

數

學

作者：林宜臻

國家教育研究院助理研究員



# 壹、緒論

## 一、研究背景

經濟合作發展組織（Organization for Economic Cooperation and Development, OECD）發現經濟上的優勢未必與學習成就呈線性關係，而課程與教學等實質因素方能影響學生數學學習成就（OECD, 2004；周玉秀，2006）。面對國際經濟競爭、資訊科技的快速變遷，以及全球化趨勢的需求等之因素，教育改革被視為迎向 21 世紀挑戰的重要關鍵因素，數學成為公民必需的文化素養，數學課程（數學教育的目的、內容）及其教學模式出現新變化的同時，我國數學教育也面對如下之課題：

數學運算與數學概念理解孰先孰後 「重建教育連線」將建構式數學<sup>1</sup>列入教改十三大亂象之一（重建教育連線，2003）。建構精神強調數學教學宜重視概念理解，而不宜只是計算能力的養成，「中華民國數學學會」視此舉將造成教材的淺化及弱化學生數理能力，進而影響學生個人生涯發展與國家的競爭力，因此向教育部建議暫緩實施「國民中小學九年一貫課程暫行綱要」，另行邀集以數學家為主的大學數學系教授重新審議 89 暫行綱要，而於 92 年公布「九年一貫數學學習領域課程綱要」。數學家主導的 92 及 97 數學課綱較著重於學生的演算能力，是否又會回到 60 或 70 年代？知識的建構必須和生活經驗連結，與生活脫節的知識，將面對如何內化的課題（Lange, 1996；Van den Heuvel-Panhuizen, 1996），即使是注重邏輯思考推理的數學，如何讓學習數學有意義、有趣等是我國數學課程必須面對的課題。反觀美國過去十幾年發生的所謂「數學戰爭（Math Wars）」類似我國，其最主要的爭議點為究竟是須具備純熟的數學運算練習才能引出真正的概念理解，或是須先理解數學概念才能進行有意義的數學運算（劉柏宏，2004）。美國數學學會前會長 Hyman Bass 等數學家與數學教育家們一起面對學童問及在教室中

---

<sup>1</sup> 民國 82 及 83 年公布的中小學數學領域課程標準強調建構主義。

常會遭遇有關教師的數學知識，以及學童的認知特性理解的問題當下，皆束手無策，面對教育現實處境的當下，無論是數學家或數學教育家都放下意識型態的爭執。洪萬生（2004）對傑出數學領袖 Bass 能放下身段，從頭學習數學教育，感慨國內數學教育主導權爭議的拉鋸。美國 2000 年 4 月公布的《學校數學的原則和標準（Principles and Standards for School Mathematics）》，已邀請美國數學學會的數學家（26 位中佔 5 位）參與草案的撰寫（Roitman, 2000）。另，將美國將未來數學教育改革方向植基於實證研究：美國布希總統為確保成為世界領袖的地位，以及並改善學生的數學，簽署總統行政命令，於 2006 年 4 月 18 日成立國家數學諮詢委員會（National Mathematics Advisory Panel [NMAP]，主席 Larry Faulkner），針對數學訓練是否能同時加深學科見解，綜合分析數學教學與學習的相關研究成果，以解答「數學如何教方能使學生擁有基礎數學能力，從而順利銜接進階之課程」等之數學家與數學教育家的議論焦點。

認識上的「非此即彼」將導致行動上的左右搖擺，「賦權」激發創造，「問責」促進反思，而創造與反思帶來自我更新與重建（楊小微，2009）。我國社會各界對數學課程的爭議與美國「數學戰爭」相似，且溯自我國歷屆數學課程改革亦深受美國影響，因此美國列為本研究的對象。

**數學學習意願低** TIMSS2007 我國國二與小四學生的數學表現分列全球第 1 與第 3，但小四生「喜歡學習數學」與「喜歡數學」，兩者都倒數第一，「數學自信心」倒數第四，小四生喜歡學習數學只有 25.9%，到國二只剩 14.6%，而國際上，國二生「喜歡學習數學」逐回上升（24.0%→29.3%→34.8%），而我國只維持一成五左右，顯示我國學生的數學學習「卓越有餘，意願不足」的現象，如何提高學生的學習意願，是我國數學課程必須面對的課題。

TIMSS2007 日本小四與國二學生的「數學自信心」都倒數第一；PISA2006 日本學生對於數學學習感到不安的學生比例比國際平均值高；日本的國內數學喜惡調查，也發現小六及中一學生回答喜歡數學的比例有下降的現象（文部科学省，2007b）。基於此，日本已針對如何提高數學學習意願反應於 2008 年 3 月公布的新

課程，日本新數學課程的探討，對我國如何提升學習意願的課題應有所助益。PISA2006 名列第 5 名 (PISA2003 第 4 名) 的荷蘭，百分之九十的大學生選課時，會選修高等數學 (何淑真，2003)，為何荷蘭的小孩不怕數學?如何引出學習意願，是我國數學教育的課題，荷蘭的數學課程亦值得我們深入探討。

**數學表現優劣差距大** TIMSS2007 我國的國二生成績優等占 45%，排名第一，但是低分群方面，相對於韓國和新加坡國二生未達「初級」標準僅 2%和 3%，我國卻高達 5%(Mullis et al., 2008)，小四數學中級以下只有 8%，但到了八年級，卻增加到 14%。PISA2006 年我國數學素養居冠，然我國低於基本程度 (第 1 級及其以下) 者占 11.9% (OECD, 2007)，如何縮短數學表現優劣差距，是我國數學課程必須面對的課題。

各國增加時數加強數學學習的當下，PISA2003 及 2006 都位居第 2 名的芬蘭，每年上學 190 天，有秋季假、耶誕節假以及一週的滑雪假 (家長陪同)，任何假期都沒有家庭留作業 (盧楓，2003a, 2003b)，上課時間少，素質卻是世界頂尖 (高正忠，2006)，而且芬蘭學生數學低於基本程度僅 5.9%，雖整體成績落於我國之後位居第 2，但為何芬蘭學生的數學表現的優劣差距遠較我國小，值得深究。2002 年布希總統簽署實施的「不讓任何一位孩子落後法案 (No Child Left Behind Act, 2002)」，對弱勢孩子伸出援手的經驗，美國的經驗對於我國如何幫助低分群學童應可為借鏡。

本研究從我國如上之現有課題出發，首先從我國數學課程實施經驗與現況釐清我國數學教育的課題，再探討足以借鏡國之數學教育改革的脈絡、趨勢及其立論基礎，進而展望我國數學課程的主要內涵與核心取向，勾勒出台灣數學教育未來可以發展的方向，以期能繼續維持我國既有的數學水準，提升弱勢學童數學能力以縮小優劣之差距，以及引發學童數學學習之意願，以為我國中小學數學課程的研修機制奠立合理性、永續性發展基礎。

## 二、研究目的

本計畫欲從我國數學課程的實施現況中發展問題意識，希冀達成下列研究目的：

- (一) 瞭解我國數學課程實施經驗、現況與問題。
- (二) 探討他國近期數學領域課程、教學、評量等理論或發展趨勢。
- (三) 提出對未來課綱擬定的啓示與建議，以爲我國未來規畫中小學數學課程綱要參考。

## 三、研究方法及流程

### (一) 研究範疇

本研究基於如何解決我國「卓越有餘，意願不足」學習意願偏低，以及優劣差距甚大等之現況，有鑑於芬蘭 PISA2003 及 2006 位居第 2，素質頂尖，上課時間少，學生優劣差距小；荷蘭 90% 大學生會選修高等數學，學生不怕數學且數學學習意願高；日本由於 PISA 表現節節敗退，已針對未能活用及自信心不足等課題反應新課程中；美國 2002 年實施 NCLB 法案，向弱勢孩子伸出援手，2006 年成立國家數學諮詢委員會參閱 16,000 份研究出版物等，總報告點出不曾被重視的數學改革重點，所以即便這些國家的背景脈絡等與我國有所差異，基於這些國家的經驗，足以爲我國解決學習意願偏低及優劣差距甚大等現況問題之借鏡，因此，以芬蘭、荷蘭、日本、美國這些國家爲研析之對象。

## (二) 研究架構

本研究之架構如下：

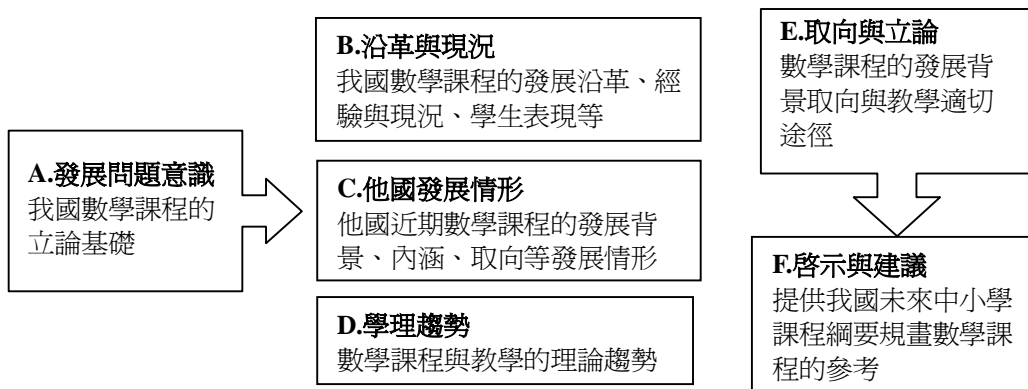


圖 2-1 研究架構圖

本研究以我國現存問題為出發點，再針對他國「為何」如此課程規劃，探討芬蘭、荷蘭、日本、美國這些國家的數學課程沿革；針對「如何」落實於教學現場，探討其課程內涵與特色；並根據上述之探討，比對我國 97 年版數學課程綱要，進而思索我國數學課程綱要之走向，以為我國未來規畫中小學數學課程綱要之參考。

## (三) 研究方法

在上述架構下，本研究的途徑如下：

1. 文本分析：蒐集國內外中小學數學課程之相關文獻報告，進行閱讀與分析，作為本研究之基礎。其中，主要以下列的文本將做為本研究的主要參據：
  - (1) 從 1945 年國民政府遷台至 2008 年，我國中小學相關數學課程標準/課程綱要。
  - (2) 芬蘭、荷蘭、日本、美國、等國相關數學課程綱要或標準，採用版本如下：
    - A. 芬蘭：National Core Curriculum for Basic Education 2004 (Finnish National Board of Education [FNBE], 2004)。

- B.荷蘭：Core objectives primary education 以及 Core objectives secondary education (Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap [OCW], 2008a, 2008b)。
- C.日本：小学校學習指導要領解說 算數編及中学校學習指導要領解說 數學編（文部科學省，2008b，2008c，2008d，2008e，2008f，2008g）。
- D.美國：Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2006)。
2. 諮議座談：本研究除了定期（約每 2 週 1 次）參與所屬整合型研究的研究聯席會議之外，邀請國內熟悉數學課程的學者、專家擔任本研究諮詢委員，就研究過程、內容進行研討諮議。

## 貳、各國近期數學類課程的發展背景與內涵

本節首先探討我國數學課程之沿革，再探討芬蘭、荷蘭、日本、美國等國數學課程之沿革及其近期中小學數學領域課程（課程主要學習目標、核心內容、學習時數等）、教學（教學觀等）、評量等理論與發展的趨勢，進而釐清各國近期中小學數學領域課程的特色與取向。

### 一、我國數學課程沿革

我國數學教育沿革可分成以下幾個階段：

#### （一）第一次數學課程改革\_新數學運動

「SMSG 新數學」納入課程，掀起第一次數學課程改革。1957 年蘇俄發射人造衛星「史潑尼克一號」(Sputnik I)，美國學術界驚覺其科學教育落後於蘇聯，於是大量投入經費從事科學計畫的研究，並進行課程改革，翌年通過國防教育法案推動科學課程研究，編輯「SMSG(School Mathematics Study Group)新數學」等。強調知識結構的「SMSG 新數學」，改用集合的觀點來解決有關數、量、形的問題，



