 第 26 卷第 2 期，133-160，2013 年 12 月

負數史與負數教學中的美感意涵

陳淑娟*

本文從四方面說明負數史與負數教學中的美感意義和價值。首先，說明從美感角度看負數教學的理由；其次，說明什麼條件下容易產生美感；其三，從負數史及東西方處理負數特質的對比看負數之美；最後，說明以美感觀點開拓負數教學的視野，分析負數美的內涵。負數教學的視野與美感內涵包括：一、以同理寬容負數困頓的美感態度，化解負數學習的不安；二、藉美感態度欣賞負數的曲折發展，幫助學生重視負數；三、藉圖像所蘊含的直覺，促進負數運算的理解，本文以兩個圖像直觀的例子，說明：「減一負數等於加上它的相反數」及「兩個負數相乘，得到一正數」的便捷之道；四、藉負數史中前人的經驗，幫助學生面對並跨越負數學習的困難。本文認為引導學生體會負數在數學中的美感價值，是值得嘗試的教學方式。

關鍵詞：負數教學、負數算則、數學美學

* 陳淑娟：國家教育研究院教科書發展中心副研究員
chen@mail.naer.edu.tw

Journal of Educational Practice and Research
Research Note *Vol. 26, No. 2, 133-160, Dec. 2013*

The Aesthetic Value Embedded in the Negative Number History and the Negative Number Instruction

Shu-Chuan Chen*

The purpose of this article is to interpret the meaning and the aesthetics value in the history of negative numbers and the instruction of negative numbers. The argument begins with explaining the reasons why the aesthetic approach can be recommended to inspire the instruction of negative numbers. The aesthetic contents of negative numbers are then analyzed and presented. The author further explicates the beauty embedded in negative numbers can be demonstrated through their developmental history. This article ends up with emphasizing the 4 merits of aesthetic viewpoints in broadening the visions of the negative number instruction; they are as follows: (1) to calm the restlessness of negative number learning; (2) to inspire student to pay more attention to number learning; (3) to better the understanding of negative number algorithm through the aesthetic intuition afforded by two examples of figure images showing that "subtracting a negative number by adding its opposite" and that "the multiplication of two negative numbers being positive"; (4) to assist student in facing and overcoming the problems in learning negative numbers. The teachers are encouraged to facilitate students to embrace the aesthetic value of negative numbers and to tackle students' problems in advanced mathematics learning by taking into consideration of their cognitive abilities and mathematic performance.

Keywords: ***mathematics aesthetics, negative number algorithm, negative number instruction***

* Shu-Chuan Chen: Associate Research Fellow, Development Center for Textbook, National Academy for Educational Research

負數史與負數教學中的美感意涵

陳淑娟

壹、前言

生活中有許多具有負數意義的事件，例如負債。人們透過敘述的巧妙，雖可避免使用負數，但數學中，無論純粹解方程式，或應用方程式來解決問題、探索自然、社會…等等不同現象，負數都是不可棄的重要工具。負數更透過代數與其他數學支派融合整併、滲透分布，且扮演基本的角色，若少了負數，不只代數會效能大失，整個數學知識體系也將分崩離析。故，負數是數學最重要的成員之一，也是學習數學、發展解題能力必得認識的對象。

由於負數比起正數更抽象化、符號化，少了真實量的支撐，運算的結果和意義很難解釋，因而負數確實是國中師生間一項教學挑戰。唐書志（1998）曾說即使學生會做了，身為老師仍可感受到學生的彆扭與不安。

本文嘗試詮釋負數史中流露的美感意義，建議教師協助學生理解並認同透過負數所呈現的美，來增進負數學習效果。本文擬從四方面說明：首先，說明從美感角度看負數教學的理由；其次，說明什麼條件下容易產生美感；其三，從負數史及東西方處理負數特質的對比看負數之美；最後，說明以美感觀點開拓負數教學的視野。

貳、從美感角度看負數教學的理由

近年隨著課程美學的蓬勃，學界對於從美感角度看課程教學已不再陌生，但在數學的負數教學中有系統地談它，本文可能是國內的初步嘗試。國家教育研究院自 99 年起推動課程美學的開發（國家教育研究院籌備處、國立編譯館，2010，頁 I），筆者認為負數的教學問題，亦可從美感角度來探討，希望能從跨範疇的研究思維中，找出

新的可能。以下說明一、從數學家的經驗看美感提供吸引力；二、美感角度的探討可豐富負數教學及研究。

一、從數學家的經驗看美感提供吸引力

一般人很容易因自然、文學、藝術的美而感動讚嘆，卻很難把數學和美聯想在一起。數學給大眾的印象多半是：把問題抽象成一堆符號，配合術語、規則等，進行記錄、運算、演繹證明，因而許多人認為數學是門枯燥乏味且冷硬的學科，說什麼都不會把它和美聯想在一起；然古今中外皆有不少人，受到數學美的感動而終生投入。

數學是歷代數學家創作的總成，其中不少是源自美感的啟發。古希臘人將心靈外化為美，並使美成為其文化精神的結晶，還把數學當作藝術，在此氛圍，畢達哥拉斯、亞里斯多德、...等人，從數學中認識和諧、簡潔、明確及秩序等美的特性，即在數學奠基伊始，美學思想亦已同步發展了。徐炎章、吳開朗、唐煌、周金才（1998）便認為這些美的本質，使數學具有吸引力，驅使他們持續追求探究，鞏固數學的基礎，同時也使他們成為希臘美學觀點的創始者。畢氏及其學派還主張數學的實用美，認為透過數學，可達到賞心悅目的價值和目的。之後，歐洲不少數學家，如笛卡爾（R. Descartes, 1596-1650）、羅素（B. Russell, 1872-1970）、萊布尼茲（G. W. Leibiz, 1646-1716）、龐卡萊（H.Poincare, 1854-1912）...等等，受到希臘審美觀的影響，在精神需求的驅策下，充分浸淫於數學美的涵泳中，並因著與美感態度相關的直覺，讓他們在有生之年，激發個人思維創造，成就卓越的學術貢獻，也擁有「數學美學家」的聲望（吳開朗，1992；徐炎章等，1998）。

二、美感角度的探討可豐富負數教學及研究

台灣的數學教學及研究，經歷多次革新，並受到國外重要理論的影響，發展出多樣的教學法及研究成果，如學生中心教學、類比教學法、生活化教學、建構教學、電腦輔助教學、繪本教學、數位教學、多元智能課程等等理念和策略（參見吳佳玲，2011；林雪卿，1993；林奕宏、張景媛，2001；邱貴發，1992；周雅菁，2009；房昔梅、鍾靜，2005；陳龍安，1991；鄭博真，2000；Armstrong, 1998 等等），負數教學屬於數學教學一環，即使缺乏具體的實徵研究報告，也直接或間接地受到影響。

晚近課程教學美學的開發（參見周淑卿，2005，2009），更顯示以美感角度豐富數學（含負數）教學研究的可能性。近年來，多位華裔學者，從數學美的角度，發表

文章或闡述數學的美，或申論審美對數學發展的引領效果（如丘成桐，1999；李善良、單墫，2002；吳開朗，1992；郁建輝，2005；劉太平，2001；譚建國，1996a，1996b）。1988 年第六屆國際數學教育（International Congress on Mathematical Education [ICME]）會議，甚至以「數學教育與文化、美」為主題，當時與會者一致認為：數學教育必須向學生展示數學的美，使他們不僅獲得知識，還從中接受審美的薰陶，使學生能在愉悅的教學活動中，豐富精神世界，並保有樂於繼續學習探索的動力（吳開朗，1992）。課程教學界也認知到教師在課堂上，可展現美的面向，讓學生看到所學的有趣、耐人尋味，被學習內容的美吸引，進而肯去探究。

