057

國立教育資料館叢書

教育統計學概要

耿相曾 著

國立教育資料館印行

N
520.28
1948

本館編輯教育叢書緣起

時代在不斷的進步，一般行政事務，都日趨專門化，教育事業也在日新月異的過程中。教育的制度固然屢經演變，教育的方法也日新又新。教育工作人員若要負起教育建國的責任，必須不斷進修，隨時吸收新知，以充實本身的專業知能。

目前國內教育參考用書缺乏，亟待大量補充，幾成爲教育工作者一致的呼籲和希望。本館有鑒於此，乃決定編輯本叢書，除供應一般教育研究資料外，並對新教育的理論與實際，作有系統的介紹。相信我教育界同仁，在不斷研究，不斷改進中，自可收到相互觀摩，集思廣益的成效。

教育事業，是一種創造性、生長性的事業。時代進步，事物隨着變遷，如何充實並改造受教育者的生活經驗，以適應當前社會生活的需要？如何運用適當的教材，來達成預定的教育目標？這一連串的繁複問題，是需要我們教育工作者本着精益求精的態度，奮鬥創造的精神，去追求答案的。所以本叢書的取材，除了配合各級學校的實際需要外，並力求適合教育改革計劃，爲各種新教育的實驗工作鋪築一條大路。

本叢書的發行，旨在改進教育事業，藉謀普遍發展，至盼我教育界賢達提示卓見，俾便隨時改進，是所企禱。

劉先雲謹識

五十一年十一月

自序

教育統計學在整個教育課程當中，是一門比較硬性的學科。初學的人，對於一些公式往往無法瞭解；機械地從事練習，常會發生被人牽著鼻子走的感覺。

這本書的目的，即在供給初學教育統計的人一些可以理解的進修材料；同時也希望能够作爲指導這門學科的人一套比較注重數理和觀念的教材。書中除了常態曲線一部份引用了一點微積分的學理以外，其他各章，大都是運用算術和代數的法則，來推證或闡明重要的統計方法的，凡具有中學程度以上的人，用之都不會感到什麽困難。

爲了初學的人便於獲得系統的觀念，書中所採用的公式和符號，均經縝密選擇或變異，不爲某家慣例所限。作者並有另立公式之處，如讀者認爲確較便利，自希隨時採用或介紹，這裏並沒有推銷國貨的意思。

書稿總以時間所限，不能詳爲推敲，疏漏在所難免，如有謬誤，更是一種罪過，甚望讀者專家多所教正！

耿相曾 於台北 五十一年十二月

教育統計學概要

目　　次

教育統計學概要

第一章 緒論

一、統計學的起源

統計學的知識，原是一種經驗的結晶。古代的人民，雖不如現代人精於計算，然上觀天文，下察地理，時間久了，便知月暈而風，礎潤而雨。這種經驗的知識，可以說都含有統計的性質，如以此追溯統計學的起源，其年代實邈不可知；或謂其與人類同始，亦未嘗不可。

美國統計學家金氏（Willford I. King）根據歷史的記載，謂遠在西元前3050年，埃及國王爲了建築金字塔的工程，曾調查全國人口和財富，此種資料，不啻爲統計學的濫觴。金氏更指出中國在西元前2200年，夏禹王分天下爲九州，記載山川人民，也就是古代的統計（註）。此後三千餘年，中西各國對於統治下的土地和人民等政治情形，雖代有調查，但是在方法和數字的運用上，都未有顯著的進步。就統計學的發展來看，可說是一次長期的停頓時期。

直至十六世紀初葉，宗教改革運動發生，新教爲了便於考察教徒們的行爲，規定一種生死婚喪登記的辦法，由此提供出生命和社會統計的良好資料。1661年，葛蘭德(Capt. John Graunt)在倫敦便是根據這種資料的研究，發表了第一次生命統計的報告；他的結論是出生率和死亡率常是不變的。同時，歐洲各國由於

註：見甯恩承譯金氏著，統計方法第一章2、3兩頁。惟該書所述夏禹王的年代爲西元前1200年，錯後了一千年（應爲西元前2200年）。周調陽著，教育統計學第一章中所載，誤處相同，當係援引粗疏所致。

重商的關係，許多經濟學家也都根據統計的事實，來證明自己的學說，並以此表明物價和供求的關係。於是統計學應用的範圍便大為擴展。

不過，眞正引起現代統計方法研究的，實導源於有關計算賭博場中輸贏問題的機會說（Theory of probability）。這個源流說起來雖不甚光彩，但由此所導致的成績，却非常輝煌。以發明常態曲線（Normal curve）聞名於世的法國數學家德幕府（De Moivre, 1667—1754），就曾担任過賭博場中的顧問。他利用投擲錢幣（Coin tossing）的方法，研究出現正反面的次數，結果在1716年發表了機會論（Doctrine of Chances），其後更由此求出常態曲線的方程式。半世紀以後，這種研究賭博的理論，轉向於研究天文學上由觀察所引起的誤差問題，如法人拉布拉斯（Laplace, 1749—1827），德人高斯（Gauss, 1777—1855）等對於機誤的研究和分析，己相當完善。尤其是在高斯、恩克（Encke）和柏瑟（Bessel）等天文學家的研究中，對於標準差（Standard deviation）、機誤（Probable error）和標準誤（Standard error）等數值的觀念和公式，都曾加以闡明和推算，爲現代統計學奠立了初步的基礎。

十九世紀以後，統計學家倍出，無論在學理的研究上或方法的應用方面，都呈現出蓬勃茁壯的景象。如比利時數學家奎德萊（Quetelet, 1796—1874）研究人群的壽命，發現每萬人的死亡年齡的平均數，與另一萬人相較，差異甚微，氏謂之"巨數的恒性"；人壽保險公司由此得到了計算保險費的重要根據（註1）。又奎氏對於常態曲線的研究，不僅用之於表現事實，並對未來加以預測；如各類犯罪案件的人數，即可根據當前統計的分配狀況，以推斷將來（註2）。英人高爾登（Galton, 1822—1911）受奎氏

註1：朱君毅著，教育統計學第一章。

註2：Johnson and Jackson, Modern Statistical Methods, pp.3,4.

的影響，對常態曲線的研究益精，應用益廣；但高氏的主要成就，則在於統計方法的改進和發明。如百分位數、中數、四分差，以及相關和迴歸線等計算方法，均爲高氏所創立，貢獻之大，罕見其儔，故後人有尊稱他爲統計學的鼻祖者（註）。高氏的弟子皮而生（Karl Pearson）承其衣鉢，繼續研究相關和迴歸線的理論，先後發明積差相關法，複相關和分析相關等公式，聲譽大著。1900年，其發表之x^2分配（Chi-square distribution）的理論，更爲今日研究統計推論問題的先河。其後英之統計學家如司畢門（Spearman），葛瑟（W.S. Gosset，筆名 Student），費虛（R.A. Fisher）游爾（Yule），根道邇（Kendall）等，均各有其創建，遂使統計學的研究日趨專精。

美國心理學家桑戴克（E.L. Thorndike，1874—1949）於1904年出版心理與社會測量（Mental and Social Measurements）一書，其中對於統計方法的應用和測驗的編造等闡述綦詳，可視爲教育統計學方面的第一本著作。現今美之教育統計學家如凱萊（Kelley），羅格（Rugg）、奧提斯（Otis），賀麟閣（Holzinger），司爾通（Thurstone）等，均有專著問世，教育統計學的體系於是粲然大備。

二、統計學的特質

㈠統計知識的綜合性 人類的知識，大別可分爲三類：一爲經驗的知識，係由經歷體驗而得，常知其當然而不知其所以然。如老子所謂"飄風不終朝，驟雨不終日"；英諺所謂"冬季暖，墳地滿"等屬之。二爲科學的知識，係由精密的研究實驗而得，知其當然亦知其所以然。現代文明中許多聲光化電以及醫藥衛生等方面的發明成就均屬之。三爲統計的知識，係利用統計的方法

註：高氏精於遺傳學，利用統計方法研究人種的智力和體力等遺傳的影響，創獲甚豐，詳見氏於1889年出版之"Natural Inheritance"一書中。

整理和分析繁複的事實而得，如日蝕的推算，氣候和雨量的統計，出生率和死亡率的研究，以及心智和學習的關係等屬之。在正確性上雖未若科學知識達到了百分之百的程度，但是科學的技術，對於自然界和社會界的複雜現象和事實，却有所不逮。所以在今日的科學研究上，凡是難以實驗或不易控制的事物，都要仰仗統計的方法去尋求其間相互的關係和影響。通常我們對於天地間一切現象或事物的發生，有些視爲"必然"，有些則稱之爲"偶然"，其實就事物的本身來說，都存在著因果的關係，不過是一簡一繁，並無所謂必然、偶然之分。就人們的知識說，對於所瞭解的謂之"必然"，不明白的稱爲"偶然"；前者是科學知識的領域，後者則屬於統計學中"機會說"的問題。凡此變異紛繁和因素複雜的現象或事實，都可由統計的方法，綜理出一種秩序、趨勢和關係，使繁雜的事實或問題轉趨簡化明顯，因而獲得解决的途徑。

(二)**統計學中的常態律** 宇宙間的事物，消長無定，參差不齊；然在此千變萬化之中，却存在着一種常態分配（Normal distribution）的現象。譬如人類的才智，中庸者多，上智、下愚者少；體質的大小，强弱、美醜等莫不如是。統計學家根據這種現象，既可選取一部份事實以代表全體；並可由此有限的事實當中求出代表的數值，進而用之於一般的同類事物上去。例如出生率、死亡率和智商等數值都相當穩定，許多社會的和教育的問題，都可據此以謀解决。就代表數值的穩定性來說，統計學家稱之爲常態律（Law of statistical regularity），統計學之大用，實得力於此。

(三)**統計事實中的數理觀念** 一種問題的解决，須以事實爲根據，這是近代學術研究中的科學精神。但事實的範圍、性質等在一般人的觀念上,甚多含混籠統之處,對於問題的適當解决，影響至大。統計學家針對此弊，規定凡統計的材料，均應化作數量，以求客觀。不過，統計中的數理觀念，並不限求精確數值（Exact numbers)，如房屋幾棟，人數若干，可以做到十分正確的地步；另外一些事實，却需以近似數值（Approximate numbers）來統計，如測量身高、體重，無論器械如何精良，觀察如何細心，都無法獲得其眞值（True value）。因爲一個人的身高、體重的變異，無間分秒；器材的本身，亦隨寒暖燥濕而生毫末之差；測量之際，除光線、距離、高低等環境的影響外，觀察者的生理條件，心理狀態等，更是因人而異。積此無窮的原因，而欲得一測量的精確數值，實不可能。統計學家在此無法獲得眞值的情形下，發明出許多尋求"最近眞之值"（The most Probable value）的方法。如將許多次測量身高、體重的數值，分別相加，求其平均數，便是其中之一（註）。在統計事實的數值中，泰半屬於此類，這是統計數理方面極其重要的觀念。

㈣統計方法的工具價值 近世社會科學的進步，大部份得力於統計方法的應用；即使原屬科學範圍內的自然科學，也要藉重統計的方法，使所獲得的成果益形精密而有價值。統計方法可以說是一種科學化的工具，這種工具應用的普遍幾乎無所不包：雜亂無章的材料，須用它來整理；混淆不清的事實須用它來分析；錯綜複雜的難題，更須用它來揭發其中的含義。所以戈特（Goethe）說，"統計學治理世界"（Statistics governs the world），並非過分誇張之言。不過，我們在應用這樣工具的時候，却需相當研究，才能用之恰到好處。西洋有一句諺語，謂"數字是不會撒謊的"（Figures won't lie），其中自然含有相當的眞理，但是如果錯用了統計上的數字或方法，却也會誤入歧途。曾經有這麼一個笑話：在美國約翰哈金斯大學初收女生之時，某報謂該校女生百分之三十三又三分之一均與該校教師結婚。乍聞之間，或以爲該校教師未免過於風流；實則女生與教師結婚者僅有一人

註：根據最小二乘式（Least squares）的原理，某數若爲最近眞之值，則自此產生之舛差之方之和必爲最小值。平均數合乎此一原則，故被視爲最近眞之值之一種。

。因當時女生總數爲三人，應用百分比表明此一事實，頓成趣聞（註1）。其他容易誤用統計之處尚多，要想有效的利用這種科學的工具，還需下一番切實研究的功夫。

三、統計學的意義

㈠語源 我國所用「統計學」一詞，係由英文Statistics一字翻譯而來。此字在德文拼爲 Statistik ，法文拼爲Statistique，讀音相仿，皆由拉丁文 Status 一字演變出來。在中世紀時，Status的意義爲“政治情形”（a political state）。此外，有謂 Statistics 一字係由意大利大政治家 Statista 之名遞演而來，其詳不得而知，姑存一說。（註2）

有人考證，Statistics一字在1770年即被引用，意義仍爲研究國家的政治情形。稍後，德人E. A. W. Zimmermann 在其1787年出版之歐洲政治現勢調查（A Political Survey of the Present State of Europe）一書中，曾對Statistics一字的意義作較廣的解釋，舉凡一國的天然財富，工業和文化，以及政府的智能等政治知識，均爲統計學所研究。（註3）

㈡統計學家所下定義舉例（註4）

1. 雷翁塞（Leon Say）說：「統計學爲計數的科學」。
2. 鮑萊(A. L. Bowley)說：「統計學爲平均數的科學」。
3. 游爾（G. Udny Yule）說：「凡可量之事實而受無窮原因之影響者，皆爲統計學所研究。」

註1：數目太小的時候，不宜用百分比；否則必須與實在數目並列，以免給人謬誤的印象。詳見金國實編，統計學第一章第三節。

註2：王書林著，教育統計學第一章第4頁。

註3：Yule and Kendall, An Introduction to the Theory of Statistics, pp. XVi—XViii.

註4：美國W. F. Willcox博士於1935年曾搜集統計學家的定義，得百餘條，意見至爲紛歧，參考田克明著，統計學第1,2兩頁。

4.桑戴克（E. L. Thorndike）說：「統計學爲測量天下萬事萬物之狀況及其差異、變化、以及其相關的方法。」

5.古德（C. V. Good）編教育辭典之解釋：「統計學爲研究各種事物或其特性所發生的次數和類別，並據此加以歸納和推論的一種科學。」

㈢教育統計學界說 教育統計學爲應用各種統計方法以研究教育問題的科學。由於材料的不同，和其他各種統計學比較起來，在研究的重點和處理的方法上是頗有差別的。

四、統計學和研究工作

人類社會中所存在的問題，不啻萬千；舊問題未去，新問題已來，靡有止境。不過，並非每一種問題的解决，都須當作一種研究的工作。一般說來，獲得解决問題的知識，可有四種來源：一爲得自傳統習慣；二爲依據個人的直覺判斷；三爲順從專家的意見；四爲搜求有力的證據（註1）。簡易的問題，常可由前三者獲得解决，繁難的問題，則多有賴於最後一種客觀的知識。學術上許多問題的研究，搜求證據只是初步的工作，整理、分析和解釋的過程尤屬重要。凡是運用這一套科學方法來研究問題的工作，我們可簡稱之爲"研究工作"（Researches）。

統計學爲研究工作中最重要的一種學問和技術，也是從事研究工作者的一種主要的工具。統計學對於研究工作的貢獻，約有以下六端：（註2）

㈠記述正確 以數字符號描述事實，完整而正確，所以統計學和數學同爲科學家們所需要的一種語言。

㈡方法精密 統計的方法，縝密確定，不尚含混之詞，以求

註1：Merle W. Tate, Statistics in Education, pp. 1,2.

註2：J. P. Guilford, Fundamental Statistics in Psychology and Education, pp.3,4.

圓通。

㈢**以簡馭繁** 混亂的事實，經統計的方法整理後，清晰而有意義。

㈣**結論平實** 研究貴有結論，但結論不宜大而無當；對事實的衡量，應能表示出其程度。

㈤**預測穩妥** 以統計方法所做出的預測，不僅根據綦詳，論斷更有分寸，不事誇張，以博衆信。

㈥**輔助實驗** 無論何種實驗工作，其結果都需要統計的方法來整理，對於不易或不能控制實驗因素的問題，更需要應用統計的方法來達成研究的目的。

在教育事業當中，我們經常遇到的問題如：學制的改革，行政的效率，經費的分配，課程的實驗，成績的考查，測驗的編製以及升學和就業的指導等，在在都需要利用統計的方法來從事研究的工作。所以教育統計學已成爲一科專門的學問，從事現代教育工作的人員，對於這種科學的知識和技能，實不可或缺。

第二章 統計數列

一、數列的分類

統計中所根據的數字材料，叫做“統計數列”（Statistical series）。因分類標準的不同，各家命名不一。美國亞金與科登（Arkin and Colton）二氏在其所著的統計方法大綱中，將數列分為三類：一為次數數列，係依數字材料的大小排列而成；二為時間數列，係依材料發現的先後，排列而成；三為空間數列，係依材料在地理上的位置排列出來（註1）。在泰特（Merle W. Tate）和强生（Palmer O. Johnson）等氏所著的統計學中，都採取二分法，簡明實用，茲介紹如下（註2）。

(一)類數列 在統計的材料中，有一些事實，只能就類別或品質來區分，由此得到的各類次數，叫做“類數列”（Qualitative or categorical series）。如宗教、黨籍、性別、種族、膚色以及學校種類和職業等均屬之。

(二)量數列 凡可以數值大小或分量多少而排列的統計材料，叫做“量數列”（Quantitative series）。此類數列，又可就計算單位化分的情形分為兩種：

1.連續數列 凡統計材料的數值，在整數以下可有無窮精微之值存在而仍不失其意義者，稱為“連續數列”（Continuous

註1：Arkin and Colton著，朱君毅譯，統計方法大綱第一章；並見朱君毅編著，統計學概要第二章。在王書林著教育統計學第二章中，將數列分為秩序的與無秩序的，數量的與叙述的，和繼續的與間斷的等三類，可作參考。

註2：Merle W. Tate, Statistics in Education, pp. 20,21. Johnson and Jackson, Modern Statistical Methods, pp. 13,14.

series）。如氣温、雨量、年歲、身高、體重等均屬之(註1)。

2.間斷數列　凡統計材料的數值，只能以整數計算始有意義者，稱爲"間斷數列"，(Discrete or discontinuous series)。如房間、車輛、樹木、牛馬、人口等均屬之。

在教育和心理測量的事實中，大都屬於繼續數列：同時，爲了以少數事例代表一般現象並便於推論起見，在統計方法的運用上，我們常用同樣的方法來處理間斷數列和繼續數列各種材料。

二、數列的整理

統計材料中的原始數列，常常是許多散漫的數字，如不加以整理，甚難發現其中的含義。下面"表一"內的許多分數，便是一輝未經整理過的原始材料。

表一　一次字彙測驗的原始分數(註2)

23	27	43	57	26	43	14	45	31	49	26	27	47	37	28	45	49	55
29	39	37	33	38	34	41	34	38	40	50	30	36	54	33	42	39	49
31	51	48	27	30	14	46	18	31	40	29	37	33	50	47	31	37	24
34	24	33	41	29	42	21	32	36	42	35	42	39	(59)	42	17	29	33
16	26	34	25	19	40	35	25	45	27	31	38	48	30	41	52	34	36
(12)	40	40	22	38	34	41	51	45	34	46	34	13	28	20	28	33	33
36	38	36	18	29	40	16	34	37	41	20	25	47	44	23	35	25	28
39	32	15	30	41	20	32	37	43	44	32	36	44	35	21	37	44	19
34	37	24	38	40	37	46	38	52	35	36	22	35	39	44	37	32	53

註1：由於測量工具的限制，事實上我們所能得到的統計材料，其數值都是間斷的。故連續數列只是統計學家想像中一種合於事理的分類。

註2：材料採自Wert &others，Statistical Methods in Educational and Psychological Research，Chapter 1.

