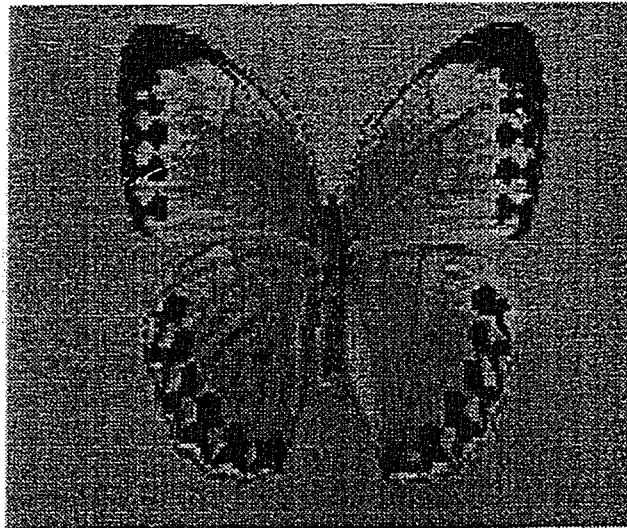


比比看誰的面子大？

- 五年級數學科教學觀摩
- 校長 林文生
- 87.12.21



環紋蝶

比比看誰的面子大？

林文生

壹、內容說明

一、單元目標

- (一)、瞭解幾何圖形的組成要件
- (二)、重新解構與再建構兒童的面積概念
- (三)、讓兒童意義化「平行四邊形」的概念
- (四)、聯結長方形面積與平行四邊形面積的關係
- (五)、建構平行四邊形面積的概念

二、教學時間：4 節（160 分鐘）

三、教材分析

(一)、van Hiele 夫婦的幾何教學理論

根據 van Hiele 夫婦的說法，學生在合宜的教學下，其幾何的知識建構，將歷經下列五個階段，這五個階段必須循序漸進，無法逾越。

階段 0：學生可以分辨、稱呼、比較及操弄幾何圖形。（例如三角形、角及平行直線）

階段 1：學生從圖形的構成要素以及構成要素之間的關係分析圖形，並且實證地（例如折疊、用尺量、用縱橫格子或用特別設計的圖樣）發現某一群圖形共有的性質/規則。

階段 2：學生透過給出或聽懂非正式地論證，把先前發現的性質邏輯地聯繫起來。

階段 3：學生用演繹邏輯證明定理，並且建立相關定理的網路結構。

階段 4：學生在不同的公設系統中建立定理並且分析比較這些系統。

van Hiele 夫婦（1958）注意到學生的學習有不連續的跳越。「到了一個時刻，學的過程暫停了，然後它會繼續進行。這時學生似乎『成熟』了。教師在講解主題時並不成功。對那些尚未到達新階段的學生而言，教師似乎在講一種無法瞭解的語言。學生也許接受了教師的解釋，但是所教的課題不能進駐他們的心智中。學生覺得無助，也許可以模仿某些動作，但是他對他自己的活動沒有知覺，除非他已達到了新階段。」（朱建正，民 86，194 頁）

比比看誰的面子大？

壹、內容說明

一、單元目標

- (一)、瞭解幾何圖形的組成要件
- (二)、重新解構與再建構兒童的面積概念
- (三)、讓兒童意義化「平行四邊形」的概念
- (四)、聯結長方形面積與平行四邊形面積的關係
- (五)、建構平行四邊形面積的概念

二、教學時間：4 節（160 分鐘）

三、教材分析

(一)、van Hiele 夫婦的幾何教學理論

根據 van Hiele 夫婦的說法，學生在合宜的教學下，其幾何的知識建構，將歷經下列五個階段，這五個階段必須循序漸進，無法逾越。

階段 0：學生可以分辨、稱呼、比較及操弄幾何圖形。（例如三角形、角及平行直線）

階段 1：學生從圖形的構成要素以及構成要素之間的關係分析圖形，並且實證地（例如折疊、用尺量、用縱橫格子或用特別設計的圖樣）發現某一類圖形共有的性質/規則。

階段 2：學生透過給出或聽懂非正式地論證，把先前發現的性質邏輯地聯繫起來。

階段 3：學生用演繹邏輯證明定理，並且建立相關定理的網路結構。

階段 4：學生在不同的公設系統中建立定理並且分析比較這些系統。

van Hiele 夫婦（1958）注意到學生的學習有不連續的跳越。「到了一個時刻，學的過程暫停了，然後它會繼續進行。這時學生似乎『成熟』了。教師在講解主題時並不成功。對那些尚未到達新階段的學生而言，教師似乎在講一種無法瞭解的語言。學生也許接受了教師的解釋，但是所教的課題不能進駐他們的心智中。學生覺得無助，也許可以模仿某些動作，但是他對他自己的活動沒有知覺，除非他已達到了新階段。」（朱建正，民 86，194 頁）