綜觀當前國內課程美學或教學美學的發展，可說已初步獲致豐碩的發現：在課程美學的倡議或教學美學理論開發方面，詳見陳伯璋（2003）、歐用生（2009）、周淑卿（2005）、林逢祺（2010）、洪詠善（2005，2012）、陳伯璋與張盈堃（2007）、楊忠斌（2009）等的相關論述；而國外 Fiori（2007）及 Winston（2011）先後述及可透過美學理論提供的透鏡（lens），對數學的教學實務進行觀察和反省。「透鏡」的概念意謂著一種新的視野，此視野可啟發教學行動的多種可能。Brown（2007）即表示數學學習中有藝術的成分，鼓勵在學校活動中加強數學的表現甚至「表演」向度（the performative dimension of mathematics），我國侯雪卿（2011）所寫〈當數學與文化相遇－教學中的美感經驗如何可能？〉及張繡玲（2010）所寫〈當數學遇上美學：三角形學習的可能性〉的文章，便採取了這種「活動」和「表演」的概念，顯示我國數學教學美學的探討已進入理論、實踐和應用互動的層次。

由上可知，用美感角度來看數學教學，具有多重意義，但國內有關負數教學的部分尚付闕如，本文擬嘗試做這方面的研究，探索它對負數及數學教學研究的意義。

參、什麼條件下容易產生美感

以下首先簡述美感概念，然後說明認識事物美的可能途徑。

一、美感概念簡述

美的感受簡稱美感，「美感」常加上「經驗」或「態度」來構詞。「美感經驗」強調人在特殊歷程下，所得到的美好感受或印象；「美感態度」強調人在觀賞事物上，

所展現的心理特質。

古今中外論述美感或美學（aesthetics）的研究極多，趙天儀（1990）指出「美學有兩種性格—哲學的和科學的，其中科學的，特別是心理學的美學，曾給社會帶來很大的衝擊」（頁 4）。以下僅就與認同事物美有關的概念來說明。

（一）美感經驗來自適當的心理距離

心理距離是布洛（E. Bullough, 1880-1934）所提出。Sherburne（1961）認為布洛「心理距離說」的主要觀點是：美感的產生，是因觀者與被觀者之間，保持著一種切身又帶有距離的特殊關係，亦即心理距離「可以縮短，但是不可完全消失」，一旦喪失該距離，便喪失美感。朱光潛（1897-1986）在《談美》中闡釋一般人迫於實際生活需要，把利害得失看得太重，遂不能站在適當距離去看人生世相，以致不能欣賞到美（朱光潛，1971）。

心理距離概念的應用，因專業領域不同而有別。在教學中談心理距離，意味著教師至少要幫助學生對所學教材（可能是一首詩、一齣戲、一道負數題…等），有某程度的認識，又不過度在意成績表現，否則就犯了上述朱光潛所謂「把利害得失看得太重」，另外又要幫助學生對所學維持興趣，以免在心理上過度疏離。

就負數教學而言，期望學生對負數學習產生美感經驗，或幫助學生看到負數的美，是要幫助學生，對負數學習維持適當距離；又因每個人的這種距離不同，教師宜注意的是：在消極方面，避免學生對負數的學習，產生冷淡、討厭、排斥等情緒；在積極方面，配合學生程度，增進學生的知識及對負數學習的興趣。

（二）有助於產生美感態度的特質是同理心、寬容、欣賞

綜合康德（I. Kant, 1724-1804）、席勒（J. C. F. Schiller, 1759-1805）和巴爾塔薩（H. U. Balthasar, 1905-1988）的美學思想，美感的終極特色是精神自由。當一個人能以同理心、寬容和欣賞的態度面對事物，在獲得精神自由的同時，較容易認同或欣賞到一事物的美（鍾聖校，2012，頁 197-202）。鍾聖校（2012，頁 76）還指出美感情愫的先備基礎是寬容，而其積極表現是欣賞；因為寬容，人的視野才不會拘泥於某一觀點或某一表達方式，不耿耿於不順，而昧於見到事物的其他特質；又因釋懷使心思意念得到解放與自由，其更上層的表現即是欣賞。曾昭旭（1993）指出具體的美感態度，包括真誠面對自己，不說謊、不掩飾，錯就說錯，心裡難過就說難過，不依賴定型的規矩做判斷，並具有透過對美之對象「純熟」的認知，產生較能樂在其中的欣賞，甚至達到曼妙的地步。

正向心理學家契克森米哈里（Csikszenmihalyi, 1990）稱此為「心流」(mental flow)。考諸數學家的經驗實例，確實有這種經歷，而喜歡數學的學生也依稀有此感覺。

（三）美感蘊含有直覺

「美感」涉及「直覺」(intuition)，但二者間的因果關係很難釐清。劉文潭(1978，頁 48-55）介紹義大利哲學家克羅齊（B. Croce, 1866-1952）的直覺說時，指出美感中含有四成分：1.諸多印象、2.直覺、3.快感、4.由物質現象到審美事實的轉化，此說法表示美感蘊含直覺，因為直覺是由人的知覺能力和質料(material)共同形成的各種感覺印象所促成，亦即若能成為直覺經驗大多含有某程度的印象。克羅齊曾對直覺的明確程度，有生動說明：「我們如何真能對一個幾何圖形有直覺？除非我們有一個關於它的印象，明確到使我們馬上把它畫在紙上或黑板上；我們如何能對一個區域—比如說西西里島—的輪廓有直覺，如果我們不能把它的蜿蜒曲折畫出來？」(劉文潭，1978，頁 51）。新觀念的產生，往往受益於美感直覺，該新觀念又會進而觸動人的審美情感，通過和諧、美妙、有用的考核，促使人投入更多的興趣，以熱切探究的驅動情愫，建構出新思想、新概念和新方法。

（四）美感來自完形作用

周來祥和周紀文（2002）認為進行審美的人，有著不同的心理因素；談論這些因素，難免需要分別說明，但「事實上，在實際的審美活動中，這些審美因素是相互滲透、相互融合、共同作用的，以致於若想把握到審美對象，常須訴諸一種完形(Gestalt)作用」(頁 104)。換言之，審美感知是知識、理解、想像、情感，以及前述美感態度—同理心、寬容和欣賞等等，在整體經驗的整體知覺下經歷完形作用的產物。

二、認識事物美的可能途徑

（一）認識事物的歷史有助覺察它的美

透過事物的歷史，可擴大我們見識的領域或視域。洪漢鼎（2000，頁 136-137）指出，隨著時間流逝，後人對於過往事物的意義，會有陌生、疏離之感，惟有透過閱讀相關歷史，與文本來回對話，方可知其然、同理其所以然，又因著感同身受擴大視野，而有助美感的產生。以「最後的晚餐」這幅畫為例，畫作顏料隨著時間而斑剝，圖像細節已看不清楚很難欣賞它的美，但藉由聖經故事或《達文西密碼》（Brown,

2003/2004）的指引，觀者便較能體會、感受這幅畫的美。

周來祥和周紀文（2002）從訊息的角度，提出認識歷史對美之發現的重要性：「**審美對象常是以一系列的符號、資訊，來向我們傳達美，若要獲取美感，就必定認識、理解它們**」（頁 110），由於歷史累積事物的多方面符號資訊，因此若以美感態度認識其歷史，有助於美的經歷。Townsend 在所著《美學概論》中曾提到：「**靈感可以來自歷史的過程本身**」（Townsend, 1997/2008, p.187），此言用於美感亦然。

日常生活中不乏因為認識一事物的歷史而烘托出美感的現象。龍應台（2012）曾敘述她這方面的經驗：朋友送她名為沙漠玫瑰的地衣，那是一蓬看似沒生命的乾草，龍女士將之盛在注滿水的玻璃碗，並和兩個兒子每天探看；第一天沒動靜，是把浸在水裡的枯草；第二天，中心處稍稍舒展有模糊的綠意；第三天，邊緣雖乾死狀，中心處已張開成綠色的玫瑰輪廓，散發潮濕的青苔味；之後，核心的綠色逐日往外擴展，終而延伸到整個塊體，舒展成一朵豐潤飽滿、盡情開放的濃綠沙漠玫瑰（頁 109-110）她說：「此時的玫瑰，在鄰居眼中卻是一把難看氣味潮濕的低等植物。」（頁 110）。龍女士認為鄰居只看到孤立時刻的現象本身，而她看到的是現象和其背後一點一滴的線索，包含輾轉曲折和千絲萬縷的來歷。故人們能欣賞某事物的美，與對其歷史的了解有關。就負數而言，負數美寓居在其歷史脈絡及成就中，要感受它的美，可從記載負數概念的發展和相關問題的解決歷史中找尋。

