

數學素養導向的任務設計與教學實踐 ——以發展學童的數學論證為例

林碧珍 鄭章華 陳姿靜

本文旨在提供國小階段十二年國教素養導向任務設計與教學實踐之範例，作為教科書編撰者落實到數學教材設計之參考，並協助教師瞭解課堂中數學素養培養的作法。本文首先探討素養內涵中數學論證的意義與重要性；其次，以數學論證為教學目標及以四年級「認識各種三角形及其性質」為教學脈絡，設計數學臆測任務，來詮釋從官方到書面課程的轉化；並以教師在課堂中的教學實踐說明從書面到實踐課程的轉化。本文提出數學臆測是培養素養內涵中數學論證的途徑之一。數學臆測能幫助學童建立較嚴謹的數學知識，能引出一叢相關的數學性質或概念，能培養學童提出證據以取信他人，以及能舉出反駁的例子或證據推翻他人的觀點之民主素養。本文於文末提供建議給教科書編撰參考。

關鍵詞：十二年國教、書面課程、數學領域、數學素養、數學論證

收件：2015年8月17日；修改：2015年12月21日；接受：2016年3月3日

林碧珍，國立新竹教育大學數理教育研究所教授，E-mail: linpj@mail.nhcue.edu.tw
鄭章華，國家教育研究院課程及教學研究中心助理研究員
陳姿靜，新竹市頂埔國小教師

Task Design and Implementation for Mathematical Literacy: Developing Students' Mathematical Argumentation

Pi-Jen Lin Chang-Hua Chen Chih-Ching Chen

This paper provides an exemplar for textbook writers and teachers to design tasks for mathematical literacy and implementing them into classrooms. Mathematical literacy is the kernel focus of the current innovations of 12-year compulsory education. This paper begins by briefly introducing the significance and the meaning of mathematical argumentation. Then, a task design for conjecturing integrated into mathematics content with recognizing various triangles and its properties as an example to illustrate the meaning of transforming intended curriculum into written curriculum. It is suggested that mathematical conjecturing is an approach to evoke mathematical argumentation as one aspect of mathematical literacy. Mathematical conjecturing is an approach for illustrating mathematics as a language and mathematics as scientific pattern. Mathematical conjecturing has a power of construing a series of connected mathematics properties or mathematics concepts as an approach to enhancing mathematical literacy. Moreover, mathematics as a language and mathematics as a pattern of science are achieved via conjecturing. Students convince others via warrants and reject the arguments of others using rebuttals or they support others' arguments via warrants or backing. This paper concludes with remarks for mathematical textbooks for textbook editors and teachers.

Keywords: 12-year compulsory education, written curriculum, mathematics learning area, mathematical literacy, mathematical argumentation

Received: August 17, 2015; Revised: December 21, 2015; Accepted: March 3, 2016

Pi-Jen Lin, Professor, Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Hsinchu University of Education, E-mail: linpj@mail.nhcue.edu.tw

Chang-Hua Chen, Assistant Research Fellow, Research Center for Curriculum and Instruction, National Academy for Educational Research.

Chih-Ching Chen, Teacher, Hsinchu Ding-Pu Elementary School.

壹、緒論

2014 年 11 月 28 日由教育部公布十二年國民基本教育（以下簡稱十二年國教）課程綱要總綱，將於 2018 年起開始逐年實施，是我國教育自九年一貫課程實施以來的一大變革。十二年國教課程總綱提出了「成就每一個孩子——適性揚才、終身學習」的課程願景及「自發、互動、共好」的核心理念，強調學童是主動的學習者（十二年國民基本教育課程綱要總綱，2014）。為落實理念與目標，將以「核心素養」做為課程發展之主軸，以利於達成各年級階段間的連貫以及各領域間的統整。

十二年國教以核心素養（key competency）為主軸，呼應了世界其他國家教育改革的理念，例如歐盟及經濟合作與發展組織（European Commission, 2007; The Organization for Economic Co-Operation and Development [OECD], 2005）。核心素養強調要為下一代的進階學習與職涯發展做好準備，促成社會的良好運作以及個人人生目標的實現。核心素養也強調學習不再僅以學科知識及技能為限，而更應關注學習與生活的結合，透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展。

十二年國教課程強調的核心素養不同於以往九年一貫課程強調的基本能力。十二年國教著重以人為本的全人教育（蔡清田、陳延興，2013），三大面向的核心素養：「自主行動」、「溝通互動」與「社會參與」強調培養有能力、有意願進行終身學習的學習者，能解決生活情境中所遇到的問題，並能因應社會與時代變遷而不斷自我精進（國家教育研究院，2014a）。其課程發展的想法是藉由各領域的學習共同成就核心素養的培養，不像九年一貫課程每個學習領域都要承擔十大能力發展的任務。那麼，究竟要（1）如何轉化十二年國教數學素養培養的理念於教學設計？（2）如何轉化十二年國教數學素養培養的理念於教學實踐？成為本文的待答問題。

當今強調核心素養的十二年國教課程即將上路，爲了落實十二年國教的理念，不僅和以往的課程改革一樣，須要考慮不同層級課程轉化的問題，而且還須要關注這次的課程改革是嶄新的作爲，沒有過去的案例可循。是故，本文是以數學領域爲例，提供國小階段數學素養導向的教材設計及教學範例，探究如何把十二年國教數學核心素養培養的理念具體落實到教材發展，以及如何進行素養導向的教學，以幫助中小學教師認識十二年國教數學課程，並提供教科書編寫者的參考。