(二)、平行四邊形概念的建立

到了國小五年級，大部的學童幾何概念的發展已達到 van Hiele 幾何發展模式的分析層次。這階段的學童能注意到圖形組成要素的特性，可以利用構成要素造出圖形，並能依一些圖形的某些共同特徵加以命名。利用兒童的舊經驗，先複習用吸管製作三角形、四邊形，並分析其構成要素，再逐步引入平行四邊形。

(三)、面積的概念的建構

1、圖形與面積

圖形為描述物件的輪廓，通常以「形狀」稱之，由於物體的形狀非常多樣化，故有相同特性者合成一類，故加以命名之。如占二維空間的名稱為面，三維空間的量稱為體。

面積表示二維空間量的大小，一般指的是對某一特定區域的覆蓋或填補的程度，如黑板用六張報紙，四本課本蓋滿，則表示黑板的面積有六張報紙和四本課本合起來那麼大，此時的覆蓋活動，包含了二個條件，即

(1)、面積是有周界的，有範圍的。故覆蓋物不能超過給定的邊界。

(2)、面積是從一維到二維掃描的結果，故覆蓋物是不能重疊的。

2、單位量與單位數

單位 (unit) 之定義為度量的標準。單位是表示以某一量為單位，亦即以該量為基本單位，其可能是以 1 為基本單位，如五個梨子表示每一個基本單位為 1 組合而成，故包含五個 1。亦可能是以非 1 為單位，如二打鉛筆此時的基本單位為打，其是由 12 個 1 組合而成，故 12 本身又稱為一集聚單位，故二打鉛筆表示兩個 12 組合而成。單位數表示有幾個基本單位量；如上例中五個梨子中，「5」是單位數，「1」是單位量，二打鉛筆中，「2」是單位數，「打」或「12」是單位量，最後算出來的五個梨子和廿四枝鉛筆中的 5 與 24 又是以基本「1」為單位量來重新描述與總量的關係，此均稱為單位量的轉換。除了上述可一個一個點數量之外，透過切割的連續量亦相同。如□一格是一平方公分，此時的一格是單位量。

3、長與寬的命名

幾何的命名是為溝通的方便，但其內在本質則是分析組成原素的同質性與異質性，以及對未來發展的一致性。故命名活動不是隨興而取，必

須兼顧概念的發展，導致形成以為命名是不可改變的標籤，視命名是從上而下規定而來的，故產生如三角形不可稱為三邊形，四邊形不可稱為四角形的誤會，其實只要掌握圖形的屬性，在溝通上亦無障礙即可。命名只是簡化冗長的溝通語詞，提昇概念的抽象化內涵。

4、等積異形的幾何意義

數學中的重要屬性（不變性）是數學邏輯與推理活動發展的重要基石，但不變性的掌握並非透過記憶與計算的結果。皮亞傑特別強調保留概念，即物體不因放置方向或形狀改變而改變本質，亦即不變性概念的發展。

5、面積概念的掌握

依據 van Hiele 夫婦的理論，國小階段的面積概念不是長度乘以長度，而是單位面積乘以單位個數。因此，建構學生面積的概念 必須先確定單位面積的量感，譬如一平方公分是多大？（邊長 1 公分的正方形）那麼每邊長 3 公分的正方形的面積，剛剛好需要 9 塊 1 平方公分的正方形來覆蓋，所以是 9 平方公分。

（四）、平行四邊形面積的瞭解與掌握

1、透過長方形面積公式的瞭解與應用，以解決平行四邊形的面積問題，此時兒童應已具備面積保留概念，故將平面四邊形切割、拼湊可變形成長方形，以經驗等積異形的面積概念，但為避免原型改變兒童不易比較，故先提供二張全等的平行四邊形，其中一張變形後仍可透過直接比較，經驗長方形與平行四邊形的關係性。