要想把這些雜亂無章的原始材料整理出個頭緒，可採取以下三個步驟：

㈠求全距 全距（Range）爲一數列中最大量數與最小量數間的距離，其值爲二者之差數。如“表一”中最高分數（即最大量數）是59，最低分數（即最小量數）是12，試求其全距。

全距＝59－12＝47

㈡定組距 將全距分成若干相等的段落，每一段落間的距離叫做“組距”（Class interval）常簡寫爲 i。組距的大小，視材料的性質和全距的大小而定。羅格（H. O. Rugg）認爲組距大小的標準，以能將數列內的全體量數，分配於10至20組數之間爲宜（註1）。組數過多則計算繁瑣，過少則易失精確，朱君毅氏謂最少亦不可次於6組。（註2）

以“表一”爲例，其全距爲47，如以5爲組距，正可分做10組（47÷5＝9⁺）。在分組時，包含最小量數的一組的起點，最好能爲組距的倍數（以0爲起點者，可以次一組爲準），以便檢查和計算。

1.組限 組距兩端的界限，叫做“組限”（Class limit）。組距的起點叫“下限”（Lower limit），簡寫爲L；其終點叫“上限”（Upper limit），簡寫爲U。

組限的寫法極不一致，艾偉氏曾歸納出九種不同的寫法如下表：（註3）

註1：參考周調陽著，教育統計學第78—80頁。

註2：朱君毅編著，統計學概要第三頁。

註3：艾偉著，高級統計學第15頁，惟該表中第四、五、六三行最末各組上下限似有誤處，應各爲90—99.99，90—99.99，90—99，如皆寫爲90—100，便各與其自身書寫系統相矛盾。同樣，艾氏所主張的第八種寫法，最後一組寫出上限100，與其創見亦相扞格。

表二　組距的各種寫法

一	二	三	四	五	六	七	八	九
0—較小於 10	0— 10以下	0— 10	0— 9.99	0—9.99	0— 9	5	0	0—
10—較小於 20	10— 20以下	10— 20	10— 19.99	10—	10— 19	15	10	10—
20—較小於 30	20— 30以下	20— 30	20— 29.99	20—	20— 29	25	20	20—
30—較小於 40	30— 40以下	30— 40	30— 39.99	30—	30— 39	35	30	30—
40—較小於 50	40— 50以下	40— 50	40— 49.99	40—	40— 49	45	40	40—
50—較小於 60	50— 60以下	50— 60	50— 59.99	50—	50— 59	55	50	50—
60—較小於 70	60— 70以下	60— 70	60— 69.99	60—	60— 69	65	60	60—
70—較小於 80	70— 80以下	70— 80	70— 79.99	70—	70— 79	75	70	70—
80—較小於 90	80 —90以下	80— 90	80— 89.99	80—	80— 89	85	80	80—
90—較小於100	90—100以下	90—100	90—100	90—100	90—100	95	90	90—100
							100	

書寫組限究以何種爲善，說法不一；即以艾氏所主張的“表二”中第八種寫法而論，艾氏認爲簡單正確，朱君毅謂其多費空間。王書林氏以爲只要明瞭了統計中數的意義，任何一種寫法均可適用，其說頗合實際。常見的組限寫法，以“表二”中第三、四、六等三種居多。筆者慣用的是第三種，以其在理論上最符合連續數列的意義，且計算時最易察知組距和組距中點的數值；同時，這種組限的形式，頗似高等數學中變數至某極限的寫法，只需把每組以上限看作極限，便不會把與其上限相等的量數歸入該組了。

2.組距中點　同組兩限間正中的一點叫做“組距中點”（Midpoint）。其數值可依下列公式求出：

$$組距中點=下限+\frac{上限-下限}{2} \quad 或$$

$$組距中點=下限+\frac{相鄰兩組之上限或下限相減}{2}$$

如“表二”中第三種組限寫法10—20一組，其

$$組距中點=10+\frac{20-10}{2}=15$$

“表二中”第四種組限寫法

10—19.99一組，其組距中點$=10+\dfrac{29.99-19.99}{2}=15$
(20—29.99)

統計數列中各個量數，在分別歸入相當的組距以後，則各組內所包含的每一量數之值，便以其所屬該組的組距中點代表之。因爲統計學家設想各組內的量數是依等差（或等距）分配於各該組距之內的，故各組距中點的數值，正是適當的代表量數，這是統計學中一項基本假設。

㈢歸類製表　將原始材料中各個量數，依照所決定的組距和組數，用劃記的辦法分別記入所應在的組內，然後寫出各組的次數，便成爲一個清晰的次數分配表。茲根據「表一」的材料，示

例如下：

表三　次數分配表製法示例

組　距	劃　記	次數
10——15	////	4
15——20	卌 ///	8
20——25	卌 卌 //	12
25——30	卌 卌 卌 卌	20
30——35	卌 卌 卌 卌 卌 卌 /	31
35——40	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌	35
40——45	卌 卌 卌 卌 卌 /	26
45——50	卌 卌 卌	15
50——55	卌 ///	8
55——60	///	3
		N=162

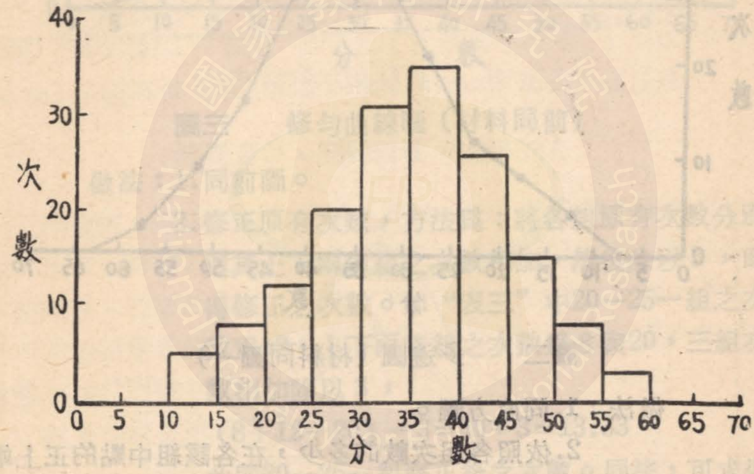
表中大寫N，為量數總次數（Number of Cases）的代表符號。

表中各組上下排列的順序，統計學家亦無一定的標準，有自兩限數值最大之組由上而下依次遞減組距而排列者；有自兩限數值最小之組由上而下依次遞增組距而排列者。筆者認為採用後一種順序較為適宜：一則書寫組限時，遞加組距單位的數值比較要方便些；再則讀表時係由上而下看起，將小的數值作起點，正是自然數的順序，數學上計算用的表式均依此例。不過，在繪製相關分佈圖時，其中上下排列的一種量數，各組距的順序，則宜採取第一種方式，即將兩限數值最小的一組，置於最下，依次遞增組距向上排列，以符合一般圖例。同時，在圖形上劃出象限以後

，表示各次數位置的正負符號，與數學上區分的象限的性質也完全一致。英國統計學家游爾（G. Udny Yule）在處理相關分佈圖上縱排的一種量數時，仍採用前述的第二種排列的順序，以致變更了數學上原有各象限的性質，似不相宜（註1）。曾與游爾合作著述的根道爾（M. G. Kendall）在其以後的研究中，已有所改正，茲不贅述（註2）。

三、次數分配的圖示法

(一)直方圖



圖一　直方圖（材料根據表三）

做法：1.以橫坐標代表分數，縱坐標代表次數，並各加適度的區分。

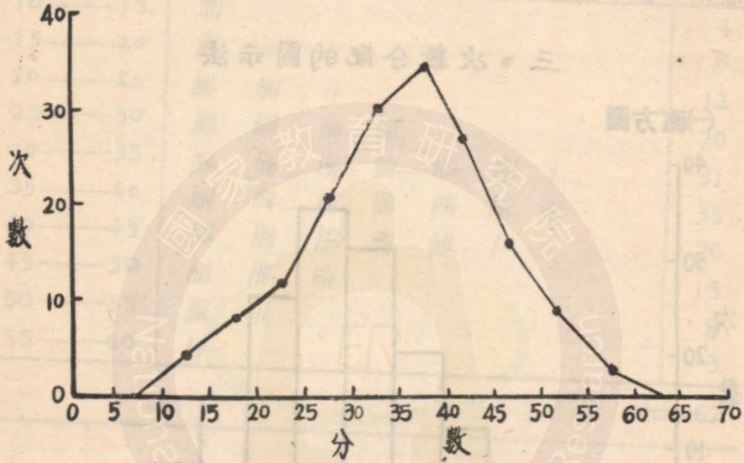
註1：G. Udny Yule, An Introducation to the Theory of Statistics, 14th ed., 1950.

註2：M. G. Kendall, The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2, 1961.

2.依據各組次數的多少，在各該組兩限上畫出相當高度的縱線。

3.以平行橫坐標的線段，分別連接各組兩限上的縱線，即告完成。

㈡多邊圖



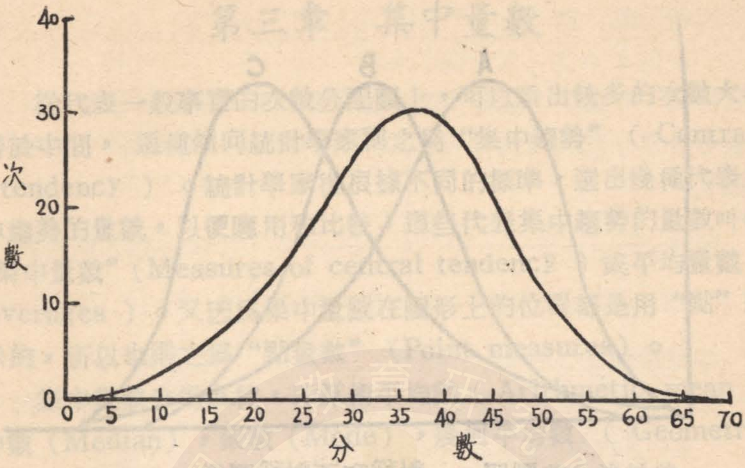
圖二　多邊圖（材料同圖一）

做法：1.同直方圖。

2.依照各組次數的多少，在各該組中點的正上端，用點標出其相當的高度。

3.以直線連接各點，並由左右兩端之點，分別延伸至相隣組的中點爲止。

㈢修勻曲線圖



圖三　修勻曲線圖（材料同前）

做法：1.同前圖。

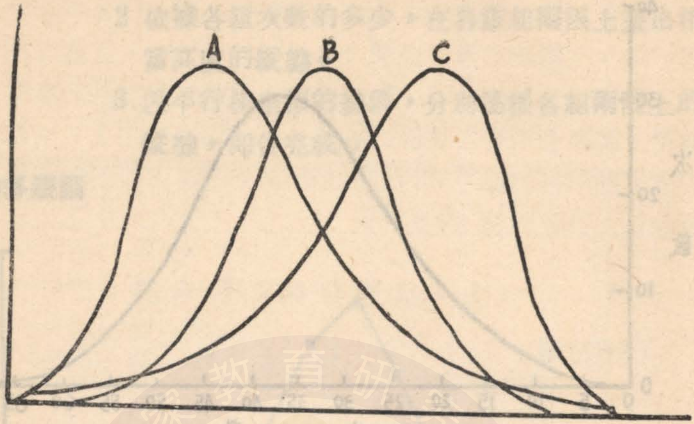
2.修正原有次數，方法爲：將各組原有次數分別與其上下兩隣組之次數相加，然後除以3，即得修正之次數。如"表三"中20—25一組之次數爲12，上下兩隣組之次數爲8與20，三組次數相加除以3，

(8+12+20)÷3=40÷3=13.33

此即20—25一組修正後之次數。同法，可求得55—60一組修正之次數爲3.67，其他各組類推。需要時更可將修正之各次數再作二次或三次之修正，方法不變。

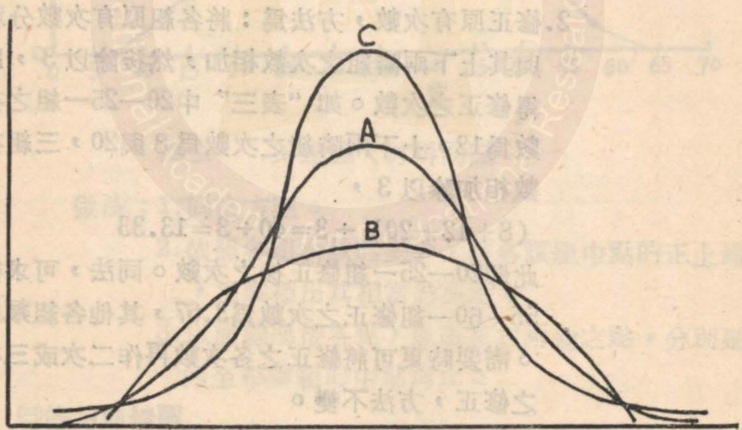
3.4.兩步驟略同圖二做法中之2，3。

㈣其他常見圖形



圖四　　對稱和不對稱圖形

A正偏圖　B對稱圖　C負偏圖



圖五　頂狀互異各式圖形

A鐘形圖（常態曲線）
B盔形圖　　C峯形圖

第三章　集中量數

從代表一般事實的次數分配圖上，可以看出較多的次數大都居於中間，這種傾向統計學家稱之為"集中趨勢"（Central tendency）。統計學家復根據不同的標準，選出幾種代表集中趨勢的量數，以便應用和比較；這些代表集中趨勢的量數叫做"集中量數"（Measures of central tendency）或平均量數（Averages）。又因為集中量數在圖形上的位置都是用"點"表示的，所以也稱之為"點量數"（Point measures）。

集中量數分為五種，即算術平均數（Arithmetic mean）中數（Median），衆數（Mode），幾何平均數（Geometric mean）和調和平均數（Harmonic mean），茲分述於後。

一、算術平均數

㈠意義　算術平均數簡稱平均數，即我們通常所瞭解的平均數。三個人身高的平均數是把三個人的身高尺寸相加的總和除以3的商數。在統計學裏，人為次數，身高的尺寸為量數，現在我們可用統計學的術語給平均數下個定義：平均數是以總次數除總量數所得的商數。

如果用符號來表示平均數的意義，通常的寫法如下：

$$M=\frac{\Sigma X}{N}$$　公式 Ia

M：平均數（Mean）的代表符號。

N：總次數。

X：代表一種量數，即 $X_1X_2X_3\cdots\cdots X_n$ 各個量數。

Σ：表示相加的符號，為一希臘大寫字母，讀如 Sigma。

平均數和全體量數有一種不變的關係，即各個量數分列減去其平均數所得的正負各差數的總和，永遠等於零。如以 x 表示

X－M的差數，則

$$\Sigma x=\Sigma(X-M)=0$$

這點意義十分重要，在許多統計公式的演證中常常用到。Σx何以會等於零？我們可先從實例中來證明。如1,2,3,4,5五數的平均數為

$M=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=\dfrac{15}{5}=3$　　各數減3的差數為

$1-3=-2,\ 2-3=-1,\ 3-3=0,\ 4-3=1,\ 5-3=2$

各差數相加：$-2+-1+0+1+2=0$　　即$\Sigma x=0$

如果改用一般的數學符號來證明，我們可從x的定義寫起：

$x=X-M$

$$x_1=X_1-M \qquad \therefore X_1=M+x_1$$
$$x_2=X_2-M \qquad \therefore X_2=M+x_2$$
$$x_3=X_3-M \qquad \therefore X_3=M+x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n=X_n-M \qquad \therefore X_n=M+x_n$$

代入公式Ⅰa

$$M=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{N}$$

$$=\frac{(M+x_1)+(M+x_2)+(M+x_3)+\cdots+(M+x_n)}{N}$$

$$\therefore NM=M+x_1+M+x_2+M+x_3+\cdots+M+x_n$$
$$=NM+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$$
$$\therefore x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=NM-NM=0$$
$$\therefore \Sigma x=0$$

(二)算法：

1.由未歸類量數中求平均數：

(1)公式：用公式Ⅰa

(2)例：設有7人考試算術的成績為62,74,71,56,83,78,96，求其平均數。

$$M=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{62+74+71+56+83+78+96}{7}=\frac{520}{7}=74.29$$

2.由已歸類量數中求平均數：

(1)組距為1的歸類算法：

A.公式：

$$M=\frac{\Sigma fX}{N} \qquad \text{公式 Ib}$$

f：代表各量數之次數（Frequency）。

其餘符號同公式 Ia。

B.例：

量數（X）	次數（f）	次數乘量數(fX)
21	1	21
24	3	72
32	4	128
45	7	315
51	5	255
67	2	134
	N=22	$\Sigma fX=925$

$$M=\frac{\Sigma fX}{N}=\frac{925}{22}=42.05$$

(2)組距大於1的歸類算法：

A普通算法：

a.公式：$M=\frac{\Sigma fMp}{N}$ 公式 Ic

Mp：代表各組之組距中點（Midpoint）。

其餘符號同前。

b.例：

組距（i）	組距中點（Mp）	次數（f）	次數×組距中點（fMp）
5—10	7.5	1	7.5
10—15	12.5	1	12.5
15—20	17.5	2	35.0
20—25	22.5	4	90.0
25—30	27.5	9	247.5
30—35	32.5	22	715.0
35—40	37.5	13	487.5
40—45	42.5	26	1105.0
45—50	47.5	28	1330.0
50—55	52.5	19	997.5
55—60	57.5	21	1207.5
60—65	62.5	14	875.0
65—70	67.5	11	742.5
70—75	72.5	5	362.5
75—80	77.5	3	232.5
80—85	82.5	2	165.0
		N＝181	ΣfMp＝8,612.5

$$M=\frac{\Sigma fMp}{N}=\frac{8612.5}{181}=47.58$$

B.簡捷算法：

a 公式：$M=M'+\left(\frac{\Sigma fx'}{N}\right)i$ 　公式 I_d

M'：假設平均數，其值以選定某組之中點計之。

x'：各量數與假設平均數之差數，以組距作單位。

即$x'=\frac{X-M'}{i}$

其餘符號同前。

公式 I_b係由公式 I_b推演而來。

$$\because\ x' = \frac{X - M'}{i}$$

$$\therefore\ ix' = X - M' \qquad \therefore X = M' + ix'$$

代入公式 I b，

$$M = \frac{\sum fX}{N} = \frac{\sum f(M' + ix')}{N} = \frac{M'\sum f}{N} + \frac{i\sum fx'}{N} \qquad (M', i \text{ 爲常數})$$

$$= M' + \frac{i\sum fx'}{N} = M' + \left(\frac{\sum fx'}{N}\right) i$$

$$(\sum f = N)$$

b.例：材料同上例，以便比較。

i = 5	f	x′	f x′
5—10	1	−8	− 8
10—15	1	−7	− 7
15—20	2	−6	−12
20—25	4	−5	−20
25—30	9	−4	−36
30—35	22	−3	−66
35—40	13	−2	−26
40—45	26	−1	−26
45—50	28	0	(−201)
50—55	19	1	19
55—60	21	2	42
60—65	14	3	42
65—70	11	4	44
70—75	5	5	25
75—80	3	6	18
80—85	2	7	14 (204)
	N = 181		$\sum$ f x′ = 3

$$M = M' + \left(\frac{\sum f x'}{N}\right)i = 47.5 + \frac{3}{181} \times 5$$
$$= 47.5 + \frac{15}{181} = 47.5 + 0.08 = 47.58$$

c.計算時注意事項：

①選定假設平均數所在之組距，大致以次數最多或次多而位置接近中間的一組爲宜，此組之組距中點即爲假設平均數之值。

②x'一行的數值，係以組距作單位的差數，由各組組距中點和假設平均數之值相減後再以組距除之而得；故假設平均數所在之組其x'爲0，應先寫出作爲計算上下其他各組組距之差的中準。實則不用依式$\left(x' = \frac{X - M'}{i}\right)$計算，按照自然數的順序挨次寫出上下各組遞增的正負組距差數即可。

③$\frac{\sum f x'}{N}$稱爲校正數，常以C表示之。由組距單位差數還原爲量數原有單位時，因C之值常有不盡小數，所以先乘後除要比先除後乘的結果更爲精確。

㈢特性：

1.平均數係由全體量數求出，爲最常用的一種集中量數。

2.各個量數與其平均數的差數，其和爲零。

3.在一般的統計材料中，平均數受抽樣的影響較小，可靠性最高。

4.僅知總次數和總量數即可求得。

5.惟受極端量數的影響較大，遇有此類事實，對所求得的平均數在解釋時須加注意，或避而不用亦可。

二、中　數

㈠意義　中數爲次數分配圖橫坐標上居中的一點，在此點上下的量數各佔百分之五十，即中數的位置，恰巧落於 $\frac{N}{2}$ 的分界點上，故有譯爲“中位數”者，亦有譯爲“中點數”者，意義皆同。

㈡算法：

1 由未歸類量數中求中數：

(1)公式：Md_n 之位置 $=\frac{N+1}{2}$　　公式Ⅱa

Md_n：中數（Median）的代表符號，亦有用 Md 者。

(2)例 1：量數爲奇數時的算法：

A.把量數依大小排列，如：

45,49,52,67,74,76,78,83,95

B.量數的總次數 $N=9$，代入公式Ⅱa，

Md_n之位置 $=\frac{N+1}{2}=\frac{10}{2}=5$

C.從量數列的任何一端，數至第五個量數74，該量數即所求之中數。

(3)例 2：量數爲偶數時的算法：

A.同上例，如就該數列最後增一98，即成偶數列。

B.量數的總次數 $N=10$，代入公式Ⅱa，

Md_n之位置 $=\frac{N+1}{2}=\frac{11}{2}=5.5$

C.以該量數列第5,6兩數相加除以2，

即 $Md_n=\frac{74+76}{2}=\frac{150}{2}=75$

由公式Ⅱa 所求得的中數，常爲一實有的量數或兩個量數的平均數。這種方法只可用於簡單的事例，且其意義與我們前邊所解釋的也有出入，所以有些統計學家如美國奧特 (Odell) 等稱由公式Ⅱa所求得的量數爲“中成績”（Mid-score），以示區別。

2. 由歸類量數中求中數：

(1)公式：

$$Md_n = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - F_b}{f_m} \right) i \qquad \text{公式Ⅱb}$$

$$Md_n = U - \left(\frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} \right) i \qquad \text{公式Ⅱc}$$

L：含有中數之組的下限。
U：含有中數之組的上限。
f_m：含有中數之組的次數。
F_a：大於中數組各組之次數和。
F_b：小於中數組各組之次數和。
其餘符號同前。

以上二公式係凱萊（Kelley）修正前人范契奈（Fechner）之公式而得，被稱爲凱萊中數公式。

(2)例：

i=5	f	算法
45—50	1	$\frac{N}{2}=22.5$
50—55	1	（中數組即第22.5個次數所在之組，由上或下數起，結果相同。）
55—60	2　$F_b=14$	將左列各數代入公式Ⅱb，
60—65	4	
65—70	6	$Md_n = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - F_b}{f_m} \right) i = 70 + \frac{22.5-14}{15} \times 5$
70—75	15 (f_m)	$= 70 + \frac{8.5}{3} = 70 + 2.83 = 72.83$
75—80	9	將左列各數代入公式Ⅱc，
80—85	4　$F_a=16$	$Md_n = U - \left(\frac{\frac{N}{2} - F_a}{f_m} \right) i = 75 - \frac{22.5-16}{15} \times 5$
85—90	3	$= 75 - \frac{6.5}{3} = 75 - 2.17 = 72.83$
	N=45	