由當時清華大學校長陳可忠引入國內，清華大學教授以此為藍本，改編我國的新數學（王九達，2000）。民國 54 年起高中教材引進線性代數、統計…等；民國 57 年「SMSG 新數學」納入於修訂的國中、小課程，學生從而提早接觸現代數學的概念與方法。基於教師不知如何將之結合於教學之考量，臺灣省國民學校教師研習會當時主任陳梅生在教育廳的支持下，結合師專教授指導各縣市輔導員組成種子隊，編寫教學活動設計，並由各縣市輔導員分區辦理該學期的數學教師研習，新數學課程得以從一年級逐年實施（陳梅生，1986）。

### （二）第二次數學課程改革\_數學教學實驗

第二次數學課程改革，讓課本教材先經實驗再推出。集合論凌駕整個中小學數學下，造成中小學生無法將實際問題數學化解決問題；也無法學會純數學的臆測、證明、推廣與再臆測循環研究程序；高三下介紹「群」、「環」與「體」等名詞，卻未就其性質討論及舉例，導致該數學教育變革遭到徹底的失敗（王九達，2000）。旅美數學家項武義提供課本稿件取代「SMSG 新數學」，並提出「課本未經實驗教學，不可冒然推廣到全國」的理念。第二次的數學課程改革，刪除「SMSG 新數學」課程的集合相關教材及其相關的知識推理，並在彰化高中進行實驗，實驗本將教材分為自然組數學與社會組數學，雖教材內容仍抽象，但淡化處理集合、公設系統等，教材也開放成東華版（SMSG）、實驗本（高中數學實驗教材編輯小組）等版本，集合論退居輔助敘述數學問題的地位，新修訂的課程標準幾乎完全揚棄了集合論的語言，而將初等統計、微積分與線性代數納入高中課程（呂溪木，2007a）（呂溪木，2007a）。

### （三）第三次數學課程改革\_數學課程研發

透過世稱「板橋模式」<sup>2</sup>的「教材研發→教學實驗→教材修改→教材試用→教材修改→國定本教科書」的課程發展模式，展開第三次數學課程改革。民國 63 年起陳梅生結合小學老師、主任、校長、師專教材教法教授、大學教育心理學教

---

<sup>2</sup> 由於由位居板橋臺灣省國民學校教師研習會開創，故有此稱號。

授、課程專家、數學教授、教育行政官員等教育、課程、心理學專家組成研究小組，從事國民小學數學課程實驗研究，編輯實驗教材。先於實驗小學進行實驗後，再配合國立編譯館3所成立的編審委員會，編輯成試用教材，由試用學校試用一年後，根據回饋資料再作修訂，方定稿為國小國定本數學教科書（邱石虎、莊仁宗，1999）。第三次數學課程改革，應用皮亞傑（Piaget）認知發展階段的理論與布魯納（Bruner）的動作、形象、符號三階段學習，配合學生的心智，發展課程。國小數學新課程引進電算器作為計算工具，降低了對於學生計算能力的要求，強調四則運算的意義及基本的計算能力，不要求學生對於複雜計算的熟練度，使學生有更多的時間從事更有意義的學習。

國中數學課程實驗研究小組於民國 64 年在師大科學教育中心成立，以國小課程發展模式實施之。幾何課程淡化公理化系統<sup>4</sup>，國中教材強調數值「逼近法」，引進電算器、微電腦<sup>5</sup>、基本語言程式、流程圖等計算與解題的工具，解決無理方程式、高次方程式的繁雜計算。

高中數學課程改進研究實驗小組於民國 65 年師大科學教育中心成立，參照國小、國中課程發展方式，由科學指導委員會吳大猷主任委員號召各大學百多位自然科學與數學的教授以及中學教師共同參與，從事大規模的實驗研究，並在中正國防幹部預備學校進行實驗教學，進行數學科與科學課程的改進研究。高中數學課程編入大量原是大學才開設的微積分教材，以選修代替分組（呂溪木，2007a，2007b）。

該次數學課程改革，其主要特色為：（1）數學修訂由國小、國中到高中，得以連貫與配合；（2）根據實驗教學的回饋資料修改教材；（3）國中數學課程分「數學（甲）」、「實用數學」因應學生的性向與個別差異；（4）教材內容呈現配合學生心智發展；（5）學生由實際問題的討論解決中，抽取數學概念與方法以為定義或定理；（6）順應時代的潮流調整教材內容（呂溪木，2007a）。

<sup>3</sup> 2011 年 3 月 30 日起，改為國家教育研究院台北院區。

<sup>4</sup> 如將三角形的內角合為 180 度當作已知的事實，以推出其他的幾何性質。

<sup>5</sup> 以微處理器作為其中央處理器(CPU)的電腦。

#### (四) 第四次數學課程改革\_數學建構論辯

民國 82 及 83 年公布的中小學數學領域課程標準，主張學生主動參與，學習方才發生的建構式數學學習方式，被「重建教育連線」列為當前教改十三大亂象之一（重建教育連線，2003）。該數學學習方式強調數學教學宜重視概念理解，而不僅只是計算能力的養成。中華民國數學學會視此舉將造成教材的淺化及弱化學生的數理能力，進而影響學生個人生涯發展與國家的競爭力（劉柏宏，2004）。建構主義理念下，85 年實施的九年一貫數學課程，學生得以「一題多解」，然推出一學期後，仍有 70% 的教師不知道建構理論的想法或建構教學的作法（胡志偉，1997）。錯誤的解讀下，演變成學生必須瞭解每一解題方法，甚至要求利用多種方法解決同一題目（林宜臻、林沂昇，2007）。針對「學生計算能力下降」的爭議，教育部提供「樂在數學」手冊加強學生的計算能力（教育部，2003b）。

國家科學委員會的研究指出：同樣受傳統數學教育學生的國二學生在概念、程序性知識及解題進步幅度接近，接受建構式的數學教學的小四學生的程序性知識進步幅度較小外，概念及解題則大幅提升，程度較差的小四學生的進步較國二學生進步幅度大。93 年國二生<sup>6</sup>的整體答對率略高於 92 年國二生<sup>7</sup>，雖未達顯著差異，但可以得知接受建構式數學的學生，其數學能力並未變差。93 年學生的「概念瞭解」卻顯著高於 92 年，且達顯著差異。93 年學生「計算能力」也略高<sup>8</sup>於 92 年國二生，亦可得知建構式數學並不會影響學生的計算能力（洪萬生等人，2003）。大多數的教師認為建構教學不但可以提高學生的學習動機，也能增加學生課堂所學的能力，也提升了學生的分析、表達等學科以外的能力（胡志偉，1997）。

## 二、芬蘭

1990 年代前，芬蘭的所有綜合學校的課程架構、組織、內容、資源、方法，

---

<sup>6</sup> 小學接受 82 年版建構式數學，93 暫綱的第一屆國中學生。

<sup>7</sup> 小學接受 64 年版數學課程標準編寫的數學教材，83 年版的最後一屆學生。

<sup>8</sup> 未達顯著差異。

以及教科書等的國家核心課程都建立在嚴密和精細的規範之上。嚴密控管下，教育目標無論在校間和教室間都有高度的一致性。但隨著 1994 年課程綱要的頒布（FNBE, 1994; Sirku Kupiainen, Hautamäki, & Karjalainen, 2009），芬蘭課程哲學和實踐發生重大變化，學校自主性提升，去中央化授權給地方政府，走向教育權限的下放與地方化，中央負責課程教學時數、大綱以及走向，國家課程的重新組織，課程變得更靈活、不集中而且不那麼精細，當局認為教育應普及於所有的人，得以縮短學生成績的優劣（Väljärvi et al., 2003）。

### （一）芬蘭數學課程沿革

芬蘭的數學教育沿革可分成以下幾個階段（Kupiainen & Pehkonen, 2008）：

#### 1. 自行發展期

芬蘭在 1960 年代前，學生在中學階段每週都用自己國家發展的教科書學習代數和幾何，維持百年之久，傑出的數學家擔任學校教師或編寫教科書，在芬蘭是很普遍的事，芬蘭知名的數學家 Rolf Herman Nevanlinna 和他的父親 Otto Wilhelm Nevanlinna（1867~1927）、伯父 Lars Theodor Nevanlinna（1850~1916）在芬蘭數學教育的發展上，扮演了重要角色。Lars Theodor Nevanlinna 於 1902 年擔任國家教育委員會（National Board of Education）的數學科負責人，由他編輯的教科書更被使用超過半個世紀。而 1946~1970 年，芬蘭中學校最常使用的教科書則是由 Väisälä 所編，自從 1917 年芬蘭獨立後，隨著新大學的建立和中學校的擴展，數學家參與學校教育的情況便明顯減少（Malaty, 2009）。原採分流制度的芬蘭，學生 10 歲時必須參加全國考試，按考試成績分普通班及職業教育班，由於轉班幾乎不可能，所以分班決定學生的未來。基於需要更多的人才與人力因應國家發展，1970 年代芬蘭開始實施九年一貫的教育，廢除原 10 歲必須參加的全國考試，並規定 16 歲前一律在綜合中學就讀，以學生為本，教師擁有自主權（范信賢，2002；盧楓，2003a，2003b）。

## 2. 新數學期

如圖 2-2 所示，1960 年代後期，芬蘭的數學教育受到西方數學教育的影響，參與了「新數學（New Math）」改革計畫，1970 年代開始各校執行「新數學」課程。

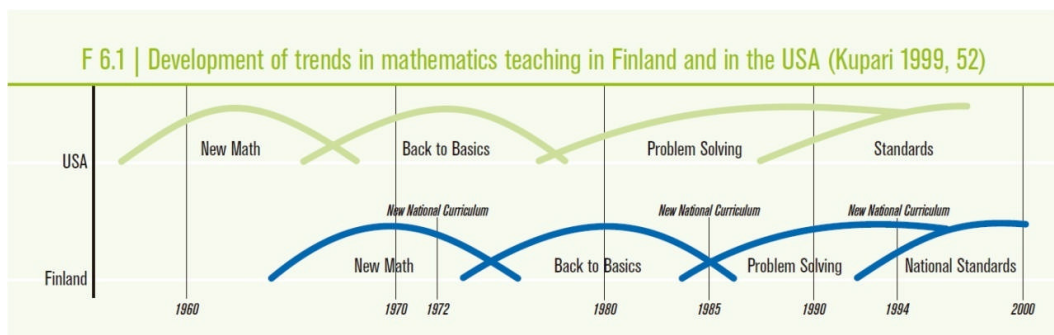


圖 2-2 芬蘭與美國數學教學發展趨勢

資料來源：Kupiainen, S., & Pehkonen, E. (2008). *Mathematical Literacy Assessment PISA06 Finland - analyses, reflections and explanations*(pp. 117-143).