2、透過長方形長與寬的命名，聯結到平行四邊形的對應關係，並加以命名。

將平行四邊形切割拼湊成長方形，以求解平行四邊形面積問題的活動中，隱含著三項教學重點：

（1）、知道將平行四邊形切割拼湊成長方形的簡易方法，為找出平行四邊形一邊（底邊）的垂直線（高），再沿著垂直線剪開即可拼成長方形，且知道平行四邊形面積和拼補成的長方形面積一樣大（認識等積異形）。

（2）、拼湊後的長方形的長邊與寬邊，與平行四邊形的一邊（底邊）與該邊的垂直線段（高）一樣長。

（3）、察覺在平行四邊形上，可以找出一邊與該邊的垂直線段，來代替變形後的長方形的長邊與寬邊，所以長方形的面積等於底乘以高。

貳、教學活動

活動一、（一）讓學童利用吸管和紙黏土，製作一個三角形、四邊形、以及平行四邊形，並發表其特徵。

（二）能在方格紙上，利用大長方形的一半，求算直角三角形的面積

（三）在方格紙上，透過點算、拼湊等活動，計算三角形、平行四邊形、梯形的面積。

預備經驗：能利用平方公分板，計數及描述整數與非整數格子面積的大小。

情境布置：配合平方公分方格紙，製成投影片，使用投影機教學。

活動二、（一）透過切割與拼湊活動，將一個平行四邊形變成一個長方形，來解決求平行四邊形面積的問題。

（二）探討平行四邊形切割與拼湊後的長方形的長邊和寬邊與平行四邊形的底邊與底邊上的高的關係。

（三）平行四邊形底邊和高的命名。

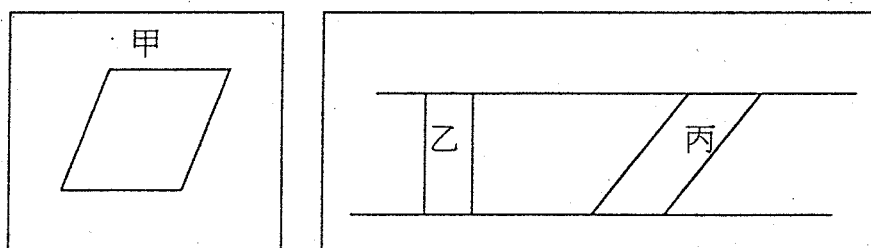
預備經驗：能在方格紙的協助下，將平行四邊形切割、補成長方形，再算出面積。

情境布置：1、製作等積異形的兩個圖形（長方形與平行四邊形）投影片，讓學生點數單位面積。

2、學生準備剪刀（小刀）、直尺及平行四邊形造形。

活動三：畫出平行四邊形指定底邊上的高

情境布置：教師製作以下三種圖形（投影片）教學



活動四：平行四邊形面積的實測與公式的應用。

預備經驗：(1) 透過切割與拼湊活動，將任意平行四邊形改變成長方形，解決平行四邊形的面積問題。

(2) 瞭解平行四邊形切割與拼湊後的長方形的「長邊和寬邊與平行四邊形的底邊與底邊上的高」的關係。

(3) 能畫出指定底邊上的高。

情境布置：準備圖卡，畫出任意平行四邊形，讓學生找出底邊上的高。

參、教學信念與方法

一、在解題、反省與討論中發展數學知識

數學教育的目的，在於協助學童獲得有關數學的知識，進而培養運用數學方法，有效地解決實際問題的態度及能力。數學知識的獲得，並不強調學童能模仿或背誦，而在強調學童能理解與應用。在適合學童成熟度的問題情境中，讓學童嘗試運用舊有經驗（知識），產生解題活動；在班級討論中，一方面反省自己的解題經驗，一方面觀摩其他學童的解題想法；在解題、反省、討論與觀摩的過程中，學童逐步地學習數學語言的意義，進而能使用數學語言來溝通想法。

數學知識不是建立在教師的權威之下，以教師權威作為知識的標準，學童只能模仿與背誦教師的解題方式，而不必然理解此種方式為何有效；遇到老師未教過的問題，也自然地會說：「不會做；老師還沒教。」