筆者在教學經驗中，發現凱萊求中數之分式，在初學者往往誤將該二公式中計算之起點L，U 之值寫作中數組之組距中點，當係受平均數學之在前的影響；再者，此二公式選用其一即可，但究應選取何者在計算時可使公式中第二項$\left(\dfrac{\frac{N}{2}-F_b}{f_m}\right)$或$\left(\dfrac{\frac{N}{2}-F_a}{f_m}\right)$之值爲最小，初學者在計算前往往見不及此。在公式本身方面，除記憶容易錯亂外，運算上更是板滯，如公式內獨立項間的正負符號，已決定了第二項正負之值，毫無代數上運算的性能，實爲一大缺點。因此，筆者曾利用原有符號，另行創立一項公式，以代替以上二者，茲介紹如下：

(3)公式：

$$Mdn = Mdn' + \left(\frac{F_a - F_b}{f_m}\right)\frac{i}{2} \qquad \text{公式}\,\mathrm{II}_d$$

$$\left(\text{或寫爲，} Mdn = Mdn' + \frac{\frac{1}{2}(F_a - F_b)}{f_m}\,i\text{，}\right.$$

$$\left.\text{或}\quad Mdn = Mdn' + \left(\frac{F_a - F_b}{2f_m}\right) i \text{ 均可。}\right)$$

Mdn'：假設中數，其值以含有中數之組的中點計之。

其餘符號同前。

(4)例：用前例材料，以便比較。

將前例中各項數值代入公式II_d，

$$Mdn = Mdn' + \left(\frac{F_a - F_b}{f_m}\right)\frac{i}{2} = 72.5 + \frac{16-14}{15} \times \frac{5}{2}$$

$$= 72.5 + \frac{1}{3} = 72.5 + 0.33 = 72.83$$

此一公式中的第二項可視爲校正數，與前節求平均數簡捷算法公式中的第二項性質相仿，其值有正有負，隨量數的分配情形

而異；並且其絕對值往往較固定用凱萊某一公式爲小，其機遇的百分比爲75：25。此外，在一般的次數分配中，用此一公式求中數，不計算總次數亦可求得；只需先觀察一下次數分配的趨勢，以某一組次數較多的作中界，將上下各組的次數和加出（即求出F_a, F_b），然後二者相減，如其差數的絕對值小於假設中數組的次數f_m，則該組必爲中數所在之組無異；即 $|F_a - F_b| < f_m$。

此公式中最後所以寫做 $\frac{i}{2}$ 的原因，一則是想簡化該項的算法，再則乘以 $\frac{i}{2}$ 並不一定增加麻煩，可說是利弊參半。如組距爲偶數或其因數分子可以相約，算起來勢必更爲簡單，只有在這些便利全不出現的時候，才須與其因數分母相乘而已。

㈢特性：

1.中數受兩極端量數的影響甚小，其值較爲固定。
2.組距變動，中數所受影響亦小，位置較爲確定。
3.中數與各量數之差數絕對值之總和爲最小。
4.不知兩極端量數之價值而僅知其次數時，亦可求出。
5.以其非由全體量數之價值求出，精確程度不及平均數。

三、衆　數

㈠意義　衆數爲一數列中發現最多的數值；在次數分配圖上，其最高縱線在橫坐標上的一點，其值即爲衆數。

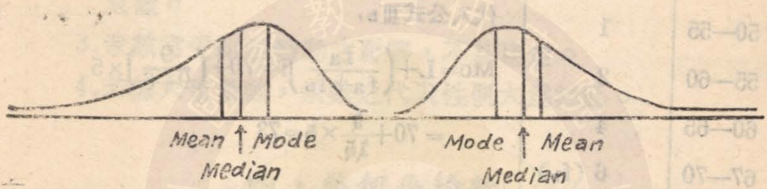
㈡算法：

1.觀察衆數：次數分配表中次數最多一組的組距中點，即爲觀察衆數（ Inspection mode ），亦稱粗略衆數（ Crude mode ）。例如前節的例題中，70—75一組的次數15爲最多，其組距中點72.5便是觀察衆數之值。
2.近似衆數：在有限事實爲測量中，推算理論衆數(Theoretical mode) 的手續非常繁複，故統計學家多棄而不

用；然觀察衆數又過於粗疏，不大可靠，於是遂有兩種近似衆數（Approximate mode）的算法：

⑴由平均數和中數求近似衆數：

英人皮而生（Pearson）根據經驗所得，發現在一般略有偏態的次數分配圖上，中數，衆數和平均數三者的位置常保持一種穩定的關係，即中數常落於由平均數至衆數之距離之三分之一點上，如下圖：



圖六　平均數、中數和衆數關係位置圖

因此皮而生得一求衆數的公式如下：

$Mo = M - 3\ (M - Mdn)$　　　　公式Ⅲa

Mo：衆數的代表符號。

其餘符號同前。

在算法上，只要求到了平均數和中數的數值，代入此公式化簡後即得，茲從略。

⑵用修正觀察衆數的方法求近似衆數：

A.公式：

$$Mo = L + \left(\frac{f_a}{f_a + f_b}\right) i \qquad \text{公式Ⅲb}$$

$$Mo = U - \left(\frac{f_b}{f_a + f_b}\right) i \qquad \text{公式Ⅲc}$$

L：衆數組之下限。

U：衆數組之上限。

f_a：大於衆數組鄰組之次數。

f_b：小於衆數組鄰組之次數。

其餘符號同前。

B.例：

i=5	f	算法
45—50	1	$L=70,\ U=75,\ f_a=9,\ f_b=6$
50—55	1	代入公式Ⅲb，
55—60	2	$Mo=L+\left(\frac{f_a}{f_a+f_b}\right)i=70+\left(\frac{9}{9+6}\right)\times 5$
60—65	4	$=70+\frac{9}{15}\times 5=73$
67—70	6 (f_b)	
70—75	15	代入公式Ⅲc，
75—80	9 (f_a)	$Mo=U-\left(\frac{f_b}{f_a+f_b}\right)i=75-\left(\frac{6}{9+6}\right)\times 5$
80—85	4	
85—90	3	$75-\frac{}{15}\times 5=73$
	N=45	

前二公式Ⅲb，Ⅲc爲美國奧特（Odell)計算近似衆數的方法，以衆數組上下兩組的次數亦多，應設法將其影響計入，以調整觀察衆數之値，方法頗爲可取；惟此二公式的性能欠佳，正如前述凱萊求中數的兩個公式一樣（參考上節第27，28兩頁），因此筆者仍利用其原有符號，創立下面一個公式以代替其二：

C.公式：

$$Mo=Mo'+\left(\frac{f_a-f_b}{f_a+f_b}\right)\frac{i}{2} \qquad \text{公式Ⅲd}$$

Mo'：假設衆數；其値以衆數組之組距中點計之。

其餘符號同前。

D.例：用前例材料，以便比較。

將前例次數分配表中各項數值代入公式Ⅲd，

$$Mo=Mo'+\left(\frac{fa-fb}{fa+fb}\right)\frac{i}{2}=72.5+\left(\frac{9-6}{9+6}\right)\times\frac{5}{2}$$

$$=72.5+\frac{3}{15}\times\frac{5}{2}=72.5+0.5=73$$

㈢特性：

1.衆數之値不受兩極端量數的影響。

2.可由一部份密集事實中求出，用以代表一般情形，最爲具體。

3.衆數常受組距變動之影響，不甚穩定。

4.若無大量量數，衆數之代表性便大爲減低。

四、幾何平均數

㈠意義　設有N個量數相乘，其積的N方根稱之爲幾何平均數，如以符號表示，即成爲下面算法中之公式。

㈡算法：

1.公式：

$$GM=\sqrt[n]{X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot\cdots\cdots X_n}\qquad\text{公式IVa}$$

GM：幾何平均數（Geometric mean）的代表符號。

$X_1,X_2,\cdots\cdots X_n$：代表各個量數。

這個公式在應用的時候，通常用對數來計算，因此又可寫爲：

$$\text{Log GM}=\frac{\log X_1+\log X_2+\log X_3+\cdots\cdots\log X_n}{N}$$

$$\text{或}\quad \log GM=\frac{\Sigma\log X}{N}\qquad\text{公式IVb}$$

幾何平均數的公式何以能够成立，我們可以從下面一個簡單的事例中，看出它的需要和來源： 如有一個城市的學生人數在1940年爲696,000，至1960年增爲2,496,000，請推算其在1950年時應有的人數。

如果用求算術平均數的方法，將1940和1960兩年的學生數相加除以2，約得1,600,000人。但是這個數字是不正確的，因爲學生數的增加正如一般人口增加的情形一樣，並非在一定期間內固定增加多少人數（算術級數），而是按照一定的比率（幾何級數）增加的，猶如複利息一樣。如果每十年間學生增加的比率不變，則上例中1950年的學生人數（以P代表）和1940年的人數的比率應該等於1960年的人數和1950時的比率，即

$$\frac{P\,1950}{696,000}=\frac{2,496,000}{P\,1950}$$

$$\therefore\quad P^2_{1950}=696,000\times2,496,000$$

$$\therefore\quad P_{1950}=\sqrt{696,000\times2,496,000}$$

請與公式Ⅳa 比較，便可看出此一基本公式的合理和需要。

2.例1：就上面的問題求該城市1950年應有學生的人數。

$$GM=\sqrt{696,000\times2,496,000}$$

$$\log\ GM=\frac{\log\ 696,000+\log\ 2,496,000}{2}$$

$$=\frac{5.8426+6.3973}{2}$$

$$=\frac{12.2399}{2}=6.1200$$

$$\therefore GM=\text{antilog}\ 6.1200=1,320,000\ (\text{人})$$

3. 例2：某學區歷年負担每一學生費用表（註1）

年　度	負担每生費用（X）	log X
1942	$45.02	1.6534
1944	50.20	1.7007
1946	60.87	1.7844
1948	75.44	1.8776
1950	95.36	1.6794
合　計	$326.89	8.9955

將表內各數代入公式Ⅳb，

$$GM=\frac{\Sigma \log x}{N}=\frac{8.9955}{5}=1.7991$$

$$\therefore \ GM=\text{antilog } 1.7991=62.97 \text{（元）}$$

4. 例3：歷次閱讀理解成績百分數表（註2）

閱讀次第	理解百分數(X)	log X
第一次	34.00	1.5315
第二次	52.00	1.7160
第三次	60.67	1.7830
第四次	69.33	1.8409
第五次	77.33	1.8884
合　計	293.33	$\Sigma \log x=8.7598$

代入公式Ⅳb，

$$GM=\frac{\Sigma \log x}{N}=\frac{8.7598}{5}1.7520$$

$$\therefore GM=\text{Antilog } 1.7520=56.50$$

註1：Merle W. Tate, Statistics in Education, p. 105.

註2：王書林著，教育統計學第 69 頁。

㈢特性：

1.同一數列的幾何平均數常較其算術平均數爲小。

2.數量中有一爲零，全體量數之積便不存在。

3.量數中有一爲負，幾何平均數便無法求得。

4.在正偏態的次數分配中，幾何平均數常比算術平均數接近於中數，此時用其代表集中趨勢既優於算術平均數，又比中數爲可靠。

五、調和平均數

㈠意義　一數列中各量數倒數之平均數之倒數，謂之調和平均數，其意義一如下面算法中的公式。

㈡算法：

1.公式：$$HM=\frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{X_n}\right)}$$ 公式Ⅴa

或 $$HM=\frac{1}{\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)}=\frac{N}{\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)}$$ 公式Ⅴb

HM：調和平均數（Harmonic mean)的代表符號。

其餘符號同前。

由於此一公式的形式在各個量數寫成倒數後，類如數學中的等差級數，而等差級數的倒數爲調和級數，調和平均數之名由此而得，國內學者亦有譯爲倒數平均數者，少算一翻，似不甚切。

2.例1：設一打字員打出400字書信一件，前200字費時20分，其速率即每分鐘打10字；後200 字費時10分，其速率即每分鐘打20字。求其每分鐘平均打字的速率。

如以求算術平均數的方法計算，將每分鐘10字的速率和每分鐘20字的速率相加除以2即得：（10＋20）÷2＝15　但此結果每分鐘平均打字的速率爲15字，顯然錯誤，因爲以此

平均速率打30分鐘應打出的字數爲$15\times 30=450$，比原題多出了50字。今試用調和平均數之公式Va求之：

$$HM=\frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{X_n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{20}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{40}}=\frac{40}{3}=13.33$$ （每分鐘打出的字數）

$13.33\times 30=399.9$　即400字，與原題相符。

3.例2：設有張、王二生各做算術題一小時，張生做出15題，即每題費時4分，王生做出10題即每題費時6分，求二人平均每做一題費時若干？

詳細的計算步驟如下表：

學　生	一小時內所做題數	每題所需分鐘（X）	$\frac{1}{X}$
張	15	4	1/4
王	10	6	1/6
	25	10 (M=5)	$\Sigma(^1/_x)=\,^1/_4+\,^1/_6$

代入公式Vb，

$$HM=\frac{N}{\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)}=\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{2}{\frac{5}{12}}=\frac{24}{5}$$

$=4.8$　　（每題平均所費分鐘數）

由表中可以看出如以算術平均數求其每題平均所需分鐘，結

果M＝5　　5×25＝125（分）較原題多出25分鐘，自屬錯誤。

調和平均數在運算方面並不困難，紛擾的地方在於和算術平均數區分問題，統計學家們所立標準，亦不一致；就筆者的經驗，在判斷題意選定方法時，凡遇由定量方面求對變量之比率者用算術平均數，反之由變量方面求對定量之比率者用調和平均數。如"例2"中張、王二生各演題一小時，共二小時，此中工作時間為定量，二人工作的速度不同，工作分量則為變量，如由定量2小時求對變量方面的平均分量，即求二人在二小時內每小時平均所做的題數，則用算術平均數，以2除（15＋10）即得，但該題意在由變量方面求對定量時間的比率，即求每題平均所用的時間，故屬於求調和平均數的問題。同理，在"例1"內字數400為定量（工作分量），打字的速度分鐘為變量，由後者求對前者的比率，性質與例2相同。

㈢特性：

1. 同一數列之調和平均數小於幾何平均數，更小於算術平均數，即　HM＜GM＜M。
2. 調和平均數與算術平均數之積的平方根，為該數列的幾何平均數。（註）
3. 量數中如有零或負數，調和平均數便無意義。

註：證明參考金國寶編，統計學第81頁。

第四章　差異量數

對於一般事物的研究，觀其同亦察其異。前章各集中量數，代表統計材料中同的一面，這一章我們將從異的一面來研究。統計學家對於表示一項事實分散情形的量數，稱之爲“差異量數”（Measures of variabilily）。在圖形上，這些代表量數都是以距離來表示的，所以又叫做“距離量數”(Distance measures)。

比較常用的差異量數，約有四種，即四分差（Quartile deviation），平均差（ Mean or average deviation ），標準差（Standard deviation）和相對差（Relative variability），以下我們將分別討論。

一、四分差

(一)意義　在次數分配圖上，如將全體量數分爲四等份，則上四分點（即七十五分點）與下四分點（即二十五分點）之距離的一半，稱做四分差(Quartile deviation or Semi-interquartile range)。

(二)算法：

1.公式：　$Q=\dfrac{Q_3-Q_1}{2}$　　公式Ⅵa

Q：四分差的符號。

Q_1：下四分點（二十五分點）。

Q_3：上四分點（七十五分點）。

$$Q_1=L_1+\left(\frac{\frac{1}{4}N-F_1}{f_1}\right)i$$　公式Ⅵb

$$Q_3=L_3+\left(\frac{\frac{3}{4}N-F_3}{f_3}\right)i$$　公式Ⅵc

L_1：含有Q_1組之下限。
L_3：含有Q_3組之下限。
F_1：小於Q_1組各組之次數和。
F_3：小於Q_3組各組之次數和。
f_1：含有Q_1組之次數。
f_3：含有Q_3組之次數。

其餘符號同前。

2.例：

i＝5	f		算　　　　法
10—15	2	$F_1=10$	$\frac{N}{4}=12.5 \quad \frac{3N}{4}=37.5$
15—20	8		$L_1=20 \quad L_3=35$ 代入公式，
20—25	6（f_1）	$F_3=35$	$Q=L_1+\left(\frac{\frac{1}{4}N-F_1}{f_1}\right)i$
25—30	12		$=20+\left(\frac{12.5-10}{6}\right)\times 5=20+\frac{2.5}{6}\times 5$
30—35	7		$=20+\frac{12.5}{6}=20+2.08=22.08$
35—40	6（f_3）		$Q_3=L_3+\left(\frac{\frac{3}{4}N-F_3}{f_3}\right)i=35+\frac{37.5-35}{6}\times 5$
40—45	4		
45—50	3		$=35+\frac{2.5}{6}\times 5=35+\frac{12.5}{6}$
50—55	1		$=35+2.08=37.08$ $\therefore Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{37.08-22.08}{2}$
55—60	1		$=\frac{15}{2}=7.5$
	N＝50		

㈢特性：

1.在常態分配圖上，上四分點和下四分點各與中數之距離相等，即$Q_3-Mdn=Mdn-Q_1$。

2.中點兩旁各百分之二十五個量數，任一量數和平均數之差，皆不超過四分差之價值。

3 四分差可免除極端量數之影響。

4.可用於測量偏態的方向和程度。

5 僅包含全體量數中間的一半，精確度較低。

二、平均差

㈠意義 一數列中各量數與其中數、平均數或衆數之差數之絕對值總和之平均數，謂之平均差（Mean or average deviation）。因衆數變動較大，故統計學家在求平均差時多以中數或平均數爲根據；又以由中數求得之值爲最小，用之更爲相宜。

㈡算法：

1.量數未歸類時的算法：

⑴公式： $MD=\frac{\Sigma|x|}{N}$ 公式Ⅶa

MD：平均差代表符號。

|x|：各量數與中數之差的絕對值，即不計正負符號。

其餘符號同前。

⑵例：

分　數	差　數（X）
60	8
62	6
65	3
68（中數）	0
71	3
74	6
78	10
N＝7	Σ|X|＝36

代入公式Ⅶa

$$MD=\frac{\Sigma|X|}{N}=\frac{36}{7}=5.14$$

2.量數已歸類時的算法：

(1)普通算法：

A.公式：$MD=\frac{\Sigma|fx|}{N}$　　公式Ⅷb

B.例：

i=10	組距中點 (MP)	f	|x|	f|x|
30—40	35	1	26.25	26.25
40—50	45	3	16.25	48.75
50—60	55	5	6.25	31.25
60—70	65	8	3.75	30.00
70—80	75	2	13.75	27.50
80—90	85	1	23.75	23.75
		N=20		$\Sigma\|fx\|=187.50$

Mdn=61.25（與各組距中點相減）

代入公式Ⅷb

$$MD=\frac{\Sigma|fx|}{N}=\frac{187.5}{20}=9.375$$

(2)簡捷算法：

A.公式：$MD=\frac{\Sigma|fx'|+C\ (F_l-F_g)}{N}\times i$　　公式Ⅷc

$|x'|$：各組組距中點與假設中數（Mdn′)之組距單位差之絕對值。

C：眞正中數與假設中數之組距單位差，即 $\frac{Mdn-Mdn'}{i}$。

F_l：小於中數各組之次數和 (l爲less之簡寫)。

F_g：大於中數各組之次數和（g爲greater之簡寫）。

其餘符號同前。

B.例：

i=5	f	lx′l	lfx′l
40—45	1	8	8
45—50	1	7	7
50—55	2	6	12
55—60	6	5	30
60—65	9 F_l=148	4	36
65—70	21	3	63
70—75	33	2	66
75—80	47	1	47
80—85	28	0	
85—90	51	1	51
90—95	68 Fg=141	2	136
95—100	22	3	66
	N=289		Σlfx′l=522

Mdn=84.38　Mdn′=82.5

$$C=\frac{Mdn-Mdn'}{i}=\frac{84.38-82.5}{5}=\frac{1.88}{5}=0.38$$

代入公式Ⅷc，

$$MD=\frac{\Sigma lfx'l+C\ (Fl-Fg)}{N}\times i$$

$$=\frac{522+0.38\ (148-141)}{289}\times 5=\frac{522+0.38\times 7}{289}\times 5$$

$$=\frac{522+2.66}{289}\times 5=\frac{524.66}{289}\times 5$$

$$=1\ 816\times 5=9.08$$

C·計算時注意事項：中數組之次數必須計入Fl或Fg

，如其組距中點（即Mdn′）小於眞正中數（Mdn)之値，則歸於Fl；大於眞正中數之値，則歸於Fg。

㈢特性：

1.根據全體量數求出，精確度較優於四分差。

2.在次數分配圖上，中數左右各一平均差之距離，約含全體量數百分之57.5。

3.在常態分配或近常態分配圖上，平均差之値約爲標準差的$\frac{4}{5}$，即$MD=0.7979\sigma$。

4.平均差計算時不分正負之値，有違數理原則，故不見重於統計學家。

三、標準差

㈠意義　一數列中各量數與其平均數之差數之平方之平均數之平方根，謂之"標準差"（Standard deviation），亦有稱之爲'均方差"（Mean square deviation）者。前者係就其功用卓著而冠以標準二字，後者蓋因其定義而得，不過有些統計學家認爲"均方差"三字未能表示出平方根之要義，似不妥當，故採用者漸少。此外，均方差計算之起點，應不限於平均數，以中數或衆數爲準，也未嘗不可。但此"根均方差"(Root-mean-square deviation) 之値，却以由平均數計算者爲最小，所以命此一種根均方差爲"標準差"，頗爲適當。

㈡算法：

1.量數未歸類時的算法：

(1)公式：

$$\sigma=\sqrt{\frac{(\Sigma X\text{-}M)^2}{N}}=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}\qquad \text{公式VIII a}$$

σ：標準差的代表符號，爲希臘一小寫字母，

讀如Sigma（Σ，讀音同，爲大寫式）。

其餘符號同前。

(2)例：

分數 (X)	差數 (X－M或 x)	差方 (x^2)
22	−1	1
20	−3	9
25	2	4
30	7	49
18	−5	25
$\Sigma X=115$	$\Sigma x=0$	$\Sigma x^2=88$

M＝23

代入公式Ⅷa，

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}=\sqrt{\frac{88}{5}}=\sqrt{17.6}=4.2$$

如一數列之平均數有小數時，用此公式計算起來非常麻煩，因此另外有一種簡便的方法，不用求平均數而直接由各量數之平方便可計算出來，玆介紹如下：

(3)公式：

$$\sigma=\frac{1}{N}\sqrt{N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2} \qquad \text{公式Ⅷb}$$

X：代表各量數。

其餘符號同前。

公式Ⅷb係由公式Ⅷa推演而來，

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X-M)^2}{N}}=\sqrt{\frac{\Sigma X^2-2M\Sigma X-\Sigma M^2}{N}}$$

$$=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\frac{2M\Sigma X}{N}+\frac{\Sigma M^2}{N}}$$

$$\because \quad \frac{\Sigma M^2}{N} = \frac{NM^2}{N} = M^2, \quad 又M = \frac{\Sigma X}{N} \text{（定義）}$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - 2\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)\left(\frac{\Sigma X}{N}\right) + \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{N}\sqrt{N(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2}$$

(4)例：以上兩種算法之比較。(註)

公式 VIIIa 之算法			公式 VIIIb 之算法	
X IQ	x (IQ－Mean	x^2 IQ)	X	X^2
85	−8.61	74.1321	85	7,225
84	−9.61	92.3521	84	7,056
91	−2.61	6.8121	91	8,281
100	6.39	40.8321	100	10,000
81	−12.61	159.0121	81	6,561
106	−12.39	153.5121	106	11,236
88	−5.61	31.4721	88	7,744
82	−11.61	134.7921	82	6,724
105	11.39	129.7321	105	11,025
102	8.39	70.3921	102	10,404
106	12.39	153.5121	106	11,236
101	7.39	54.6121	101	10,201
81	−12.61	159.0121	81	6,561
94	.39	.1521	94	8,836
114	20.39	415.7521	114	12,996
88	−5.61	31.4721	88	7,744
87	−6.61	43.6921	87	7,569
90	−3.61	13.0321	90	8,100
總　計	0.02	1,764.2778	1,685	159,499

註：材料採自Merle W. Tate, Statistics in Education,p.144.