自 1975 年，芬蘭以「回歸基礎（Back-to-Basics）」取代「新數學」。1985 年公布新課程，於 1994 年再公布新課程（Finnish National Board of Education [FNBE], 1994），芬蘭的數學課程深受美國的「新數學」、「回歸基礎」、「問題解決」以及荷蘭的日常生活數學（Everyday Life Mathematics）等之影響發生改變（Finnish National Board of Education[FNBE], 1985; Hautamäki et al., 2008; Malaty, 2007）。

## 3. 回歸基礎期

自 1975 年，芬蘭的學校雖以「回歸基礎」取代「新數學」課程，然歐幾里德幾何及其推論並未因「回歸基礎」重返學校。「回歸基礎」下，芬蘭的數學教育的重點在於數學技能的掌握，在綜合學校，算術教育以訓練為基礎，製作具節奏背誦乘法表的錄音帶（rhythmic cassettes）；代數學習變成不斷的練習；高中階段，機械式套現成公式與算法解決代數問題；幾何成爲周長、面積和體

積的計算，以及在給定步驟下使用工具畫出結構；幾何只是大量利用三角，計算面積和體積（Malaty, 2009）。

#### 4. 問題解決期

「問題解決」被視為一種增進思考技能的手段，解決問題並不只是學習數學的目標，也是主要的手段，在開始解決問題時，學生只需洞察力找出解答，就可以處理問題，關鍵點通常在於用新的角度察覺問題情境，這種問題被稱為一步驟問題、簡單的數學問題，或數學猜謎（mathematical puzzle）（FNBE, 2000）。

芬蘭自 1985 年將「問題解決」列為課程總體目標之一，並超過 25 年之久（FNBE, 1985, 1994, 2004b）。「問題解決」課程從小一開始安排，鼓勵學生解決問題之際，運用甚於數學的學習，「問題解決」時，提供孩子們難題後，須等到他們找到解決方法出現為止（Malaty, 2009）。

1980 年末，芬蘭就已落實於教師的職前與在職教育，1986 年，芬蘭國家教育委員會（FNBE）計畫性地推動「問題解決」，1986 舉辦問題解決研討會，並於隔年研討會中發表，如何運用於教學。研討會後，出版商或以小冊子，或以紙卡方式，出版問題集，教科書中也安排問題探討的時間。1990 年代 FNBE 出版指導手冊（Pehkonen, 2007）以協助教師如何落實課程架構（curricular framework），三、四種類的新教科書也根據課程架構編寫綜合學校小學 1-6 年級及中學 7-9 年級的用書，以為訓練綜合學校學生的思考和問題解決能力。但由於時機不夠成熟到採用這種徹底更動的教科書（radical textbooks），仍有部分教師們不願意接受，堅持使用傳統數學書籍（Pehkonen, 2007）。

#### 5. 日常生活數學期

相對於歐洲中心主義的數學，將數學課程與各民族不同的文化傳統連結「民族數學（Ethno mathematics）」，已經被解釋為「日常生活數學」。自 1990 年起，芬蘭開始重視「日常生活數學」，在就學之初甚至學前教育就已成爲一項普遍的活動（Malaty, 2009）。前述之「新數學運動」、「回歸基礎」、「問題解決」，以及「日常生活數學」等至今仍影響著芬蘭的數學，尤其是「問題解決」、

「日常生活數學」被視為芬蘭在 OECD 的 PISA2003 及 2006 分居第二的原因所在 (Malaty, 2007)。

## 6. 數學課程均衡設計期

芬蘭在 PISA 雖獲得成功，然存有「中學畢業的數學程度無法滿足高中所需」的課題。Nevanlinna (1966) 等芬蘭數學家們曾反對「新數學」，因此，「回歸基礎」並沒受到很大的反對。然而在「新數學」效應消失後，芬蘭的大學和理工學院學生的程度，讓其國內的數學家感到失望，1980~1990 年最具代表的領導人物 Erkki Pehkonen 認為學校的數學並非是真正的數學，而是個綜合性的教育科目 (Malaty, 2006)。因此，自 1995 年起，一些數學家開始在某種程度上參與數學教育，課程朝向均衡設計，一方面保持重視日常所需的優勢，另一方面建立數學結構。芬蘭國家教育委員會在 2004 年出版的國家基礎教育核心課程，將「數學思維 (mathematical thinking)」和「數學結構 (structure of mathematics)」同時列為新課程的基本要素 (FNBE, 1997)。

### (二) 芬蘭數學課程內涵

芬蘭 2004 年公佈的現行的核心課程於 2006 年 8 月開始實施，其課程時數分配係參照 2001 年公佈的課程時數 (FNBE, 2001)，其數學教育目標及教學時數如下 (Aho, Pitkänen, & Sahlberg, 2006; FNBE, 2004c; FNBE, 1997)：

#### 1. 數學教育目標

1-2 年級		
核心任務	目標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> <li>● 發展數學思維</li> <li>● 練習專注、傾聽、溝通</li> <li>● 獲取經驗做為數學概念與結構的基礎</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 學習專心、傾聽、溝通，以及發展思維；藉由理解與解決問題獲得滿足和樂趣。</li> <li>● 利用表達數學概念的不同方法獲取多樣經驗；在概念的 formed 過程中，以口語、文字、工具和符號表達主要的概念。</li> <li>● 理解概念形成架構。</li> <li>● 理解自然數並學習自然數的基本計算技能。</li> <li>● 學習利用圖片、具體模型和工具，以書寫或口頭方式證明他們的解法和結論，並找出現象間的相似處、相異處、規律和因果關係。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 數與計算</li> <li>● 代數</li> <li>● 幾何</li> <li>● 測量</li> <li>● 數據處理與統計</li> </ul>

P64 國民中小學各類課程內涵與取向研析

1-2 年級		
核心任務	目 標	核心內容
	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 學生能更加熟練觀察對他們而言，具有挑戰性和重要性的數學問題。</li> </ul>	

資料來源：Finnish National Board of Education [FNBE] (2004). National Core curriculum for comprehensive education 2004,158.

3-5 年級		
核心任務	目 標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> <li>● 發展數學思維</li> <li>● 介紹數學思維學習模式</li> <li>● 加強基本計算能力</li> <li>● 提供經驗做為理解數學概念與結構的基礎</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 增加數學成功的經驗。</li> <li>● 學習經由調查與觀察，形成數學概念和概念系統。</li> <li>● 學習使用數學概念。</li> <li>● 學習基本的計算能力並解決數學問題。</li> <li>● 找出現象間的相似處、相異處、規律和因果關係。</li> <li>● 證明他們的行動和結論，並呈現解法給其他人。</li> <li>● 學習在觀察的基礎下，呈現問題和結論。</li> <li>● 學習運用規則和遵循指引的方向 (follow directions)。</li> <li>● 學習持續與集中精神於工作，以及團隊合作。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 數與計算</li> <li>● 代數</li> <li>● 幾何</li> <li>● 數據處理</li> <li>● 統計與機率</li> </ul>

資料來源：Finnish National Board of Education [FNBE] (2004). National Core curriculum for comprehensive education 2004, 161.

6-9 年級		
核心任務	目 標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> <li>● 加深對數學概念的理解</li> <li>● 提供足以建立日常數學問題模式的基本能力</li> <li>● 學習數學模式思維，並練習記憶、專注和精確表達</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 學習相信自己，並對數學學習負責。</li> <li>● 理解數學概念與規則的重要性，並領會數學和實際世界之間的關連。</li> <li>● 學習如何計算與解決數學問題。</li> <li>● 學習邏輯和創造性思考。</li> <li>● 學習應用各種方式去獲得與處理資訊。</li> <li>● 學習明確地表達他們的想法，並證明他們的方法與結論。</li> <li>● 學習以觀察為基礎，呈現問題與推論。</li> <li>● 學習理解規律。</li> <li>● 學習如何持續、集中注意力及團隊的運作。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 思考技能與方法</li> <li>● 數與計算</li> <li>● 代數</li> <li>● 函數</li> <li>● 幾何</li> <li>● 機率與統計</li> </ul>

資料來源：Finnish National Board of Education [FNBE] (2004). National Core curriculum for comprehensive education 2004, 163.



## 2. 數學教學時數

在 1900-1910 年代，芬蘭的數學教學時數明顯高於其他科目，1914 年後，由於中學階段須學習 4 種語言，所以減少數學科的教學時數，在 1914 年以前，中學的五個年級每週共 23 小時，綜合學校 1972 年建立時，縮減為 18 小時（Malaty, 2009）。聯合國教育科學文化組織（United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, UNESCO）調查各國 12 年以上的數學教學平均時數，1986 年公佈之際，芬蘭的數學教學時數在 94 個參與國家中最低，每週只有 2.6 小時（UNESCO, 1986）。即便現今，芬蘭綜合學校的九個年級每週共 32 節<sup>9</sup>數學課，平均每週每個年級也只有 2.7 小時，符合 1998 年《基礎教育法案》（"Basic Education Act," 1998）各科均衡的目標（Education, 2009; Education Audiovisual and Culture Executive Agency[EACEA], 2008）。

### （三）芬蘭數學課程特色

芬蘭在 OECD 的 PISA2003 及 2006 的數學素養平均得分各分居第二，雖 PISA 2006 整體成績落後於排名第一的我國之後，然我國在層級 1 及其以下者高達 11.9%（OECD, 2007），而芬蘭數學低於基本程度僅 5.9%，學生的數學優劣差距遠較我國小，不同地區各校之間的差異也最小，芬蘭的數學教育品質高且全面均衡發展。OECD 的報告指出「由芬蘭學生的表現可以得知成功的教育制度，既可提高教育水準，亦可拉近學生間成績的差距。」，芬蘭的數學教育品質高且全面均衡發展原因在於如下之因素：

#### 1. 學生本位

- （1）普及教育：芬蘭政府為保持全民族的知識和技能水準，將普及教育置於國家政策的中心，1998 年《基礎教育法案》（"Basic Education Act," 1998）指出教育的宗旨在於滿足孩子們天生的求知欲，循序漸進傳授知識與技能，讓學生充分自主發展；綜合學校是為了一個孩子，因此配合孩子

---

<sup>9</sup> 每節 45 分。

的需要進行調整，將指導和教學結構化，以便適合異質性的學生（范信賢，2002；盧楓，2003a，2003b）；芬蘭的老師不會將任何一位學生排除而送往其他學校，因此，學校在規劃課程、選擇內容、教材、學習策略、方法和評估方式時，都考慮學生個人的興趣和選擇，而這些需要建立於彈性、校本和教師以學生為中心的教學、輔導和補救教學課程的規劃（Valijärvi et al., 2003）。

- (2) 學習遲緩者能獲得輔導：芬蘭不設資優班，不將學生貼優劣標籤，學校不排名次也沒有明星學校等，每位老師有義務和責任教好不同類型的學生，各地根據課程標準設計本地的各門課程（陳之華，2008）；芬蘭人不認為需輔導的學生為失敗者，而視輔導為進步的手段，輔導教師因應每個學生不同的資質，各自制訂循序漸進而且切實可行的學習計畫，要求學生和自己以往的成績相比，而不是和其他同學相比，因此，芬蘭學生學業優劣者差距小（Bordewich, 2005; Malaty, 2006）。
- (3) 學生獨立學習。教師認為真正的知識來自搜尋，所以要求學生自己搜集資料，而不是從課本學習（Bordewich, 2005）；芬蘭學生的讀書計劃都由他們在家長和教師輔導下自行制定，他們能有自己的學習方法以及不同的學習目標和學習進度，他們不一定在同一時間做同樣的事，彼此進度也未必相同（陳之華，2009）。
- (4) 學生自我評估成績：為培養學生對自己負責，學校從幼稚園開始，教學生評核自己的成績，教師不會經常監視學生在做什麼（Bordewich, 2005）。
- (5) 學校氣氛輕鬆：在芬蘭所有中學，除非有課，否則學生不必上學；而下課後，學生就可回家（Bordewich, 2005; 陳之華，2008，2009）。

## 2. 師資素質高

- (1) 教育課程錄取門檻高：大學教育課程錄取率，每七名申請人之中僅取一人，比法律和醫學課程更為嚴格，雖然學校有權解聘不勝任的教師，但幾乎不會發生（Bordewich, 2005）。

- (2) 成功的職前師資養成教育與在職師資教育：芬蘭 10 所綜合大學均有教育學院，這些學院除開設常規課程外，還根據教育改革所需，增設教育諮詢專業。並與其他教育機構免費提供教師的終身培訓，以提高教師的專業素質與知識的更新。通常大學教學實習學校（University Practice Schools）設在大學校園內，不但靠近教師訓練部門，數學教育專家在該部門擔任教學實習的輔導老師（tutor），只要實習生（trainee）有意願，都能獲得數學教育專家的指導，此外，他們也能使用包括圖書館等的大學設備（university facilities）。