貳、文獻探討

一、數學領域核心素養從官方課程到書面課程及實踐課程的轉化

雖然十二年國教的理念符合國際教育改革趨勢與研究證據所支持（蔡清田、陳延興，2013），然而，從以往教育改革的經驗可以得知，課程轉化是課程改革成敗的關鍵。如何將學習內容轉化到教科書作爲教師教學和學童學習的參考依據呢？這個轉化過程就是官方課程轉化至書面課程（written curriculum）。由於我國中小學教師相當依賴教科書進行教學（林碧珍、蔡文煥，2006），故十二年國教課程理念與目標若能藉由教科書設計來傳達，教科書將成爲課程改革的有力推手；反之，若教科書傳遞的教育內涵和課程理念與目標背道而馳時，則教科書極可能成爲課程理念轉化的重大阻礙（張芬芬、陳麗華、楊國楊，2010）。因此，爲使十二年國教課程綱要的官方課程順利轉化至教材及教學現場，教育部補助相關計畫正在如火如荼的展開。課程轉化的相關文件提出了一些原則及建議，諸如：教育部在《十二年國民基本教育課程發展建議書》提出素養的培養必須適當地結合「情境學習」、「專題導向」及「生活實踐」教學整合到相關教材（國家教育研究院，2014b）；在數學領域素養的培養，李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏（2013）進一步建議數學教學內

容可以做模組化設計，讓教師與學童可根據教學或學習的需求，自行增添或選擇數學內容，但這些都只是原則性的建議與參考。目前，國家教育研究院課程及教學研究中心正在進行三年期的總計畫「十二年國民基本教育領域教材與教學模組研發模式之研究」，研發數學、自然科學、語文、生活課程等領域的教材與教學模組，至本文撰稿前，與數學素養相關教材與教學模組尚未在坊間看到。

因此，本文是依循數學領域核心素養中有關認識三角形及其性質的學習內容，設計與實踐國小階段數學素養導向的教學，以提供給教科書編輯群設計教材的參考。此處教學設計是涉及官方課程轉化到書面課程，而教學實踐是涉及書面課程轉化到實踐課程。由於本文目的在於提供有關數學素養導向的教材設計與教學實踐的範例，故所採用的數學素養內涵是依據十二年國教課程綱要數學領域的界定。本文除了對數學素養的內涵加以闡釋之外，不再針對國內外有關核心素養的文獻在內涵、意義及其相關研究進行評析與探討。

二、數學素養的內涵

受到 TIMSS、PISA 等國際性有關數學成就或數學素養評比研究的影響，數學素養的培養成為許多國家近期數學課程改革的目標，例如：丹麥、荷蘭、德國、法國、美國、英國、日本、韓國、新加坡。美國《共同州立核心標準》（Common Core State Standards Initiative, 2010）的目標是為學童的大學與職場生涯做準備。此標準除了數學內容標準還包含數學實踐標準（Standards for Mathematical Practice），數學實踐標準旨在協助落實數學內容標準，描述數學教育專業人員應該積極協助學童發展的專門知識與能力（expertise），這些專門知識與能力包含數學教育最重要的過程與精熟能力（processes and proficiencies），是數學素養的內涵。數學實踐標準有八項，其中第三項（MP3）的內容強調培養學童建構合理的論述並能批判他人的論點。這個實踐標準可以更進一步解釋為：一位

具有數學素養的學童能瞭解並使用假設、定義、及學過的數學概念來建立數學論證，也能從觀察資料中提出猜測，並利用各種不同的推理類型來驗證猜測（National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers [NGA Center & CCSSO], 2010）。此實踐標準也呼籲要培養不同年級的學童能傾聽或讀懂他人的論述，並能判斷哪一個論述較為合理，並要能提問來釐清或修正不合理的論述。

英國 2013 年新制訂的國家數學課程，也以數學素養為目標，藉由高品質的數學教育，提供方法讓學童認識世界（如日常生活、科學評析、科技與工程、財金素養及大多數的職業相關議題）、利用數學進行推理、欣賞數學的美與威力（power）、對數學能有愉悅感與好奇心（Department for Education, 2013a, 2013b）。此課程標準目標之一是期望學童能藉由探究、臆測，提出數學性質，並用數學語言描述論述，並驗證或證明此論述。

為了呼應國際趨勢，我國十二年國教的數學領域課程，提出以數學素養為目標。數學素養的培養，除了讓學童具備與自己相關的生活、社會、職業和科學所需的數學知能之外，也能為學童未來高等教育與職場生涯之所需的知能做準備。在林福來、單維彰、李源順與鄭章華（2013）的前導研究中是以「知」、「行」、「識」三者的滾動及衍化來詮釋國民基本數學素養的內涵。「知」就是「學什麼」或者「是什麼」，指的是數學內容；數學內容包括數學素養所強調的改變與關係、空間與形狀、數量、不確定性和資料；數學的本質就是一種規律的科學，是一種符號科學，有其規律性的美感，因此在數學內容的「知」方面，可以培養對數學激賞（admirable）之美及數學愉悅（enjoyable）之美。「行」就是「怎麼做」或者「怎麼用」，指的是學童所能展現出來的數學能力，包括程序執行、解題、溝通、論證及解題的各種歷程，諸如：蒐集、觀察、分類、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。「識」就是「為什麼」、「你認為」，指的是對數學的內在認知與情意涵養，內在認知包括概念理解、推理、連結、

及解題的各種方法，諸如：歸納、演繹、推理、推論、類比、分析、轉化、一般化、特殊化、模型化、系統化、監控等後設認知；情意涵養如欣賞數學的美。

李國偉等人（2013：21）參考了國內外文獻，如 PISA 的數學素養，提出數學素養的定義與內涵，數學素養的內涵包含：個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。該定義呼應十二年國教總綱核心素養「自主行動」面向中的「身心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」三項；該定義除了強調活用基本數學知識來解決日常生活中的問題之外，也提出數位工具在問題解決過程中的重要性，這呼應「溝通互動」面向中的「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」項目。他們建議融入數學文化的相關素材，不僅讓學童認知到數學對於人類歷史的貢獻，也能欣賞數學的美與和諧性，這呼應了「溝通互動」面向中「藝術涵養與美感素養」項目。該定義強調邏輯、抽象以及創新思維與能力的培養，數學素養對於培養能理性反思、做出合理判斷，並能有效與他人或群體有效溝通觀點公民的重要性，具體落實「社會參與」面向之核心素養。