$M=93.61$, $N=18$,

代入公式Ⅷa，

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}=\sqrt{\frac{1,764.2778}{18}}$$

$$=\sqrt{98.01543}$$

$$=9.90$$

代入公式Ⅷb，

$$\sigma=\frac{1}{N}\sqrt{N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2}$$

$$=\frac{1}{18}\sqrt{18(159,499)-(1,685)^2}$$

$$=\frac{1}{18}\sqrt{31,753}$$

$$=9.90$$

2.量數己歸類時的算法：

(1)普通算法：

A.公式：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(X-M)^2}{N}}=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}} \qquad \text{公式Ⅷc}$$

B.例：材料爲54個軍事甲種測驗的成績。（註）

$i=5$	Mp	f	x	f x	f x^2
125—130	127.5	2	−44.07	−88.14	3884.33
130—135	132.5	0	....	....	....
135—140	137.5	2	−34.07	−68.14	3221.53
140—145	142.5	1	−29.07	−29.07	845.06
145—150	147.5	1	−24.07	−24.07	579.36
150—155	152.5	4	−19.07	−76.28	1454.66
155—160	157.5	6	−14.07	−84.42	1187.79
160—165	162.5	4	−9.07	−36.28	329.06
165—170	167.5	3	−4.07	−12.21	49.69
170—175	172.5	3	.93	2.79	2.59
175—180	177.5	8	5.93	47.44	281.32
180—185	182.5	3	10.93	32.79	358.39
185—190	187.5	10	15.93	159.30	2537.65
190—195	192.5	2	20.93	41.86	876.13
195—200	197.5	4	25.93	103.93	2689.46
200—205	202.5	1	30.93	30.93	956.66
		$N=54$			$\Sigma fx^2=18,353,88$

註：材料採自葛雷德著，朱君毅譯，心理與教育之統計法，pp.30,31.

代入公式Ⅷc，

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}}=\sqrt{\frac{18,353.88}{54}}=18.44$$

(2)簡捷算法：

A.公式：

$$\sigma=i\sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fx'}{N}\right)^2}$$

$$=i\sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{N}-C^2} \qquad \text{公式Ⅷd}$$

$$\text{或 } \sigma=i\sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fx'}{N}\right)^2}$$

$$=\frac{i}{N}\sqrt{N\Sigma fx'^2-(\Sigma fx')^2} \qquad \text{公式Ⅷe}$$

x'：各量數與假設平均數之組距單位差。

C：校正數$=\frac{\Sigma fx'}{N}$。

公式Ⅷc係由公式Ⅷa推演而來，

已知：①x'爲各量數與假設平均數之差數，以組距作單位；

即 $x'=\frac{X-M'}{i}\ \left(=\frac{\Sigma fx'}{N}\right) \qquad \therefore X=M'+ix'$

②C爲校正數，即M和M'之差數，以組距作單位；

即 $C=\frac{M-M'}{i} \qquad \therefore M=M'+ic$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(X-M)^2}{N}} \qquad \text{(公式Ⅷa)}$$

$$\sigma^2=\frac{\Sigma f(X-M)^2}{N}=\frac{\Sigma f(M'+ix'-M'-ic)^2}{N}$$

$$=\frac{\Sigma f(ix'-ic)^2}{N}=\frac{i^2\Sigma f(x'-c)^2}{N}$$

$$=i^2\times\frac{\Sigma f(x'^2-2x'c+c^2)}{N}$$

$$=i^2 \times \frac{\Sigma fx'^2 - 2C\Sigma fx' + C^2\Sigma f}{N}$$

$$=i^2 \times \left(\frac{\Sigma fx'^2}{N} - 2C^2 + C^2\right) \qquad \left(C = \frac{\Sigma fx'}{N},\ \Sigma f = N\right)$$

$$=i^2 \times \left(\frac{\Sigma fx'^2}{N} - C^2\right)$$

$$\therefore\ \sigma = i\sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{N} - C^2}$$

B.例：材料同上例。

i＝5	f	x′	fx′	fx′²
125—130	2	−8	−16	128
130—135	0	−7	0	0
135—140	2	−6	−12	72
140—145	1	−5	−5	25
145—150	1	−4	−4	16
150—155	4	−3	−12	36
155—160	6	−2	−12	24
160—165	4	−1	−4 (−65)	4
165—170	3	0		
170—175	3	1	3	3
175—180	8	2	16	32
180—185	3	3	9	27
185—190	10	4	40	160
190—195	2	5	10	50
195—200	4	6	24	144
200—205	1	7	7 (109)	49
	N＝54		Σfx′＝44	Σfx′²＝770

代入公式Ⅷd，

$$\sigma = i\sqrt{\frac{\sum f x'^2}{N} - C^2}$$

$$= 5\sqrt{\frac{770}{54} - \left(\frac{44}{54}\right)^2} = 5\sqrt{\frac{770}{54} - .6639}$$

$$= 5\sqrt{14.2593 - .6639} = 5\sqrt{13.5954}$$

$$= 5 \times 3.687 = 18.44$$

3.平方根的求法：

初學統計的人，如非過去數學基礎良好，在計算標準差的當中，常為開方的問題所困擾，茲特介紹幾種求平方根分方法，以供參考：

(1)利用平方及平方根表　經常從事計算工作的人，大都利用這類現成的表以代替實際的計算，如巴魯氏的"平方、立方、平方根、立方根及倒數表"（Barlow's Table of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots and Reciprocals），其第四版多達258 頁，凡12500 以下各數的平方和平方根等都可查到，如有一冊在手，自然便省去許多麻煩。

一般統計書籍後面所附的平方及平方根表，所包含的數字多在1000以內（如本書附錄中表六），如能善於利用，已可滿足一般的需要，茲舉例如下：

$$\sqrt{0.7786} = ?$$

a.將小數點後移 6位，得778600。

b.由本書附錄表六平方一行數值中，查出大於和小於778600二鄰數值爲777924和779689，即

$777924 < 778600 < 779689$

$\therefore \sqrt{777924} < X < \sqrt{779689}$，即

$882 < X < 883$

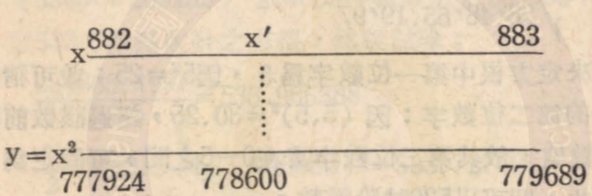
c. 因778600較近於777924，如所求平方根具有三位數字即可，則所求之X在882 一數中適當的位置加上小數點後即得，$X = 0.882$。

d. 如希望得到四位數字的平方根，可由補插法（Interpolation）求之：

$$X' = 882 + \frac{778600 - 777924}{779689 - 777924} = 882 + \frac{676}{1765}$$

$$= 882 + 0.4 = 882.4$$

補插法係按比例於二數之間插入所需要的數值，以補原表不足之處，如下圖：



e. 將小數點移至適當的位置即得所求：

$$\sqrt{0.7786} = 0.8824$$

(2)利用對數表　凡四位以內的數字用對數表（如本書附錄表五）求其平方根，也很方便，超過四位的數字，便需用補插法，手續麻煩，用之並不經濟，茲就前例四位以內的數字，演算如下：

$$\sqrt{0.7786} = ?$$

$$\text{Log}\sqrt{0.7786} = \frac{1}{2}(0.8913 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(1.8913 - 2) = 0.9457 - 1$$

$$\text{Antilog}(0.9457 - 1) = 0.8824$$

$$\therefore \sqrt{0.7786} = 0.8824$$

(3)試用連除法　在有計算機可用的時候，以連除法求一數的平方根，可能是最容易和最快的方法；在僅有鉛筆和紙而沒有其他計算輔助工具可用的時候，以連除法求平方根，有些統計學家認爲仍是一種最好的方法，特別是對於不善死記公式的人，這種方法確有可取之處，試舉例演算如下：

$$\sqrt{284865.1997} = ?$$

a.以小數點爲準將全數每兩位一節分好，如

$$\sqrt{28'48'65.19'97}$$

b.决定方根中第一位數字爲5，因$5^2=25$；並可猜測方根的第二位數字：因$(5.5)^2=30.25$，超過該數前四位的數值，故其第二位數字當在0—5之間，可假定爲2，至此，即可以520試除該數。

c.以第一次估計之平方根試除該數：

$$\frac{284865.1997}{520} = 547.82$$

d.以上式中除數及商數相加除以2，作爲第二次估計之平方根，即

$$\frac{1}{2}(520+547.82) = 533.91$$

e.以新估得之方根第二次試除，

$$\frac{284865.1997}{533.91} = 533,5454$$

f.以2除上式中除數及商數之和，作爲第三次估計之平方根，即

$$\frac{1}{2}(533.91+533.5454) = 533.7277$$

g.以第三次估得之平方根試除，

$$\frac{284865.1997}{533.7277}=533.7276$$

在以上各式中，僅試除三次便可得到六位正確數字的平方根，如繼續試除，其正確的位數每次將增加一倍，即

當除數與商數有N位數字相同時，以二者平均之值再除，所得之商將具有2N位數字正確的平方根。

(4)並用平方及平方根表與連除法　利用平方及平方根表查得粗略之方根數值，再加合理的估計，然後試除，常可不待連除便能得到相當正確的平方根。茲仍用前例演算如下：

$\sqrt{284865.1997}=?$　經查表得 $(533)^2=284089$；

$(534)^2=285156$，284865一數較近於285156，因此，可以533.5作為估計之方根，然後試除：

$$\frac{284865.1997}{533.5}=533.955388$$

$$\frac{1}{2}\ (533.5+533.955388)=533.72769$$

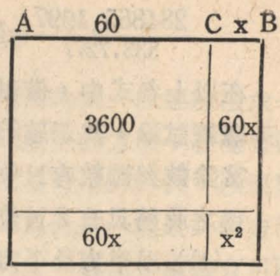
至此，僅用一次試除和平均估計之值，即可得到七位正確數字的平方根，其省時省力可知。

(5)以算術方法直接開方　這種方法在計算方面要比連除法簡單一些，只是計算的步驟既難於瞭解，又容易忘記，因此有許多人並不欣賞這種方法。不過，在僅有鉛筆和紙可以供作計算的情形下，這是惟一面對問題直接運用算術方法求得平方根的正規途徑，茲舉一例並詳細闡釋如下：

設一正方形的面積為4531（任何單位均可），試求其邊長。（4531因為不是一個極其完整的正方形的面積，故其邊長也只能求得個約數，但仍可達到任何精確的程度。）

4531的平方根，其第一位數字很容易看出為6，設其方根為60＋X，其面積可由圖示中分寫如下：

$$3600+60X+60X+X^2=4531$$
$$120X+X^2=931$$
$$X(120+X)=931$$
$$X=\frac{931}{120+x}$$



X之值當稍小於$\frac{931}{120}$，　$\frac{931}{120}$之估計值爲 7 。

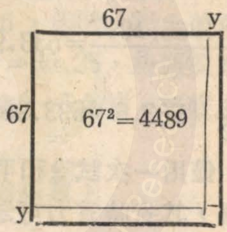
但　$X(120+X)=7(127)=889$，　　$889<931$，所以X應大於 7，

$\sqrt{4531}$　應大於$60+7=67$，如下圖：

$931-889$ 或 $4531-4489=42$

即，　$67y+67y+y^2=42$

$y\ (134+y)\ =42$



$y=\frac{42}{134+y}$，　$\frac{42}{134}$之估計值爲0.3

$y\,(134+y)=0.3(134.3)=40.29$

至此，該正方形邊長之估計值爲　$60+7+0.3=67.3$

但$42-40.29=1.71$，餘數爲尚未計入的面積，照前法可再求得平方根中次一位的數值，如此循環，可求得任何精確程度的方根。在演算中，圖形非屬必要，只是幫助瞭解其步驟而已。

以上用算術方法開方的步驟，可總括如下：

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad =67.312 \\
 & \quad\quad\quad 4531\overline{)60+7+.3+.01+.002} \\
\text{試除數}=2(60)=120 & 60^2=\underline{3600} \\
930\div 120=7+ & \quad\quad\quad 931 \\
\text{試除數}=2(67)=134 & 7(127)=\underline{889} \\
42\div 134=.3+ & \quad\quad\quad 42.00 \\
\text{試除數}=2(67.3)=134.6 & .3(134.3)=\underline{40.29} \\
1.71\div 134.6=.01+ & \quad\quad\quad 1.7100 \\
\text{試除數}=2(67.31)=134.62 & .01(134.61)=\underline{1.3461} \\
.3639\div 134.62=.002+ & \quad\quad\quad .363900 \\
 & .002(134.622)=\underline{.269244}
\end{array}
$$

將上式中所有不必要的符號除去後，即成為下面通常所應用的最簡單的形式：

$$
\begin{array}{ll}
 & \;\;6\;\;7.\;3\;\;1\;\;2\;\;7 \\
 & \sqrt{45'31.00'00'00'00} \\
 & 36 \\
 & \;\;931 \\
7(127) & \;\;\underline{889} \\
 & \;\;\;4200 \\
3(1343) & \;\;\;\underline{4029} \\
 & \;\;\;\;17100 \\
1(13461) & \;\;\;\;\underline{13461} \\
 & \;\;\;\;\;363900 \\
2(134622) & \;\;\;\;\;\underline{269244} \\
 & \;\;\;\;\;\;9465600 \\
7(1346247) & \;\;\;\;\;\;\underline{9423729}
\end{array}
$$

上述例證，係美國統計學家華克氏（H. M. Walker）對於以算術方法直接開方的說明，可謂十分詳盡；惟其計算的步驟，確屬不易記憶。筆者曾以二項式定理說明開方的法則，並藉此二項式平方的簡單公式幫助初學者記憶開方的步驟，效果甚好，茲簡介如下，以供參考：

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
&= \underline{a^2+b(2a+b)}
\end{aligned}
$$

開方的第一位數字為 a，次一位數字為 b；求第三位數字時，前兩位數字為 a，第三位為 b，如此類推。惟在計算2a+b 時

，2a應10倍之，即在其積後加0 ，因爲B爲次一位的方根，前一位數字自爲其10倍，試用前例計算如下：

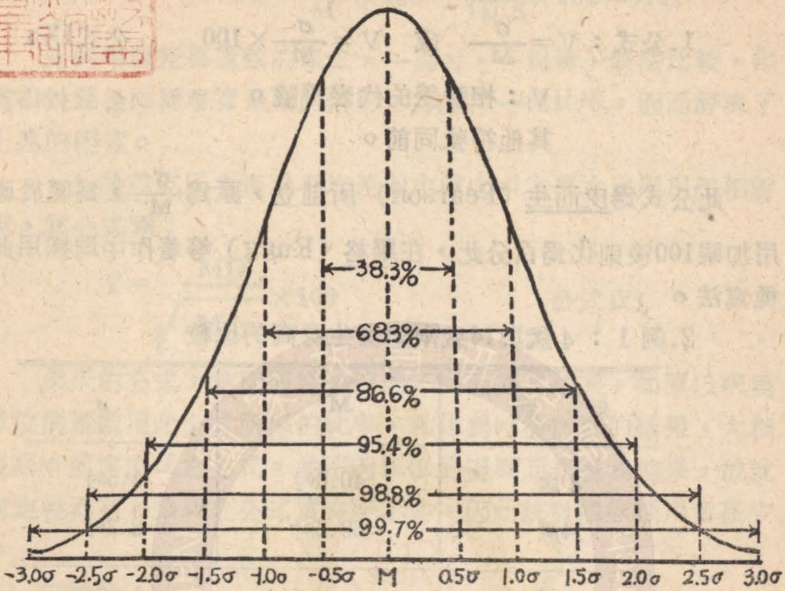
```
                          6  7. 3  1  2  7
                        ) 45′31.00′00′00′00
   6²                     36
2×60=120                   9 31
       7
     127                   8 89
2×670=1340                  42 00

        3
     1343                   40 29
                            1 71 00
2×6730=13460
          1
      13461                 1 34 61
3×67310=134620               36 39 00
           2
      134622                 26 92 44
2×673120=1346240           9 46 56 00
             7
       1346247             9 42 37 29
```

上式中除第一位數字6 用 a^2 計算外，以下各位數字，皆依 $(2a+b)\times b$ 一式求之，方法至爲單純；熟練後算式左端的數字，大半都可以省去不寫，而用心算代替，以求節省時間。

㈢特性：

1. 標準差係根據全體量數求出，其精確度優於平均差。
2. 標準差受取樣變動之影響甚小。
3. 在同一次數分配中，標準差之值常大於平均差，而平均差之值又大於四分差。
4. 除全距外，標準差所受兩極端量數的影響，較其他差異量數爲大。
5. 若分配爲常態，各正負標準差間所包括全體量數的百分比如下圖：



圖七　各正負標準差間面積的百分比

四、相對差

㈠意義　前面所討論過的幾種差異量數如四分差、平均差和標準差等在用於比較各種事實或成績的用途上，常常受到測量單位不同的限制而無法比較；即使測量單位相同，在兩種事實的平均數大小懸殊的情形下，用前面幾種差異量數直接比較，其結果常無參考的價值，這些地方我們可以從下面"算法"部份的事例中覺察出來。為了解决上面的問題，統計學家利用各種分配中的差異量數（通常用標準差）與其集中量數（通常用平均數）的比率作為比較各種事實或成績差異情形的標準，這種方法謂之相對差（Relative variability）或差異係數（Coefficient of variation）；對於前面的幾種差異量數，則稱為絕對差數或絕對差異量數（Absolute variability）。

㈡算法：

1.公式：$V=\frac{\sigma}{M}$ 或 $V=\frac{\sigma}{M}\times 100$ 公式IXa

V：相對差的代表符號。

其他符號同前。

此公式爲皮而生（Pearson）所創立，原爲$\frac{\sigma}{M}$，爲便於應用加乘100後則化爲百分比，在羅格（Rugg）等著作中均採用此種寫法。

2.例1：4歲與14歲兩組女生身高的比較

組　別	M	σ
4歲	40.0吋	1.5吋
14歲	62.6吋	2.2吋

代入公式IXa，$V_1=\frac{\sigma}{M}\times 100=\frac{1.5}{40}\times 100=3.75$(4歲組)

$V_2=\frac{\sigma}{M}\times 100=\frac{2.2}{62.6}\times 100=3.51$(14歲組)