### 3. 具教學專業的文化

- (1) 享有教學自主權：芬蘭的學校沒有督學（inspections），受聘後，不會受到定期視察與評核，如此不只節省經費，也使教師感覺自由及負有責任感，教師可自行決定使用何種教學法也可自行制訂課程，自選教科書或完全不用教科書，芬蘭當局完任信任教師，這些自由讓每位老師的專業發揮了積極的作用，讓他們對自己的工作感到興趣，也提供他們發展自身經驗的機會（Bordewich, 2005; Malaty, 2006）。
- (2) 具教學專業：教師都能以全國教育委員會公佈的基本課程以及學校公認的更詳盡課程為基礎，發展自己的課程（Malaty, 2006）。
- (3) 關注學生的傳統：大多數教師的興趣在於本身的專業成長，常見教師在學生桌前或坐或跪地與學生面對面安靜討論等關注學生學習狀況的個別輔導方式（Malaty, 2006）。
- (4) 視學生成敗為己任：教師會將未能教好學生，歸因於己（Bordewich, 2005）。

### 4. 優良的學校生活傳統

45 分的課堂與課堂間，有 15 分鐘的休息時間，學生在休息時間必須離開教室到操場，教師們則輪流觀察在戶外的學生，學生和教師都一起在餐廳享用免費午餐用（Malaty, 2006）。

### 5. 教師工作具持續性

由於芬蘭教師決定投入教職主要是情感因素而非薪水，所以教師會選擇教學為終生職業，而且極少換校等，具有工作持續性的優勢（Malaty, 2006）。

### 6. 投注於數學的職前及在職教育

芬蘭在數學教育上的主要問題是缺乏具備數學專長的小學教師，Joensuu 大學在 1992 年的根本變革前，只有少於 2% 的學生選擇數學作為專業，然目前數學是小學師資培訓課程中，最熱門的其中一項主修科目，有超過 80% 的學生主修數學（15 學分），其中一半的人再修 35 學分，取得中學數學教師的資格。係由於 Joensuu 大學的「師範學校（Normal School）」在數學的教學實習期間，會有班級老師和大學的數學教育家到師範學校的小學擔任監督人，這種監督包含備課的監督，會要求學生教數學要比教科書更有系統，且將重點放在理解和探索策略。1990 年組織的數學社團在 1990 年代前半期，擴展到在職教育，社團為幫助教師出版教師手冊，以及更新 20 年未修訂的高中幾何課本等（Malaty, 2006）。

## 三、荷蘭

### （一）現實數學教育課程內涵

荷蘭的數學課程最大特色在於 RME 的理念和實踐，Freudenthal 所發展的 RME 課程在過去 30 年已經成為荷蘭國家標準。自 1960 年代末起，荷蘭數學教育採用「RME（Realistic Mathematics Education，以下簡稱 RME）」，未受美國 1960 年代早期的「新數學」的影響，歸功於 Freudenthal 沒有抵制抽象概念，他確信抽象概念與現實基礎連結，將讓學生增進理解。荷蘭目前以 RME 理念進行全國性中學數學改革，與全美數學教師委員會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）（2000）的《學校數學的原則和標準》改革路線相似（Case, 2005）。RME 主要來自於 Freudenthal「數學是人類的活動」的哲學理念，該「活動」主要包括：尋找問題、組織論點及解題（Freudenthal, 1971, 1973），主張從「做數學（doing mathematics）」學習數學。Freudenthal 主張「學生不是學習『數學』，

而是學習『數學化』，強調「數學來自於現實生活，將其再利用於現實生活」，以及「學生經由自己熟悉的現實生活，自行發現和理出數學結論」。所以自 1970 年代起呼籲由數學概念的實體現象教孩子學習數學，強調數學應貼近孩童的生活經驗與現實連結 (Freudenthal, 1983; 周玉秀, 2006)。1980 年只有 5% 的課本趨向 RME 理念, 1990 年則有 75%, 多數的學校都在使用以 RME 理念編寫的數學課程, 讓學生從自己熟悉的生活發現數學概念, 在視覺化下發現規則, 淬取數學概念形成基模, 再經由同儕間和師生間的說明、討論、賞析等相互質疑與反思的過程, 以及一般化的過程, 發展成更完整的概念, 進而形成數學概念, 再將學到的數學概念運用到現實生活 (Lange, 1996; Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)。

Freudenthal (1968) 認為數學教育不是學習封閉系統中的數學, 而是數學化過程 (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000), Treffers (1978, 1987) 闡述 Freudenthal 的數學化, 將數學化分為「水平式數學化 (horizontal mathematization)」與「垂直式的數學化 (vertical mathematization)」(K. Gravemeijer & Terwel, 2000), 「水平式數學化」係從生活的世界進入到符號的世界, 藉由數學組織與解決現實生活情境的問題, 以圖式化與形象化手段的數學方式陳述問題, 進而從中發現規律、關係與結構, 或從不同問題中辨識同構的本質; 「垂直式數學化」係於符號世界探討, 重視數學系統本身的重組再構過程: 以式子表達關係、證明規則、彙整模型、完備模型、形成新的數學概念, 進而建立一般化理論等。

Freudenthal 接受 Treffers<sup>10</sup> 數學化的新觀點, 並視水平式及垂直式這兩種數學化的價值相等, 適用於各種層次的數學活動 (Heuvel-Panhuizen, 2003), 由於荷蘭數學教育深受 Freudenthal 的強烈影響, 實際參與 RME 的理論發展及實踐的 Panhuizen 指出 1985~2000 年荷蘭的數學教育重視水平式的數學化勝於垂直式的數學化 (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000)。

---

<sup>10</sup> 1978 年獲得博士學位, Freudenthal 是其指導教授。

## (二) 荷蘭數學課程內涵

### 1. 數學教育目標

荷蘭將目標分為「跨學科目標 (Cross-curricular attainment targets)」與「學科目標」。

(1) 跨學科目標：跨學科目標的目在於發展或加強一般的技能，是任何一門學科都應指向的目標，是課程目標的核心。小學階段的跨學科目標包括：①工作態度；②按計劃工作；③運用多種學習策略；④自我認識 (Self-image)；⑤社會行爲；⑥新媒介 (New media)。中學階段的跨學科目標則包括：①跨學科議題 (Cross-disciplinary themes)；②學會做；③學會學習；④學會溝通；⑤學會反思學習過程；⑥學會思考未來 (Peschar & Wal, 2001, pp. 13-14)。

(2) 主要核心目標：

A. 小學：荷蘭小學的數學教育的主要核心目標如下 (Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008a)：

(A) 數學洞察力與運作 (operation)：①學生學習使用數學語言；②學生學習解決實際與正式的算術及數學的問題，並能明確提出論點 (argumentation)；③學生學習使用方法解決算術/數學的問題，並能評估解決方案。

(B) 數與計算：①學生學習理解數量、整數、小數、百分比和比例的總體結構及相互關係，並利用於實際的算術；②學生學習迅速在腦海進行至少 100 的整數及其加減 20 的基本運算，並能夠背誦九九乘法表；③學生學習計算和估算；④學生學習利用靈巧的方法 (clever ways) 進行加減乘除；⑤學生學習利用紙筆縮減或多或少的標準程序 (more or less contracted standard procedures)，進行加減乘除的計算；⑥學生學習利用洞察力 (with insight) 使用計算機。

(C) 測量與幾何：①學生學習解決簡單的幾何問題；②學生學習使用單位和測量方法，進行如時間、金錢、長度、周長、表面積、體積、重量、速度和溫度等的測量和計算。

B. 中學：荷蘭中學的數學教育的主要核心目標如下( Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008b )：

(A) 核心目標：學生學會使用適當的數學語言來組織自己的想法，向其他人解釋，並學會理解其他人的數學語言。

(B) 較低層中學教育核心目標：①學生學習獨自以及與他人在實際情況中辨別數學，並使用其來解決問題；②學生學習建立數學論點並能從中區辨意見 (opinions) 和主張 (allegations)，以及學習尊重他人的思維方式，給予建議與接受批評；③學生學習理解正負數、小數、分數、百分數和比例的結構與一致性 (coherence)，並學習運用於有意義的實際情況中；④學生學習正確的計算，並經由洞察力的推理與估算、精確地調整之，以及適切地用於特殊情況；⑤學生學習測量，理解度量系統的結構與一致性，並學習以常用的度量單位進行計算；⑥學生學習使用非正式的標記法、概要圖、表格、圖表和公式，以掌握數量和變量間的關係；⑦學生學習利用形狀 (forms) 與結構於二維與三維空間，創造想像並解釋之，並用其特徵與測量法，進行計算和推理；⑧學生學習有系統地描述、組織及視覺化數據，並學習以批判的角度評估數據、表達與下結論。

## 2. 數學教學時數

荷蘭政府並無規定各科課程的時間與範圍，只規定每年的最少教學時數 (EACEA, 2008)，前兩年平均每週上課時數 22 小時，後六年平均每週 25 小時 (EACEA, 2009a)。

### (三) 荷蘭數學課程課題

荷蘭 12 年級學生在 TIMSS1995 的數學國際評比中獲得第一名，而荷蘭前 25%

的學生也在參賽國的前 25% 中名列第一，而這些參與 TIMSS1995 測驗的 12 年級學生，許多在 1980 年代都是使用 RME 的課本。RME 目前已列為國家的標準，該數學學習方法遠離「未分析問題本質的機械式背誦」，或「在灌輸中前進 (plug-and-chug)」，而這些教學技能與 25 年前師資培育的重點大相逕庭，荷蘭當局認為若要繼續保持數學教育的成功，要從根本改變教學的品質，而其三項要素是教師、教師、教師，教師的素質是 RME 成功的關鍵 (Case, 2005)。

## 四、日本

### (一) 日本數學課程沿革

日本戰後的數學教育歷經以下幾個時期(林宜臻, 2009; 教育学研究会, 1997; 清水靜海, 2003):

#### 1. 生活單元學習期 (1947-1957)

第二次世界大戰日本敗戰後，日本教育史上首次的學習指導要 (相當於我國的課程標準) 以試案形式登場，告示各級學校的教育課程制訂的基準，要求各校教師自力制訂自校的教育課程 (教育情報ナショナルセンター, 1947)，昭和 22 年 (1947 年) 5 月發行《學習指導要領 算數科・數學科編 (試案)》設定首次的中小學數學科目標，內含總目標與具體目標。昭和 26 年 12 月發行的《學習指導要領 算數科編 (試案)》在目標中再加入「數學與我們的生活」及「數學與教育的一般目標」，各級學校的裁量權大，強調從生活經驗展開數學的學習，同年 11 月公布的《學習指導要領 數學科編 (試案)》的數學一般目標中，強調「培養能善用數學所需的數學理解與能力」，以及「使用數學解決問題所需的能力與態度」，「試案」性質所以尚未具有法的基準性 (清水靜海, 2003)。

#### 2. 強調學科的特性與內容的系統性期 (1958-1967)

昭和 33 年 (1958 年) 版學習指導要領，由文部省正式公佈，具法律的拘束力，成為必須嚴守的國家基準 (教育情報ナショナルセンター, 1958a, 1958b)。



數學科的目標除學科目標外，也設有分年目標，除了要求知識與技能的充分理解外，還要求熟練與活用，以及創意與數學思考，並以義務教育的角度，考慮中小學數學的一貫性。修訂的學習指導要領廢除「生活單元學習」強調「系統學習」，中學數學設置「選修科目」，中學數學科內容包括「式」、「數量關係」、「計量」、「圖形」4 領域，內容較以往程度高，中三選修科目的數學內容程度高。

