少顆柳丁？也就是幾分之幾顆柳丁？</b>	生操作切好的柳丁	
1.說說看，你怎麼知道？	生：若回答1顆又多 $\frac{1}{4}$ 顆柳丁，師先採忽略	回答 $\frac{5}{4}$ 顆柳丁

2. 四分之五顆柳丁和一顆又多 $\frac{1}{4}$ 顆柳丁相等嗎？	生：回答	兩者相等
3. 寫寫看「四分之五顆柳丁」要如何記呢？	整組討論書寫白板，上台發表，師再介紹假分數記法	認識假分數記法
4. 那 $\frac{5}{4}$ 顆柳丁是幾片 $\frac{1}{4}$ 顆柳丁	生：回答	回答 5 片
5. 請寫做法說明如何得到 $\frac{5}{4}$ 顆柳丁。	整組討論書寫白板，上台報告	知道真分數的合成
6. 每組有 5 顆柳丁，每位同學都偷吃一片，現在你們這組剩下幾顆柳丁？也就是幾分之幾顆柳丁？	整組討論做法寫在白板，代表上台報告	知道假分數寫法及用數學式子將作法寫出
7. 學習單二	課後練習	

## 活動二：平分秋色

預備經驗：能等分具體物，並用分數表示其中的部分量。

活 动 流 程	說 明	評 量
布題一、一顆柳丁平分四份，老師拿一顆柳丁和 $\frac{1}{4}$ 顆柳丁，請問合起來是幾顆柳丁？（整組活動）	師：拿出柳丁圖片	回答 $\frac{5}{4}$ 顆柳丁
1. 說說看 $\frac{5}{4}$ 顆柳丁和一顆又多 $\frac{1}{4}$ 顆柳丁一樣多嗎？	生：操作具體物並回答	一樣多
2. 1 顆柳丁又多 $\frac{1}{4}$ 顆柳丁作為記錄，要如何記呢？	整組討論書寫白板，代表上台發表	想出帶分數記法及說出意義
3. 你贊成那一種記法比較合理呢？	生：投票表決命名，師：說明帶分數記法	認識帶分數記法
4. $\frac{5}{4}$ 顆柳丁和 $1\frac{1}{4}$ 顆柳丁相等，要如何記呢？	生：自由上台書寫	寫出 $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$
5. 請寫出為何 $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ 的做法？	整組討論書寫白板，代表上台發表	列式表達帶分數和假分數互換
6. $\frac{6}{4}$ 、 $\frac{7}{4}$ 、 $\frac{8}{4}$ 、 $\frac{13}{4}$ 顆柳丁各組分一題，將他表示成帶分數並詳列過程	整組討論書寫白板，代表上台發表	寫出 $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$ 、 $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ 、 $\frac{8}{4} = 1\frac{4}{4}$ 、 $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ 及互換過程

**活動三：腦力激盪**

預備經驗：在連續量的情境下，解決假分數和整數或帶分數的互換問題。

活 動 流 程	說 明	評 量
布題一、一包蘋果有 12 顆。如果老師拿了 5 顆蘋果，我們可以說是幾包？（整組活動） 1. 說說看，你怎麼知道的？  2. 如果老師拿了 $1\frac{3}{1}$ 包，是幾個 $\frac{1}{1}$ 包？ $1\frac{3}{1}$ 包是幾顆蘋果呢？	師：在黑板排出蘋果圖片  生：回答說出真分數的意義  整組討論書寫白板，代表上台發表	說出 $\frac{5}{12}$ 即一包蘋果有 12 顆，其中的 5 顆是 $\frac{5}{12}$ 包蘋果  回答 15 個和 15 顆
布題二、一包蘋果有 12 顆，可以平分成幾份？請用圖畫畫看？（整組活動） 1. 說說看，你畫的每一份是多少包蘋果？有幾顆蘋果？  2. 老師吃 $\frac{3}{6}$ 包蘋果、李昀吃 5 顆蘋果，那一個人吃最多顆蘋果？  3. 寫數學日記	整組討論過程書寫白板，代表上台發表，說明分成 1、2、3、4、6、12 顆方法各為 $\frac{1}{12}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、1 包蘋果  整組討論過程書寫白板，代表上台發表  生：自己出題	知道離散量的分數記法  知道 $\frac{3}{6}$ 包比較多  檢驗學習狀況