（二）在美感態度的關照下對比事物的特質，較易發現事物之美

史托尼茲（J. Stolnitz）認為「**以無關心（按:指非功利的態度）、同情的注意與靜觀來注視對象，是美感的主要關鍵性態度**」（趙天儀，1990，頁 4）。國內曾昭旭（1993）認為美感的產生是建立在「誠實、放下、純熟、曼妙」的知性與感性狀況。美的主觀論者認為人之能發現美，是因「審視美的人具備了適合的內在心理」，美的客觀論者則強調「美的對象必須具備的條件」（朱狄，1988），本文認為「在同理心的前提下，透過對比事物的特質，較易發現事物之美」，乃因它一方面符合主觀論的見解，一方面也呼應客觀論的主張。曾昭旭（1993）特別強調對所欲欣賞的對象之美，要有知性方面的「純熟」。由於特質或風格的敘說，是高度綜合美之對象特點，以負數來說，若對負數史中，出現的負數觀點特質有所認識，或被引導認識，那麼可以更有效地引導其他人來欣賞這事物之美。建築學界論建築，便常用風格（將特色或特質再做分類），幫助觀賞者理解並欣賞。

肆、從負數史及東西方處理負數特質的對比看負數之美

前文說明可從兩個途徑認識事物之美，一是歷史，一是美感態度—同理心、寬容和欣賞。而就本文要處理的負數議題來說，這兩者其實有關聯。一方面，從認識負數歷史中，對比東西方處理方式的特質，發現負數在兩個世界展現的樣態不同，以致使指認出雙方不同特質美的可能性大增；一方面，在探究東西方的負數發展過程時，以美感態度所強調的同理心、寬容和欣賞，來認識並感受，對於前人處理負數的困難及展現的堅毅和膽識，會更珍視，進而視之為美。

本段分四方面敘述：一、東方的負數概念及算則發展；二、西方的負數概念及算則發展；三、以西方的負數發展，說明負數史的認知因著完形作用易於產生美感；最後以四、從負數史思維結果與特質的對比看負數之美。

以下所述東西方負數發展簡史，是綜合參考學者們的相關文獻提出的，包括：林保平（2006）；袁小明（2003）；曹亮吉（1985）；黃敏晃（2003）；國家教育研究院（2007）；Berlinghoff 和 Gouvêa（2004/2008）；Dunham（1990/1998）；Eves（1989/1993）；Klein（1908/2004）。目的在概述東西方負數發展狀況，以進一步對比東西方處理負數的特徵，來認識負數被展現出的美有所不同。

又本文以條列方式精簡呈現複雜的負數史，祈便讀者能較快地認識西方文化在認識處理負數時，所遭遇的困頓，和所做的突破，並能從中產生有關負數發展的整體概念，以作為促進讀者對負數形成美感感受的脈絡。

一、 東方的負數概念及算則發展

從古文明的建築、天文、曆法等成就，可知中國、巴比倫、希臘和埃及的先民，已能用方程式解決問題。而負數概念和算則發展，主要是交織在解一到三次方程式的探索過程中。

（一）中國文化中的負數

1.先秦時期

《孟子・梁惠王》記載「…鄰國之民『不加少』（按：即減少），寡人之民『不加多』（即增多），…」，可見中國在戰國時期，是從實務中產生負數觀念，且可能已知

道減法是加法反運算的操作型定義。

古華人最晚從春秋戰國起，已用多元一次方程組，解租稅、運籌帷幄、生產、交易…等等實務問題，又發明「算籌」作為運算工具，為順利進行「小數減大數」，創造負數和其表達的形式（算籌顏色或擺放的方式），展現負數是與正數意義相反的符號。運算時，直接操弄算籌的個數，就像當今以數的絕對值進行計算（林保平，2006），從算籌呈現的結果，得知解的量值與正負性質。籌算這項技藝約在西元前一世紀至西元一世紀間被彙入《九章算術》一書，該書卷八〈方程章〉的第三題解題術文—「正負術」，講述的即是正負數與零間的加減法，內容與現今正負數加減運算的法則等價。

2.三國時期

劉徽為《九章算術》正負術立注文（263 年），再度確立負數的概念及加減運算法則，彰顯負數在解題策略和解題過程中的自然出現。

3.南宋時期及其後

元朝朱世傑《算術啟蒙》（1229 年）的「明乘除段」敘述正負數乘法法則，另著《四元玉鑒》出現正負數的除法運算（袁小明，2003），由此看來正負數的四則運算到了元朝大致臻完整，該書也記載四元術，利用算籌逐步降低次數以解一元高次方程式。

（二）印度、阿拉伯文化中的負數及其傳播

西元第 6、7 世紀，印度人在會計上用負數表「負債」，與表「資產」的正數恰好相反；628 年婆羅摩笈多（Brahmagupta, 598?-670?）寫《婆羅摩笈多修訂體系》（*Brahma-Sphuta-Siddhanta*），敘及上述的正負數的會計意義，並給出正負數的運算規則。往後印度人依此使用之，但抱持懷疑眼光看待負數。

12 世紀，婆什迦羅（Bhāskara, 1114-1185）寫《算法本源》（*Vījaganita*），內容包括正數、負數、零、未知數、二次方程式…，書中解出二次方程式有正負兩根，並以「人們無法清楚理解例子中的負量」，主張不採負根，且認為負數無平方根。

第 8 世紀起，婆羅摩笈多的著作譯成阿拉伯文，伊斯蘭世界從中學到實用負數的概念，並匯入巴比倫和希臘的數學思想，發展出二次方程式的根式解。然阿拉伯人解方程時，將數據詮釋為線段或面積，以幾何圖形的觀點輔以文字，說明所求之解；9 世紀花剌子模（al-Khwârîzmi, 780?-850?）雖承認二次方程式有正負兩根，在此脈絡下負量無意義，只接受正根，可知阿拉伯數學不使用負數。西元 1000 年前後，阿拉伯數學家才了解負數可用來表示「債務」，但運算中，阿拉伯人還是棄負數不用。

二、西方的負數概念及算則發展

歐洲數學承襲希臘愛智文化，重理性思維、邏輯推演，質疑實踐經驗的真實性，以超越經驗的探究態度與方法，讓數學成為心智創作的學科，但在負數方面，卻因太在意其存在的合理性，使發展受到壓迫或挫折，走成不同於東方的故事版本。

鑒於西方負數、及其平方根的孕育，主要生成於一到三次方程式的根式發展中，其間經歷漫長的摸索及突破，以下首先綜述西方負數發展的背景，再以解方程式的進展歷程，簡潔說明負數在西方文化中的漫長摸索，然後說明負數在西方文化中的突破。

（一）西方負數發展的背景

希臘時期，數一直被要求要有量的意義，造成負數概念發展的障礙，直到將負數當作是數學操弄的一種符號之後，才與量脫鉤，並進一步開拓出複數世界，對近代數學、物理及工程產生極大貢獻。負數也因這些後續發展的成就，終於在 19 世紀，被承認為數。

自丟番圖拒絕負數到歐洲人接受負數和複數的一千五六百年間，有許多數學家投身於相關的研究中，各自融匯其身處年代的文化背景、觀念、技能，接續地突破種種侷限，貢獻出豐富的過渡觀點，終累積而促成這項數學成就。

丟番圖所屬的希臘亞歷山大時期，倚重幾何性質演繹的傳統雖逐漸式微，然源自巴比倫、印度、阿拉伯文化重實務計算的興趣，並未對負數的突破發揮作用；當時的歐洲人為求認知上的放心，將算術、代數運算的過程和結果述諸幾何的解釋，以確認正確性，因而負數概念沒有存在的可能。中世紀末，歐洲人因科學發展，生活、工作和社會形式的改變，解決問題的定量策略日趨重要，又因與阿拉伯人交往頻繁，有較寬廣的心胸，而接納不同的觀點和做法，負數有了發展的契機。從文藝復興時期起，綑綁歐洲人的幾何思想更鬆弛、競解方程式一度蔚然成風潮，期間所興起符號的操作逐臻圓熟，還陸續發展出解析幾何、微積分、三角函數、對數函數等等，各種思想、見解、做法在這個時空中交會、融併、激盪。