### 3. 數學教育現代化期（1968-1976）

受 1957 年蘇俄發射人造衛星「史潑尼克一號」(Sputnik I) 發射成功的影響，1968 年版學習指導要領展開「教育內容的現代化運動」充實學校教育，發展科學技術，導入高難度現代化課程的教學內容，但教學節數卻與 1958 年版一樣，「新幹線」的授課速度外，教師無法勝任教學內容，造成無法跟進的學生群出（教育情報ナショナルセンター，1968，1969）。數學教育被要求反應現代化的數學內容，中學的《學習指導要領》強調培養「數學的思考方式」，學科內容包括「數與式」、「函數」、「圖形」、「機率與統計」、「集合與邏輯」5 領域，函數明確化並強化邏輯；導入集合、函數、機率、不等式、圖形變換等新概念；廢除中三選修科目的數學，因此中三增加 35 節，中學階段每個年級都有 140 節（4 節/週）的數學。

### 4. 重視基礎與基本期（1977-1988）

為解決 1968 年版現代化課程的過密、現場準備不足以及教師力不足等造成大量無法跟進的學生，1977 年版刪減學習內容並精簡各學科等的目標，同時減少教學節數，實施寬鬆（ゆとり）且充實的教育，以發展孩子的個性並培育人性。數學修正現代化的軌道，重視基礎與基本，中學數學科內容包括「數與式」、「函數」、「圖形」、「機率與統計」4 領域的內容，刪除「集合與邏輯」領域，並降低全部的內容程度，刪減教學時數，「集合與邏輯」領域的內容，則與其他 4 領域關聯之，改為以適宜的程度處理之（教育情報ナショナルセンター，1977a，1977b）。

### 5. 新學力觀期（1989-1998）

隨著第二次嬰兒潮世代（1971年～1974年），學校的填鴨教育、培養具協調性勞動者的管理教育、考試戰爭等，引發校內暴力、欺凌、拒絕上學、跟不上進度等學校教育及青少年相關多數的社會問題，「小政府、民營化」的體制鬆綁後，終身雇用制度瓦解，複合型、綜合型、有創新能力的知識人才需求倍增，1989年版學習指導要領以新學力觀取代舊學力觀，重視學生的體驗活動，評量重視關心、意願、態度，教師角色由指導轉為支援、援助，以圖求教育質的轉換。相對於以知識與技能為中心的舊學力觀，新學力觀重視學習過程及培養能主動因應社會變化的能力與態度，數學學科強調「培養邏輯思考力與直觀力」不僅只是有條理思考而且能先推估（見通しをもつ）、由「瞭解數理處理的好處」培養「主動活用於生活的態度」等，增加體驗學習及問題解決學習的學習內容，重視關心、意願、態度的評量。強調「個性化與自由化」，教師的角色由指導改為支援學生本身探索知識與真理。學力的重心由「知識與理解」轉為「思考力與應用力」，中學設置「課題學習」與選修科目，強調必要之際活用計算器等之效果。新學力觀被批判「輕視基礎與基本，導致學力下降」、「關心、意願、態度評量不易，導致以舉手次數決定的偏差」等（教育情報ナショナルセンター，1989）。

### 6. 教育內容嚴選期（1999-2007）

針對學童缺乏悠閒、社會性不足、自立延遲，以及體力不足等問題，「生存的能力（生きる力）」的培養成爲1998年版學習指導要領的基本理念，小學中年級到高中階段，創設只規定節數不規定學習內容的「綜合學習時間」以爲橫向的跨科與綜合，藉由教學內容與現實生活的結合，提升學生的學習意願，培養學生的思考力與問題解決力，以及因應社會與生活等能力。

隨著2002年起實施學校週5日制（文部科学省，2002），爲培養學生的「生存的能力」及減輕學生負擔，1998年版學習指導要領中，中小學的每個年級縮減70節（每週約2節），其中，小學數學縮減14%，中學數學縮減18%。而每

單位時間可彈性化；擴大選擇學習幅度，增加中學選修科目時數，學校得以自行設定學科與科目；嚴選學科學習內容，刪除難度高單元或挪至高年級；數學學科目標特別強調「數學活動」及其帶來的「樂趣」，希藉此培養學生主體性探討數學。

## 7. PISA 型學力觀期（2008-）

如同 1998 年版學習指導要領，日本現行課程仍重視「生存能力」的培養，強調 PISA 型學力觀，較之學科知識的學習，重視「社會中能使用的能力」，提出「觀點別評量」，由僅評量「知識與理解」的觀點再增加「關心與意願」、「技能與表達」、「思考與判斷」，其中的「關心與意願」、「思考與判斷」是 OECD 強調的「社會中能使用的能力」（中原忠男，2008）。日本 2007-2009 年的每年 4 月，實施全國學力與學習狀況調查，考察全體中三及小六的國語與數學，除「知識」試題外，「活用」試題的列入是一大特色。「知識」試題鎖定會影響後續學年的學習內容，及生活中活用的不可或缺知識、技能為主；「活用」以能活用知識、技能於生活的能力，以及解決各種課題的構思、評鑑、改善的能力等為主（文部科学省，2009）。

### （二）日本現行數學課程內涵

日本 2008 年 3 月公布新學習指導要領。數理兩學科的上課時數與內容都增加外，理應 2011 年實施的新課程，數理兩學科則提前於 2009 年度先行實施。根據全國學力與學習狀況調查、教育課程實施狀況調查，以及 TIMSS 及 PISA 等調查結果，發現如下課題：（1）意義理解不夠未能充分活用：日本的國內外調查結果發現，基礎與基本知識與技能的紮根情形良好，但對計算意義理解不夠，而且未能充分活用已學的知識與技能於生活與學習；（2）「讀解力」不理想：活用學習於解決實際生活上的「數學素養」及「科學素養」有每況愈下的現象，學生對於事件與現象未能以數學角度擷取資訊、深思、批判、提出結論，以及不擅長於以記述式方式表達自我思考與判斷；（3）學習意願低並感不安與無趣：日本小四與國二生在 TIMSS2007 的「數學自信心」倒數第一，其國內調查也發現小六及中一

學生回答喜歡數學的比例有下降的現象，覺得數學學習無趣與無益的孩童增多(文部科学省，2007a，2007b)。據此課題，日本現行數學課程改善的方向如下：(1) 充實數學的活動，紮實學會基礎基本的知識與技能(以下簡稱雙基)，以及培養數學思考力與表達力並提高學習意願；(2) 從確實扎根雙基的觀點，重視數學內容的系統性，依學生的發展，螺旋式安排課程；(3) 明示培養「數學表達力」的指導內容與活動；(4) 重視經由體驗活動理解數量形的意義，由螺旋式的課程感受學習的進步，並將所學的數學活用於日常生活與其他學科；(5) 中小學各年級內容明示數學的活動(文部科学省，2007b，頁4-6；教育出版教育研究所，2006，2008)。日本為充分確保基礎/基本知識與技能的反覆學習，以及利用於觀察與實驗、報告撰寫、論述、數量形相關知識與技能活用於實際場面等的時間，增加教學節數，以培養思考力與表達力等，實感理解的喜悅及學習的意義。小1(每週3.4增加至4節)、小2(每週4.4增加至5節)、小3~小5(每週4.3增加至5節)；中2仍維持3節外，中1與中3數學每週增加1節(3節增加至4節)(文部科学省，2008a，2008c；林宜臻，2009)。

## 五、美國

### (一) 美國數學課程沿革

#### 1. 新數學運動期

1957年蘇俄人造衛星「史潑尼克一號」的發射，美國驚覺科學教育的落後，1958年成立學校數學研究組，編寫中學數學教材，開啓「新數學運動」，中學數學課程中引進集合、純邏輯和抽象概念等現代數學概念，強調知識的結構。

#### 2. 回歸基礎期

過於強調數學結構與抽象的「新數學」，造成學生計算能力及應用能力的低落，1970年代的「回歸基礎」重新重視雙基的培養，強調反覆演練熟練基本計算。

#### 3. 重視問題解決期

基於「回歸基礎」引發解決問題及理解概念等能力的下降，國際數學評比

的低落基於「回歸基礎」引發解決問題及理解概念等能力的下降，國際數學評比的低落，以及能數學思考解決問題與能處理資訊公民的需求，1980年代起開始重視問題解決，1983年全美教育卓越委員會（National Commission on Excellence in Education, NCEE）發表《處於危險中的國家（A Nation at Risk）》的報告中，指出包括數學教育的美國公教育一系列問題（NCEE, 1983; Pascopella, 2007）。全美數學教師協會（"An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.," 1980）於1980年公布的《行動綱領：18世紀學校數學教育的建議（An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s）》，8項建議中的第1項建議為：「問題解決必須成為18世紀學校數學的核心」將解決問題作為80年代數學教育的核心。

#### 4. 課程標準導向期

1989年3月NCTM公布美國第一套的課程及評鑑標準《學校數學課程與評鑑標準（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics）》前，美國沒有國家的課程標準，而由學校根據各州及學區自行設定的各學年的指導內容設計課程。該標準具體提出了五項目標：（1）重視數學價值；（2）具有數學自信心；（3）具有解決數學問題的能力；（4）學會數學溝通；（5）學會數學的思考方法。將K-12分為K-4、5-8、9-12三個階段，按階段擬訂課程標準，內容由記憶事實與計算方法轉為概念的理解、數學的多種表達、數學的問題解決、連結以及模型化，重視統計、機率及離散數學（NCTM, 1989）。NCTM自1996年開始，針對「問題解決」的侷限性，採納各方的回饋、爭辯與反省等的意見，進行澄清與評鑑，2000年4月公布以「公平原則」、「數學課程原則」、「教學原則」、「學習原則」、「評量原則」和「科技原則」等六條原則為前導的《學校數學的原則和標準》（NCTM, 2000），以為課程標準制定的基礎，將1989年《學校數學課程與評鑑標準》、1991年《數學教學的專業標準（Professional Standards for Teaching Mathematics）》以及1995年《學校數學的評量標準（Assessment Standards for School Mathematics）》三種標準合而為一，便於教師

更容易掌握教學內容，知如何教以及如何評量，並改為 Pre-K-2、3-5、6-8、9-12 等四階段，使教師能夠更加具體明確地掌握各個階段數學教學的內容、方法與要求。

美國由學校根據各州及學區自行設定各學年的指導內容設計課程，以致 1990 年實施的「第三屆國際數學與科學教育成就研究 (Third International Mathematics and Science Study, TIMSS)」的國際評比中，美國數學課程因內容廣、深度淺而且零散，被嘲諷「1 哩廣而 1 吋深 (A Mile Wide and an Inch Deep)」(Schmidt, McKnight, & Raizen, 1996)。《沒有落後學生法案 (No child left behind act)》("No Child Left Behind Act," 2002) 實施時，也發現各州設定的每學年目標及內容位置並不一致。因此，NCTM 在 2000 年的《學校數學的原則和標準》基礎上，出版《課程焦點：追求一致性的任務 (Curriculum Focal Points: A Quest for Coherence)》，將重要的數學內容系統化，將課程內容分為「數與運算」、「代數」、「測量」、「幾何」，以及「數據分析」等類別，並描述每一個年級的學生必須掌握的內容，各有不同的要求，如表 2-1 所示：從 K-12 的每個年級都列有三個主要數學目標，明示每個年級應該學習的基準和掌握的要點，使課程得以首尾一貫，確定每年教什麼樣的關鍵數學技能與知識 (NCTM, 2006; Pascopella, 2007; 清水美憲, 2007)。