基於以上有關數學素養內涵的分析，其內涵包羅萬象，其「知」、「行」、「識」三面向交織夾雜在一起、不像數學概念一樣，透過一、兩個活教學活動設計即可達成的，而是需要長時間來培養。然而，雖說數學素養的內涵相互交織在一起，但仍可對其每一向度抽絲剝繭，一點一滴長時間的累積培養。就如前面文獻所言，英國的課程強調須要培養學童能藉由探究、臆測，提出數學性質，並用數學語言描述論述，並驗證或證明此論述。美國的課程實踐標準也強調要培養各個不同年級的學

童，能傾聽或讀懂他人的論述，並能判斷哪一個論述較為合理，並要能提問來釐清或修正不合理的論述。李國偉等人（2013）也強調數培養學童能理性反思、做出合理判斷，並能有效與他人或群體有效溝通觀點的重要性。這些文件共同指出論證的教學為「培養學童藉由探究、臆測，提出數學性質，並用數學語言描述論述，能傾聽或讀懂他人的論述，並能以理性做出合理的判斷，並加以驗證或證明此論述」的重要性。簡而言之，在數學課堂中培養學童論證，將會是 21 世紀世界許多國家中要培養學童數學素養的重要內涵之一。因此本文要提供數學素養導向的教學設計與實踐的範例，其目標是在培養學童數學素養內涵之一：數學論證。

三、從數學臆測培養數學素養內涵中數學論證的意義與重要性

除了上述為符應數學教育發展趨勢外，亦可從數學本質觀點論述數學論證的重要性。其重要性可以從其定義中略知。不同學者對數學論證持有不同的意義，也因此對數學論證、數學推理、數學證明三者的關係也有不同的主張。但其共通點為：論證是支持或反對一個命題或意見的理由，它可以是語言文字、數字資料或圖畫的形式。例如：Toulmin（1958）將論證解釋為從已知資料推演到結論的過程，是用來支持結論的證據，這些證據可能是一些推理規則或數學原理或定理，但不一定是演繹的。Douek（1999）將證明視為是論證的一種；Krummheuer（2007）認為證明通常是屬於個人的數學活動，但數學論證是一種社會化過程，所以論證不被視為是用來促進或阻礙證明的學習，而是被視為數學學習的本質。林碧珍（2015）對數學論證定義是學童在數學臆測活動下，從建立並觀察及組織資料、發現關係並提出猜想、驗證猜想、猜想一般化、到證明一般化的過程。在這過程中，學童有機會從有限例中推演到一般化過程，進行歸納推理，並在證明一般化的階段，有機會利用演繹推理來

證明一般化。因此本文所界定的數學論證是在課堂中進行數學臆測教學活動脈絡下產生的，故它是在數學臆測中發生的；在臆測過程中，從建立資料、建立證據作為形成論述或檢驗論述的證據或依據，以支持結論的過程。因此本文所提供的範例中學童所展現的證明和推理是在數學論證中發生，數學論證活動涉及證明與反駁，對發展學童的數學思維具有重要的意義。

本文所提供數學素養導向的教學設計與實踐的範例，¹是在數學臆測活動教學脈絡下，發展學童的數學論證。為何發展學童的數學論證是在數學臆測活動的教學脈絡下進行？理由有二：第一個理由是數學臆測在數學知識的形成扮演著重要的角色，數學知識是經過一個數學臆測的歷程「猜測—檢驗—反駁—再猜測—再檢驗—證明的遞迴歷程」而產生的（Lakatos, 1976）。其中證明是運用數學定義、定理、或性質對原猜想加以驗證，而反駁是用反例來推翻原猜想。數學知識在不斷地驗證與反駁的修正過程中，因而使得所提出的猜想內容朝向更精煉、更穩固的結論。

第二個理由是因為數學論證發生在數學臆測的歷程中。林碧珍（2015）依據 Cañadas 與 Castro（2005）所提出的從有限例歸納的數學臆測類型，提出數學臆測與數學論證兩者所存在的密切關係如下：（一）數學臆測的造例和組織例子階段分別是建立數學論證的基本元素——「建立資料」及「建立證據」，這兩個元素是為了形成論述及檢驗論述而作準備。（二）數學臆測的發現關係和形成猜想，是成為數學論證的「主張或結論」元素。（三）數學臆測的檢驗、驗證、證明，成為數學論證「提出論證依據」元素；檢驗猜想是依據建立的資料來說服他人相信自己的論述，驗證是找其他例子來支持自己提出的論述，此時反駁可能在這當中發生；反之，若是提出的論述得到更多例子的支持，則增加了此論述的可信度。證明是再進一步效化驗證過的論述，因此經過證明

¹ 本範例是取自本文第一作者執行的科技部科教發展與國際合作司補助的「國小在職教師設計數學臆測活動的專業成長研究」(NSC 100-2511-S-134-006-MY3)研發的數學臆測任務之一。

後的結論不僅成為大家可接受的公共數學知識或數學性質而且是具有嚴謹性的。值得注意的是，論證不一定是中學階段所學的形式證明，如前所述，它可以是語言文字、數字資料或圖畫的表徵，不限於使用從前提推論出命題的演繹法。小學階段論證的學習雖然很重要，然而在現行九年一貫課程中卻沒受到應有的重視（林福來等人，2013）。

參、研究方法與設計

一、數學素養導向的任務設計

（一）數學臆測融入國小四年級「認識三角形及其性質」的理由

本文選擇國小四年級「三角形的認識與性質」的學習內容，其教學目標為：透過數學臆測認識各種三角形（直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形、及等腰直角三角形）及其性質。融入數學臆測於此單元的教學設計與實踐，是因為它是本文第一作者過去三年期間協助教師尋找教科書中可以融入數學臆測的內容，每年設計並實踐 15 個數學臆測活動中的一個活動。選擇「認識三角形及其性質」為教學脈絡，還有其他五個理由：（1）以一個數學臆測任務可以達成教科書有關「認識各種三角形及其性質」的所有教學目標；（2）「認識三角形與性質」是九年一貫課程亦是十二年國教課程數學領域學習的內容；（3）此臆測任務是取代課本的活動，非外加的課程；（4）此數學臆測任務設計已在四年級的三個班級實踐；（5）本文的目的主要在於分享一個數學臆測活動能引動出學童數學論證的任務設計與教學實例。