（二）從解方程式的進展歷程，看負數在西方文化中的漫長摸索

1.一次方程式

第 3 世紀地中海一帶的人，受希臘觀念影響，拒絕沒有幾何意義的負數；丟番圖（Diophannus, 200-284）在《算術》（*Arithmetica*）中，只討論正有理數，未考慮負數

解的可能性，並稱 $4x + 20 = 4$ 是荒謬的，因其解為不合實際生活情境的負數。

13 世紀出現負數誕生的契機，費波那契（Leonardo Pisanno Fibonacci, 1170?-1250?）從阿拉伯人習得代數，於《計算書》（*Liber Abaci*）中，把負數解釋成商業交易的「欠款」，允許負數解出現在某些財務的問題裡。

2.二次方程式

古巴比倫已有典型的二次方程式問題，且有根式解法，但因巴比倫人的幾何以度量為主，方程式僅討論具體的應用，故只取正數解。

古希臘人以配方法解二次方程式，有可能出現負數解，但因認為負數是沒有幾何意義的數，故忽略負根。其實比丟番圖還早的歐洲人，已能展開形如$(x-a)\ (x-b)$的算式，但只用在答案是正數的題目，未能從乘法分配律得到負數的啟示（按：將$(-a)\times(-b)$視為兩負數之積）（國家教育研究院，2007）。

16 世紀卡丹諾（G. Cardano, 1501-1576）在《大技術》（Ars Magna，1545 年）中，討論「找出兩數，使其和為 10 且積為 40」的二次方程式。依當時已算則化的根式解法，計算中會發生小數減大數；若將負數當作數繼續運算，會得到 $5+\sqrt{-15}$ 、$5-\sqrt{-15}$ 兩數，其和為 10，但積該如何運算，才能得 40？卡丹諾利用乘法分配律直接計算這兩數的積，並提議解除思想的束縛，讓$\sqrt{-15}$ 的平方等於-15，再視 $25-(-15)$ 為 25+15，以滿足兩數積為 40 的題意，顯示他在當時以正數思維為主流的社群中，是多麼勇敢且大膽，但還是沒有能力說出這樣計算的意義。15、16 世紀數學家尚未普遍認同負數，負數平方根為何、一數平方為負，都使 $5+\sqrt{-15}$ 、$5-\sqrt{-15}$ 不被認為是合理的解。

卡丹諾接受正、負根，引入負數後，卻衍生出前述兩個更棘手問題。他在另一著作中也說$\sqrt{9}$是 3 或-3，$\sqrt{-9}$（即負數的平方根）既非 3 亦非-3，而是「第三種深奧之物」。

3.三次方程式

西元前四百年的希臘人，已將一些幾何問題，轉化成三次方程式問題，卻到文藝復興時期才得解。那時，阿拉伯代數傳入歐洲已經數百年，歐洲數學家逐漸使用負數，並開始正視與方程式有關的負數問題，也希望三次方程能像二次方程式有根式解。

卡丹諾的《大技術》匯集費羅（Scipione del Ferro, 1465-1526）、方塔那（Niccolò Fontana Tartaglia, 1500-1557）和自己的三次方程式研究成果，於其中提出較完整的根

式解，並用立方體，論証該解的正確性；依照此論証，解不該含負數平方根。

卡丹諾的根式解適用於不少三次方程式，但解 x^3-15x-4=0 時，卻得為 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$，顯然不符合前述方程式解的判準，但該方程式以「4」代入卻能完全滿足，不禁讓人質問「4 和 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 有何關係？」，這問題當時無人可回答，他真的製造出負數平方根這個麻煩的問題。

（三）負數在西方文化中的突破

負數早就出現在解方程式中，但歐洲數學家長期都覺得其概念窒礙難行。例如早期認為「負數不符合實際生活情境」、「從 0 減去一個大於 0 的數，得到小於一無所有的數是荒謬的」、「『-1:1=1:-1』會造成『較小數對較大數的比』=『較大數對較小數比』的錯誤」…等等，到 16 世紀，卡丹諾製造出數學家依當時對數（正數）的認識，所無法詮釋的問題，即「負數平方根為何」和「負數平方根的平方怎麼會是負數」。

負數在西方文化的突破，大致歷經三個階段：1.合理地大膽發明負數的運算規則，2.以解說方式幫助大眾理解負數的性質；最後，藉著符號和解析幾何的發展，確定負數的符號特性及其地位。

1. 合理地大膽發明負數的運算規則

（1）遵行正數既有的運算規則，承認「減一負數就等於加一正數」

卡丹諾在解前述一個二次方程式時，由於計算所得的兩解，依正數的運算規則：[(A＋B)＋(A－B)]＝A＋A，能符合部分方程式的題意，於是提議解除思想的束縛，讓 $(\sqrt{-15})^2=-15$，再認定 25－(-15) ＝25+15，此即「減一負數等於加一正數」的負數的運算規則，就能使該二解完成滿足方程式。這樣的大膽發明，雖未被認同，但已跨出認識負數的一大步。

（2）技巧地解決負數的平方根運算

邦貝利（R. Bombelli, 1526-1572）於《代數學》（Algebra，1572 年）中，從卡丹諾解三次方程式困難的關鍵 $\sqrt{-121}$ 中取出 $\sqrt{-1}$，並從已知的運算法則發明 $\sqrt{-1}$ 的運算法，且視之為必要的運算工具，算出 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$。應用 $\sqrt{-1}$ 的運算法，也能算出負數平方根的平方為負，替卡當諾解困。

2.以解說方式幫助大眾理解負數的性質

18、19 世紀馬克勞林（C. Maclaurin, 1698-1746）嘗試解釋何以(-n)×(-a)為正。歐

拉（L. Euler, 1707-1783）用負債比喻負數，主張以形式的方式討論文字符號的四則運算，倡議-a 乘-b 應該是 a 乘-b 的相反數（opposite）。皮卡克（G. Peacock, 1791-1858）認為負數是具有「-a」形式的符號。哈密爾頓解釋「從一個較小的量減掉一個較大的量，剩下來的是一個『比沒有還小』的量」，「兩個負數或者兩個代表比沒有還小的數，是可以相乘的，乘積是正數」。

3.藉著符號和解析幾何的發展，確定負數的符號特性及其地位

15、16 世紀解方程式和符號、解析幾何之間的激盪，對負數及其平方根命運，也有重大的影響。

（1）符號的使用確定負數的符號特性

古希臘、阿拉伯人解方程式時，以文字敘寫問題、運算、關係或解答；13、14 世紀，歐洲的數學也幾乎都是以文辭（rhetorical）方式表達，造成不少文字陳述的繁雜與干擾。

文藝復興初期的速記法，刺激數學符號的誕生。15 世紀的活字印刷，讓數學符號的形式趨於一致，數學式子開始以符號書寫；16 世紀末，歐洲已普遍使用印阿數碼，又有韋達（F. Viete, 1540-1603）提倡符號的彈性與一般性約定，使數學符號變成能澄清想法，及展現一般化形式的普遍性語言。人們開始認識：符號按著算則平鋪直述的操作形式，在演算論證過程中，自有其符號變化法則（symbolism），該法則具有可幫助人思考的作用，甚至有代替人思考的價值，使人可超越理解，獲得意想不到的結果。伊夫斯（H. Eves）對於善用符號做形式操作的方式（將之類比為筆），曾讚譽：「在數學上，一個形式操作者，常常…覺得他的筆，勝過他的才智。」（Berlinghoff & Gouvêa, 2004/2008, p.115），足見數學符號是發展數學概念的重要因素。