表 2-1 美國一至八年級主要數學目標

年級	課程焦點 (Curriculum Focal Points)
1	數與運算、代數：發展對加、減的理解，以及基本的加減法。 數與運算：發展對整數關係的理解，包括聚十與一 (grouping in tens and ones)。 幾何：組合與分解幾何圖形。
2	數與運算：發展對十進制和位值的理解。 數與運算、代數：發展能迅速以基本加減法進行多位數加減計算並能流暢。 測量：發展對線性測量的理解與測量長度的技能。
3	數與運算、代數：發展對乘除的瞭解及有關基本乘法及其相關除法的策略。 數與運算：發展對分數和等值分數的理解。 幾何：描述和分析平面的特質。
4	數與運算、代數：發展能迅速想起基本乘法及其相關除法，流暢計算整數乘法。 數與運算：發展對小數的理解，以及分數和小數的關係。 幾何：發展對面積的理解，並求出平面圖形的面積。

年級	課程焦點 (Curriculum Focal Points)
5	數與運算、代數：發展對整數除法的理解且流暢的計算。 數與運算：發展對分數及小數加減法的理解且流暢的計算。 幾何、測量、代數：描述立體形狀並分析包括體積和表面積的性質。
6	數與運算：發展對分數及小數乘除法的理解且計算流暢。 數與運算：將比例 (ratio)、比率 (rate) 與乘除連結 代數：用數學表達式和方程式書寫與解釋。
7	數與運算、代數、幾何：發展對比例及相似性的理解及應用。 測量、幾何、代數：發展對立體面積和體積公式的理解，並應用於計算。 數與運算、代數：發展對有理數運算的理解，並求解線性方程式。
8	代數：分析、說明並求解線性方程式。 幾何、測量：分析二維與三維的空間，並利用距離和角度計算。 數據分析、數與運算、代數：分析和彙整數據。

### 5. 概念與運算孰先論辯期

1989 年的《學校數學課程與評鑑標準》公布後，各州的數學據此重新改寫，評量方式也隨之翻修 (Roitman, 2000)。加州於 1992 年根據《學校數學課程與評鑑標準》訂定的《加州公立學校數學課程綱要 (Mathematical Framework for California Public School)》，被批評偏重教學法而忽略數學知識內容，於是由加州學術標準委員會 (California Academic Standards Commission) 另行制定，於 1997 年向加州教育委員會 (California State Board of Education) 提出，數學家仍無法認同該新課程強調概念理解，而忽略學生數學計算能力的養成，因此委員會再責由 Stanford 大學數學教授組成修訂小組，約經兩個月，提出反應專業數學思維的《加州 K-12 數學內容標準 (The California Mathematics Academic Content Standards for Grades K-12)》。由於該課程著重技巧輕忽分析，引發是否重蹈 1960 年代由數學家所主導的「新數學」之轍的疑慮。數學家與數學教育家的最主要爭議點：須具備純熟的數學運算練習才能引出真正的概念理解，或是須先理解數學概念才能進行有意義的數學運算。Roitman (1999) 認為數學戰爭根本不存在，只是知識論的建構主義「知識是主動建構的結果，而非被動接受的產物」的信念，被誤解讀成「學生應該自我發展解題策略，老師不宜過度介入」的教學法；反對 NCTM 課程的數學家被誤解為反對課程改革運動。事

實上，數學家也投入諸如非營利組織的 Project SEED 等 K-12 的課程改革運動，數學家並非反對課程改革運動，而是數學家認為只要聘用訓練有術的數學家及學有專精的教師擅用蘇格拉底的詰問法（Socratic method），即使直接教學還是能成功教會低成就學生更高層次的數學（劉柏宏，2004）。

2000 年公布的《學校數學的原則和標準》草案撰寫的 26 位委員中，有 5 位是數學學會的數學專家，制定過程公開，設有監督委員會（oversight committee）掌握《標準》的前瞻性，NCTM 則對組織架構行使同意權，審查小組（Review Groups）負責初稿形成過程中問題的回應及事後批判，數學家與數學教育家共同協力完成草案（Roitman, 2000）。

## 6. 後設研究導向期

美國學生在 PISA2000 第 19 名/31 國；PISA2003 第 28 名/40 國；PISA2006 第 35 名/57 國；PISA2009 第 31 名/65 國，平均成績全都低於 OECD 國家的平均值（OECD, Mullis et al., 2000; 2001, 2004, 2007），美國公民的數學素養與中小學數學教育面臨諸多嚴重問題（ED, 2008）。美國布希總統為確保成為世界領袖的地位並改善學生的數學，簽署總統行政命令，於 2006 年 4 月 18 日成立國家數學諮詢委員會（National Mathematics Advisory Panel [NMAP]），NMAP 由數學家、認知學家和數學教育家組成，設置「概念知識與技能」、「學習過程」、「教學實務」、「教師與教師教育」、「評量」等 5 個工作小組，分析可用的數據；並設置證據標準（Standards of Evidence）、教材（Instructional Materials）、全美代數教師調查（National Survey of Algebra Teachers）等 3 個委員會，一共參閱了 16,000 份研究出版物和政策報告，聽取 110 位公開證言（public testimony），檢視 160 篇機構與個人的評論，以及分析來自 743 位代數教師的調查結果，最後形成 8 份小組報告，綜合分析後形成總報告（United States Department of Education [ED], 2008），解答數學訓練能否加深學科見解，以及如何教才能使學生擁有基礎的數學能力，從而順利銜接進階課程，最後提出「如何建立代數學習基礎的數學教學法」的建議（Pascopella, 2007）。



## (二) 美國數學課程特色

NMAP 的總報告點出許多不曾被重視的改革重點，為提升數學教育提出許多具體可行的方法，為美國形塑數學教育的改革方向。茲就其建議改善數學教育的管道以及有關課程內容及教與學之建議，分述如下：

### 1. 數學教育改善管道

NMAP 發現學生的四則運算能力及分數能力不足，將造成無法進一步學習代數及其他高等教學，認為應從如下六方面改善代數學習 (NMAP, 2008)：

- (1) 有效組織中小學數學課程，從低年級開始重點學習最核心的數學內容。
- (2) 應用研究所得<sup>11</sup>。
- (3) 擁有豐富數學知識的教師在數學教育中扮演核心角色，宜有計畫性地吸引及培養，加強評鑑以激勵與留住具有效能的教師。
- (4) 特定教學方式只有在特定的條件下方能有效發揮，勿執著於特定教學方式。
- (5) 測驗宜著眼於代數學習所須的先備關鍵知識與技能，以改善 NAEP 及各州的測驗品質。
- (6) 加強全國數學教育研究的能力，以為改進數學教育的政策與教學。

### 2. 課程內容及教與學之建議

NMAP 針對美國中小學數學「課程內容」、「學習過程」、「教師教育」、「教學實務」、「教材」、「考試」、「數學教育研究」等 7 方面提出 45 條結論與建議，以為美國數學教育改進用，以下就「課程內容」、「學習過程」、「教學實務」之建議分述如下 (NMAP, 2008)：

#### (1) 課程內容建議

- A. 中小學數學課程應著重於促使代數學習成功的內容循序且前後一貫，關鍵主題 (key topics) 能熟練並避免重複。

---

<sup>11</sup> 例：(1)及早學習的益處；(2)「概念理解」、「熟練計算」、「從具體事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果；(3)數學成績決定於努力程度而不只是能力等。

- B. K-8 的教學明確化，並論及代數角色，高中畢業前至少學完代數 II。
- C. 宜將學校代數的主題內容<sup>12</sup>，視為學校代數課程的架構，以及課程、教材與期末測驗的標準。
- D. 整數、分數以及部份的測量與幾何<sup>13</sup>是學習代數的關鍵基礎，宜將熟練分數<sup>14</sup>列為 K-8 數學課程的主要目標，為代數學習打好基礎。
- E. 為使 K-8 學習有效，建議將 NMAP 針對整數、分數以及部份的測量與幾何，所制定建議性的基準 (Benchmarks)，用於課堂教學、教材開發與州級測驗指導。
- F. 所有學區應提供將學代數的學生，能有學習真正代數<sup>15</sup>的機會，並讓更多的八年級學生學會。

## (2) 學習過程建議

- A. 培養學生概念理解、計算流暢，以及問題解決的能力：以足量及適當的練習，讓學生的整數加減乘除達到自動化，並能流暢地計算；理解交換律、分配律、結合律等核心概念，使概念與算則能相互增強。
- B. 藉由小組學習改善數學學習的社會、情感與動機的因素，進而改善學習代數的主要障礙—分數學習。
- C. 學童由「歸因能力」轉為「努力能變得更棒 (smarter)」的信念，將有助於數學學習的投入，從而提高數學學習成績。
- D. 數學概念能否學習，大多數取決於先前的學習機會 (prior opportunities to learn)，而非須等到大腦成熟到某一程度方能學習。

## (3) 教學實務：教學實務的建議如下 (ED, 2008, pp. xxii- xxiv)

- A. 「學生為中心」或是「教師主導」的教學方式，都得不到研究的支持，不宜擇其一進行教學。

<sup>12</sup> 符號與表徵、線性方程式、一元二次方程式、函數、多項式、組合以及有限機率。

<sup>13</sup> 例相似三角形、周長、面積、體積和表面積等。

<sup>14</sup> 包括小數、百分數、負分數。

<sup>15</sup> 基準所要求的代數課程。

- B. 「小組協助的個別化學習<sup>16</sup>」對概念理解及問題解決的效果雖不明顯，但能夠改善學生的計算技能。
- C. 經常實施形成性評量能夠改善小學生的數學學習。
- D. 使用「真實世界 (real-world)」情境引入數學概念，有助於涉及類似「真實世界」問題的測驗成績提高，但對於計算、簡單文字題以及解方程式並無助益。
- E. 清晰教學<sup>17</sup>非適用於所有學生，但有助於文字題及計算有困難的學生，對無能力學習 (learning disabilities) 者及一般的班級名列於後三名者也有效。
- F. 11 項長期的嚴謹研究 (僅一項研究少於 20 年) 發現，使用計算器對學生的計算技能、問題解決能力、概念形成能力的影響有限或沒有影響。

## 參、研究結果與討論

### 一、數學學習成就與數學教學時間

TIMSS 以及 PISA 等的國際評比表現 (OECD, 2007; IEA, 2005, 2009a, 2009b)

如表 2-2：

表 2-2 PISA2003、2006、2009 及 TIMSS2003、2007 國際數學評比名次

種類 名次	15 歲			四年級		八年級	
	PISA2003	PISA2006	PISA2009	TIMSS2003	TIMSS2007	TIMSS2003	TIMSS2007
第 1 名	香港 550(4.5)	臺北 549 (4.1)	上海 600(2.8)	新加坡 594(5.6)	香港 607(3.6)	新加坡 605(3.6)	臺北 598(4.5)
第 2 名	芬蘭 544(1.9)	芬蘭 548 (2.3)	新加坡 562(1.4)	香港 575(3.2)	新加坡 599(3.7)	韓國 589(2.2)	韓國 597(2.7)
第 3 名	南韓 542(3.2)	香港 547 (2.7)	香港 555(2.7)	日本 565(1.6)	臺北 576(1.7)	香港 586(4.6)	新加坡 593(3.8)

<sup>16</sup> TeamAssistedIndividualization(TAI)：根據診斷測驗結果，形成個別化的問題，再由不同能力學生組成的相互幫助小組，並有特別教師指導(specific teacher guidance)，以及根據小組及個人兩者表現給予獎賞的學習方式

<sup>17</sup> ExplicitInstruction：教師提供解決問題的明確示範，學生參照示範用於新的學習策略與技能並大量練習，經由大聲說出思考過程，以獲得充分回饋的教學方式。

種類 名次	15 歲			四年級		八年級	
	PISA2003	PISA2006	PISA2009	TIMSS2003	TIMSS2007	TIMSS2003	TIMSS2007
第 4 名	荷蘭 538(3.1)	韓國 547 (3.8)	韓國 546(4.0)	臺北 564(1.8)	日本 568(2.1)	臺北 585(3.3)	香港 572(2.4)
第 5 名	列支敦登 536(4.1)	荷蘭 531 (2.6)	臺北 543(3.4)	比利時 551(1.8)	哈薩克 549(7.1)	日本 570(2.1)	日本 570(2.4)