**活動四：不可能任務**

預備經驗：透過假分數和帶分數的互換，認識帶分數及其記法（學習單三）。

活 動 流 程	說 明	評 量
布題一：下列分數怎麼記呢？（整組活動） ① $\frac{13}{4}$ 顆柳丁 ② $\frac{3}{4}$ 顆柳丁 ③ 一又四分之三顆柳丁 ④ 168 顆蘋果 ⑤ $\frac{4}{4}$ 顆柳丁 ⑥ 2 顆蘋果 ⑦ $\frac{15}{12}$ 包蘋果 ⑧ 3 又七分之五包蘋果	師：在黑板上排出文字題，生：記錄	寫出 $\frac{13}{4}$ 寫出 $\frac{3}{4}$ 寫出 $1\frac{3}{4}$ 寫出 168 寫出 $\frac{4}{4}$ 寫出 2 寫出 $\frac{15}{12}$ 寫出 $3\frac{5}{7}$

<p>⑨ <math>\frac{1}{6}</math> 包蘋果</p> <p>1. 各組和老師對對看是不是有記錯的？</p> <p><b>布題二：排排看，上述分數要怎麼分呢？請將你分的排出來？（整組活動）</b></p> <p>1. 說說看，你為什麼如此分？</p> <p>2. 剛剛各組報告的分類，是不是和老師的相同嗎？</p> <p>3. 「<math>2000</math>、<math>100\frac{56}{100}</math>、<math>\frac{23}{98}</math>、<math>\frac{77}{37}</math>、<math>\frac{100}{100}</math>」五種數，排看看整數、真分數、假分數及帶分數</p> <p>4. 請學生分別寫一個真分數、假分數、帶分數和整數。</p>	<p>師：在黑板排出分數卡並請生檢驗記法</p> <p>師：給每組上述寫出的分數卡 整組討論分類結果貼在白板，代表上台發表</p> <p>師說明真、假、帶分數及整數的意義。並貼上說明卡，統整生說法</p> <p>師：抽號碼生上台排排看</p> <p>生：填寫學習單四</p>	<p>寫出 <math>\frac{1}{6}</math> 正確使用數學符號</p> <p>說出分類的依據</p> <p>知道真、假、帶分數和整數的意義</p> <p>排好五種數位置</p> <p>會寫出五種數</p>
--	---	--

### 活動五：小小工程師

預備經驗：1. 認識真分數、假分數、帶分數的意義

2. 知道公分和毫米的意義。

活 动 流 程	說 明	評 量
<p><b>布題一：老師問學生 1 公分是幾毫米呢？</b></p> <p>1. 1 公分可分成幾小格呢？</p>	<p>師：拿尺的情境圖或請學生看尺</p> <p>生：回答</p>	<p>回答 10 毫米</p>
<p>2. 1 小格和 1 毫米相同嗎？</p>	<p>生：說明分數等分的概念</p>	<p>回答相等</p>
<p>3. 1 毫米可以說成幾公分呢？</p>	<p>生：回答</p>	<p>回答 <math>\frac{1}{10}</math> 公分</p>
<p>4. 那麼 <math>2</math>、<math>3</math>.....<math>10</math> 毫米等於幾公分</p>	<p>生：經歷毫米與 1 公分的序列關係</p>	<p>依序回答 <math>\frac{2}{10}</math>、<math>\frac{3}{10}</math>...、<math>\frac{10}{10}</math> 公分</p>
<p>5. <math>\frac{10}{10}</math> 公分和 1 公分一樣長嗎？說說看？</p>	<p>生：說出 <math>\frac{10}{10}</math> 公分的意義</p>	<p>知道 <math>\frac{10}{10}</math> 等於 1 公分的意義</p>
<p><b>布題二：各組拿出一支鉛筆量量長幾公分？並將結果寫下來？（整組活動）</b></p>		
<p>1. 說說看，測量時要注意什麼？</p>	<p>生：發表正確測量方法</p>	<p>了解歸零</p>

2. 說說看你記了什麼？	整組討論結果寫在白板上，代表上台發表	會用帶分數記錄並說明
3. 上述使用假分數或帶分數記錄有何相同？	生：自由回答	知道帶或假分數記錄是相同的
4. 每位同學拿出身上有的東西用尺量一量幾公分？	生：將結果記在課本	會用帶或假分數記錄長度

## 二、學生反應

在教學後，本人收集學生寫的心得報告整理如下(見附錄)：

### 1. 分組討論

大都認為很好玩、有趣又快樂，並且有人寫作法、有人講、有人幫忙想、討論過程中會有爭執、合力解決問題及學到很多東西等。

### 2. 上台發表

大都寫出緊張、但可以訓練勇氣並且喜歡上台發表、若有不會同組人員會幫助解答、很好玩有時拿白板有時變成報告人、以前不敢上台現在敢上台等。

### 3. 質疑辯證

很好玩、不會可以再問、問問題有些組別是某些人在問、同學發問問題較難、同學認為問三個問題太少、會有老師和同學幫我解決問題等。

### 4. 上課和以前有何不同

以前上數學課表現機會較少，現在機會較多、老師問題較難必須要透過討論思考才能算出、以前沒有上台報告，現在有上台報告、解題要討論並要上台報告等。

### 5. 自己學得怎樣

大部分認為自己學得很好，老師會把小細節說出來、可分組討論和上台發表、上數學課很好玩、大家也不會罵來罵去都會互相幫忙等。

## 三、評量結果

### 1. 前置性評量

主要是要測出學生對分數的前置經驗，最好在學校做。經過本次教學，由於讓學生帶回家作，結果問題中出現成人算則，超出學生的認知範圍，造成學生會作題目(模仿成人)，但並不真正了解背後的意義。