（2）符號引發負數概念的突破

A.古希臘的狀況

古希臘人用線段表示量，直接操弄之以進行量的運算（黃敏晃，2003），並視面積、體積為不同類的量，把乘冪看成幾何維度；即使有整數、分數及無理數，但在幾何意義的認知下都是「正」的。希臘文化影響所及的巴比倫、阿拉伯也認為數需要有具體量的對應，且以幾何觀點檢核方程式解是否合理，使數概念擺脫不了具體量的限制。

B.卡丹諾與邦貝利的貢獻

卡丹諾把 x^3 想像成一個未知邊長的立方體體積。邦貝利直接把 x^3 當作一個量的符號，以 x^3 的圖形詮釋方程式，但那時的數必須以幾何量的形態出現，才能讓人安心接受。

C.笛卡爾等人的貢獻

17 世紀笛卡爾視平方、立方和其他次方為與幾何維度無關的量符號；**x** 表一條線段的長度，x^2 表一條長度量為 x^2 的線段，稱符號上的指數只代表值的乘冪。歐拉將 $\sqrt{-1}$ 依笛卡爾所稱虛數（imaginary number）記作 $\boldsymbol{i}$，暗渡其平方為-1 這迥異於正數的性質，也確立 $\boldsymbol{i}$ 為虛數單位，強化該數的純符號特質。

笛卡爾另有兩項壯舉：一是把正實數和數線上的點作一對一的對應，一是他和費馬連結幾何和代數，發明解析幾何，以代數方程式解釋幾何關係。其後，沃利斯（J. Wallis, 1616~703）進一步將負數添加在笛卡爾確立的數線左向上，形成一條實數軸，但未對負數的地位多說甚麼，似乎採取以「多聞闕疑，慎行其餘」的方式，對待負數。

（3）解析幾何的成全

19 世紀高斯在解析幾何的基礎上創立複數平面，於實數軸的原點，做一縱向虛數軸，並以 $\sqrt{-1}$ 為單位，安置虛數的非正非負性質，使來自想像的虛數，成為可操作的數學實體；另為區別 A $\sqrt{-1}$ 和 A＋ $\sqrt{-1}$ 引進 a + bi 形式的複數（complex number），其中 a、b 為實數，i 為虛數單位，讓所有複數都可對應到複數平面的點(a , b)；也將 $\sqrt{-1}$ 的計算規則從邦貝利的文字敘述，轉成 $i^{4n+1}=i$， $i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1$ 的簡潔形式。

在這麼多數學家的努力下，複數的運算適合實數的結合律、交換律、分配律。且在複數發展期間，方程式的研究，亦逐步轉成代數系統的研究，使數間的運算關係重於數的「實際」意義，也就是將負數、負數平方根當做運算的形式符號。數概念一旦有此突破，便擁有更寬闊、自由的視野，提供新的解題技術，簡化許多數學本身及其應用問題的解法。

三、負數史的認知因著完形作用易於產生美感

閱讀到負數史中有關負數在西方文化中的突破時，會特別對其中的困頓和突破，產生一種「感受到美的感覺」，這是由於來自負數史的認識，因著完形作用而產生美感。完形作用使美感的各因素發揮統整作用。周來祥和周紀文（2002，頁 110）約略提到：歷史本身累積事物的多方面符號資訊，這些符號資訊以審美對象之姿，向我們傳達美；若要獲取美感，就必定得先認識、理解它們，但是單有知識性的認識、理解，不足以產生美感；他們進而主張審美的感知既不是概念認識，也不是邏輯思維，當審美發揮作用時，審美者不離開感性且通過感性，而得以直接把握、領悟有關事物本質。

讀負數史可看到前人為了突破困頓，所展現的以百折不撓精神承先啟後地投入，當我們以同理寬容和欣賞的美感態度，關照這段歷史，便較有機會直接把握、領悟負數之美。例如，以寬容的態度，諒解 3 到 16 世紀的彳亍進展；以欣賞的態度，讚嘆 16 世紀到 19 世紀各種因緣際會風起雲湧的發展；以同理的態度，看待西方負數曾有的困頓和突破，油然而生敬佩和感動等等。這一連串諒解、讚嘆、敬佩和感動，皆屬感性領域，這些感性加上知識，因著完形作用，會比較容易滋生美感。

四、從負數史思維結果與特質的對比看負數之美

身處 21 世紀的負數學習者，面對東西方負數發展所累積的文化智慧遺產，因著時空差距，可以調整出一適當的心理距離，以欣賞及同理的角度，來看待前輩們對負數努力的成果。鑒於數學（包括負數）源於解決問題，而解決問題有過程和結果，因此負數美可從兩方面敘述：一是問題被解決後呈現的靜態結果；一是解題的動態過程。以下分別解說。

（一）東西方所展現負數美的相同之處

猶如數學家們因個人的研究領域、經驗、和感受等不同，對數學美見解不一；負數美的指認，也因人而異。李文興與吳開朗（1996）指出，大多數數學家都同意數學呈現方式的「簡潔」、「和諧」、「奇異（新奇）」，是數學美的三個重要內涵，負數是數學一環，自然也能展現此些美的特質。以下用東西方負數史中提供的例子來說明。

1.簡潔美

「簡潔」常用來形容那些讓人一看，就能有知覺的對象。每一世代的數學家在解決數學問題時，都盡其所能，以化繁為簡、以簡馭繁為最高指導原則。負數在數學家們秉持追求簡潔的共同理念下，後輩於前輩造就的基礎上，依各代當時思維智識的水準，不斷拓展新知，或檢核匯併既有的成果，使包括負數的數學深廣內涵，都能用簡潔的形式表彰出來。從某種角度說東方九章算術中的正負術，即是一種簡潔的表達方式；在西方負數發展的成熟期，負數及其衍生虛數、複數也都以簡潔的符號形式，含攝豐富的意義和運用的靈活性，也就是東西兩方都致力化繁為簡、以簡馭繁，展現出負數的簡潔美。

2.和諧美

和諧是許多數學家公認的數學美之內涵（李文興、吳開朗，1996），負數也一樣有其和諧美。數從正數擴張到負數，再從負數到複數時，透過增添「減一負數等於加

上它的相反數」、「兩個負數相乘，得到一正數」、$\sqrt{-1}$ 的計算規則等三條最少的約定，讓新增數（如負數、負數平方根即虛數） 不僅能遵守舊數的運算規範，並突破運算的限制，例如使減法、開平方運算恆可行，且具有封閉性，而這三條約定對舊數毫無影響；使新舊數的混合運算，邏輯思路依然清晰有條理，不產生模稜、錯亂或牴觸、矛盾等現象。整體說來，從舊數到新數，無論在形式、結構上，具有由舊數推進到新數的連續性與內在的銜接性，展現穩定、和諧統一。

3.新奇美

數學的新奇美又稱為奇異美，係指遭遇難題時，能擺脫慣用的思考方式、操作手法，從既有的概念體系，延伸出新的想法、或連創出新的關係，甚至靈光乍現地突發奇想，以不同往常的觀點看待問題，開拓出超乎意料的策略以化解之。

西方數學家，包括投身於負數的研究者，因思維特質，不斷挑戰艱難，展現出豐富的新奇性。但由於新奇仍必須受到既有知能素養的認同，遂進進退退，彳亍前行，直到累積足夠能量時，突然以新視野提出令人拍案叫絕的方法或結果。如邦貝利從關鍵的 $\sqrt{-121}$ 中，取出 $\sqrt{-1}$ ，並發明 $\sqrt{-1}$ 的運算法；歐拉以符號 i 暗渡其平方為-1 這迥異於正數的性質，高斯繼而將虛數安置於複數平面；類此皆展現出負數的新奇美。