由此例中可知在兩組測量結果之平均數大小懸殊時，如用絕對差異量數比較，1.5σ與2.2σ約爲2：3，但化爲相對差後則兩組之差異情形大致相若，自較合理。

3.例2：同組學生身高體重之比較

項　目	M	σ
身高	66.2吋	4.7吋
體重	141.5磅	9.5磅

代入公式IXa，$V_h=\frac{\sigma}{M}\times 100=\frac{4.7}{66.2}\times 100=7.1$

$$V_W=\frac{\sigma}{M}\times 100=\frac{9.5}{141.5}\times 100=6.71$$

此例中原差異量數的單位，一爲吋，一爲磅，無法比較，化爲相對差後兩種事實差異的情形，都變作一種比率，因而解决了上述的困難。

4.桑戴克氏主張以平均差與中數之平方根之比率用作相對差，其公式爲：

$$V=\frac{MD}{\sqrt{Mdn}}\times 100 \qquad \text{公式IX}_b$$

桑氏的公式，常因所採單位的不同而異其結果，如原以呎爲單位的量數用此公式所得的比率，和化爲吋後計算的結果，大相逕庭。前述皮氏之公式，並不因單位的變異而影響其結果，故就穩定性而言，桑氏之公式實有所不逮，因此統計學家採用者甚少。

㈢特性：

1.相對差爲一種比率，可用於比較單位不同的各種量數的差異情形。
2.如一分配之相對差大於百分之35時，則其平均數便非一適當的代表量數。
3.如一分配之相對差小於百分之5時，則表示所研究的事實，有選擇欠當或控制過嚴之嫌。
4.比較兩種事實的相對差時，其計算的起點（零點）必須一致，否則將得不到正確的結果。玆以某地全年的溫度統計爲例，以攝氏與華氏所定零點的不同，同樣的氣溫，其相對差却極其懸殊，如下表：

	華氏	攝氏
平均數	59	15
標準差	18	10
相對差	30.5	66.7

在教育的事實如智力和作業等，我們都無法確定其零點，因此更無法依照零點規定出適當的計算起點，所以相對差的應用範圍實極其有限；同時在解釋其結果時應特別小心，對於測量的工具尤應注意。

第五章　相關

一、相關的意義

宇宙間的事物，孤立者少，關聯者多，如雨量與收穫的豐嗇，治亂與物價的漲落，智力與學習的速度，以及破碎的家庭與問題青少年的增減等，莫不息息相關。如果我們能够設法抽繹其關係，不僅有助於目前現象的瞭解和控制，並可收到鑒往知來的效果。

前述各種事例間的關係，如果以數字表示，將更客觀。凡兩種量數之消長或共變關係，統計學家稱爲相關（Correlation）。若兩種量數消長的趨勢相同或共變的方向一致者，謂之正相關（Positive correlation）；消長情形相反或共變方向異端者，謂之負相關（Negative correlation）；消長情形不一或共變方向無定者視爲無相關（No correlation）。

表示相關程度的數字，叫做相關係數（Coefficient of correlation），通常以 r 表示之，其值在±之間。麥柯爾（W. A. McCall）就 r 絕對值之大小，將相關的程度分爲三級，其標準如下：

低相關——r 之值由 0 至 ±0.40

顯相關——r 之值由 ±0.40 至 ±0.70

高相關——r 之值由 ±0.70 至 ±1.00

羅格（Rugg）根據自己的經驗，謂在教育測量中，其相關係數能達到0.70以上者甚少，故認爲 r 之值在0.60以上者，即可視爲高度之相關。

二、積差相關

皮而生求相關係數的方法，係根據兩種量數各與其平均數之差數乘積之平均數求得，故稱爲積差相關（Product-moment correlation)。此法計算精密，應用甚廣，玆分普通算法與分佈圖算法兩種闡述如下：

㈠普通算法：

1.公式：$r=\frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y}$ 公式Xa

或 $r=\frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$ 公式Xb

r：積差相關係數之代表符號。

x：X量數與其平均數之各個差數，

即 $x=X-Mx$

y：Y量數與其平均數之各個差數

即 $y=Y-My$

σ_x：X量數之標準差。

σ_y：Y量數之標準差。

其餘符號同前。

公式Xa 爲積差相關中的基本公式。根據前述積差相關係數的定義，其爲兩種量數積差的平均數，即$\frac{\sum xy}{N}$；但 x，y 兩種差數的單位不同，故宜各以其標準差計算爲妥，即$\frac{x}{\sigma_x}$，$\frac{y}{\sigma_y}$，如此積差相關係數的公式便可寫爲：

$$r=\frac{\sum\frac{x}{\sigma_x}\frac{y}{\sigma_y}}{N}=\frac{\frac{\sum xy}{\sigma_x\sigma_y}}{N}=\frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y} \quad \text{(即公式Xa)}$$

$$\text{但}\ \sigma_x=\sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}\ ,\quad \sigma_y=\sqrt{\frac{\sum y^2}{N}}\ ,$$

$$\therefore r=\frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y}=\frac{\sum xy}{N\sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}\sqrt{\frac{\sum y^2}{N}}}=\frac{\sum xy}{N\sqrt{\frac{(\sum x^2)(\sum y^2)}{N^2}}}$$

$$=\frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} \quad \text{(即公式Xb)}$$

2. 例：

學生	X	Y	x	y	x^2	y^2	xy
甲	13	11	+5.5	+3	30.25	9	+16.5
乙	12	14	+4.5	+6	20.25	36	+27.0
丙	10	11	+2.5	+3	6.25	9	+7.5
丁	10	7	+2.5	−1	6.25	1	−2.5
戊	8	9	+0.5	+1	0.25	1	+0.5
己	6	11	−1.5	+3	2.25	9	−4.5
庚	6	3	−1.5	−5	2.25	25	+7.5
辛	5	7	−2.5	−1	6.25	1	+2.5
壬	3	6	−4.5	−2	20.25	4	+9.0
癸	2	1	−5.5	−7	30.25	49	+38.5
$N=10$	$\Sigma X=75$	$\Sigma Y=80$	$\Sigma x=0.0$	$\Sigma y=0$	$\Sigma x^2=124.50$	$\Sigma y^2=144$	$\Sigma xy=102.0$
	$M'_x=7.5$	$M'_y=8.0$					

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{124.50}{10}}=\sqrt{12.450}=3.528$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{144}{10}}=\sqrt{14.4}=3.795^{-}$$

代入公式Xa，

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}=\frac{102.0}{10\times3.53\times3.79}=\frac{102.0}{133.90}=0.76$$

代入公式Xb，

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}=\frac{102.0}{\sqrt{124.5\times144}}=\frac{102.0}{\sqrt{17,968.0}}$$

$$=\frac{102.0}{133.90}=0.76$$

㈡分佈圖（Scatter diagram）算法：

1.公式：

$$r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y}{\sigma_x\ \sigma_y}\qquad\text{公式Xc}$$

$$\text{或}\ r=\frac{N\Sigma x'y'-\Sigma fx'.\Sigma fy'}{\sqrt{N\Sigma fx'^2-(\Sigma fx')^2}\sqrt{N\Sigma fy'^2-(\Sigma fy')^2}}\qquad\text{公式Xd}$$

x'：X量數與其假設平均數之差數，即$x'=X-M'_x$

y^1：Y量數與其假設平均數之差數，即$y'=Y-M'_y$

C_x：X量數假設平均數之校正數，即$C_x=\frac{\Sigma fx'}{N}$

C_y：Y量數假設平均數之校正數，即$C_y=\frac{\Sigma fy'}{N}$

其餘符號同前。

公式Xc和Xd皆由Xa推演而來：

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}\qquad\text{（公式Xa）}$$

設 $M_x=M_x'+C_x$，　　$M_y=M'_y+C_y$，

　$x'=X-M'_x$，　　$y'=Y-M'_y$，

則 $x=X-M_x=X-M'_x-C_x=x'-C_x$，

　$y=Y-M_y=Y-M'_y-C_y=y'-C_y$，

∴ $x'=x+C_x$，　　$y'=y+C_y$，

$\therefore\ \Sigma x'y' = \Sigma(x+C_x)(y+C_y) = \Sigma xy + C_y\Sigma x + C_x\Sigma y + \Sigma C_x C_y$

但 $\Sigma x = 0$，$\Sigma y = 0$，$\therefore \Sigma x'y' = \Sigma xy + \Sigma C_xC_y$，

即 $\Sigma xy = \Sigma x'y' - \Sigma C_xC_y$

代入公式Xa，

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{\Sigma x'y' - \Sigma C_xC_y}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{\frac{\Sigma x'y'}{N} - C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y} \quad \text{(即公式Xc)}$$

又 $$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(X-M_y)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{N} - C_x^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx'}{N}\right)^2} = \frac{1}{N}\sqrt{N\Sigma fx'^2 - (\Sigma fx')^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma f(Y-M_y)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma fy^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma fy'^2}{N} - C_y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fy'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fy'}{N}\right)^2} = \frac{1}{N}\sqrt{N\Sigma fy'^2 - (\Sigma fy')^2}$$

代入公式Xc，

$$r = \frac{\frac{\Sigma x'y''}{N} - C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{\Sigma x'y'}{N} - \left(\frac{\Sigma fx'}{N}\right)\left(\frac{\Sigma fy'}{N}\right)}{\frac{1}{N^2}\sqrt{N\Sigma fx'^2 - (\Sigma fx')^2}\sqrt{N\Sigma fy'^2 - (\Sigma fy')^2}}$$

$$= \frac{N\Sigma x'y' - \Sigma fx' \cdot \Sigma fy'}{\sqrt{N\Sigma fx'^2 - (\Sigma fx')^2}\sqrt{N\Sigma fy''^2 - (\Sigma fy')^2}} \quad \text{(即公式Xd)}$$

2.例：智力測驗與算術測驗成績之相關(註)

註：分佈圖之材料採自 G.A.Ferguson, Statistical Analysis in Psychology and Education, p.95.

X 智力測驗成績

Y 算術測驗成績

Y \ X	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80	f_y	y'	fy'	fy'^2	$\Sigma x'y'$
50—60						1^{2}	2^{6}	1^{4}	4	3	12	36	36
40—50					6^{6}	3^{6}	3^{9}	1^{4}	13	2	26	52	50
30—40			1^{-1}	4^{0}	9^{9}	3^{6}			17	1	17 (55)	17	14
20—30		3^{0}	5^{0}	8^{0}	7^{0}	1^{0}			24	0			
10—20	2^{-6}	4^{-8}	4^{-4}	3^{0}	3^{3}				16	−1	−16	16	15
0—10	2^{-6}	2^{-4}	1^{-1}	1^{0}					6	−2	−12 (−28)	24	22
fx	4	9	11	16	25	8	5	2	80		27 ($\Sigma fy'$)	145 ($\Sigma fy'^2$)	137 ($\Sigma x'y'$)
x'	−3	−2	−1	0	1	2	3	4					
fx'	−12	−18	−11(−41)		25	16	15	8 (64) = 23($\Sigma fx'$)					
fx'^2	36	36	11		25	32	45	32 = 217($\Sigma fx'^2$)					

代入公式Xd，

$$r=\frac{N\Sigma x'y'-\Sigma fx'\cdot\Sigma fy'}{\sqrt{N\Sigma fx'^2-(\Sigma fx')^2}\sqrt{N\Sigma fy'^2-(\Sigma fy')^2}}$$

$$=\frac{80\times137-23\times27}{\sqrt{80\times217-(23)^2}\sqrt{80\times145-(27)^2}}=0.764$$

3. 計算時注意事項：

(1) 選定X，Y兩種量數假設平均數之組距後，用粗線格出，並在兩組內各次數之右上方記以0，以醒眉目，而防誤計。

(2) 次以X數量假設平均數一組（如上圖30－40一組）爲準，以左右相當之正負組距差乘圖內各組之次數，並將其積分別記於右上角，如上圖內第一列最右端之次數爲1（70－80一組)其X數量之組距差爲4， $1\times4=4$，記於1之右上角；又如圖中左下角一格內之次數爲2，其X量數之組距差爲－3，$2\times(-3)=-6$，亦記於右上角，其他各格內之次數均仿此計算。

(3) $\Sigma x'y'$ 乘積之計算方法爲：將圖內各列次數右上角之數字用心算依次相加，正負值相消，每列最後之和乘以相當之Y量數一行之組距差即得。如圖內第一列各格內右上角之數字爲$2+6+4=12$，乘以相當Y量數之組距差3，得36，寫在 $\Sigma x'y'$ 一行下面即可；又如第三列各格內右上角之數字爲 $-1+9+6=14$，其Y量數組距差爲1，相乘仍爲14，此即該列 $\Sigma x'y'$ 之積，其餘各列算法相同。

(4) 其他各項算法簡易，不難從例題中察知。

三、等級相關

由等級中求一組個人兩種成績的相關方法，稱爲等級相關（

Rank correlation)。等級相關雖然沒有積差相關那樣精密，但是在人數較少或某些成績便於以等級評定時，均宜以等級（如原爲分數則化爲等級）計算其相關係數。等級相關爲司畢門（Spearman）所創立，計算方法有二，茲分述如下：

(一)等級計差法（Method of rank-differences）：

1.公式：

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} \qquad \text{公式XIa}$$

ρ：等級計差相關係數之符號，爲一希臘小寫字母，讀如Rho。

D：X,Y兩種量數等第之差數。

其餘符號同前。

此一公式係由公式 X_d 簡化而來，在差數以等第計算時，兩種公式演算的結果，所得的相關係數大致相同，詳見下例：

2. 例 1：八個演說者在清晰與流利兩項成績的等第

演說者	X（清晰等第）	Y（流利等第）	XY	X^2	Y^2	D	D^2
甲	1	3	3	1	9	−2	4
乙	2	1	2	4	1	1	1
丙	3	6	18	9	36	−3	9
丁	4	4	16	16	16	0	0
戊	5	2	10	25	4	3	9
己	6	8	48	36	64	−2	4
庚	7	7	49	49	49	0	0
辛	8	5	40	64	25	3	9
N=8	$\left(\begin{matrix}\Sigma fx'=36\\ M'x=0\end{matrix}\right)$	$\left(\begin{matrix}\Sigma fy'=36\\ M'y=0\end{matrix}\right)$	$\left(\begin{matrix}\Sigma fx'y'\\ =168\end{matrix}\right)$	$(\Sigma fx'^2=204)$	$(\Sigma fy'^2=204)$		$\Sigma D^2=36$

代入公式X_d，

$$r=\frac{N\Sigma fx'y'-\Sigma fx'\cdot\Sigma fy'}{\sqrt{N\Sigma fx'^2-(\Sigma fx')^2}\ \sqrt{N\Sigma fy'^2-(\Sigma fy')^2}}$$

$$=\frac{8\times186-36\times36}{\sqrt{8\times204-(36)^2}\ \sqrt{8\times204-(36)^2}}$$

$$=\frac{192}{336}=0.57$$

代入公式XI_a，

$$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}=1-\frac{8\times36}{8(64-1)}=1-\frac{216}{504}$$

$$=\frac{288}{504}=0.57$$

由此例中可以看出，如只計算等級相關係數ρ，XY，X^2，Y^2三行數值均不需要，公式本身亦較求r之公式簡單多多。故在人數不多或30以下時，求ρ要比求r節省不少時間；同時，在X，Y兩種成績分配相當勻稱而相同的分數或等第又不太多的情形下，ρ之值便與r之值非常接近，更不必另求r了。本書附錄中表三為ρ與r對照之數值，在求得ρ之值以後，亦可查表將其相當r之值一併寫出，如此對於應用或瞭解方面，不無助益。

從實例中，我們已證明求r和求ρ的兩個公式的一致性，現在我們更可從數理方面加以推證：

$$r=\frac{N\Sigma X'y'-\Sigma fx'\cdot\Sigma fy'}{\sqrt{N\Sigma fx'^2-(\Sigma fx')^2}\ \sqrt{N\Sigma fy'^2-(\Sigma fy')^2}}$$

（公式X_d）

當X，Y兩種量數均以等第計差時，

則$\Sigma fx'=\Sigma fy'$，　$\Sigma fx'^2=\Sigma fy'^2$　　（見前例）

$$\therefore \rho = \frac{N\sum x'y' - (\sum fx')^2}{N\sum fx'^2 - (\sum fx')^2}$$

$$= \frac{N\sum x'y' - (\sum x')^2}{N\sum x'^2 - (\sum x')^2} \quad (1)$$

但 $D = x' - y'$ （即上例中X，Y兩行每對等第相減）

$$D^2 = (x' - y')^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'$$

$$x'y' = \frac{x'^2 + y'^2 - D^2}{2}$$

$$\sum x'y' = \frac{\sum(x'^2 + y'^2 - D^2)}{2}$$

$$= \frac{\sum x'^2 + \sum y'^2 - \sum D^2}{2}$$

$$= \frac{2\sum x'^2 - \sum D^2}{2} = \sum x'^2 - \frac{\sum D^2}{2} \quad (2)$$

將(2)代入(1)，

$$\rho = \frac{N\sum x'^2 - (\sum x'^2) - \frac{N\sum D^2}{2}}{N\sum x'^2 - (\sum x')^2} = 1 - \frac{\frac{N\sum D^2}{2}}{N\sum x'^2 - (\sum x')^2}$$

$$= 1 - \frac{\frac{N\sum D^2}{2}}{N\sum x'^2 - (NMx)^2} \quad (\sum x' = NMx)$$

$$= 1 - \frac{\frac{N\sum D^2}{2}}{N\sum x'^2 - N^2M^2_x} = 1 - \frac{\frac{\sum D^2}{2}}{\sum x'^2 - NM^2_x} \quad (3)$$

但 $\sum x'^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + N^2$

$$N^3 - (N-1)^3 = 3N^2 - 3N + 1 \quad \left((a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3\right)$$

$$(N-1)^3 - (N-2)^3 = 3(N-1)^2 - 3(N-1) + 1$$

$$(N-2)^3 - (N-3)^3 = 3(N-2)^2 - 3(N-2) + 1$$

………………………………………………

………………………………………………

$$3^3-2^3=3\cdot 3^2-3\cdot 3+1$$
$$2^3-1^3=3\cdot 2^2-3\cdot 2+1$$
$$1^3-0^3=3\cdot 1^2-3\cdot 1+1$$
$$\overline{N^3=3\Sigma N^2-3\Sigma N+N}$$

$$\therefore\quad \Sigma N^2=\frac{N^3+3\Sigma N-N}{3}=\frac{N^3+\frac{3N}{2}(N+1)-N}{3}$$

$$\left(S=\frac{N}{2}(a+l)=\frac{N}{2}(N+1)\right)$$

$$=\frac{2N^3+3N^2+3N-2N}{6}=\frac{2N^3+3N^2+N}{6}$$

即 $$\Sigma x'^2=\frac{2N^3+3N^2+N}{6} \qquad (4)$$

又 $$Mx=\frac{1+2+3+\cdots\cdots+N}{N}=\frac{1}{N}\cdot\frac{N}{2}(N+1)$$

$$=\frac{N+1}{2} \qquad (5)$$

將(4)，(5)代入(3)，

$$\rho=1-\frac{\frac{\Sigma D^2}{2}}{\Sigma x'^2-NM^2x}=1-\frac{\frac{\Sigma D^2}{2}}{\frac{2N^3+3N^2+N}{6}-N\left(\frac{N+1}{2}\right)^2}$$

$$=1-\frac{\frac{\Sigma D^2}{2}}{\frac{4N^3+6N^2+2N-3N^3-6N^2-3N}{12}}=1-\frac{\frac{\Sigma D^2}{2}}{\frac{N^3-N}{12}}$$

$$=1-\frac{6\Sigma D^2}{N^3-N}=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \qquad \text{(公式 XIa)}$$

3. 例 2：15人對卡通及滑稽詩之幽默價值評分的比較

評分人	X（卡通）分數	Y（滑稽詩）分數	X等級	Y等級	D	D^2
A	47	75	11	8	3	9
B	71	79	4	6	−2	4
C	52	85	9	5	4	16
D	48	50	10	14	−4	16
E	35	49	14.5	15	−.5	.25
F	35	59	14.5	12	2.5	6.25
G	41	75	12.5	8	4.5	20.25
H	82	91	1	3	−2	4
I	72	100	3	1	2	4
J	56	87	7	4	3	9
K	59	70	6	10	−4	16
L	73	92	2	2	0	0
M	60	54	5	13	−8	64
N	55	75	8	8	0	0
O	41	68	12.5	11	1.5	2.25
N＝15						$\Sigma D^2 = 171.00$

代入公式XIa，

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6\times171}{15\times224} = 1 - \frac{1026}{3360}$$

$$= \frac{2334}{3360} = 0.695$$

4.計算時注意事項：

(1)分數化爲等級時，遇有相同之分數，則將其應佔之等第平均之。如例2中X分數行內有兩個41分，其應佔之等第爲12和13，平均爲12.5，作爲二者之等次。遇有二個以上分數相同時，亦以其應佔各等第平均之值計算。

(2)差數D之計算，X－Y或Y－X均可，最後D^2之值不受

響。

㈡等級計餘法（Spearman's foot-rule，或譯爲司氏之簡捷法）：

1. 公式：

$$R = 1 - \frac{6\sum G}{N^2 - 1} \qquad \text{公式XIb}$$

R：等級計餘相關係數之符號。

G：爲X－Y式Y－X等級之正差，負差不計，G（Gain）爲盈餘的意思。

其餘符號同前。

2. 例：

學生	X 等級	Y 等級	G （X＞Y）
甲	1	2	
乙	2	1	1
丙	3	3	
丁	4	6	
戊	5	4	1
己	6	8	
庚	7	5	2
辛	8	7	1
N＝8			$\sum G=5$