### 2. 形成性評量

如上課過程的問答、數學日記、學習單及習作。從數學日記及學習單的診斷中，發現學生對假分數、帶分數與假分數的互換，除了3位同學外，其他(18位)都能真正了解其意義，其次對於分數的辨認，全班上課完後，馬上填寫發現20位同學都能真正寫出分數。

### 3. 學習單的評量

本教學發現學生會用數學符號表達算式過程，但在使用文字說明算式的意義上，轉換能力稍嫌不足，

### 4. 教學後檢討評量

有教師們評量大都認為師生互動佳、學生都能專注學習、同儕討論文化模式建立、教具適當等。

## 參、教學心得

本次教學後，個人收穫很多，也感謝林校長和瑞柑國小的課程工作坊，藉著每次的討論，讓我對分數教學及課程的核心更深入。茲將本次教學心得整理如下：

### 一、就個人教學來說

- (1)以前如果照課本的進度，用討論的方式來上課，常有時間不夠，不過在問題統整成一兩題後，時間反而不是問題。
- (2)教師是最佳發展區的引導者，學生是學習主體。上課是雙向溝通模式，學生的需求在課堂上自由的顯現出來。
- (3)學生的學習成就來自數學概念在解題歷程的內化結果。

### 二. 就教學方面

#### 1. 布題概念的統整

透過學校課程研討會及林校長討論，將布題一堂課有5至6個，統整成為每堂課1至2個核心問題，讓學生擁有更多時間完成討論、質疑辯證和內化歷程，是本次教學的最大收穫。

#### 2. 表徵物的使用

根據教學後發現，表徵物的使用若能前後活動有一致性，不要常常換，學生較易切入問題情境中，造成學習遷移。如本例在連續量採用柳丁，離散量採用蘋果具體物布題，建構數學知識。

#### 3. 解題後的討論，處理師生互動的方法

##### (1). 就學生的迷失概念，再做質疑辯正

如： $\frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$ ，學生無法從 $\frac{4}{4} = 1$ 顆柳丁，教師可再問 $\frac{4}{4}$

顆柳丁和一顆柳丁誰比較多？說說看為什麼？

##### (2). 就解題歷程再強化

本設計再請其他同學，就解題完後再將所問的問題說一次，若還不會則再請發表的同學再說一次，最後再請該位問問題的學生再說一次，直到他的概念清楚，並能說明給大家為止，使解題歷程再強化。

##### (3). 讓弱勢的學生，學習能夠真實的發生

鼓勵較少發言或能力較弱的同學，上課以配合其能力的問題，問該同學，讓其建立信心，其次若還不會發表，可讓其上台拿白板等，或擔任觀察員，藉著討論氣氛的培養和上台經驗，能夠打開心房面對同學發言。其次，教師也鼓勵該同學上課多問其不會的地方，讓其內在的認知結構或自然想法被引出，進而知道迷失概念。

#### 4. 學習單的使用

本次學習單設計和傳統最大不同是非以學習結果作為設計，強調檢驗學生前置經驗、思考、推理及學童的解題歷程。因此設計題目以一至三題為主，讓學生能夠有更多時間思考發揮創造力。

#### 5. 各組報告時間的技巧

本次教學可發現在時間充裕的條件下，可由各組依次上台報告。其次，教師可斟酌情況，若各組解題大都相同，在時間考量下可挑選

一兩組上台發表，讓學童擁有很多時間質疑辯證。其次，也可找解題較特別的或詳載解題歷程的組別上台報告，讓學生比較自己的想法是不是和他人有認知衝突，再透過質疑辯證，建構數學概念。