（二）數學臆測任務設計原則

數學任務對數學學習扮演重要的角色（Stein & Lane, 1996）。並非所有任務都能通往數學臆測，例如，只要套公式即可求解的數學任務，並

不會產生數學臆測的需求，因此選擇及設計適當的數學臆測任務顯得格外重要。依據 Cañadas、Deulofeu、Figueiras、Reid 與 Yevdokimov（2007）提出臆測有五種類型，在小學階段比較普遍的數學臆測類型是從有限例歸納進行臆測（林碧珍，2015）；它形成七個階段的認知歷程為：（1）觀察例子；（2）組織例子；（3）尋找規律；（4）形成猜想；（5）驗證猜想；（6）猜想一般化；及（7）證明一般化。也就是，學童在面對任務時，第一階段需要先從所給定的一、兩個例子開始觀察；第二階段有系統地將這些例子組織起來；第三階段從組織的資料中尋找規律性，使所發現的規律也可以適用在其他沒有列出來的例子中。第四階段形成猜想，是依據所發現的規律提出猜想，使得此猜想適用在更多的例子，但是對此猜想仍然存疑或不確定該猜想是否恆真。第五階段效化猜想，是再以更多其他或不同類型的例子驗證此猜想是否正確，但此時所提出的猜想還未推廣到一般化。第六階段是將所提出的猜想推廣到一般化，這個階段的猜想是要排除存疑或不確定的情況，使猜想成為恆可接受的數學性質。第七階段是證明一般化，以演繹推理證明此一般化，以取信他人，而成為大家可接受的公共數學知識。

若要讓學童有機會學習數學臆測歷程的這七個階段，則數學任務要有目的性地設計，使得任務本身需要具有這些階段的特性。為達成此目標，本文所提供的範例將依據 Cañadas 等人（2007）提出的七個臆測認知歷程，並考慮讓學童能藉由參與而獲得深刻的經驗，因此在任務最開頭時增加了造例的階段，特別鼓勵由學童造例；將造出的例子組織並觀察，合併為第一階段。將尋找規律及形成猜想階段合併為形成猜想，因此將七個認知歷程修正為五個階段的數學臆測任務設計原則：（1）造例、彙整、組織例子：先由學童個別、小組或教師造例，再彙整、組織例子。（2）發現關係並提出猜想：組織例子之後，從這些已知的例子尋找規律，發現關係，進而提出暫行性猜想。（3）驗證猜想：要提出更多例子擴大驗證先前提出的暫時性猜想是否仍然有效。（4）猜想的一般

化：從先前有限的例子，擴大到所有的例子，使所提出的猜想都成立，因此有時需要排除存疑或不確定的情況，限制條件或範圍，使猜想成為恆真的數學命題。(5) 證明一般化：將猜想一般化後，透過各種證明的方法來證實此一般化，以取信他人，這個一般化經證明後即成為公共的數學性質。

(三) 數學臆測融入「認識三角形及其性質」的任務設計

爲了能增加數學臆測每一階段的豐富性，從造例開始到提出猜想，最後能順利通往得到結論；在設計臆測任務時，特別考量教室的活動型態，是個人、還是小組或全班活動。例如，若只由單一例子比由多個例子來發現關係在難度上較高，且由單一個例子比由多個例子觀察所發現的關係，其可靠度較低。故在設計數學臆測任務時，除了依據上述數學臆測的五個階段作為任務設計的原則外，亦同時考量教學實踐的活動型態。

因此本範例依據教學目標：「透過數學臆測以邊、角認識各種三角形及其性質，並培養學童的論證能力」。將活動設計為三節課，如表 1。

表 1 認識三角形及其性質的臆測與論證教學活設計

節數／ 教學目標	內容	數學臆測五 個階段	活動 型態
第一節課教 學目標：各種 三角形的認 識	1.每組發下 30 根扣條（五種顏色，每種顏色 6 條）。每人用扣條做出 2 個三角形。	造例	個人
	2.觀察這 8 個三角形，想一想，你們會怎麼分類？完成小組工作單，並將三角形貼在工作單中。	彙整、組織、 尋找規律、發 現關係、提出 小組猜想	小組

(續)

表 1 認識三角形及其性質的臆測與論證教學活設計（續）

節數／ 教學目標	內容	數學臆測五 個階段	活動 型態
第一節課教 學目標：各種 三角形的認 識	3.比較各組分類的理由，有什麼不同的方式？ （1）第○組組成三角形邊的扣條顏色有哪些 方式？ （2）三角形中扣條的顏色和三角形的邊有什 麼關係？ （3）怎麼幫這三種類型的三角形命名呢？ （4）從第○組以角度的分類方式，你發現了什 麼？ （5）觀察這些以角度的分類，你發現了什麼？ （6）想一想，三角形的三個角會有哪些組成方 式？ （7）怎麼幫這三種類型的三角形命名呢？	觀察關係 提出全班猜想	全班
第二節課教 學目標：透過 臆測活動發 現各類三角 形三內角的 組成形式和 大小關係，並 發展學童的 數學論證	1.每組發下七個三角形圖卡（已標示角度，相 同邊長以同色表示） （1）想一想，要怎麼分類？將分類的圖卡貼在 工作單上，並記錄每個三角形三個角的角 度。 （2）觀察小組工作單中的「各類三角形」和 「所記錄的角度」，你發現什麼數學想 法？ （3）報告個人發現的數學想法，小組互相檢 驗正確性。 （4）小組發現哪些不同的數學想法？怎麼分 類？ （5）觀察各組發現的數學想法，可以怎麼分 類？ （6）整理全班發現的數學想法，這些想法可以 再分類嗎？	彙整、組織 尋找規律、發 現關係 提出個人猜想 提出小組猜想 提出全班猜想	個人 小組 全班
	2.每組發下一種類型的三角形（包括銳角三角 形、直角三角形、鈍角三角形、等邊三角形、 等腰三角形、不等邊三角形）。 （1）這個三角形的三個角合起來也是 180 度？ （2）所有的三角形內角和都是 180 度嗎？ （3）您怎麼證明所有三角形的三個角合起來 也是 180 度？ （4）報告個人的想法，組員互相檢驗正確性。 （5）小組發現哪些方法可以證明這個三角形 的三個角合起來是 180 度？ （6）請證明直角三角形只有一個直角。 （7）請證明鈍角三角形只有一個鈍角。	驗證猜想（三 角形內角和 180 度） 猜想一般化 證明一般化 檢驗 證明 證明 證明	小組 全班 個人 小組 全班