代入公式XIb，

$$R = 1 - \frac{6\sum G}{N^2-1} = 1 - \frac{6\times5}{64-1} = 1 - \frac{30}{63} = \frac{33}{63}$$

$$= 0.52$$

此法雖較等級計差法爲簡易，但其精確程度却遜一籌。在完全正相關時，R之值等於＋1，但在完全負相關時，其值却只有

一.5，於理未合。如下例：

學 生	X 等 級	Y 等 級	G (Y>X)
A	1	7	6
B	2	6	4
C	3	5	2
D	4	4	
E	5	3	
F	6	2	
G	7	1	
Σ=7			ΣG=12

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}=1-\frac{6\times 12}{49-1}=1-\frac{72}{48}$$

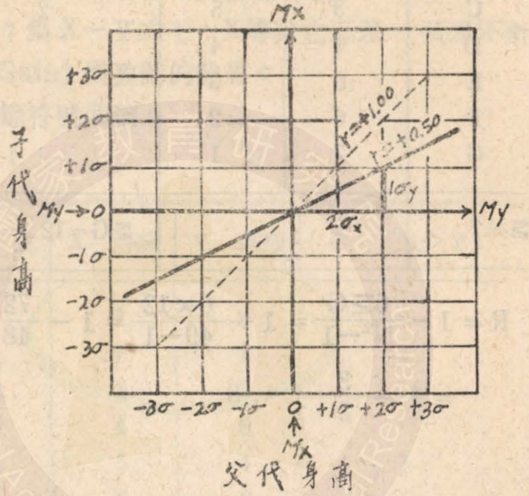
$$=1-\frac{3}{2}=-.5$$

四、迴歸方程

(一)迴歸方程的意義　相關係數可以測知兩種事實關係的遠近或程度，但却無法知道二者之間互相依存的情形或互爲影響的大小，如父母和子女間的關係，爲直系親屬一等親，這猶如相關係數，只是表示出了二者間關係的遠近或程度，但是如果問到父母對子女的影響大呢，還是子女對父毎的影響大呢？並且這種互爲影響的大小又到了什麼程度呢？就常識來說，我們或者可以回答，在子女幼小的時候，其依存於父母的情形爲高，在父母年邁的時候，其依存於子女的程度爲大，這不過是一般的情形，甚難一概而論。統計學家爲了解决這一類的問題，發明了迴解方程（Regression equation），以兩種量數互相影響的比率，作爲計

算相互影響程度的標準，這種比率稱爲迴歸係數（Coefficient of regression）。

迴歸方程的觀念比計算相關的方法發生爲早，當高爾登（Galton）研究遺傳因素影響的時候，曾將父子兩代身高的關係，用分佈圖和直線來表示，並用兩代身高的標準差作爲計算的單位，略如下圖：



圖八　皮氏積差相關係數與迴歸線傾斜度之關係（註）

高氏參照父代的身高計算子代身高的平均數的時候，發現兩種現象：一爲各行的平均數有落於一直線的趨勢；再者爲每一組子代身高的平均數離開其總平均數的距離小於父代的至其總平均數的距離。這種子代身高迴歸總平均數的現象，在遺傳學上稱爲「子親迴歸律」（The law of filial regression），統計學上迴歸方程和迴歸線的名稱，皆由此而來。

高氏復將迴歸線傾斜的程度，用作表示某種關係的指數（The index of relationship）。從圖八中可以看出，迴歸線傾斜

註：採自 J.P. Guilford，Fundamental Statistics in Psychology and Education,p.369.

的程度愈大，兩種變量間的關係亦愈接近。圖例中當X爲2σ時，Y爲 1σ，其傾斜度爲 $^1/_2$ 或0.5，此種比率即高氏的迴歸係數（Galton's coefficient of regression）。

㈡**迴歸方程的來源**　當X,Y兩種變量各以其標準差爲單位時，皮而生相關係數 r 的公式，正是計算迴歸線傾斜程度的方程式。迴歸方程式的各種寫法，都可從本章第二節中公式 X_a 抽繹出來：

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma x\sigma y}=\frac{\Sigma\frac{x}{\sigma x}\frac{y}{\sigma y}}{N}$$

如得x,y其中之一作爲預測之值，便得下列各種迴歸方程的形式：

$$\frac{x}{\sigma x}=r\frac{y}{\sigma y}\text{ ，}\quad x=r\frac{\sigma x}{\sigma y}y \qquad \text{公式XII}_a$$

$$\frac{y}{\sigma y}=r\frac{x}{\sigma x}\text{ ，}\quad y=r\frac{\sigma y}{\sigma x}x \qquad \text{公式XII}_b$$

又 $x=X-Mx$ ，　$y=Y-My$

$$\therefore\quad (X-Mx)=r\frac{\sigma x}{\sigma y}(Y-My) \qquad \text{公式XII}_c$$

$$(Y-My)=r\frac{\sigma y}{\sigma x}(X-Mx) \qquad \text{公式XII}_d$$

$r\frac{\sigma x}{\sigma y}$，$r\frac{\sigma y}{\sigma x}$ 稱爲迴歸係數，如以 b_1, b_2 表示，則

公式XIIa，XIIb可寫爲：

$$x=b_1y \qquad \text{公式XII}_e$$

$$y=b_2x \qquad \text{公式XII}_f$$

就迴歸線言，b_1代表x向y之傾斜度，計算時y爲自變量，x爲隨變量；b_2代表y向x之傾斜度，計算時x爲自變量，y爲隨變量。

㈢**迴歸線的畫法**　茲以本章第二節中皮而生積差相關分佈圖法之例題爲例，根據上列迴歸方程之公式先求出其迴歸係數，再

算出直線方程式中的常數，即可畫出X，Y兩種歸量互相傾斜的線段（即迴歸線）。

X 智力測驗

Y 算術測驗

	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	fy
50-60						1	Rx 2	1	4
40-50					6	3	3	Ry 1	13
30-40			1	4	9	3			17
20-30		3	5	8	7	1			24
10-20	2	4	4	3	3				16
0-10	2	2	1	1					6
fx	4	9	11	16	25	8	5	2	80

$Mx = 38.13$ $\qquad$ $My = 28.38$

$\sigma x = 16.17$ $\qquad$ $\sigma y = 13.03$ $\qquad$ $r = 0.764$

$$b_1 = r\frac{\sigma x}{\sigma y} = 0.764 \times \frac{16.17}{13.03} = 0.764 \times 1.242 = 0.95$$

$$b_2 = y\frac{\sigma y}{\sigma x} = 0.764 \times \frac{13.03}{16.17} = 0.764 \times 0.806 = 0.62$$

$x = b_1 y = 0.95y$ （圖中Rx線）

$y = b_2 x = 0.62x$ （圖中Ry線）

代入公式XIIc，

$X - 38.13 = 0.95\,(Y - 28.38) = 0.95Y - 26.96$

$X = 0.95Y + 38.13 - 26.96 = 0.95Y + 11.17$

代入公式XIId，

$Y-28.38=0.62(X-38.13)=0.62X-23.64$

$Y=0.62X+28.38-23.64=0.62X+4.74$

若$Y=55$，則$X=0.95\times55+11.17=52.25+11.17=63.42$

$Y=5$，則$X=0.95\times5+11.17=4.75+11.17=15.92$

據此Y,X四個數值，即可畫出x向y傾斜之迴歸線Rx（如上圖）。

若$X=75$，則$Y=0.62\times75+4.74=46.5+4.74=51.24$

$X=5$，則$Y=0.62\times5+4.74=3.10+4.74=7.84$

據此X,Y四個數值，即可畫出y向x傾斜之迴歸線Ry（如上圖）。

㈣迴歸方程的用途　由迴歸方程中既可察知 X,Y 兩種量數互相影響的大小，故自X量數的數值，便不難估計出其在Y量數上最可能的數值。如前例X量數爲智力測驗的成績，Y量數爲算術測驗的成績，根據其迴歸方程的顯示，若一學生在智力測驗方面的成績爲65，便不難估計出其在算術方面可以達到的成績約爲$Y=0.62\times65+4.74=40.30+4.74=45.04$，由此可知迴歸方程實具有預測的作用。譬如性向測驗和在某些職業上可能的成就是有關聯的，因此，我們便可利用迴歸方程由性向測驗方面的成績，預測其將來在某種職業上可能的成就，預測的效果雖非料事如神，但在我們現有的知識領域中，這種利用迴歸方程以測未來的方法，畢竟是最可靠的一種途經。

第六章 常態曲線

一、常態曲線的畫法

在幾何學上凡一有規律的線段都有其固定的方程式：如 $y=2x+5$ 爲一直線；$x^2+y^2=16$ 爲一圓形；$x^2-y^2=16$ 爲一雙曲線；$y=x^2-5x+6$ 爲一拋物線等；同樣，常態曲線 (Normal curve or Normal probability curve) 亦有其代表的方程式，一般的寫法爲：

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{公式XIIIa}$$

$$\text{或}\quad y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(X-M)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{公式XIIIb}$$

如以比例表示次數，　則 $N=1$；

如以標準分數(Standard scores)代替原始分數，則$\sigma=1$；

故上述方程式可簡化爲：

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad \text{公式XIIIc}$$

$$\text{或}\quad y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{公式XIIId}$$

此時我們可以利用對數，直接從常態曲線的方程式（公式XIIIc,XIIId的方程式稱爲標準常態曲線方程式 "The Eguation of the Standard Normal Curve"）中，求出x，y各對代表的數值（正負值同），然後畫出其曲線的形狀。

$$\log y = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \log e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{x^2}{2}\log e$$

但 $2\pi = 2 \times 3.1416 = 6.2832$

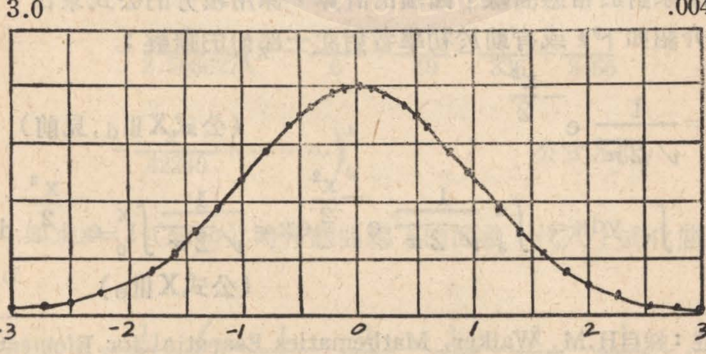
$\log 2\pi = 0.7982$ ， $\frac{1}{2}\log 2\pi = 0.3991$

e(自然對數的底值) $= 2.71828$

$\log e = 0.4343$

$\therefore \log y = -.3991 - \frac{x^2}{2}(.4343) = -(.2172x^2 + .3991)$

x	$.2172x^2$	$-(.2172x^2+.3991)$	log y	y
0	0	−.3991	.6009−1	.399
.2	.0087	−.4078	.5922−1	.390
.4	.0348	−.4339	.5661−1	.368
.6	.0791	−.4782	.5218−1	.332
.8				.290
1.0				.242
1.2				.194
1.4				.150
1.6				.111
1.8				.079
2.0				.054
2.5				.018
3.0				.004



圖九　標準常態曲線圖（註）

二、常態曲線的特性

1. 在基線上$\frac{x}{\sigma}$或z=0的地方，其縱線y爲最高，最上端即常態曲線的頂峯。
2. 因x,y均有正負相等之值，故此曲線以$\frac{x}{\sigma}=0$一點上之縱線y左右對稱。
3. 在常態分配的情形下，平均數、中數和衆數三者相合於一點，亦即其值相同。
4. 當$\frac{x}{\sigma}=\pm 1$時，其曲線左右之正切處，爲二彎曲點之所在，即曲線由向上彎轉爲向下彎的地方。
5. 常態曲線的兩端逐漸接近基線，但在有限的範圍內，却永不與其相交。

三、曲線下面積的求法

計算曲線下的面積，如用算術和代數的方法，極爲困難，故統計學家對於常態曲線下面積的計算，係用積分的公式求出，茲簡略介紹如下，或有助於初學者對此一部份的瞭解：

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{(公式XIIId,見前)}$$

$$A=\int_0 ydx=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

(公式XIIIe)

註：採自H.M. Walker, Mathematics Essential for Elementary Statistics, p.248.

A：代表面積（area）的符號。

$\int$：積分符號，爲一長寫S，意義爲和（Summation）。

dx：微分符號，積分爲微分的還原。

其他符號同前。

但 $e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{-x^2}{2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{2^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^6}{2^3}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\ A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{2_2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^6}{2^3}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4!}\cdot\frac{X^8}{2^4}-\frac{1}{5!}\cdot\frac{x^{10}}{2^5}+\cdots\cdots\right)dx$$

$$=\frac{1}{2.506627}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}-\frac{x^7}{336}+\frac{x^9}{3456}\right.$$

$$\left.-\frac{x^{11}}{42240}+\cdots\cdots\right)_0^x \qquad \text{公式X}\mathrm{III}_f$$

如求x＝1（即1σ）時常態曲線下的面積，代入上式化簡後即得。

$$A=\frac{1}{2.506627}\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\frac{1}{3456}-\frac{1}{42240}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2.506627}(1-0.166667+0.025-0.002976+0.000289$$
$$-0.000024+\cdots\cdots)$$
$$=\frac{1}{2.506627}\times 0.855622=0.3413$$

如求x＝2 至 x＝1中間(即2σ至1σ中間)曲線下的面積，則先將x＝2代入上一公式或括弧內計算各項之和，再將x＝1代入該公式括弧內計算各項之和，然後二者相減，餘數乘 $\frac{1}{2.506627}$ 即得所求的面積，此時公式的寫法應爲：

$$A=\frac{1}{2.506627}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}-\frac{x^7}{336}+\frac{x^9}{3456}-\frac{x^{11}}{42240}+\cdots\cdots\right)_1^2$$

其餘名±x（即±σ）之面積，算法相同。所不同的地方只是隨時變更積分公式中的上下限而已。

本書後附表一爲常態曲線下之面積對照表，應用時不須從頭計算，查表便可獲得所需要的數值。玆舉二例如下：

1. 例1：求±1.0σ間常態曲線下的面積。

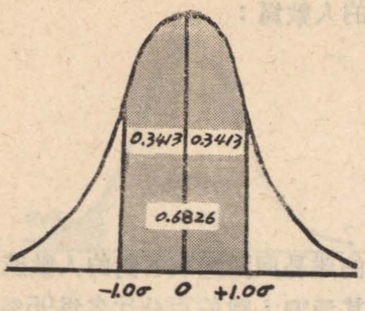
查表得 1.0σ＝0.3413 (即34.13%)

±1.0σ＝0.3413×2＝0.6826 (即68.26%)

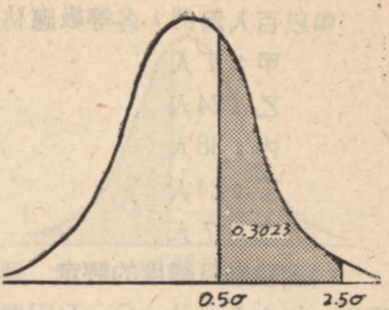
2. 例2：求2.5σ至0.5σ間常態曲線下的面積。

查表得 2.5σ＝0.4938， 0.5σ＝0.1915。

2.5σ－0.5σ 間的面積＝0.4938－0.1915＝0.3023 (即30.23%)



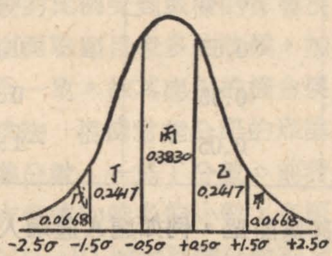
圖十　例1圖示



圖十一　例2圖示

四、常態曲線的用途

㈠等級成績人數分配的標準　一般教師在評定學生等級成績的人數分配時，由於自編測驗的題目有限，且其難易與全班的眞正成績的分配情形，又不一致，故所評結果，高分數與低分數之間，不是差別太小，就是偏於一端，以致大家所得到的等級，也極不勻稱。如果我們對於甲、乙、丙、丁、戊各個等級的人數比例，能有一個理想的標準作爲參考，則上述的問題便可迎刄而解。根據常態曲線下各σ 間的面積的百分比，我們即可樹立一個標準；如以±2.5σ爲範圍，則每一σ 的距離，便可代表一個等級，各等級間人數所佔的比例約如下圖：



圖十二　常態曲線下各等級人數分配的比例

如以百人爲例，各等級應佔有的人數爲：

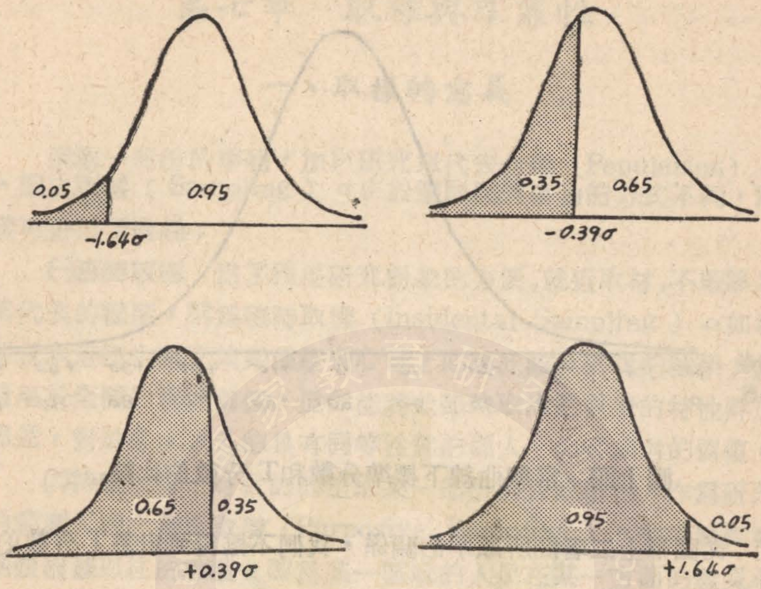
甲：7人
乙：24人
丙：38人
丁：24人
戊：7人

㈡**測驗題目難度的評定**　題目的難易與通過或答對的人數成反比。如有A、B、C、D四題，其通過人數的百分比各爲95%，65%，35%，5%，則A題最易，D題最難，了無疑問；不過，各題目間難度的距離，雖在通過的百分比上看來各爲30%，但並不能代表四題間等距離的難度，因爲人類能力的差異，成一常態分配的現象，人數的百分比其不能代表難度的距離，至爲顯然。所以統計學家，大都以σ爲單位來計算題目間難度的差異，表示難度的數值，稱爲難度指數(Indexes of difficulty)。

難度指數的求法，係根據各題通過人數的百分比，求出通過該題所需能力的起點，此起點σ的數值，即爲其難度指數，故σ的數值愈大，其相對難度亦愈高，計算時由負值到正值遞升，此處則不存有絕對值的觀念。茲以前述四題爲例並圖示如下：

題　目	通過人數的比例	難度指數
A	0.95	−1.64
B	0.65	0.39
C	0.35	0.39
D	0.05	1.64

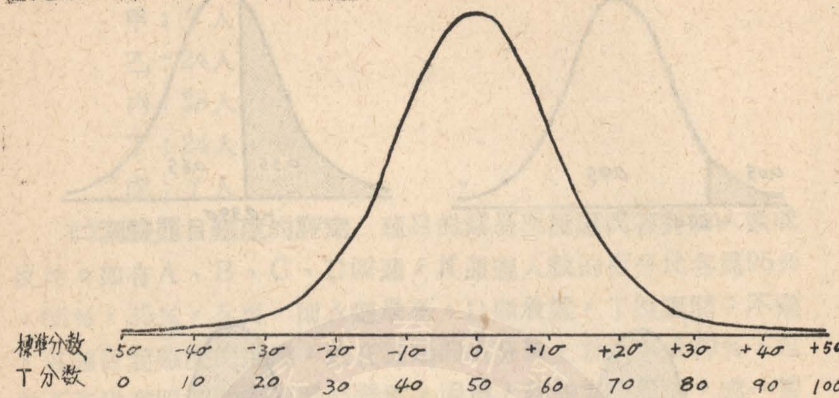
難度指數的求法甚爲簡單，例如題A通過人數的比例爲0.95，先減去常態曲線下右邊一半的比例（0.50），再就所餘的數值查本書附表一即得。



圖十三　題目難度指數與通過人數比例的關係位置

如果題目增多，其難度的指數便可以等距離地排列起來，這樣便成功為一個診別難度很好的測驗。此外，在評分的時候，也可以根據各題難度的指數，給以加權的成績(Weig hted seores)，即將難度最低的題目作為1分，依次增加比重的算法。不過，由於各題通過人數的比例受到取樣的影響很大，加權的計分法甚不穩定；再者，在測驗題目衆多的時候，加權和不加權計分的結果其趨勢幾乎完全一致，故其應用的機會便大為減少。

㈢T分數的求法　根據常態分配的理論以σ為單位的計分方法有二：一為標準分數，一為T分數。前者我們在前幾章中曾經提到過，因其常有負值和較多的小數，在應用時頗感不便，故測驗學家麥柯爾（McCall）增大標準分數的單位並變更計算的起點，創立了所謂T分數的算法（註）。二者的關係如下圖：