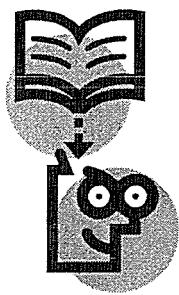
## 肆、參考資料

- 林文生、鄒瑞香(民 88)。數學教育的藝術與實踐。台北市：心理出版社。
- 林福來(民 82)。數學概念的了解。國教之聲，第 27 卷第 1 期，18-23。
- 林福來、黃敏晃、呂玉琴(民 85)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。科學教育學刊，第四卷第二期，161-196。
- 江永明(民 86)。建構主義教學實例。教育資料與研究，第 18 期，7-16。
- 呂玉琴(民 80)。分數概念：文獻探討。國立台北師院學報，第四期，573-606。
- 吳純璧(民 86)。建構主義取向的教學—師生交互猜測、相互成長的活動。教育資料與研究，第 18 卷，17-20。
- 吳相儒(民 90)。國小學童學習分數概念時常見的迷思。翰林文教雜誌網路版，第 24 期。[http://www.worldone.com.tw/magazine/24/24\\_08.htm](http://www.worldone.com.tw/magazine/24/24_08.htm)。
- 唐偉成(民 88)。建構主義的基本理念和教學模式(一)。翰林文教雜誌網路版，第 3 期。[http://www.worldone.com.tw/magazine/03/03\\_11.htm](http://www.worldone.com.tw/magazine/03/03_11.htm)。
- 康軒文教事業(民 91)，四上數學教師手冊。
- 張春興(民 87)。教育心理學。台北市：東華書局。
- 國立編譯館(民 87)，數學教學指引(第七冊)。
- 國立編譯館(民 87)，數學教學指引(第九冊)。
- 教育部(民 89)，國民中小學九年一貫課程綱要。
- 楊瑞智(民 89)。探究師院生之分數基本概念及分數概念的課室教學。國立台北師院學報，第 31 期，357-382。
- Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. In M. Cole, V. John-Steiner & E. Souberman(Eds.), *Mind in society: The Development of Higher Psychological Process*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

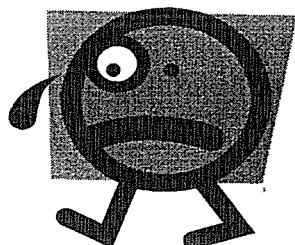
## 伍、附錄(學習單)

## 數學日記

科目：四上數學單元五分數 年級： 姓名：  
收集日期： 年 月 日 組別： 家長簽名：  
壹、小朋友上完了今天數學課，相信你學到不少東西，請你將今天在  
上數學課學到的東西寫下來喔！



貳、你認為自己今天表現如何？你給自己打幾分\_\_\_\_\_。(最多 100)  
參、寫一寫你今天上課後的感想(字數至少 30 個字)



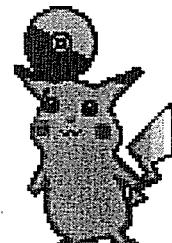
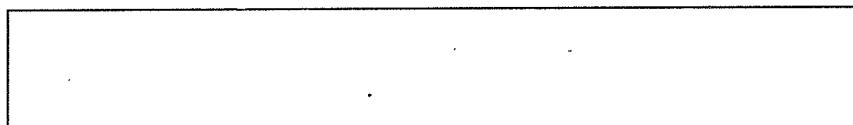
### 數學學習單一

科目：四上數學單元五分數 年級： 姓名：  
收集日期： 年 月 日 組別： 家長簽名：

一、小朋友日常生活我們常常會使用到分數，例如：在分蛋糕、西瓜或披薩等。因此，請你想想，人類為何要使用「分數」呢？請將你認為的寫下來。（至少寫二種喔！）

二、請你寫一寫「七分之三」個西瓜的分數符號\_\_\_\_\_。分母是\_\_\_\_，分子是\_\_\_\_。而「七分之三」個西瓜代表什麼意思呢？請將你的想法寫下來？

三、有一長方形，將它分做四份，請你用彩色筆將 $\frac{3}{4}$ 的長方形塗上顏色。



**數學學習單二**

科目：四上數學單元五分數 年級： 姓名：

收集日期： 年 月 日 組別：

壹、自己出一題假分數題，並將假分數表示成帶分數，記得要列出數學式子說明如何得到帶分數？

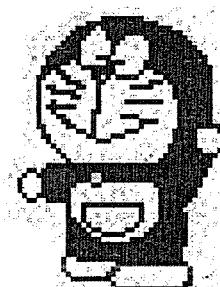


### 數學學習單三

科目：四上數學單元五分數 年級： 姓名：

收集日期： 年 月 日 組別： 家長簽名：

壹、請觀察  $\lceil \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7} \rceil$ 、 $\lceil \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7} \rceil$ 、 $\lceil \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7} \rceil$ ，左邊的假分數化成右邊的帶分數時，有什麼特別的技巧，請各組討論好並將過程記錄下來？



學習單四

科目：四上數學單元五分數

年級：

姓名：

收集日期： 年 月 日

組別：

家長簽名：

請寫出下列分數各一個喔！

真分數	假分數
帶分數	整數

學習單四

科目：四上數學單元五分數

年級：

姓名：

收集日期： 年 月 日

組別：

家長簽名：

請寫出下列分數各一個喔！

真分數	假分數
帶分數	整數