※數據：量尺分數（標準誤）。

由表 2-2 可以得知：PISA2006 前五名的國家/地區分別是：我國→芬蘭→香港→韓國→荷蘭，PISA2006 前五名的國家/地區分別是：上海→新加坡→香港→韓國→台北，全由亞洲國家囊括。我國在 PISA2006 的得分雖僅略為下降，由於其他國家/地區的得分大幅提升，我國由第一名降至第五名。

TIMSS2007 四年級生的前四名分別是：香港、新加坡、我國、日本；TIMSS 2007 八年級生的前四名分別是：我國、韓國、新加坡、香港，TIMSS2007 四、八年級生的前四名也全由亞洲國家囊括。

表 2-3 PISA2006 數學素養前五名國家得分及學生數學學習時間

國家	平均 得分	標準誤	每週上課 4 小時以上(%)		課外補習 2 小時以下(%)		自修或作業 2 小時以下(%)	
			%	標準誤	%	標準誤	%	標準誤
			我國	<b>549.36</b>	<b>4.10</b>	<b>59.24</b>	<b>1.28</b>	<b>62.22</b>
芬蘭	548.36	2.30	31.31	1.61	95.26	0.37	84.21	0.75
香港	547.46	2.67	78.34	0.96	72.49	0.88	54.37	0.97
韓國	547.46	3.76	74.15	1.14	48.53	0.95	53.74	1.20
荷蘭	530.65	2.59	19.75	0.83	89.36	0.58	73.45	1.06
OECD	497.68	0.54	47.90	0.21	82.01	0.12	64.53	0.17

資料來源：<http://pisacountry.acer.edu.au/>

由表 2-3 可以得知：

- (一) 每週數學上課時間 (Regular Lessons in School) 4 小時以上：亞洲國家的我國 59%、香港 78%、韓國 74% 佔近六成以上，而荷蘭 20%、芬蘭 31%，4 小時以上佔近六成以上者，全落在亞洲國家，高於 OECD 的 47.90%。
- (二) 課外補習 (Out-of-school Lessons) 每週 2 小時以下：芬蘭 95%、荷蘭 89%，亞洲的我國 62%、香港 72%、韓國 48%，低於 OECD 平均值的 82%。芬

蘭與荷蘭的課外學習近九成都在 2 小時以下，而亞洲的韓國的課外補習 2 小時以上高達五成以上。

(三) 自修或作業 (Self-study or homework) 2 小時以下：芬蘭佔 84%、荷蘭佔 74%。亞洲的我國 60%、香港 54%、韓國 53%，低於 OECD 平均值的 65%。

表 2-4 PISA2009 數學素養前五名國家得分及學生數學課外學習時間與表現之相關

國家地區		未參加	2 小時以下	2-4 小時	4-6 小時	6 小時以上	無效填答	
平均得分 (標準誤)								
上海 600 (2.8)	時間% (百分比標準誤)	27.88 (0.82)	20.72 (0.68)	24.92 (0.6)	11.16 (0.52)	11.52 (0.45)	3.8 (0.33)	
	得分 (百分比標準誤)	數學	604 (3.86)	600 (4.02)	605 (3.71)	598 (5.53)	625 (4.78)	472 (8.15)
		科學	575 (3.36)	575 (3.67)	578 (2.83)	576 (4.24)	597 (3.51)	476 (6.81)
		語文	557 (2.99)	557 (3.47)	559 (3.26)	557 (4.03)	578 (3.52)	451 (6.37)
新加坡 562 (1.4)	時間% (百分比標準誤)	25.78 (0.63)	16.95 (0.5)	25.13 (0.56)	11.56 (0.45)	7.1 (0.32)	13.47 (0.47)	
	得分 (百分比標準誤)	數學	593 (2.93)	568 (3.61)	580 (3.09)	569 (4.26)	557 (5.12)	462 (3.65)
		科學	569 (2.99)	550 (3.62)	561 (2.97)	552 (4.12)	533 (4.53)	441 (3.52)
		語文	548 (2.71)	536 (3.24)	545 (2.62)	538 (3.75)	518 (4.45)	432 (3.2)
香港 555 (2.7)	時間% (百分比標準誤)	50.36 (1.13)	18.03 (0.7)	23.11 (0.73)	4.24 (0.31)	2.26 (0.25)	2 (0.26)	
	得分 (百分比標準誤)	數學	559 (3.15)	552 (4.64)	556 (4.03)	553 (8.06)	538 (11.13)	484 (16.18)
		科學	552 (3.2)	547 (4.6)	551 (3.41)	550 (7.21)	540 (10.85)	480 (17)
		語文	536 (2.55)	532 (3.85)	535 (3.06)	535 (6.18)	515 (10.73)	469 (15.51)

韓國 546 (4.0)	時間% (百分比標準誤)		19.82 (1.32)	11.56 (1.05)	28.31 (1.42)	14.11 (0.69)	11.07 (0.72)	15.12 (0.78)
	得分 (百分比標準誤)	數學	520 (9.54)	541 (5.62)	573 (4.48)	579 (4.09)	584 (5.48)	475 (4.66)
		科學	516 (8.55)	538 (5.52)	562 (3.86)	566 (3.76)	566 (4.67)	475 (4.64)
		語文	516 (8.45)	541 (4.46)	564 (3.66)	566 (3.86)	564 (4.55)	479 (4.79)
臺北 543 (3.4)	時間% (百分比標準誤)		31.72 (0.9)	12.89 (0.6)	21.44 (0.79)	10.76 (0.51)	7.02 (0.35)	16.17 (0.65)
	得分 (百分比標準誤)	數學	537 (3.65)	540 (5.03)	594 (5.25)	579 (5.91)	584 (6.08)	450 (4.41)
		科學	552 (3.2)	547 (4.6)	551 (3.41)	550 (7.21)	540 (10.85)	480 (17)
		語文	536 (2.55)	532 (3.85)	535 (3.06)	535 (6.18)	515 (10.73)	469 (15.51)
OECD total 488 (1.2)	時間% (百分比標準誤)		48.77 (0.35)	12.79 (0.18)	9.34 (0.15)	4.79 (0.09)	2.69 (0.09)	21.62 (0.3)
	得分 (百分比標準誤)	數學	513 (1.39)	494 (1.45)	502 (1.93)	505 (2.3)	513 (3.9)	420 (1.06)
		科學	524 (1.47)	503 (1.53)	507 (1.75)	507 (2.25)	511 (3.95)	426 (1.07)
		語文	517 (1.46)	497 (1.54)	503 (1.69)	502 (2.25)	505 (3.87)	426 (1.02)

資料彙整來源：<http://pisa2009.acer.edu.au/interactive.php>

由表 2-4 可以得知：除韓國外，整體而言，未參加課外學習者，在科學與語文都有不錯的表現；PISA2009 排名第一的上海，12%的學生數學課外學習時間 6 小時以上，這些學生的數學量尺分數高達 625 分，是全體表現最佳者，他們在科學與語文的表現也是最佳；值得注意的是排名第二的新加坡與排名第三的香港，就各自國家/地區數學表現最佳的是未參加課外學習的學生；值得稱許的是新加坡學生數學優劣差距最小，香港 50% 未參加課外學習，無論課外學習時間多寡，成績都相當接近；排名第四的韓國，只有 20% 的學生未參加課外學習，而其學生數學得分隨數學課外學習時間增多而增加；我國學生表現最佳的是參加 2-4 小時的課外學習者，未參加課外學習者的表現最低。我國學生的標準誤高達 3.4 僅次於韓國的 4.0，遠較國際的 1.2 高，顯示我國優劣差距最大。

表 2-5 我國、芬蘭、荷蘭、美國、日本、韓國、新加坡、香港中小學數學教學時數

地區	年級	一	二	三	四	五	六	七	八	九	合計	平均
	臺灣	每週節數	2-4	2-4	3-5	3-5	3-5	3-5	3-4	3-4	3-5	25-41
每週課時		1.3-2.7	1.3-2.7	2-3.3	2-3.3	2-3.3	2-3.3	2.3-3	2.3-3	2.3-3.4	17.5-28	1.9-3.1
年總課時		53-80	53-80	80-107	80-107	80-107	80-107	90-120	90-120	90-150	696-978	77.3-108.7
芬蘭	每週節數	3	3	4	4	4	3.5	3.5	3.5	3.5	32	3.6
	每週課時	2.3	2.3	3	3	3	2.6	2.6	2.6	2.6	24	2.7
	年總課時	85.5	85.5	114	114	114	99.75	99.75	99.75	99.75	912	101.3
日本	每週節數	4	5	5	5	5	5	4	3	4	40	4.4
	每週課時	3	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.3	2.5	3.3	30.9	3.4
	年總課時	102	131.25	131.25	131.25	131.25	131.25	116.7	87.5	116.7	1079.1	119.9
韓國	每週節數	3	3-4	3-4	3-4	3-4	3-4	3-4	3-4	2-3	26-34	2.9-3.8
	每週課時	2	2-2.7	2-2.7	2-2.7	2-2.7	2-2.7	2.3-3	2.3-3	1.5-2.3	18.1-24.4	2-2.7
	年總課時	120	136	136	136	136	136	136	136	102	1174	130.4
香港	每週節數	5	5	5	5	5	5	5	5	5	45	5
	每週課時	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	3.3	3.3	3.3	27.5	3.1
	年總課時	95-118.7	95-118.7	95-118.7	95-118.7	95-118.7	95-118.7	110.3-137.7	110.3-137.7	110.3-137.7	900.9-1125.3	100.1-125
<b>【備註】</b>												
*美國、新加坡：無官方數據						*荷蘭：各校自行安排，九年級非義務階段						
*芬蘭：45 分鐘/節						*我國：40 週/年、國小 40 分/節、國中 45 分/節						
*日本：小學 45 分/節、中學 50 分/節						*韓國：小學 40 分/節、中學 45 分/節						
*香港：小一至小六、中 1 至中 3 數學科每週授課建議 5 節，小學 35 分/節、中學 40 分/節。時間分配非強制，教師可彈性調配。												

我國（教育部國民教育司，2009b）、芬蘭（FNBE，2004b）、荷蘭（EACEA，

2009)、美國、日本(文部科学省, 2008a, 2008e)、韓國(Ministry of Education, 2007)、新加坡、香港(香港特別行政區政府教育局, 2002)的中小學數學教學時數如表 2-5 所示。美國、新加坡無官方相關數據; 荷蘭只規定每年的最少教學時數並無規定各科的時間而由各校自行安排(EACEA, 2008), 九年級非義務階段, 中學依學制及年度各有不同; 芬蘭綜合學校的教學時數僅 3-4 節, 平均每個年級 2.7 小時(FNBE, 2001), UNESCO 於 1986 年調查數學教學時數時, 芬蘭每週 2.6 小時, 在 94 個參與國家中最低(United Nations Educational Scientific and Cultural Organization [UNESCO], 1986); 相對於芬蘭中小學每年 101 小時, 我國的上限為 109 小時, 日本 120 小時, 香港上限 125 小時, 韓國則高達 130 小時, 亞洲國家的我國、日本、韓國、香港的數學教學時數都較芬蘭高。