以上三種美表面上各自獨立發展，然其內涵事實上根蒂相連，相互成就。

（二）東西方處理負數方式展現不同的美

綜觀東西方處理負數的方式，因解題方法的特質不同，而各有其美。

1.東方講究實用及具體操作工具之美

中國、印度等東方文明古國，主要是從經驗和實用的角度發展數學。吳開朗（1992）指出：中國數學與實務問題的解決，有特別密切的關係。

華人自古就有負債、欠錢和輸贏、賺賠…等生活詞彙，使須透過約定才能出現的負數抽象概念，在社會氛圍中顯得直觀易接受；正負數的相反關係也因常操練，而覺得平常簡單；古籍中「不加少」、「不加多」這類簡明扼要的對稱文句，明白地表達加減互逆的運算操作，見證華人處理負數概念講究實用的特質。再者，就具體操作工具而言，華人在處理負數時，最為人樂道的就是早在二千多年前就發明「算籌」，由於算籌廣泛流通，使算籌成為處理計算的利器，無論士農工商，都覺得算籌在形式呈現或操作步驟，清晰有條理，不會出現模稜兩可或出現矛盾的麻煩，也不起爭端。

客觀地說，華人上千年來沉溺於負數、算籌的直觀、實用和便利，滿足操作的直

覺合理需求，因而未思考負數所引發數的概念、算則的邏輯相容和理論系統合法性等問題，也沒有突破思維改變方法以克服困境的奮鬥，以致缺少對新奇美的創造與鑑賞機會，更因此喪失開拓數學視野的動力與機會，拱讓出先賢的代數領先地位。但是若以同理心來看，這種對實用性的講究，因屬民族性，有賴以諒解的態度接納之，賈馥茗（2009）在〈發明與創造之美〉便指出：華人的心思特質，展現精心務實的發明創造優點，但也顯露輕忽開發科學理論的缺點。如果能進一步用欣賞看這種對實用的講究，會承認它畢竟也使古華人很自然地成為全世界最早會使用負數的人。

2.西方講究理論及形式思維工具之美

西方受希臘重幾何的影響，重視理性思維和邏輯推演。西方曾以線段做量的運算，使數無法從量中獨立出來，但後來因傳入的負數、印阿數碼、代數等，加上解方程式的需求（詳見前文對負數於解二、三次方程式的介紹）、幾何羈絆的鬆綁、符號和其變化法則的興起，數的量上實際意義的重要性，被數運算關係所取代，使真實世界不存在的數（如負數、負數平方根等），成為思維上的形式操作工具，讓真實世界的實在問題，能透過含有虛構成分的複數，得到真實的解答，如實係數方程式的實根，有時得透過含虛構成分的複數才得以解決，電機、力學、...等等工程上的實務的問題，也常透過複數的設定，而變得易於解決。

負數發展的過程中，符號也展現出思維工具美的特質，如 x^3 不再受幾何維度限制，純粹只是個量的符號，$\sqrt{-1}$ 本身就是個符號，i 更是符號的符號，是 $\sqrt{-1}$ 虛數、單位的符號，$a + bi$ 是複數的形式符號，這些符號的形式都很簡潔，具有靈活的運用性，並攜帶豐富的意義。

伍、以美感觀點開拓負數教學的視野

以下就與美感有關的態度—同理寬容欣賞，和圖像作用，提出四點可以開拓負數教學視野的論述。文分四段：一、以同理寬容負數困頓的美感態度，化解負數學習的不安；二、藉美感態度欣賞負數的曲折發展，幫助學生重視負數；三、藉圖像所蘊含的直覺，促進負數運算的理解；四、藉負數史中前人的經驗，幫助學生面對並跨越負數學習的困難。其中第四點談「跨越困難」，因困難一詞在學習上屬於複合性詞彙，一事物若成為困難，通常包含許多因素，例如學習過程感到不安會造成學習困難，故

第四點有總結前三點的意味。

一、以同理寬容負數困頓的美感態度，化解負數學習的不安

大凡人們遇到不太明瞭又必須去處理的事物時，會產生不安甚至焦慮，但當知道別人或大部份人也都這種現象，此痛苦往往會因而得到緩解，心理學中有關同理心作用的論述，即在闡明其中道理（參見陳皎眉、王叢桂、孫蒨如，2006；鄔佩麗，2005）。

負數之學習對東西方學生都是挑戰，即使會做，也常因不能完全理解而有不安的感覺。克萊因說德國中學引入負數概念時，學生已習慣通過事物具體數量的直觀形式，學習正數及其運算；負數與正數沒共同點，運算卻得將之當作實有其物，且符號和結果與正數大不同，教學上極為困難（Klein, 1908/2004）。我國的情況類似，陳毅峰（2013）發現參與暑期輔導的國一新生，對涉及負數的四則運算，有明顯的錯誤類型；又因負數教材歸於代數課程，戴文寶和邱守榕（2000）指出國一學生在代數式的求值、化簡和應用問題中，容易出現迷失概念；唐書志（1998）曾描述學生帶著可憐眼神，拿著含負數的題目，四處求人的景象，並說即使學生會做了，身為老師仍可感受到學生的彆扭與不安。

Berlinghoff 和 Gouvêa 曾提到可以用負數的歷史，導向更深的理解。其論點是：「對教學者而言，師生知道一個概念的歷史，可以導向更深沉的理解，譬如說吧，考慮負數的歷史…，知道這些困難在歷史上如何被克服，也可以協助學生克服這些路障…」（Berlinghoff & Gouvêa, 2004/2008, p.5）。廣義地看，此論點亦涵蓋：負數教學的突破，可藉由帶領學生認識負數史所產生的同理寬容（一種美感態度），接受不能完全的理解，從而跳過不安。

二、藉美感態度欣賞負數的曲折發展，幫助學生重視負數

前面曾以龍應台（2012）文，具體地解說認識一事物的發展史，能促進對該物的欣賞。欣賞之前是能接受被欣賞對象的存在，理解投身負數發展的諸多數學家們的努力歷程，可增進「負數美是存在的」的認識。在此基礎或前提上，教師可進一步幫助學生意識到學習負數的價值。

就東方而言，從東方負數史的認識，知道華人發展負數早於西方人，從而興起與有榮焉的愉悅，此欣賞態度無形中可提升對負數的親和感，使學生更願意主動接觸、閱讀、理解、計算和應用。中國大陸在七年級負數教材的後面，以「讀一讀」或「閱

讀與思考」的附文，簡述負數發展史（人民教育出版社，2005；北京師範大學出版社，2005），表彰華人祖先的輝煌歷史，即是利用華人負數史上成就的光榮，增進學習負數意願的策略。

就西方而言，從西方負數史的認識，發現負數史中前輩所開發的負數知能，結合數學其他相關議題，展現出簡潔、和諧及新奇的數學美，並見識數學家在處理負數時的思維和抉擇（如本文肆二之（二）所嘗試呈現的），了解勇於突破思想羈絆的意義和重要（如本文肆二之（三）所嘗試呈現的），主動參與學習活動並樂意投入數學領域的探究。

三、藉圖像所蘊的直覺，促進負數運算的理解

教師可運用美感所蘊含的直覺，結合圖像所提點（priming）的果效，幫助學生度過負數學習的瓶頸。目前中小學教師都明瞭運用作圖可輔助解題，但其使用主要是基於「認知」的意義（陳李綢，1999），亦即在認知上充分發揮圖像對認知或記憶的功能，若能再加上「美感」角度的強調，可提升圖像解題的效果，也就是利用直觀中蘊含的認同與親近，跨越難以理解的疙瘩，以不強求說出緣由的直覺，或暫時接受的同理心，使圖像更具有認知或解題的啟發性。

克萊因曾以兩個圖像，解說正數的去括號法則（Klein, 1908/2004, p.20）。筆者認為「負負得正」的運算，可參考該二圖像所傳達的啟示，得到「減一負數」、「兩負數相乘」的便捷解說，以下敘述之。

（一）以圖像直觀「減一負數等於加上它的相反數」的便捷之道

教師對「減一負數就是加上該負數的相反數」之說明程序，可參考下列方式：

$\boxed{\text{題目}}$： a、b、c 皆為正數，且 a＞b，c＞a， c-(a-b)＝？

$\boxed{\text{說明}}$：1. 設 a、b、c 皆為正數，a、b、c 在數線上都位於原點 o 的右側，
又設 a＞b，c＞a，所以 a、b、c 在數線上落點的位置，如圖 1