圖十四　常態曲線下標準分數和T 分數的比較

從圖形上二者間所顯示的關係，我們不難得到計算T 分數的公式：

$$T = 50 + 10\,\frac{x}{\sigma} \qquad \text{公式XIIIg}$$

$$\text{或}\quad T = 50 + \frac{10(X-M)}{\sigma} \qquad \text{公式XIIIh}$$

T 分數既無負值，小數亦相對減少，且十二歲兒童平均能力的T 分數正爲50，用作比較的標準，頗爲便利。

註：麥氏採用T 分數的符號，意在紀念推孟（Terman） 和桑戴克（Thorndike）在倡導測驗和統計方面的功績。

第七章　取樣與可靠性

一、取樣的意義

選取一部份的事物，加以研究以代表全體（Population），，謂之取樣（Sampling）。由於選取代表事物的方式不同，取樣可分以下幾種：

㈠**臨時取樣**　爲了獲得研究對象的方便，就近取材，不暇診別其代表的程度，稱爲臨時取樣（Insidental Sampling）。如教師就本班學生研究其某種學習心理，即屬此類。研究的結果，其適用於全體的程度雖低，但如能將此臨時取樣的對象的特性詳加描述，對於樣本以外的具有同等性質的個人，仍有參考的價値。

㈡**特定取樣**　有目的的選取某一部份的人或事物，作爲研究的範圍，謂之特定取樣（Purposive Sampling）。如民意測驗團體根據以往的經驗，認爲某一區域的人民在某一方面的意見最能代表全體，因而選作樣本屬之。由於情勢時常轉變，所以特定樣本的效率實爲有限。

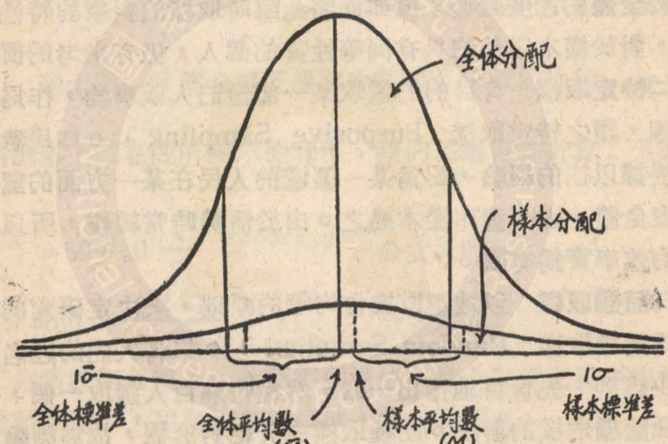
㈢**隨機取樣**　以被選取機會均等的原則，來決定研究的樣本，稱爲隨機取樣（Random Sampling）。如將人們的姓名以筆劃多少排列，先盲目地指出一個，然後每隔百人選取一個，便是是一種隨機取樣的辦法。此種取樣由於絕對客觀，故爲測驗統計學家所常用。

㈣**分層隨機取樣**　隨機取樣固然已够客觀，但是有些問題，人們的反應常隨宗教、政黨、職業、甚至於性別而有不同；特別是政治問題，黨籍的影響最爲顯著。但全國各重要政黨所擁有的人數不同，且各政黨對某種問題所持的立場亦極明顯，如以隨機取樣的方法，以所取有限，各政黨的人數勢難成比例的被選爲調查研究的對象，以此樣本代表全體殊爲危險。如先按各政黨人數的多寡，分組成比例地隨機取樣，然後合在一起研究，勢必更有

代表的價值，這種分頭進行取樣的辦法，稱爲分層隨機取樣（Stratified-randon sampling）。

二、可靠性的問題

取樣研究的方式，既是以部份代表全體，二者之間，必有差異存在，自無疑問。如以某次取樣所得的平均數及標準差，和全體事實的眞正平均數及標準差相較，必不一致；各次取樣的結果，亦均有出入，樣本與全體以及實得與眞正平均數及標準差的差異情形，略如下圖：



圖十五　全體分配與樣本分配以及平均數和標準差的比較（註）

由樣本求出的各種代表量數與其全體的各種眞正量數之値差異愈大，樣本的代表性便愈低，其代表的程度或範圍，謂之可靠性（Reliability）。

註：採自J. P. Guilford, Fundamental Statistics in Psychology and Education, p. 156.

三、各種量數的可靠度

計算各種量數可靠度的方法有二：一為標準誤（Standard error），一為機誤（Frobable error，簡寫為 PE）。在常態分配中，機誤與四分差（Q）相等，由中點沿基線 ±1PE的距離，包含全體量數50%，如與σ相較，則 $PE=0.6745\sigma$

(一)算術平均數的可靠度

1. 公式：$\sigma_m=\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$　　　　公式XIVa

$$PE_m=0.6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$=0.6745\ \sigma_m$$　　　　公式XIVb

σ_n：平均數標準誤的符號。

PE_m：平均數機誤的符號。

2. 例：設一次數分配的M= 82，$\sigma=10.45$，　$N=36$，

$$\sigma_m=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}=\frac{10.45}{\sqrt{36}}=\frac{10.45}{6}=1.7417$$

$$PE_m=0.6745\sigma_m=0.6745\times1.7417=1.1748$$

3. 解釋：

(1)因1.7417為一樣本平均數的標準誤，則M±σ 或 82±1.7417之範圍，可包括由許多樣本所得全部平均數的68.27%，對每一次取樣結果的平均數來說，其落入80.2583—83.7417 範圍內的機遇為2.15：1；M±2σ，包含全體量數95.45%，其機遇為21：1；M±3σ，包含全體量數99.73%，其機遇為369：1。

(2)$PE_m=1.1748$，M±PE 或82±1.1748 包含全體量數

50%，其機遇爲1：1；M±2PE包含全體量數 82.26%，其機遇4.6：1；M±5PE，包含全體量數 99.92%，其機遇爲1315：1。

㈡中數的可靠度

$$\sigma_{mdn}=1.2533\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad \text{公式XIVc}$$

$$PE_{mdn}=0.8454\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad \text{公式XIVd}$$

㈢四分差的可靠度

$$\sigma_{Q}=1.3626\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad \text{公式XIVe}$$

$$PE_{Q}=0.9191\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad \text{公式XIVf}$$

㈣標準差的可靠度

$$\sigma_{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \qquad \text{公式XIVg}$$

$$PE\sigma=0.6745\frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \qquad \text{公式XIVh}$$

㈤相關係數的可靠度

$$\sigma_{r}=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \qquad \text{公式XIVi}$$

$$PE=0.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \qquad \text{公式XIVj}$$

以上各個公式的算法，均甚簡易，所求得的可靠度的各項數值，在含義方面，亦與平均數部份大致相同，故不一一舉例。

附　　錄

表　一　常態曲線下的面積

$\frac{x}{\sigma}$或z	第二位小數各值									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998									
4.0	.49997									
4.5	.499997									
5.0	.4999997									

表 二 常態曲線下的縱線

$\frac{x}{\sigma}$或z	第二位小數各值									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.5	.0009									
4.0	.0001									
4.5	.00002									
5.0	.000001									

表 三　ρ與R各種對照表

公式： $r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	77	.7847
03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8309
.05	0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
08	.0838	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
13	1360	.38	.3935	.63	.6478	.88	.8893
14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9183
17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9296
18	.1882	.43	.4465	.68	6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	4771	.71	7265	.96	.9635
.22	.2299	47	.4872	.72	.7363	.97	.9727
23	.2403	48	4973	.73	.7460	98	.9818
24	2507	.49	5075	74	7557	.99	.9909
25	2611	.50	.5176	75	.7654	1.00	1.0000

表　四　R與r各值對照表

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$$

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000	.26	.429	51	742	76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	753	77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	772	.79	952
.04	.071	.30	486	55	782	.80	.956
.05	.089	.31	.500	56	791	81	961
.06	.107	.32	514	.57	801	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	810	83	968
.08	.141	34	541	.59	.818	84	.972
.09	.158	35	.554	60	827	.85	975
.10	.176	.36	.567	61	836	.86	979
.11	.192	.37	.580	.62	844	87	.981
.12	209	.38	.593	.63	.852	88	984
.13	.226	.39	606	.64	860	.89	987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	654	68	889	93	995
.18	.307	44	.666	.69	896	.94	996
.19	.323	45	677	70	902	.95	.997
.20	.338	.46	689	71	908	96	998
.21	.354	47	700	.72	915	.97	999
.22	.369	48	711	73	921	.98	9996
.23	.384	49	721	74	926	99	9999
.24	.399	50	732	75	932	1.00	1 0000
.25	.414						

表 五 常用數值四位對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	3	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3317	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

表 五 (續)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

表 五 (續)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

表 六　1—1,000各數平方及平方根表

數	平　方	平方根	數	平　方	平方根
1	1	1.0000	41	16 81	6.4031
2	4	1.4142	42	17 64	6.4807
3	9	1.7321	43	18 49	6.5574
4	16	2.0000	44	19 36	6.6332
5	25	2.2361	45	20 25	6.7082
6	36	2.4495	46	21 16	6.7823
7	49	2.6458	47	22 09	6.8557
8	64	2 8284	48	23 04	6.9282
9	81	3.0000	49	24 01	7.0000
10	1 00	3.1623	50	25 00	7.0711
11	1 21	3.3166	51	26 01	7.1414
12	1 44	3.4641	52	27 04	7.2111
13	1 69	3.6056	53	28 09	7.2801
14	1 96	3.7417	54	29 16	7.3485
15	2 25	3.8730	55	30 25	7.4162
16	2 56	4.0000	56	31 36	7.4833
17	2 89	4.1231	57	32 49	7.5498
18	3 24	4.2426	58	33 64	7.6158
19	3 61	4.3589	59	34 81	7.6811
20	4 00	4.4721	60	36 00	7.7460
21	4 41	4.5826	61	37 21	7.8102
22	4 84	4.6904	62	38 44	7.8740
23	5 29	4.7958	63	39 69	7.9373
24	5 76	4.8990	64	40 96	8.0000
25	6 25	5.0000	65	42 25	8.0623
26	6 76	5.0990	66	43 56	8.1240
27	7 29	5.1962	67	44 89	8.1854
28	7 84	5.2915	68	46 24	8.2462
29	8 41	5.3852	69	47 61	8.3066
30	9 00	5.4772	70	49 00	8.3666
31	9 61	5.5678	71	50 41	8.4261
32	10 24	5.6569	72	51 84	8.4853
33	10 89	5.7446	73	53 29	8.5440
34	11 56	5.8310	74	54 76	8.6023
35	12 25	5.9161	75	56 25	8.6603
36	12 96	6.0000	76	57 76	8.7178
37	13 69	6.0828	77	59 29	8.7750
38	14 44	6.1644	78	60 84	8.8318
39	15 21	6.2450	79	62 41	8.8882
40	16 00	6.3246	80	64 00	8.9443

表 六（續）

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
81	65 61	9.0000	121	1 46 41	11.0000
82	67 24	9.0554	122	1 48 84	11.0454
83	68 89	9.1104	123	1 51 29	11.0905
84	70 56	9.1652	124	1 53 76	11.1355
85	72 25	9.2195	125	1 56 25	11.1803
86	73 96	9.2736	126	1 58 76	11.2250
87	75 69	9.3274	127	1 61 29	11.2694
88	77 44	9.3808	128	1 63 84	11.3137
89	79 21	9.4340	129	1 66 41	11.3578
90	81 00	9.4868	130	1 69 00	11.4018
91	82 81	9.5394	131	1 71 61	11.4455
92	84 64	9.5917	132	1 74 24	11.4891
93	86 49	9.6437	133	1 76 89	11.5326
94	88 36	9.6954	134	1 79 56	11.5758
95	90 25	9.7468	135	1 82 25	11.6190
96	92 16	9.7980	136	1 84 96	11.6619
97	94 09	9.8489	137	1 87 69	11.7047
98	96 04	9.8995	138	1 90 44	11.7473
99	98 01	9.9499	139	1 93 21	11.7898
100	1 00 00	10.0000	140	1 96 00	11.8322
101	1 02 01	10.0499	141	1 98 81	11.8743
102	1 04 04	10.0995	142	2 01 64	11.9164
103	1 06 09	10.1489	143	2 04 49	11.9583
104	1 08 16	10.1980	144	2 07 36	12.0000
105	1 10 25	10.2470	145	2 10 25	12 0416
106	1 12 36	10.2956	146	2 13 16	12.0830
107	1 14 49	10.3441	147	2 16 09	12.1244
108	1 16 64	10.3923	148	2 19 04	12.1655
109	1 18 81	10.4403	149	2 22 01	12.2066
110	1 21 00	10.4881	150	2 25 00	12.2474
111	1 23 21	10.5357	151	2 28 01	12.2882
112	1 25 44	10.5830	152	2 31 04	12.3288
113	1 27 69	10.6301	153	2 34 09	12.3693
114	1 29 96	10.6771	154	2 37 16	12.4097
115	1 32 25	10.7238	155	2 40 25	12.4499
116	1 34 56	10.7703	156	2 43 36	12.4900
117	1 36 89	10.8167	157	2 46 49	12.5300
118	1 39 24	10.8628	158	2 49 64	12.5698
119	1 41 61	10.9087	159	2 52 81	12.6095
120	1 44 00	10.9545	160	2 56 00	12.6491

表 六（續）

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
161	2 59 21	12.6886	201	4 04 01	14.1774
162	2 62 44	12.7279	202	4 08 04	14.2127
163	2 65 69	12.7671	203	4 12 09	14.2478
164	2 68 96	12.8062	204	4 16 16	14.2829
165	2 72 25	12.8452	205	4 20 25	14.3178
166	2 75 56	12.8841	206	4 24 36	14.3527
167	2 78 89	12.9228	207	4 28 49	14.3875
168	2 82 24	12.9615	208	4 32 64	14.4222
169	2 85 61	13.0000	209	4 36 81	14.4568
170	2 89 00	13.0384	210	4 41 00	14.4914
171	2 92 41	13.0767	211	4 45 21	14.5258
172	2 95 84	13.1149	212	4 49 44	14.5602
173	2 99 29	13.1529	213	4 53 69	14.5945
174	3 02 76	13.1909	214	4 57 96	14.6287
175	3 06 25	13.2288	215	4 62 25	14.6629
176	3 09 76	13.2665	216	4 66 56	14.6969
177	3 13 29	13.3041	217	4 70 89	14.7309
178	3 16 84	13.3417	218	4 75 24	14.7648
179	3 20 41	13.3791	219	4 79 61	14.7986
180	3 24 00	13.4164	220	4 84 00	14.8324
181	3 27 61	13.4536	221	4 88 41	14.8661
182	3 31 24	13.4907	222	4 92 84	14.8997
183	3 34 89	13.5277	223	4 97 29	14.9332
184	3 38 56	13.5647	224	5 01 76	14.9666
185	3 42 25	13.6015	225	5 06 25	15.0000
186	3 45 96	13.6382	226	5 10 76	15.0333
187	3 49 69	13.6748	227	5 15 29	15.0665
188	3 53 44	13.7113	228	5 19 84	15.0997
189	3 57 21	13.7477	229	5 24 41	15.1327
190	3 61 00	13.7840	230	5 29 00	15.1658
191	3 64 81	13.8203	231	5 33 61	15.1987
192	3 68 64	13.8564	232	5 38 24	15.2315
193	3 72 49	13.8924	233	5 42 89	15.2643
194	3 76 36	13.9284	234	5 47 56	15.2971
195	3 80 25	13.9642	235	5 52 25	15.3297
196	3 84 16	14.0000	236	5 56 96	15.3623
197	3 88 09	14.0357	237	5 61 69	15.3948
198	3 92 04	14.0712	238	5 66 44	15.4272
199	3 96 01	14.1067	239	5 71 21	15.4596
200	4 00 00	14.1421	240	5 76 00	15.4919

表六（續）

數	平方	平方根	數	平方	平方根
241	5 80 81	15.5242	281	7 89 61	16.7631
242	5 85 64	15.5563	282	7 95 24	16.7929
243	5 90 49	15.5885	283	8 00 89	16.8226
244	5 95 36	15.6205	284	8 06 56	16.8523
245	6 00 25	15.6525	285	8 12 25	16.8819
246	6 05 16	15.6844	286	8 17 96	16.9115
247	6 10 09	15.7162	287	8 23 69	16.9411
248	6 15 04	15.7480	288	8 29 44	16.9706
249	6 20 01	15.7797	289	8 35 21	17.0000
250	6 25 00	15.8114	290	8 41 00	17.0294
251	6 30 01	15.8430	291	8 46 81	17.0587
252	6 35 04	15.8745	292	8 52 64	17.0880
253	6 40 09	15.9060	293	8 58 49	17.1172
254	6 45 16	15.9374	294	8 64 36	17.1464
255	6 50 25	15.9687	295	8 70 25	17.1756
256	6 55 36	16.0000	296	8 76 16	17.2047
257	6 60 49	16.0312	297	8 82 09	17.2337
258	6 65 64	16.0624	298	8 88 04	17.2627
259	6 70 81	16.0935	299	8 94 01	17.2916
260	6 76 00	16.1245	300	9 00 00	17.3205
261	6 81 21	16.1555	301	9 06 01	17.3494
262	6 86 44	16.1864	302	9 12 04	17.3781
263	6 91 69	16.2173	303	9 18 09	17.4069
264	6 96 96	16.2481	304	9 24 16	17.4356
265	7 02 25	16.2788	305	9 30 25	17.4642
266	7 07 56	16.3095	306	9 36 36	17.4929
267	7 12 89	16.3401	307	9 42 49	17.5214
268	7 18 24	16.3707	308	9 48 64	17.5499
269	7 23 61	16.4012	309	9 54 81	17.5784
270	7 29 00	16.4317	310	9 61 00	17.6068
271	7 34 41	16.4621	311	9 67 21	17.6352
272	7 39 84	16.4924	312	9 73 44	17.6635
273	7 45 29	16.5227	313	9 79 69	17.6918
274	7 50 76	16.5529	314	9 85 96	17.7200
275	7 56 25	16.5831	315	9 92 25	17.7482
276	7 61 76	16.6132	316	9 98 56	17.7764
277	7 67 29	16.6433	317	10 04 89	17.8045
278	7 72 84	16.6733	318	10 11 24	17.8326
279	7 78 41	16.7033	319	10 17 61	17.8606
280	7 84 00	16.7332	320	10 24 00	17.8885

表 六 (續)

數	平　方	平方根	數	平　方	平方根
321	10 30 41	17.9165	361	13 03 21	19.0000
322	10 36 84	17.9444	362	13 10 44	19.0263
323	10 43 29	17.9722	363	13 17 69	19.0526
324	10 49 76	18.0000	364	13 24 96	19.0788
325	10 56 25	18.0278	365	13 32 25	19.1050
326	10 62 76	18.0555	366	13 39 56	19.1311
327	10 69 29	18.0831	367	13 46 89	19.1572
328	10 75 84	18.1108	368	13 54 24	19.1833
329	10 82 41	18.1384	369	13 61 61	19.2094
330	10 89 00	18.1659	370	13 69 00	19.2354
331	10 95 61	18.1934	371	13 76 41	19.2614
332	11 02 24	18.2209	372	13 83 84	19 2873
333	11 08 89	18.2483	373	13 91 29	19.3132
334	11 15 56	18.2757	374	13 98 76	19.3391
335	11 22 25	18.3030	375	14 06 25	19.3649
336	11 28 96	18.3303	376	14 13 76	19.3907
337	11 35 69	18.3576	377	14 21 29	19 4165
338	11 42 44	18.3848	378	14 28 84	19.4422
339	11 49 21	18.4120	379	14 36 41	19.4679
340	11 56 00	18.4391	380	14 44 00	19.4936
341	11 62 81	18.4662	381	14 51 61	19.5192
342	11 69 64	18.4932	382	14 59 24	19.5448
343	11 76 49	18.5203	383	14 66 89	19 5704
344	11 83 36	18.5472	384	14 74 56	19.5959
345	11 90 25	18.5742	385	14 82 25	19 6214
346	11 97 16	18.6011	386	14 89 96	19 6469
347	12 04 09	18.6279	387	14 97 69	19 6723
348	12 11 04	18.6548	388	15 05 44	19.6977
349	12 18 01	18.6815	389	15 13 21	19.7231
350	12 25 00	18 7083	390	15 21 00	19 7484
351	12 32 01	18.7350	391	15 28 81	19.7737
352	12 39 04	18 7617	392	15 36 64	19 7990
353	12 46 09	18.7883	393	15 44 49	19 8242
354	12 53 16	18 8149	394	15 52 36	19 8494
355	12 60 25	18 8414	395	15 60 25	19.8746
356	12 67 36	18 8680	396	15 68 16	19.8997
357	12 74 49	18 8944	397	15 76 09	19 9249
358	12 81 64	18.9209	398	15 84 04	19.9499
359	12 88 81	18 9473	399	15 92 01	19 9750
360	12 96 00	18 9737	400	16 00 00	20.0000