數學知識的學習，是在解題、反省、討論與修正的過程中逐步形成；學童需養成勇於嘗試的態度，靈活運用已習得的知識，來解決問題。

(二)、在解題過程溝通中建立數學語言

數學的正式語言，是社會文化中約定俗成的產物，是學習與討論數學知識的重要媒介。所以學童在活動中，逐步學習數學語言所表達的意義。數學語言是用來描述或摘要具體的問題與活動而發展出來的一種語言，唯有瞭解數學語言的意義，才能逐步地脫離具體的操作，運用心智能力進行抽象的思考，精簡地與他人溝通想法。雖然語言的格式可以在模仿與修正下形成，但是語言所表達的意義，必須在重覆使用中獲得。即重覆使用相同的語言格式，來描述同類型的活動，只有此種活動類型才能賦予語言適當的意義。

本課程在教學活動的安排上，先協助學童掌握自己的解題活動，進而協助

學童使用正式的數學語言，來描述自己的解題活動。最後期望學童能運用符號（數學語言），進行抽象思考，簡化解題過程。

（三）、群體討論中培養合作學習的態度

雖然數學的意義是由個人所建立，但社會群體的集思廣益與合作，提供最佳的數學學習環境。群體的解題或討論，引發學童反省、溝通、精益求精的契機。教室內的師生是一個學習的群體，在群體的互動中，形成數學語言的共識，提昇數學知識的品質。

在教學活動中，強調解題活動，鼓勵學童勇於嘗試，落實以兒童為本位的教學原則；強調活動的反省，以累積相關活動的經驗，作為提昇數學知識的基礎。

(平行四邊形概念的建構)

教學流程

佈題一、請問你們生活上哪裡有三角形？

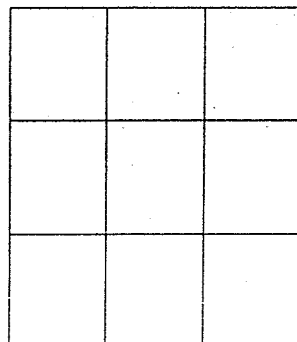
佈題二、三角形有哪些特徵（幾個邊、幾個角、幾個頂點）

佈題三、正方形有哪些特徵？

佈題四、如何知道正方形的面積？
(邊長 \times 邊長)

佈題五、你怎麼知道正方形的面積是
(邊長 \times 邊長)？

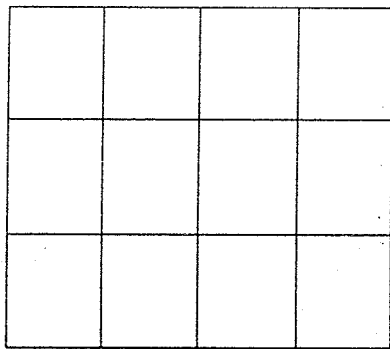
配合之教學媒體



佈題 5-1 上面這個正方形內的每一格是
1 平方公分，請問它的面積是
多少平方公分？

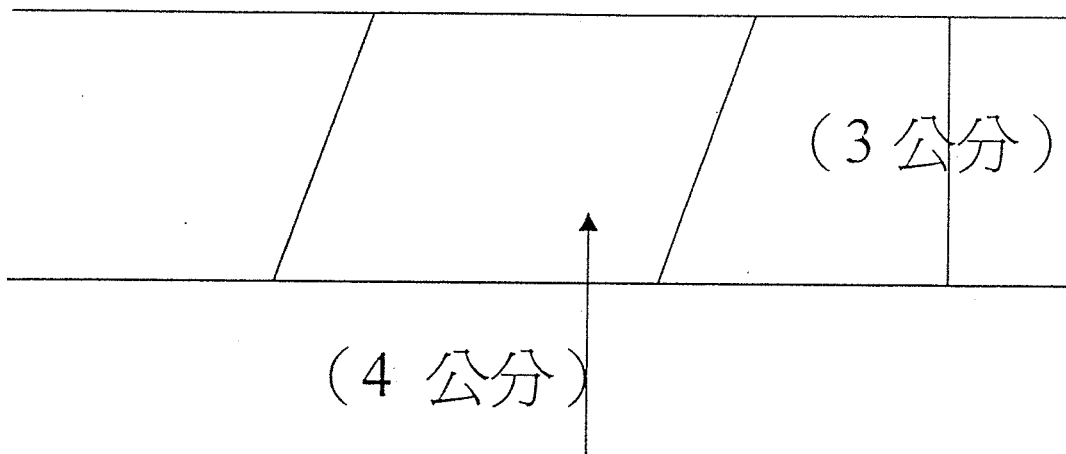
佈題 5-2 算出正方形的面積除了一塊一
塊數之外，還有沒有更快速的
算法（ 3×3 ）