……… **o**______**b**____________________**a**________**c**…

圖 1

2.由圖 2，便一眼可知 c-(a-b)應該是 b ＋ (c-a) 即 (c-a) ＋ b

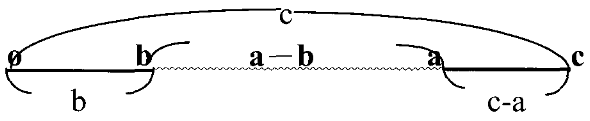

圖 2

3.克萊因以圖像方法，幫助學生了解「括號前為負號」的去括號法則，

c-(a-b)＝c- a-(-b)，(式 1)

4.比較（圖 2）：c-(a-b)＝c-a＋b 與（式 1）：c-(a-b)＝c- a-(-b)

得：c-(a-b)＝c- a＋b＝c- a-(-b)

所以　-(-b)　＝+ b

圖 1 與圖 2 解題之直覺作用，誠如克萊因所說：「照印度人的習慣，只消把圖畫出來，說一聲『請看！』就夠了。」(Klein, 1908/2004, p.20)，也就是圖以無庸置疑的直觀，提供解題的理解。

關於兩負數相乘得正數的積，圖解說明亦有同功之妙。

（二）以圖像直觀「兩個負數相乘，得到一正數」的便捷之道

教師對兩負數相乘積為正數之說明程序，可參考下列方式：

$\boxed{\text{題目}}$：a、b、c、d 皆為正數，且 a＞b，c＞d，(a-b)×(c-d)　＝？

$\boxed{\text{說明}}$：以 a、c 為二邊作矩形 a×c，於 a、c 二邊中各再定 b、d 點，

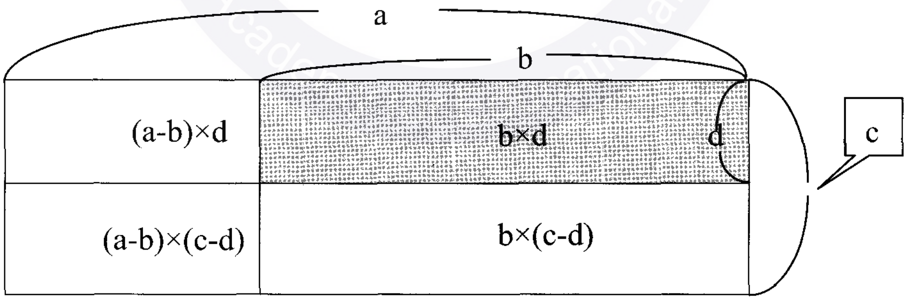

圖 3

由圖 3 可知：(a-b)×(c-d)是個屬於 a×c 的小矩形，其面積可先從 a×c 的矩形面積，減掉 a×d 和 b×c 這兩矩形面積，但這樣 b×d 矩形面積被減兩次，故須把它補回一次。所以(a-b)×(c-d) 的矩形面積(a-b)×(c-d)=ac-ad-bc+bd　（式 2）

也就是(-b)×(-d) = bd

方永泉（2008）在評述 K. R.Conklin 所寫〈抽象性學科中教育的審美面向〉（"Aesthetic dimension of education in the abstract disciplines "）時，提到 Conklin 指出「抽象教材，特別是數學，含有審美成分」、「著名數學家 K. Gödel 雖然運用了嚴格的邏輯技巧，但也強烈的支持直觀角色，主張數學直觀很像感官知覺」（方永泉，2008，頁 280），本文所用的圖 2、圖 3，即提供了此種感官知覺的具體形象。

一些實徵研究的發現，支持圖像蘊含的直覺有益於負數學習。舉例言之，吳佳玲（2011）便發現電腦化圖示策略能提升受試者正負數加減計算解題正確率，並改善受試者正負數加減計算解題歷程表現；陳聖雄（2005）發現動態圖解有助改善學生正負數變號處理的錯誤；黃淑華（2002）發現：形如－ai，a＞0 的虛數之正負等思維的引動，受到直覺思維、視覺特徵的影響；陳佩盈（2007）發現藉圖示表徵策略，可使將近 80%語文能力差的學生，在「正負數與數線」文字題解題能力獲得進步。

四、藉負數史中前人的經驗，幫助學生面對並跨越負數學習的困難

克萊因認為：負數是具體數學向形式數學的第一次轉折（Klein, 1908/2004）。學生「使用負數」、「接納負數」是兩個不同層次的認知。學生經由解說，可依樣畫葫蘆地將生活中「相反意義的量」，以正負數來表徵；但接納負數須讓學生先經感性的認識再進入理性的認識，這需要時間、堅持和認知上的成長，需要老師能同理學生的困難，化解負數所引發的抽象驟增問題，一路伴隨並鼓勵。

回顧負數史，可幫助學生以美感態度，看待東西方面對負數的差異，並輔導學生反觀自己的學習負數狀況，是下面消極和積極中的哪一種：

（1）消極面，若覺自己學得很不安，可用西方發展負數的困頓來同理自己，安慰並鼓勵自己；

（2）積極面，若覺自己學得很自在，可用東方發展負數受益於文化共識來解釋，感到身為華人在思維上的共通性，但也要知道該借鏡西方，勇敢地面對該突破之處。

藉負數史的美感價值，可幫助學生樂意學習負數。教師若援引東西文化處理負數的簡史，談談西方早期所遭遇的困難，可讓學生對自己搞不懂，不至於太著急；而學生聆聽負數與解方程式（組）的歷史關係，了解負數對數學美的貢獻後，能耐心地跟隨教師的引導學習，例如從數線看看負數讓數系完整，呈現出對稱和諧美，並見識負數在立方程式和解方程式的便利；學生即使無法立刻了解個中要意，也可感知負數的價值，而以積極的方式，度過暫時的學習困頓，等到知識累積至某程度，就可有水到渠成的明白。

綜合言之，教師可從美感的角度透過負數史，一方面幫助學生看到：即使是數學大師，很多人也是很難了解負數的概念，從而使學生初學時的不安，獲得緩解；一方面幫助學生對負數教材維持一定程度的認識和興趣，並在教導負數特有的問題洞察、困難突破和方法創造時，帶領學生，以欣賞的美感態度，體悟大師們的思維方式和特質，善用或不排斥使用直覺，認同負數符號在形式上的創造意義和可操作性，不僅平息不安的學習情緒，去除因不得不使用運算規則所產生的無奈，在跨越負數學習困難的同時，更進一步迎向其他新的數學學習里程。

陸、未來的期許

對國中學生而言，負數是新的「數」；若一出現就覺得和以前所學的格格不入，難以消化，會立刻將之否定，那負數的命運會像在古代歐洲一樣，很難展現它的價值和效力。認識負數史與負數教學中的美感意涵，一方面有助學生看到古代華人因講求實用之美，坦然接受負數的存在，並曾在方程式的發展上，做出卓越的貢獻，以致產生「與有榮焉」的認同感，而願意忍受負數學習中短暫的困挫，持續接觸它；另方面有助學生從西方負數發展史展現的美，察覺負數對數學突破的隱默貢獻，而肯定學習負數的價值。

本文嘗試從美感觀點，幫助教師認識負數教學可從美感的內蘊，來引導學生接受負數不容易說清楚的事實，認識負數在數學發展體系上的意義，同時建議教師，適當運用美感態度、負數史及圖像提點的直覺，驅除學生對負數的不安，建立對負數的興趣，並配合學生的認知成熟或數學知識的增長，增進學生的數學能力。負數教學的美感議題，本文係屬初探，作者擬在未來，擬將伍、「以美感開拓負數教學的視野」中可實徵的部分，透過實徵研究，加以驗證，以便就國中負數教學中的美感議題，提出更具體的發現。