（續）

表 1 認識三角形及其性質的臆測與論證教學活設計（續）

節數／ 教學目標	內容	數學臆測五 個階段	活動 型態
第三節課教 學目標： 1.透過臆測活 動瞭解等腰 三角形的兩 底角相等，並 發展學童的 數學論證 2.證明正三角 形三內角相 等，且都為 60 度	1.每組發下 4 種等腰三角形，每人挑選一張。 （1）等腰三角形有兩個相同的角嗎？在哪裡？ （2）報告個人的想法，組員互相檢驗正確性。 （3）所有等腰三角形都有兩個相同的角嗎？ （4）小組發現哪些方法可以證明等腰三角形有兩個相同的角？	驗證猜想 猜想一般化 證明一般化	個人 小組 全班
	2.每組發下 4 種等邊三角形，每人挑選一張。 （1）等邊三角形的三個角都相等嗎？為什麼？ （2）報告個人的想法，組員互相檢驗正確性。 （3）所有等邊三角形的三個角都相等嗎？ （4）小組發現哪些方法可以證明等邊三角形的三個角都相等？	驗證猜想 猜想一般化 證明一般化	個人 小組 全班

二、數學臆測融入國小四年級「認識三角形及其性質」的教學實踐

四年級有四個班級實踐該任務，每個班級進行教學時，都一起進行教學觀察。每一個班級教學實踐後進行教師的專業對話討論，所給的意見或建議成為另一個班級修改任務的依據。因此本文呈現的是該任務最後修正版在一個班級所進行的教學實踐。該班共有 24 位學生，全班共分為六組，每組 4 人。由於篇幅所限，本文僅提供第二節和第三節課的數學臆測教學實踐歷程：

（一）數學臆測教學階段一：造例、彙整及組織例子

爲了能豐富學童同時考慮「以邊和角的關係，認識各種不同三角形」的經驗，例如等腰三角形可能是直角、銳角、鈍角三種情形，不等邊三角形有可能是銳角、直角、鈍角三種情形，正三角形有大小不同的情形。因此第二節課直接由教師提供七個不同的三角形，如圖1，由於個別學童造例，大都是銳角三角形，在小組內不易產生不同種類的三角形。

從六組學童的分類中，發現都是以邊長的屬性來分類這七個三角形，他們共分爲三類：等邊三角形、等腰三角形、不等邊三角形，如圖 2。這樣的分類，很可能是來自於教師設計各類圖形的考量，教師的考量是爲了避免學童花太多時間在測量上，而刻意在這七個三角形中的每一個相等邊長的邊上描出相同的顏色。

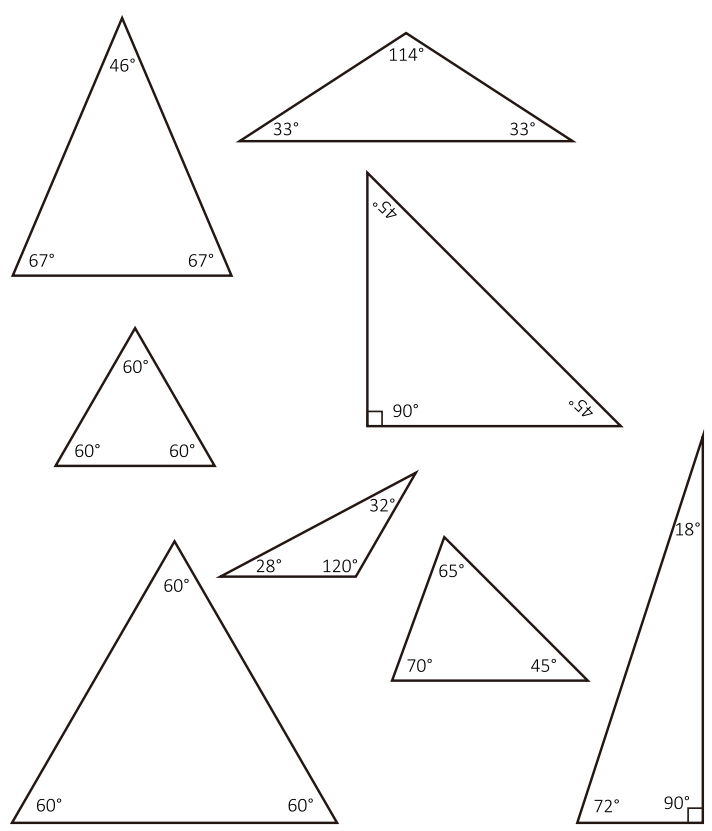


圖 1 教師提供的七個三角形圖卡

103 年 11 月 24 日第一題 (1-1)題 四年丙班第(二)組 (15.3.37) 號

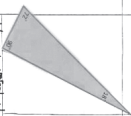
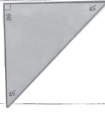
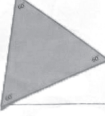
貼上圖形	角1度數	角2度數	角3度數
每個邊都不一樣長 	18°	90°	72°
	70°	65°	45°
有二等邊三角形 	45°	45°	90°
	114°	33°	33°
有正三角形 	46°	67°	67°
	60°	60°	60°
	60°	60°	60°

圖 2 學童的分類

(二) 數學臆測教學階段二：發現關係、提出猜想

當學童分類後，教師先請個別學童觀察小組工作單中的「各類三角形」和「所記錄的角度」，尋找規律、發現關係，並要求他們提出所發現的猜想。此時，因學童的程度不同，即使低成就學童所發現的關係很淺顯表層，或用不精準的語言在描述他們的猜法，但他們卻是很認真地參與。全班共提出 23 個猜想。