佈題六、那長方形的面積呢？



請問這個長方形的面積是多
少？你怎麼知道？

佈題七、下面那個圖形，我們怎麼稱呼
它？



佈題 7-1 這個圖形有什麼特徵？

它和長方形哪些地方一樣？

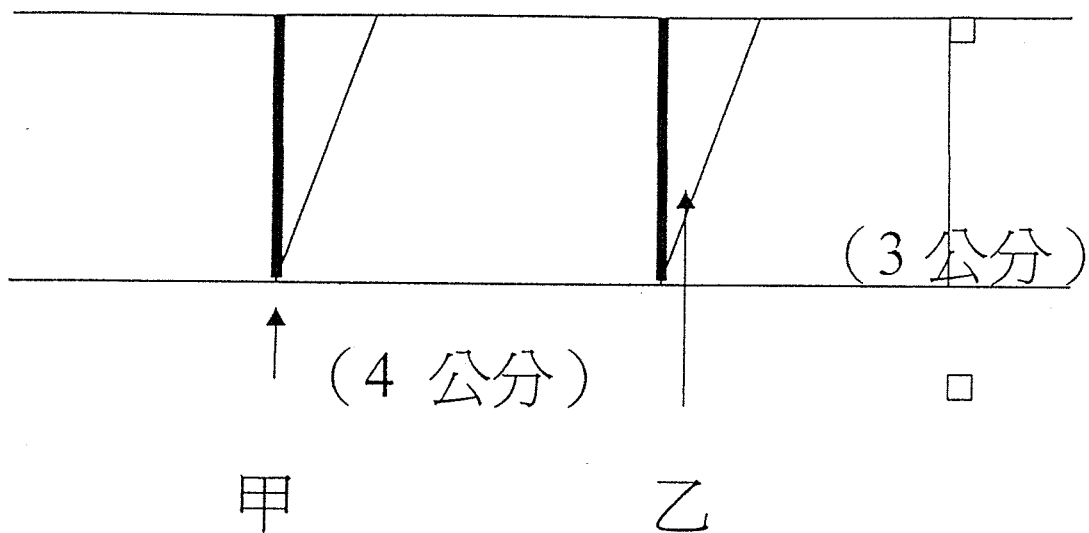
哪些地方不一樣？

佈題 7-2 怎麼樣知道它的面積？

（你可以想辦法將它變成長方形之後再來求面積嗎）？

佈題 7-3 你怎麼證明你求出來的答案是正確的？

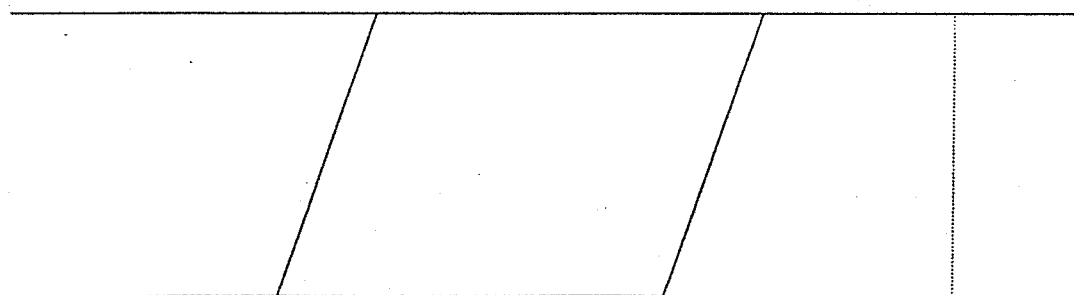
佈題八、猜猜看，下面兩個圖形，那一個面積比較大？為什麼？



佈題九、運用什麼方法來求平行四邊形的面積最方便？

佈題十、平行四邊形的面積和長方形的面積有什麼關係？

佈題十一、平行四邊形的高在哪裡？



虛線的部份可以算高嗎？爲什麼？

佈題十二、請你做出兩個形狀不同但是
面積相同的兩個平行四邊形。