表 六（續）

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
401	16 08 01	20.0250	441	19 44 81	21.0000
402	16 16 04	20.0499	442	19 53 64	21.0238
403	16 24 09	20.0749	443	19 62 49	21.0476
404	16 32 16	20.0998	444	19 71 36	21.0713
405	16 40 25	20.1246	445	19 80 25	21.0950
406	16 48 36	20.1494	446	19 89 16	21 1187
407	16 56 49	20.1742	447	19 98 09	21 1424
408	16 64 64	20.1990	448	20 07 04	21.1660
409	16 72 81	20.2237	449	20 16 01	21.1896
410	16 81 00	20.2485	450	20 25 00	21.2132
411	16 89 21	20.2731	451	20 34 01	21.2368
412	16 97 44	20.2978	452	20 43 04	21 2603
413	17 05 69	20.3224	453	20 52 09	21.2838
414	17 13 96	20.3470	454	20 61 16	21.3073
415	17 22 25	20.3715	455	20 70 25	21 3307
416	17 30 56	20.3961	456	20 79 36	21 3542
417	17 38 89	20.4206	457	20 88 49	21.3776
418	17 47 24	20.4450	458	20 97 64	21.4009
419	17 55 61	20.4695	459	21 06 81	21.4243
420	17 64 00	20.4939	460	21 16 00	21 4476
421	17 72 41	20.5183	461	21 25 21	21.4709
422	17 80 84	20 5426	462	21 34 44	21 4942
423	17 89 29	20.5670	463	21 43 69	21 5174
424	17 97 76	20.5913	464	21 52 96	21 5407
425	18 06 25	20.6155	465	21 62 25	21 5639
426	18 14 76	20.6398	466	21 71 56	21 5870
427	18 23 29	20.6640	467	21 80 89	21.6102
428	18 31 84	20.6882	468	21 90 24	21 6333
429	18 40 41	20.7123	469	21 99 61	21 6564
430	18 49 00	20.7364	470	22 09 00	21 6795
431	18 57 61	20 7605	471	22 18 41	21 7025
432	18 66 24	20 7846	472	22 27 84	21 7256
433	18 74 89	20 8087	473	22 37 29	21 7486
434	18 83 56	20 8327	474	22 46 76	21 7715
435	18 92 25	20 8567	475	22 56 25	21 7945
436	19 00 96	20 8806	476	22 65 76	21 8174
437	19 09 69	20 9045	477	22 75 29	21 8403
438	19 18 44	20 9284	478	22 84 84	21 8632
439	19 27 21	20 9523	479	22 94 41	21 8861
440	19 36 00	20 9762	480	23 04 00	21 9089

表 六 (續)

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
481	23 13 61	21 9317	521	27 14 41	22 8254
482	23 23 24	21 9545	522	27 24 84	22 8473
483	23 32 89	21 9773	523	27 35 29	22 8692
484	23 42 56	22 0000	524	27 45 76	22 8910
485	23 52 25	22 0227	525	27 56 25	22 9129
486	23 61 96	22 0454	526	27 66 76	22 9347
487	23 71 69	22 0681	527	27 77 29	22 9565
488	23 81 44	22.0907	528	27 87 84	22 9783
489	23 91 21	22 1133	529	27 98 41	23 0000
490	24 01 00	22 1359	530	28 09 00	23 0217
491	24 10 81	22 1585	531	28 19 61	23 0434
492	24 20 64	22 1811	532	28 30 24	23 0651
493	24 30 49	22 2036	533	28 40 89	23 0868
494	24 40 36	22 2261	534	28 51 56	23 1084
495	24 50 25	22 2486	535	28 62 25	23 1301
496	24 60 16	22.2711	536	28 72 96	23 1517
497	24 70 09	22 2935	537	28 83 69	23 1733
498	24 80 04	22 3159	538	28 94 44	23 1948
499	24 90 01	22 3383	539	29 05 21	23 2164
500	25 00 00	22 3607	540	29 16 00	23 2379
501	25 10 01	22 3830	541	29 26 81	23 2594
502	25 20 04	22 4054	542	29 37 64	23 2809
503	25 30 09	22 4277	543	29 48 49	23 3024
504	25 40 16	22.4499	544	29 59 36	23 3238
505	25 50 25	22 4722	545	29 70 25	23 3452
506	25 60 36	22 4944	546	29 81 16	23 3666
507	25 70 49	22 5167	547	29 92 09	23 3880
508	25 80 64	22 5389	548	30 03 04	23 4094
509	25 90 81	22.5610	549	30 14 01	23 4307
510	26 01 00	22 5832	550	30 25 00	23 4521
511	26 11 21	22.6053	551	30 36 01	23 4734
512	26 21 44	22 6274	552	30 47 04	23 4947
513	26 31 69	22 6495	553	30 58 09	23 5160
514	26 41 96	22.6716	554	30 69 16	23 5372
515	26 52 25	22 6936	555	30 80 25	23 5584
516	26 62 56	22.7156	556	30 91 36	23.5797
517	26 72 89	22.7376	557	31 02 49	23.6008
518	26 83 24	22.7596	558	31 13 64	23 6220
519	26 93 61	22.7816	559	31 24 81	23 6432
520	27 04 00	22.8035	560	31 36 00	23 6643

表 六 (續)

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
561	31 47 21	23.6854	601	36 12 01	24.5153
562	31 58 44	23.7065	602	36 24 04	24.5357
563	31 69 69	23.7276	603	36 36 09	24.5561
564	31 80 96	23.7487	604	36 48 16	24.5764
565	31 92 25	23.7697	605	36 60 25	24.5967
566	32 03 56	23.7908	606	36 72 36	24.6171
567	32 14 89	23.8118	607	36 84 49	24.6374
568	32 26 24	23.8328	608	36 96 64	24.6577
569	32 37 61	23.8537	609	37 08 81	24.6779
570	32 49 00	23.8747	610	37 21 00	24.6982
571	32 60 41	23.8956	611	37 33 21	24.7184
572	32 71 84	23.9165	612	37 45 44	24.7385
573	32 83 29	23.9374	613	37 57 69	24.7588
574	32 94 76	23.9583	614	37 69 96	24.7790
575	33 06 25	23.9792	615	37 82 25	24.7992
576	33 17 76	24.0000	616	37 94 56	24.8193
577	33 29 29	24.0208	617	38 06 89	24.8395
578	33 40 84	24.0416	618	38 19 24	24.8596
579	33 52 41	24.0624	619	38 31 61	24.8797
580	33 64 00	24.0832	620	38 44 00	24.8998
581	33 75 61	24.1039	621	38 56 41	24.9199
582	33 87 24	24.1247	622	38 68 84	24.9399
583	33 98 89	24.1454	623	38 81 29	24.9600
584	34 10 56	24.1661	624	38 93 76	24.9800
585	34 22 25	24.1868	625	39 06 25	25.0000
586	34 33 96	24.2074	626	39 18 76	25.0200
587	34 45 69	24.2281	627	39 31 29	25.0400
588	34 57 44	24.2487	628	39 43 84	25.0599
589	34 69 21	24.2693	629	39 56 41	25.0799
590	34 81 00	24.2899	630	39 69 00	25.0998
591	34 92 81	24.3105	631	39 81 61	25.1197
592	35 04 64	24.3311	632	39 94 24	25.1396
593	35 16 49	24.3516	633	40 06 89	25.1595
594	35 28 36	24.3721	634	40 19 56	25.1794
595	35 40 25	24.3926	635	40 32 25	25.1992
596	35 52 16	24.4131	636	40 44 96	25.2190
597	35 64 09	24.4336	637	40 57 69	25.2389
598	35 76 04	24.4540	638	40 70 44	25.2587
599	35 88 01	24.4745	639	40 83 21	25.2784
600	36 00 00	24.4949	640	40 96 00	25.2982

表 六 (續)

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
641	41 08 81	25.3180	681	46 37 61	26.0960
642	41 21 64	25.3377	682	46 51 24	26.1151
643	41 34 49	25.3574	683	46 64 89	26.1343
644	41 47 36	25.3772	684	46 78 56	26.1534
645	41 60 25	25.3969	685	46 92 25	26.1725
646	41 73 16	25.4165	686	47 05 96	26.1916
647	41 86 09	25.4362	687	47 19 69	26.2107
648	41 99 04	25.4558	688	47 33 44	26.2298
649	42 12 01	25.4755	689	47 47 21	26.2488
650	42 25 00	25.4951	690	47 61 00	26.2679
651	42 38 01	25.5147	691	47 74 81	26.2869
652	42 51 04	25.5343	692	47 88 64	26.3059
653	42 64 09	25.5539	693	48 02 49	26.3249
654	42 77 16	25.5734	694	48 16 36	26.3439
655	42 90 25	25.5930	695	48 30 25	26.3629
656	43 03 36	25.6125	696	48 44 16	26.3818
657	43 16 49	25.6320	697	48 58 09	26.4008
658	43 29 64	25.6515	698	48 72 04	26.4197
659	43 42 81	25.6710	699	48 86 01	26.4386
660	43 56 00	25.6905	700	49 00 00	26.4575
661	43 69 21	25.7099	701	49 14 01	26.4764
662	43 82 44	25.7294	702	49 28 04	26.4953
663	43 95 69	25.7488	703	49 42 09	26.5141
664	44 08 96	25.7682	704	49 56 16	26.5330
665	44 22 25	25.7876	705	49 70 25	26.5518
666	44 35 56	25.8070	706	49 84 36	26.5707
667	44 48 89	25.8263	707	49 98 49	26.5895
668	44 62 24	25.8457	708	50 12 64	26.6083
669	44 75 61	25.8650	709	50 26 81	26.6271
670	44 89 00	25.8844	710	50 41 00	26.6458
671	45 02 41	25.9037	711	50 55 21	26.6646
672	45 15 84	25.9230	712	50 69 44	26.6833
673	45 29 29	25.9422	713	50 83 69	26.7021
674	45 42 76	25.9615	714	50 97 96	26.7208
675	45 56 25	25.9808	715	51 12 25	26.7395
676	45 69 76	26.0000	716	51 26 56	26.7582
677	45 83 29	26.0192	717	51 40 89	26.7769
678	45 96 84	26.0384	718	51 55 24	26.7955
679	46 10 41	26.0576	719	51 69 61	26.8142
680	46 24 00	26.0768	720	51 84 00	26.8328

表 六 (續)

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
721	51 98 41	26.8514	761	57 91 21	27.5862
722	52 12 84	26.8701	762	58 06 44	27.6043
723	52 27 29	26.8887	763	58 21 69	27.6225
724	52 41 76	26.9072	764	58 36 96	27.6405
725	52 56 25	26.9258	765	58 52 25	27.6586
726	52 70 76	26.9444	766	58 67 56	27.6767
727	52 85 29	26.9629	767	58 82 89	27.6948
728	52 99 84	26.9815	768	58 98 24	27.7128
729	53 14 41	27.0000	769	59 13 61	27.7308
730	53 29 00	27.0185	770	59 29 00	27.7489
731	53 43 61	27.0370	771	59 44 41	27.7669
732	53 58 24	27.0555	772	59 59 84	27.7849
733	53 72 89	27.0740	773	59 75 29	27.8029
734	53 87 56	27.0924	774	59 90 76	27.8209
735	54 02 25	27.1109	775	60 06 25	27.8388
736	54 16 96	27.1293	776	60 21 76	27.8568
737	54 31 69	27.1477	777	60 37 29	27.8747
738	54 46 44	27.1662	778	60 52 84	27.8927
739	54 61 27	27.1846	779	60 68 41	27.9106
740	54 76 00	27.2029	780	60 84 00	27.9285
741	54 90 81	27.2213	781	60 99 61	27.9464
742	55 05 64	27.2397	782	61 15 24	27.9643
743	55 20 49	27.2580	783	61 30 89	27.9821
744	55 35 36	27.2764	784	61 46 56	28.0000
745	55 50 25	27.2947	785	61 62 25	28.0179
746	55 65 16	27.3130	786	61 77 96	28.0357
747	55 80 09	27.3313	787	61 93 69	28.0535
748	55 95 04	27.3496	788	62 09 44	28.0713
749	56 10 01	27.3679	789	62 25 21	28.0891
750	56 25 00	27.3861	790	62 41 00	28.1069
751	56 40 01	27.4044	791	62 56 81	28.1247
752	56 55 04	27.4226	792	62 72 64	28.1425
753	56 70 09	27.4408	793	62 88 49	28.1603
754	56 85 16	27.4591	794	63 04 36	28.1780
755	57 00 25	27.4773	795	63 20 25	28.1957
756	57 15 36	27.4955	796	63 36 16	28.2135
757	57 30 49	27.5136	797	63 52 09	28.2312
758	57 45 64	27.5318	798	63 68 04	28.2489
759	57 60 81	27.5500	799	63 84 01	28.2666
760	57 76 00	27.5681	800	64 00 00	28.2843

表六（續）

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
801	64 16 01	28.3019	841	70 72 81	29.0000
802	64 32 04	28.3196	842	70 89 64	29.0172
803	64 48 09	28.3373	843	71 06 49	29.0345
804	64 64 16	28.3049	844	71 23 36	29.0517
805	64 80 25	28.3725	845	71 40 25	29.0689
806	64 96 36	28.3901	846	71 57 16	29.0861
807	65 12 49	28.4077	847	71 74 09	29.1033
808	65 28 64	28.4253	848	71 91 04	29.1204
809	65 44 81	28.4429	849	72 08 01	29.1376
810	65 61 00	28.4605	850	72 25 00	29.1548
811	65 77 21	28.4781	851	72 42 01	29.1719
812	65 93 44	28.4956	852	72 59 04	29.1890
813	66 09 69	28.5132	853	72 76 09	29.2062
814	66 25 96	28.5307	854	72 93 16	29.2233
815	66 42 25	28.5482	855	73 10 25	29.2404
816	66 58 56	28.5657	856	73 27 36	29.2575
817	66 74 89	28.5832	857	73 44 49	29.2746
818	66 91 24	28.6007	858	73 61 64	29.2916
819	67 07 61	28.6082	859	73 78 81	29.3087
820	67 24 00	28.6356	860	73 96 00	29.3258
821	67 40 41	28.6531	861	74 13 21	29.3428
822	67 56 84	28.6705	862	74 30 44	29.3598
823	67 73 29	28.6880	863	74 47 69	29.3769
824	67 89 76	28.7054	864	74 64 96	29.3939
825	68 06 25	28,7228	865	74 82 25	29.4109
826	68 22 76	28.7402	866	74 99 56	29.4279
827	68 39 29	28.7576	867	75 16 89	29.4449
828	68 55 84	28.7750	868	75 34 24	29.4618
829	68 72 41	28.7924	869	75 51 61	29.4788
830	68 89 00	28.8097	870	75 69 00	29.4958
831	69 05 61	28.8271	871	75 86 41	29.5127
832	69 22 24	28.8444	872	76 03 84	29.5296
833	69 38 89	28.8617	873	76 21 29	29.5466
834	69 55 56	28.8791	874	76 38 76	29.5635
835	69 72 25	28.8964	875	76 56 25	29.5804
836	69 88 96	28.9137	876	76 73 76	29.5973
837	70 05 69	28.9310	877	76 91 29	29.6142
838	70 22 44	28.9482	878	77 08 84	29.6311
839	70 39 21	28.9655	879	77 26 41	29.6479
840	70 56 00	28.9828	880	77 44 00	29.6648

表六（續）

數	平方	平方根	數	平方	平方根
881	77 61 61	29 6816	921	84 82 41	30 3480
882	77 79 24	29 6985	922	85 00 84	30 3645
883	77 96 89	29 7153	923	85 19 29	30 3809
884	78 14 56	29 7321	924	85 37 76	30 3974
885	78 32 25	29 7489	925	85 56 25	30 4138
886	78 49 96	29 7658	926	85 74 76	30 4302
887	78 67 69	29 7825	927	85 93 29	30 4467
888	78 85 44	29 7993	928	86 11 84	30 4631
889	79 03 21	29 8161	929	86 30 41	30 4795
890	79 21 00	29 8329	930	86 49 00	30 4959
891	79 38 81	29 8496	931	86 67 61	30 5123
892	79 56 64	29 8664	932	86 86 24	30 5287
893	79 74 49	29 8831	933	87 04 89	30 5450
894	79 92 36	29 8998	934	87 23 56	30 5614
895	80 10 25	29 9166	935	87 42 25	30 5778
896	80 28 16	29 9333	936	87 60 96	30 5941
897	80 46 09	29 9500	937	87 79 69	30 6105
898	80 64 04	29 9666	938	87 98 44	30 6268
899	80 82 01	29.9833	939	88 17 21	30 6431
900	81 00 00	30 0000	940	88 36 00	30 6594
901	81 18 01	30 0167	941	88 54 81	30 6757
902	81 36 04	30 0333	942	88 73 64	30 6920
903	81 54 09	30 0500	943	88 92 49	30 7083
904	81 72 16	30 0666	944	89 11 36	30 7246
905	81 90 25	30.0832	945	89 30 25	30 7409
906	82 08 36	30 0998	946	89 49 16	30 7571
907	82 26 49	30 1164	947	89 68 09	30 7734
908	82 44 64	30 1330	948	89 87 04	30 7896
909	82 62 81	30 1496	949	90 06 01	30 8058
910	82 81 00	30 1662	950	90 25 00	30 8221
911	82 99 21	30 1828	951	90 44 01	30 8383
912	83 17 44	30 1993	952	90 63 04	30 8545
913	83 35 69	30 2159	953	90 82 09	30 8707
914	83 53 96	30 2324	954	91 01 16	30 8869
915	83 72 25	30.2490	955	91 20 25	30 9031
916	83 90 56	30 2655	956	91 39 36	30 9192
917	84 08 89	30 2820	957	91 58 49	30 9354
918	84 27 24	30 2985	958	91 77 64	30 9516
919	84 45 61	30 3150	959	91 96 81	30 9677
920	84 64 00	30 3315	960	92 16 00	30 9839

表六（續）

數	平 方	平方根	數	平 方	平方根
961	92 35 21	31.0000	981	96 23 61	31.3209
962	92 54 44	31.0161	982	96 43 24	31.3369
963	92 73 69	31.0322	983	96 62 89	31.3528
964	92 92 96	31.0483	984	96 82 56	31.3688
965	93 12 25	31.0644	985	97 02 25	31.3847
966	93 31 56	31.0805	986	97 21 96	31.4006
967	93 50 89	31.0966	987	97 41 69	31.4166
968	93 70 24	31.1127	988	97 61 44	31.4325
969	93 89 61	31.1288	989	97 81 21	31.4484
970	94 09 00	31.1448	990	98 01 00	31.4643
971	94 28 41	31.1609	991	98 20 81	31.4802
972	94 47 84	31.1769	992	98 40 64	31.4960
973	94 67 29	31.1929	993	98 60 49	31.5119
974	94 86 76	31.2090	994	98 80 36	31.5278
975	95 06 25	31.2250	995	99 00 25	31.5436
976	95 25 76	31.2410	996	99 20 16	31.5595
977	95 45 29	31.2570	997	99 40 09	31.5753
978	95 64 84	31.2730	998	99 60 04	31.5911
979	95 84 41	31.2890	999	99 80 01	31.6070
980	96 04 00	31.3050	1000	100 00 00	31.6228

參 考 書 目

朱 君 毅：教育統計學　商務印書館

王 書 林：教育統計學　商務印書館

周 調 陽：教育統計學　中華書局

金 國 寳：統計學　商務印書館

艾　 偉：高級統計學　商務印書館

侯　 璠：教育統計法　中華文化出版事業委員會

田 克 明：統計學　國光印製廠

葛雷德著
朱君毅譯：心理與教育之統計法　商務印書館

金氏原著
甯恩承譯：統計方法　商務印書館

Arkin and Colton著
朱 君 毅譯述：統計方法大綱　正中書局

胡 國 鈺：高等統計學講義　國立西北師範學院

匡 煥 葆："近年來統計學理論之新發展"（測驗年刊第一卷）中國測驗學會

Baten, W. D.: "Elementary Mathematical Statistics", New York: John Willy & Sons, 1938.

Enlow, E. R.: "Statistics in Education and Psychology", New York: Prentice-Hall, 1937.

Ferguson, G. A.: "Statistical Analysis in Psychology and Education", New York: McGraw-Hill Book Company, 1959.

Gray, C. T.: "Statistics Applied to Education and Psychology", New York: The Ronald Press Company, 1939.

Guilford, J. P.: "Fundamental Statistics in psychology and Education", New York: McGraw-Hill Book Company, 1956.

Johnson, P. O. and Jackson, R. W. B.: "Modern Statistical Methods", Chicago: Rand McNally & Company, 1959.

Kelly, T. L. : "Statistical Method", New York : The Macmillan Company, 1924.

Kendall, M. G. and Stuart, A. : "The Advanced Theory of Statistics", Mew York: Hafner Publishing Company, 1960.

Lacey, O. L. : "Statistical Methods in Experimentation", New York : The Macmillan Compauy, 1960.

Michael, W. B. : "Development of Statistical Methods Especially Useful in Test Construction and Evaluation", Review of Educational Research, XXVI (Feb., 1956), 89-109.

Odell, C. W. : "Educational Statistics", New York : The Century Company, 1925.

Peters, C. C. : "Statistical Procedures and their Mathematical Bases", New York : McGraw-Hill Book company, 1940.

Rugg, H. O. : " Statistical Methods Applied to Education", Boston : Houghton Mifflin Company, 1917.

Sorenson, H. : "Statistics for Students of Psychology and Education", New York:McGraw-Hill Book Company, 1936.

Tate, M. W. : "Statistics in Education", New York : The Macmillan Company, 1955.

Walker, H. M. : "Mathematics Essential for Elementary statistics", New York : Henry Holt and Company, 1951.

Walker, H. M. : "Studies in the History of Statistical Method", Baltimore : The Williams & Wilkins Company, 1931.

Wert, J. E. and others : "Statistical Methods in Educational and Psychological Research", New York:Appleton-Century-Crofts, 1954.

Yule, G. U. and Kendall, M.G. : "An Introduction to the Theory of Statistics", New York : Hafner publishing Company, 1950.

教育統計學概要

中華民國五十一年十二月初版