(三) 數學臆測教學階段三：驗證猜想

圖 3 中，學童所提出的 10 個猜想，是藉由觀察有限個例子，因此

這些猜想有可能是有瑕疵或錯誤的，須要進一步檢驗其正確性，或驗證其有效性。爲了讓學童檢驗其正確性，教師要求學童：「報告個人的想法，組員互相檢驗正確性」。透過組內同儕相互檢查猜想是否和已知例子相符合。爲了讓學童驗證其有效性，須要再以更多例子來驗證是否仍然支持原猜想。以驗證「三角形內角和等於 180 度」爲例，教師因爲擔心學童無法畫出準確的三角形，沒有讓學童自己畫出新的三角形，而直接提供給每一組學童一個三角形，六組都是不同種類的三角形（如圖 4）進行驗證。

在這些猜想中，教師優先以「三角形內角和等於 180 度」進行驗證，主要理由是因爲其他猜想「直角三角形的兩個比較小的角加起來都等於 90 度」、「銳角三角形有 2 個，三角形的 3 個角都是 60 度」、「鈍角三角形中鈍角是最大的角」、「等邊三角形的每一個的度數都一樣」、「直角三角形中只可能有一個直角」、「鈍角三角形中只能有一個鈍角」、「有三個相等的角是銳角三角形」、「等邊三角形都是 60 度」，都可以利用三角形內角和 180 度來證明。從此可看到，「三角形內角和等於 180 度」性質在四年級認識三角形這個單元中扮演很重要的角色，若學童能具有此概念，不僅能幫助學童超越量角器測量的操作性證明，進而提升到較高層次的演繹證明，而且能幫助學童瞭解三角形其他更多的性質。另一個理由是學童認爲正三角形的三個角相等，可能誤認爲三個角爲「50、50、50」就是一個正三角形。若沒有「三角形內角和 180 度」的概念，很難協助學童釐清此迷思概念。基於上述理由與教學實踐，「三角形內角和等於 180 度」建議可提前至四年級學習。

（四）數學臆測教學階段四：猜想一般化

由於學童進行以上的活動都是在有限例子的情況下，都能支持原猜想，但不確保在所有的三角形，原猜想也成立。因此教師提問「所有的三角形內角和都是 180 度嗎」？讓學童將原猜想推廣到一般化。

與三角形角度有關的猜想

1.每個三角形的三個角度數雖然不一樣,但合起來都是180度。
金屯角三角形中鈍角是
同大的角
直角三角形的兩個比
較小的角加起來都等於90。
銳角三角形有2個三角
形的3個角都是60°

與三角形的邊長有關的猜想

等腰三角形開刀的角度和
邊長有2個一樣。
正三角形的邊和角
度都一樣。(第一組)
等邊三角形都
是60°。
等邊三角形每一個角的度數
都一樣。第(3)組
不等邊三角形是每一個角
的度數都不一樣。G3
不等邊三角形的邊和
角度都不同。(第一組)(B)組

圖 3 全班提出的猜想中與教學目標相關的 10 個猜想

六種三角形圖片

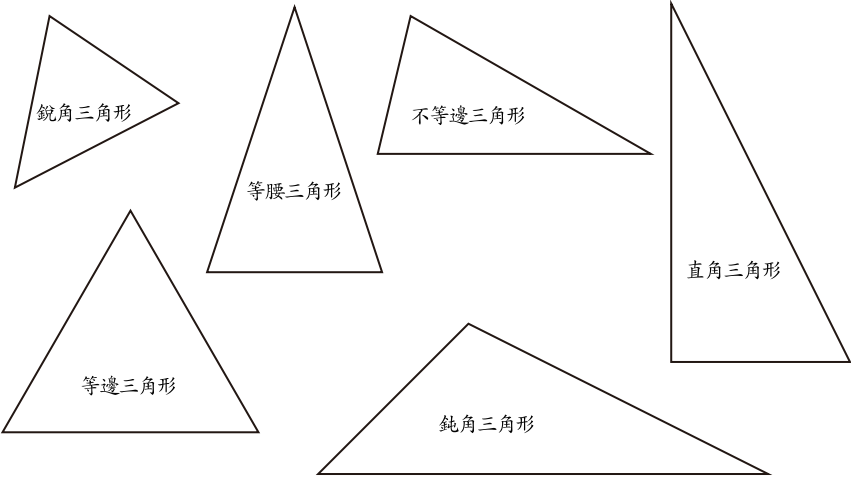


圖 4 教師提供給學童驗證「三角形內角和等於 180 度」

（五）數學臆測教學階段五：證明一般化

從數學臆測第一階段開始，進入到證明一般化，目的就是要學童能使用演繹推理來證明尚未證實的猜想，幫助學童提升到證明的最高層次。

1. 「所有三角形內角和等於 180 度」的一般化證明

有關「所有三角形內角和等於 180 度」的一般化證明，在此任務中教師提問：「小組發現哪些方法可以證明這個三角形的三個角合起來是 180 度」？四年級學童提出的五種不同證明方法。其共同點是將三個內角拼成一個平角，其不同在於三個內角的來源不同。有的是用同一個三角形的三個內角，分別取出不同的一個角拼成一個平角，有的是圍繞一個點描出三個內角而形成平角，有的是將三個內角往內摺，使得三個角形成一個平角，有的是直角三角形的較小的兩個角拼成直角，但這種證明方法僅適用在直角三角形。

2. 「所有等腰三角形的兩底角相等」和「所有正三角形三內角相等」的一般化證明

有關「所有等腰三角形的兩底角相等」和「所有正三角形三內角相等」的一般化證明，教師先分別提供給學童每組四張大小不同的等腰三角形，每人各一張，如圖 5，和四張大小不同的等邊三角形之後，每人各一張，如圖 6，再向學童提問：「小組發現哪些方法可以證明等腰三角形有兩個相同的角」？

從教學觀察發現，透過數學臆測活動幫助四年級學童在證明「等腰三角形兩底角相等」或「正三角形三個角相等」時，學童可以主動地使用摺的方法來證明，並類推到「正三角形三個角相等」的證明，以同一個角分別摺向另外兩個角，此時，學童從「等腰三角形兩底角相等」的證明發展出類比推理到「正三角形三個角相等」的證明。