誌　　謝

感謝審查委員們對本研究探討議題的肯定，並對內容賜予許多真知灼見；編輯委員們在審查過程中，也多次提供寶貴建議與協助。謹此一併致上最真誠的感謝。

參考文獻

人民教育出版社（2005）。**數學七年級上冊**。北京：人民教育出版社。

方永泉（2008）。抽象性學科之教育中審美的面向述評。載於楊忠斌（編著），**教育美學：美學與教育問題述評**（頁 275-288）。台北：師大書苑。

丘成桐（1999）。數學的內容、方法和意義。**數學傳播，23**（1），3-7。

北京師範大學出版社（2005）。**數學七年級上冊**。北京：北京師範大學出版社。

朱光潛（1971）。**談美**（臺 3 版）。台灣：台灣開明。

朱狄（1988）。**當代西方美學**。台北：谷風。

李文興、吳開朗（1996）。關於數學直覺思維的幾個問題。**數學傳播，20**（3），28-33。

李善良、單墫（2002）。我們為什麼要學習數學－兼及新世紀中小學數學課程目標。**數學傳播，26**（4），77-88。

吳佳玲（2011）。**電腦化圖示策略對一位國中數學低成就學生正負數加減學習成效之研究**（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學特殊教育研究所，台北。

吳開朗（1992）。數學美之魅力在那裏？**數學傳播，16**（3），60-67。

林保平（2006）。正負數的概念及其加減運算。**科學教育月刊，277**，10-22。

林奕宏、張景媛（2001）。多元智能與問題解決整合型教學模式對國小學生數學學習表現之影響。**教育心理學報，33**（1），1-30。

林逢祺（2010）。**Maxine Greene《釋放想像力》思想及其對教師專業發展的啟示**。發表於美學取向課程與教學之理論建構與應用學術論壇，家教育研究院籌備處、國立編譯館，台北。

林雪卿（1993）。繪本教學研究。**國教月刊，40**（1），55-61。

房昔梅、鍾靜（2005）。國小教師在高年級實施討論式數學教學之行動研究。**國立台北教育大學學報：數理科技教育類，18**（2），33-64。

周來祥、周紀文（2002）。**美學概論**。台北：文津。

周淑卿（2005）。課程的美學探究範疇之建構－當前的問題與未來的方向。**課程與教學季刊，8**（2），1-14。

周淑卿（2009）。借鏡於藝術的教學－與「藝術創作者/教師」的對話。**當代教育研究季刊，17**（2），5-27。

周雅菁（2009）。**電腦輔助教學應用在國中資源班學生數學學習成效之研究－以正、負數為例**（未出版之碩士論文）。中原大學教育研究所，中壢。

邱貴發（1992）。電腦輔助教學成效探討。**視聽教育雙月刊，33**（5），11-18。

侯雪卿（2011）。**當數學與文化相遇－教學中的美感經驗如何可能？**發表於美感經驗的探索與建構－教育與美學的對話學術論壇，國家教育研究院籌備處，台北。

郁建輝（2005）。求真立德，育美致善－發揮數學文化教育功能實踐之一。**數學傳播，29**（3），65- 83。

洪詠善（2005）。以美感經驗轉化教學。**課程與教學季刊，8**（2），25-40。

洪詠善（2012）。跨域 SAS （社會/藝術/科學） 美感教育的課程發展。**教育人力與專業發展，29**（1），55-60。

洪漢鼎（2000）。**理解的真理**。山東：山東人民。

袁小明（2003）。**數學史**。台北：九章。

徐炎章、吳開朗、唐煌、周金才（1998）。**數學美學思想史**。台北：曉園。

唐書志（1998）。負數的迷思。**HPM 台北通訊，1**（2），6-10。

陳伯璋（2003）。新世紀課程研究。**國家政策季刊，2**（3），149-167。

陳伯璋、張盈堃（2007）。來自日常生活的教育學院：社區、課程與美學的探究。**教育與社會研究，12**，41-71。

陳李綢（1999）。**認知發展與輔導**。台北：心理。

陳佩盈（2007）。**國中資源班身心障礙學生之文字題解題能力在動態評量的表現—以「正負數與數線」單元為例**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學特殊教育研究所，台北。

陳皎眉、王叢桂、孫蒨如（2006）。**社會心理學**。台北 :雙葉。

陳聖雄（2005）。**高一學生解一元二次不等式的主要錯誤類型及其補救教學之研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學數學系在職進修班，台北。

陳毅峰（2013）。**國一新生在暑期輔導之學習成效–從整數四則運算的錯誤類型去探討**（未出版之碩士論文）。國立中興大學應用數學研究所，台中。

陳龍安（1991）。**創造思考教學理論與實際**。台北：心理。

曹亮吉（1985）。代數學基本定理。**科學月刊，16（1）**，10-13。

張綉玲（2010）。**當數學遇上美學：三角形學習的可能性**。發表於美學取向課程與教學之理論建構與應用學術論壇，國家教育研究院籌備處、國立編譯館，台北。

國家教育研究院（2007）。**數學領域影音資料：數學史－負數的時光之旅**。台北：國家教育研究院。

國家教育研究院籌備處、國立編譯館（2010）。**美學取向課程與教學之理論建構與應用－學術論壇手冊**。台北：國家教育研究院籌備處、國立編譯館。

黃敏晃（2003）。**人間處處有數學**。台北：天下。

黃淑華（2002）。**高中生複數學習歷程中之數學思維研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學數學研究所，台北。

曾昭旭（1993）。**充實與虛靈：中國美學初論**。台北：漢光。

賈馥茗（2009）。**教育美學**。台北：五南。

鄔佩麗（2005）。**輔導與諮商心理學**。台北 ： 台灣東華。

楊忠斌（2009）。美感經驗理論對教師的啟示。**教育資料與研究雙月刊，88**，49-68。

趙天儀（1990）。**現代美學及其他**。台北 ： 東大。

劉太平（2001） 。數學難、數學美。**數學傳播，25**（4），46-53。

劉文潭（1978）。**現代美學**。台北：台灣商務。

鄭博真（2000）。**多元智能統整課程教學**。高雄：復文。

歐用生（2009）。當教師與藝術相遇－藝術為基礎的教師專業發展。**研習資訊，26**（5），25-34。

戴文寶、邱守榕（2000）。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。**科學教育，10**，148-175。

龍應台（2012）。在迷宮中仰望星斗－政治人的人文素養。載於立緒（編選），**百年大學演講精華**（頁 102-116）。新北市：立緒。

鍾聖校（2012）。**正向心理情意－教與學**。台北：五南。

譚建國（1996 a） 。數學美賞析（上）。**數學傳播，20**（1），55-61。

譚建國（1996 b） 。數學美賞析（下）。**數學傳播，20**（2），69-76。

Armstrong. T.（1998）。**經營多元智慧：開展以兒童為中心之教學**（洪蘭審訂，李平譯）。台北：遠流。（原著出版於 1994）

Berlinghoff, W. P., & Gouvêa, F. Q.（2008）。**溫柔數學史：從古埃及到超級電腦**（洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊譯）。台北：博雅。（原著出版於 2004）

Brown, D.（2004）。達文西密碼（尤傳莉譯）。台北：時報。（原著出版於 2003）。

Brown, T. (2007). The art of mathematics: Bedding down for a new era. *Educational Philosophy and Theory*, *39*(7), 755-765.

Csikszenmihalyi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience*. New York, NY: Harper and Row.

Dunham, W.（1998）。**天才之旅－－偉大數學定理的創立**（林傑斌譯）。台北：牛頓。（原著出版於 1990）

Eves, H.（1993）。**數學史概論**（歐陽絳譯著）。台北：曉園。（原著出版於 1989）

Fiori, N. (2007). In search of meaningful mathematics: The role of aesthetic choice. *Dissertation Abstracts international Section A: Humanities and Social Sciences*, *68*(6-A), 2370.

Klein, F.（2004）。**高觀點下的初等數學第一卷算術代數分析**（舒湘芹、陳義章、楊欽樑譯）。台北：九章。（原著出版於 1908）

Sherburne, D. (1961). *A whiteheadean aesthetic*. New York, NY: Yale.

Townsend, D.（2008）。**美學概論**（林逢祺譯）。台北：學富。（原著出版於 1997）

Winston, J. (2011). Beauty: A concept with practical implications for teacher researchers. *Educational action research*, *19*(4), 579-586.

投稿收件日：2013 年 1 月 22 日

接受日：2013 年 11 月 8 日