四個不同的等腰三角形

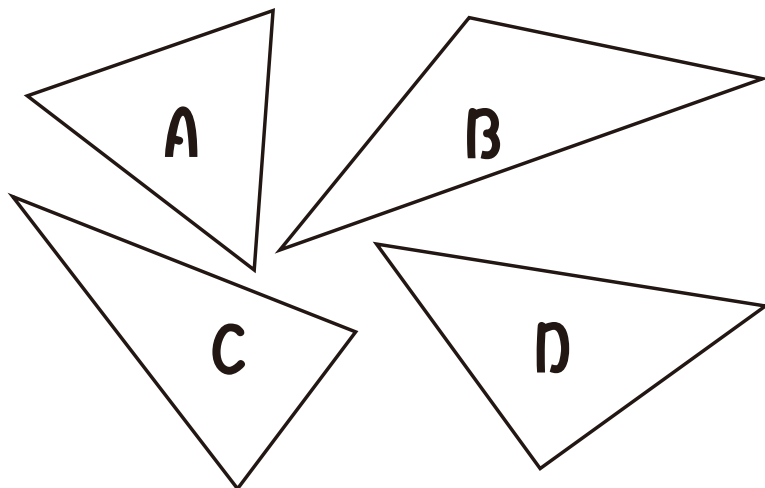


圖 5 四張大小不同的等腰三角形

四個不同的等邊三角形

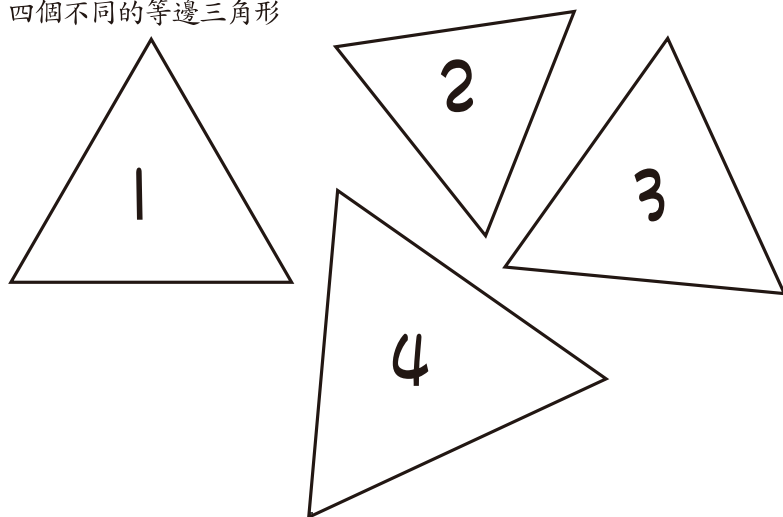


圖 6 四張大小不同的等邊三角形

肆、討論與分析

一、數學臆測教學實踐與數學素養中的數學論證發展之關係

本範例是依據數學臆測的五個階段「造出和彙整組織例子、發現關係並提出猜想、驗證猜想、猜想的一般化、證明一般化」設計任務，並實踐於數學課堂中。實踐後發現數學臆測提供較多機會發展學童數學素養內涵中的數學論證，這個範例說明了教師如何轉化數學素養於實踐課程。

究竟本範例提供的數學臆測教學實踐每一階段與數學素養內涵中的數學論證的關連性何在？因為數學臆測啟動了數學論證發生，數學臆測每一階段各自啟動了數學論證的不同元素。數學論證的元素包含：資料（data）、推論依據或證據（warrant）、主張或結論（claim or conclusion）、理論支柱（backing）、反駁（rebuttal）及合格者（qualifier）等元素，每個論證元素都有其獨特的角色與功能，論證是將這些元素串連在一起形成的歷程。「理論支柱」是不證自明，一般大家公認的事實，「合格者」是使主張或結論成立的特殊條件（Toulmin, 1958）。

數學臆測和數學論證兩者的關係，可以解釋為：（一）數學臆測的第一階段——造例子、組織及彙整例子，是啟動數學論證發生的樞紐，對應到數學論證的元素——資料，作為提出論述（arguments）的準備；例如，此範例任務中，第二節課教師提供的七個三角形圖卡，如上述圖1，就是在發展數學論證元素——資料，以作為下一階段提出猜想的準備。（二）數學臆測的第二階段——提出猜想，是為了形成論證活動中似真但還不確定的猜想；是形成數學論證元素——主張或暫時性結論；例如本範例中，學童依據七個圖卡分類後，觀察關係後，全班提出了23個猜想，如「三角形內角和等於180度」、「直角三角形的兩個比較小的角加起來都等於90度」、「等邊三角形都是60度」等都是學童尚未證實

的猜想；（三）數學臆測的第三階段——驗證猜想，是在建立個別、或小組、或全班提出論證依據來捍衛自己所提出論述，其他學童也可能提出反駁例子來推翻錯誤的論述，或修正非恆真的論述，將原猜想限制在某種條件下，成為恆真猜想，所以數學臆測的驗證猜想階段啟動了數學論證的反駁和合格者兩個元素。（四）數學臆測的第四階段——猜想一般化，是將前三階段以不甚精準語言描述的猜想，將其修飾為數學性質，對應到數學論證元素——主張或結論；例如本範例中經一般化後得到的結論是「任意三角形的三內角和等於 180 度」；最後，（五）數學臆測的第五階段——證明一般化，將會利用先前發展的資料、論據之數學論證元素，作為已知的數學知識以演繹推理來證明（justify）一般化猜想。此處的證明不是形式演繹的數學證明，而是學童以已知的事實或知識進行演繹推理或在其他情況都成立的可接受說理，例如，三角形內角和等於 180 度，學童使用的證明方法很多元，如用一個三角形的三個內角拼成一個平角、用一個三角形的三個內角內摺形成一個平角、用兩個直角三角形拼成一個長方形等。

二、對十二年國教數學教科書編寫之啟示

本範例分享了數學臆測任務設計和教學實踐，數學臆測提供機會幫助學童建立較嚴謹的數學知識，一個臆測任務能引出一叢相關的數學概念；而且所培養的學童是具有能提出證據說理以取信他人、能舉出反駁的例子或證據推翻他人的觀點之民主素養。由於學童從數學臆測的第一階段到第四階段一般化，是彌補了教科書對於數學知識發生歷程的嚴謹性不足，例如：教科書通常僅提供一兩個例子讓學童發現數學關係，此數學關係並未再經過更多例子到所有情況的一般化的歷程，就要求學童接受這些尚未證實的數學知識。相反地，數學臆測提供機會讓學童造例，對學童較有感覺，因此學童會努力地觀察，尋找關係，而能提出各種不同的猜想。因為這些猜想都是在相同的資料下提出的，所以這些猜

想彼此互有關連，而像粽子一樣，一叢串在一起。學生在檢驗猜想的過程中可逐步察覺數學知識間的結構與關係，發展出概念性的理解（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。

是故，教科書應提供學生充分的機會去進行數學論證，提供許多的例子讓學生去探索，讓學生從活動與觀察中發現數學關係，引導學生走過數學知識發生的歷程，體會數學是一種探索規律的科學本質。如前所述，論證是數學素養的重要內涵，其學習應貫串一至十二年級，且不侷限於特定主題。林福來等人（2013）即建議在十二年國教的數學課程中，數學論證的學習應從一年級開始，學童可藉由操作活動進行論證，像是用黑白子配對的活動，論證奇、偶數相加的性質。德國新一波參考 PISA 架構的數學課程改革，指出論證為中小學皆應培養的核心素養（Klieme et al., 2004）。也就是說，教科書可在一至十二年級，根據數學臆測任務設計的五階段原則：「造出例子和彙整及組織例子、觀察關係並提出猜想、驗證猜想、猜想的一般化、證明一般化」，編排學習任務，培養學生論證的核心素養。

再者，教科書的教師手冊應提供論證教學的相關建議。現行數學教師手冊大多數僅止於提供教師關於教材的補充說明，較少提供特定單元的教學方法。許多數學教師仍習慣於以教師為中心的講述式教學，較少接觸以學生為中心的論證教學。既然論證教學對於數學素養之培養有其重要性，當教科書呈現相關的教學內容或任務時，應於教師手冊說明教學方法與呈現學生可能的想法。以本文所提之五階段教學原則為例，教師手冊可針對教科書的論證任務解釋所運用的原則為何，建議教師運用高層次的提問來引出學生的論據（例如：這對於所有的例子皆成立嗎？）、鼓勵同儕之間的說理（例如：其他同學對於這個答案有沒有不同的解釋？）或是促進課堂學習參與（例如：可否給我舉個例子？）（NCTM, 1991），以及呈現學生在此任務的可能回答或想法，幫助教師聚焦在學生的想法與掌握論證教學的原則。

伍、結語

爲具體落實十二年國教數學領域課程的基本理念，本文提供了範例證實了數學臆測是一個可行的途徑以及教科書編撰的建議。因爲數學臆測在提出猜想的過程中，從學童使用自己不精緻的語言描述自己發現的數學關係，透過一般化逐步淬鍊爲精準的語言，經過小組或全班互動及教師的介入後，發展爲精準的數學語言來描述數學性質，這是在詮釋十二年國教數學領域將數學視爲是一種語言的意涵。另外，數學臆測先從個別的單一例到小組的 4 例、再到全班 24 例的第一階段造例、最後到一般化，就是提供機會讓學生體驗數學從組織、觀察、發現、驗證、一般化到證明，是在培養學童能鑑賞數學是一種規律美妙又嚴謹的科學，發現數學結構的美，就是數學的激賞之美，這是在詮釋十二年國教數學領域課綱將數學視爲是一種規律的科學的意涵。

參考文獻

- 十二年國民基本教育課程綱要總綱（2014）。
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。教育部提升國民素養實施方案——數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部。
- 林碧珍（2015）。國小三年級課室以數學臆測活動引發學生論證初探。科學教育學刊，23（1），81-108。
- 林碧珍、蔡文煥（2006）。TIMSS 2003 國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討。載於張秋男（主編），TIMSS 2003 國際數學與科學教育成就趨勢調查國家報告（頁 123-161）。臺北市：國立臺灣師範大學科學教育研究中心。
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究整合型研究之子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究研究報告（NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。新北市：國家教育研究院。
- 國家教育研究院（2014a）。十二年國民基本教育課程發展指引。新北市：作者。
- 國家教育研究院（2014b）。十二年國民基本教育課程發展建議書。新北市：作者。
- 張芬芬、陳麗華、楊國楊（2010）。臺灣九年一貫課程轉化之議題與因應。教科書研究，3（1），1-40。
- 蔡清田、陳延興（2013）。國民核心素養之課程轉化。課程與教學季刊，16（3），59-78。
- Cañadas, M. C., & Castro, E. (2005). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the CERME 4 international conference* (pp. 401-408). Catalonia, Spain: SantFeliu de Guíxols.
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf
- Department for Education. (2013a). *The national curriculum in England: Framework document*. Retrieved from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/254336/MASTER_final_national_curriculum_11_9_13_2.pdf
- Department for Education. (2013b). *National curriculum in England: Mathematics programmes of study (statutory guidance)*. Retrieved from <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>
- Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: Analysis of some undergraduate mathematics students' performance. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp.

- 273-278). Haifa, Israel: Haifa University.
- European Commission. (2007). *Key competences for lifelong learning: European reference work*. Retrieved from <http://www.alfa-trall.eu/wp-content/uploads/2012/01/EU2007-keyCompetencesL3-brochure.pdf>
- Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M.,... Vollmer, H. J. (2004). *The development of national educational standards: An expertise* (English version). Berlin, Germany: Federal Ministry of Education and Research.
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abduction. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60-82.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards: Math standards*. Washington, DC: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2, 50-80.
- The Organization for Economic Co-Operation and Development. (2005). *The definition and selection of key competencies*. Paris, France: Author.
- Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.