「教學時數彈性化」是我國 92 年版九年一貫課程綱要的其中一項重大改變, 其教學時數的上限, 相較於 82 年版小五、六每週 6 節數學, 92、97 年版只有 3-5 節, 面臨節數少內容多的課題。反觀芬蘭的數學時數在 1914 年以前, 中學每週 4.6 小時(Halonen, 1982; Malaty, 2009), 而目前只有 2.7 小時; 日本為因應 PISA2000、2003、2006 數學素養的排名逐次下滑(1→6→10), 2008 年版課程標準大幅增加數學教學時數, 小 1 (每週 3.4→4 節)、小 2 (每週 4.4→5 節)、小 3~小 6 (每週 4.3→5 節)、小 6 維持原 5 節; 中 1 與中 3 數學每週增加 1 節(3 節→4 節), 中 2 維持 3 節(文部科学省, 2008a, 2008e; 林宜臻, 2009)小 1 (每週 3.4→4 節)、小 2 (每週 4.4→5 節)、小 3~小 6 (每週 4.3→5 節)、小 6 維持原 5 節; 中 1 與中 3 數學每週增加 1 節(3 節→4 節), 中 2 維持 3 節(文部科学省, 2008a, 2008c; 林宜臻, 2009)。



## 二、數學學習成就與數學學習意願

表 2-6 TIMSS2007 四年級生前五名國家「喜歡學習數學」及「喜歡數學」之狀況

得分 (標準誤)	喜歡學習數學(%)				喜歡數學(%)			
	很 同意	有點 同意	不太 同意	很不 同意	很 同意	有點 同意	不太 同意	很不 同意
香港 607(3.6)	32.5	44.4	16.0	7.2	34.4	39.4	16.6	9.6
新加坡 599(3.7)	48.6	32.5	11.3	7.5	50.3	29.1	10.9	9.7
我國 576(1.7)	25.9	34.5	23.2	16.4	28.1	31.9	20.5	19.6
日本 568(2.1)	34.2	36.2	21.1	8.5	33.8	31.6	22.4	12.2
哈薩克 549(7.1)	73.2	18.6	5.4	2.7	82.6	12.0	3.0	2.5
國際平均 500	55.2	25.4	11.2	8.2	56.7	22.7	10.4	10.1

由表 2-6 可以得知：相對於 TIMSS 2007 小四生國際平均值的 55.2% 表示非常同意「喜歡學習數學 (enjoy learning mathematics)」，成就排名第三的我國只有 25.9%，而排名第五的非亞洲國家哈薩克則高達 73.2%；相對於國際平均值的 56.7% 表示非常同意「喜歡數學 (like mathematics)」，我國只有 28.1%，兩者都倒數第一 (IEA, 2009a)。

表 2-7 TIMSS2007 八年級生前五名國家「喜歡學習數學」及「喜歡數學」之狀況

得分 (標準誤)	喜歡學習數學(%)				喜歡數學(%)			
	很 同意	有點 同意	不太 同意	很不 同意	很 同意	有點 同意	不太 同意	很不 同意
我國 598(4.5)	14.6	29.8	32.2	23.4	14.1	28.9	30.5	26.5
韓國 597(2.7)	8.6	30.3	41.4	19.8	29.5	37.1	21.0	0.0
新加坡 593(3.8)	34.2	40.6	16.9	8.3	33.6	38.8	16.8	10.7
香港 572(2.4)	15.5	45.2	29.8	9.5	13.4	43.3	30.9	12.4
日本	9.2	30.4	42.5	17.9	9.9	26.5	40.2	23.3

得分 (標準誤)	喜歡學習數學(%)				喜歡數學(%)			
	很 同意	有點 同意	不太 同意	很不 同意	很 同意	有點 同意	不太 同意	很不 同意
570(2.4)								
國際平均 500	34.8	32.0	19.2	14.0	34.1	31.0	18.1	16.8

由表 2-7 可以得知：相對於 TIMSS 2007 八年級生國際平均值的 34.8% 表示非常同意「喜歡學習數學」，成就排名第一的我國只有 14.6%，排名第二的韓國更低至 8.6%，排名前五名的所有亞洲國家都低於國際平均值；相對於國際平均值的 34.1% 表示非常同意「喜歡數學」，我國只有 14.1%，排名第五的日本更低至 9.9% (IEA, 2009b)。

表 2-8 TIMSS 1999、2003 及 2007 「喜歡學習數學」表示「非常同意」我國之狀況

年級		1999 年	2003 年	2007 年
四年級	我國	僅測八年級	30.7%	25.9%
	國際		50.1%	55.2%
八年級	我國	15.6%	13.1%	14.6%
	國際	24.0%	29.3%	34.8%

相對於 TIMSS 2007 四年級生國際平均值的 55.2% 表示非常同意「喜歡學習數學」我國四年級生只有 25.9%，到八年級更只剩 14.6%；八年級生國際平均值逐回上升 (24.0%→29.3%→34.8%)，但我國的八年級生只維持一成四左右，遠低於國際平均值。

### 三、數學表現之優劣差距

表 2-9 2001-2010 年國際數學奧林匹克我國、芬蘭、荷蘭、日本、美國排名

名次	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
我國	9	7	16	6	7	10	9	9	11	19	8
芬蘭	63	38	55	63	55	39	61	74	67	72	57
荷蘭	54	54	64	61	47	62	56	33	47	38	28
日本	13	16	9	8	8	7	6	11	2	7	12
美國	2	3	3	2	2	5	5	3	6	3	2

資料彙整來源：<http://www.imo-official.org/results.aspx>

由表 2-9 可以得知：相對於芬蘭及荷蘭，美國在探討數學菁英表現的國際數

學奧林匹克（International Mathematical Olympiad, IMO）有優異表現。

表 2-10 PISA2006 國際評比前五名及其低於層級 1 百分比

排名/國家地區	量尺分數/標準誤	低於層級 1 (百分比/標準誤)	高於層級 6 (百分比/標準誤)
第 1 名/臺北	549 (4.1)	3.64(0.58)	11.80(0.83)
第 2 名/芬蘭	548 (2.3)	1.15(0.21)	6.31(0.50)
第 3 名/香港	547 (2.7)	2.94(0.45)	9.00(0.82)
第 4 名/南韓	547 (3.8)	2.32(0.52)	9.07(1.29)
第 5 名/荷蘭	531 (2.6)	2.45(0.61)	5.37(0.64)

資料彙整來源：<http://pisacountry.acer.edu.au/>

PISA 2006 數學素養居冠的我國，標準誤 4.1，排名第二的芬蘭僅 2.3；我國在層級 1 及其以下者高達 11.9%，而芬蘭僅 5.9%，芬蘭學生數學表現的優劣差距遠較我國小（Organization for Economic Cooperation and Development [OECD], 2007）；我國低於層級 1 學生高達 3.6%，芬蘭只佔 1.2%，我國低成就學生約芬蘭的三倍；我國高於層級 6 的學生佔 11.0%，芬蘭是 6.3%，荷蘭是 5.4%，我國高成就學生卻又是芬蘭及荷蘭的兩倍之多，我國數學成就優劣差距大，而芬蘭及荷蘭數學表現優異而且平均。

表 2-11 PISA2009 國際評比前五名及其高低層級百分比

排名/國家地區	量尺分數/標準誤	低於層級 1 (百分比/標準誤)	高於層級 6 (百分比/標準誤)
第 1 名/上海	600(2.8)	1.4(0.3)	26.6(1.2)
第 2 名/新加坡	562(1.4)	3.0(0.3)	15.6(0.6)
第 3 名/香港	555(2.7)	2.6(0.4)	10.8(0.8)
第 4 名/韓國	546(4.0)	1.9(0.5)	7.8(1.0)
第 5 名/臺北	543(3.4)	4.2(0.5)	11.3(1.2)

資料彙整來源：<http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en>

PISA 2009 數學素養居冠的上海，不但高於層級 6 的學生的比率最高，其層級 1 及其以下者也最少。值得注意的是排名第二的新加坡，其標準誤最小僅 1.4，而我國標準誤高達 3.4。我國數學成就優劣差距大，而新加坡表現優異而且較平均。

表 2-12 TIMSS 2007 小四數學前五名國家各層級表現

名次	國家/地區 得分(標準誤)	低標 (400 分)		中標 (475 分)		高標 (550 分)		頂標 (625 分)	
		%	S.E.	%	S.E.	%	S.E.	%	S.E.
第 1 名	香港 607(3.6)	100	0.1	97	0.5	81	1.6	40	2.2
第 2 名	新加坡 599(3.7)	98	0.3	92	0.9	74	1.7	41	2.1
第 3 名	臺北 576(1.7)	99	0.2	92	0.5	66	1.2	24	1.2
第 4 名	日本 568(2.1)	98	0.4	89	0.8	61	1.2	23	1.2
第 5 名	哈薩克 549(7.1)	95	1.5	81	2.9	52	3.5	19	2.1
國際中數		90%		67%		26%		5%	

資料來源：Mullis, I. V. S., Martin, M.O., & Foy, P.(2008).TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA' s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades., from [http://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007\\_International\\_MathematicsReport.pdf](http://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_International_MathematicsReport.pdf)

由表 2-12 可以得知，我國小四生的數學排名第三。相較於排名第一的香港其標準誤為 3.6，我國只有 1.7，我國小四生在數學課程落實方面，優劣差距不大。

表 2-13 TIMSS 2007 八年級數學前五名國家各層級表現

名次	國家/地區 得分(標準誤)	低標 (400 分)		中標 (475 分)		高標 (550 分)		頂標 (625 分)	
		%	S.E.	%	S.E.	%	S.E.	%	S.E.
第 1 名	臺北 598(4.5)	95	0.6	86	1.2	71	1.5	45	1.9
第 2 名	韓國 597(2.7)	98	0.3	90	0.7	71	1.1	40	1.2
第 3 名	新加坡 593(3.8)	97	0.6	88	1.4	70	2.0	40	1.9
第 4 名	香港 572(2.4)	94	1.1	85	2.1	64	2.6	31	2.1
第 5 名	日本 570(2.4)	97	0.3	87	0.9	61	1.2	26	1.3
國際中數		75%		46%		15%		2%	

資料來源：Mullis, I. V. S., Martin, M.O., & Foy, P. (2008). TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA' s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades., from [http://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007\\_International](http://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_International)

### MathematicsReport.pdf

由表 2-13 可以得知，我國八年級生的數學在 TIMSS 2007 奪冠，八年級生優等層級占 45%，排名第一，但低分群方面，我國有 5% 未達到初等層級，第二名的南韓只有 2%，第三名的新加坡也只有 3%；小四數學中級以下只有 8%，但到了八年級，卻增加到 14% (Mullis et al., 2008)。由表 2-9~表 2-13 可以得知：我國雖在 IMO、PISA 或 TIMSS 的國際評比，都有優異表現，但比新加坡、芬蘭及荷蘭，我國存在數學成就優劣差距大的課題。

## 四、數學課程目標取向

芬蘭自 1985 年迄今的數學課程，將「問題解決」列為總體目標已超過 25 年 (FNBE, 1985, 1994, 2004b, 2004c, 2004d)，目前朝向課程的均衡設計目標，新課程除了強調「日常生活數學」外，也將「數學思維」和「數學結構」列為新課程的基本要素 (FNBE, 2004b)。目標重視核心任務的達成甚於數與計算、代數、幾何、測量、數據處理與統計等數學知識的學習。核心任務包括：強調經由調查與觀察，形成數學概念和概念系統；理解數學概念與規則的重要性，並領會數學和實際世界之間的關連；學習基本的計算能力解決數學問題；藉由理解與解決問題，獲得滿足與樂趣；利用數學作為表達的工具，證明他們的行動和結論；學習數學思維模式，發現現象間的相似處、相異處、規律和因果。

荷蘭的數學課程最大特色在於「現實數學教育 (RME)」的理念和實踐，該課程在過去 30 年已經成為荷蘭國家標準。目前數學教育已由重視與現實連結的「水平式數學化」，朝向水平式與垂直式二種數學化的兼具，並視此二種數學化形式的價值相等 (Heuvel-Panhuizen, 2003)。荷蘭將目標分為「學科目標」與「跨學科目標」，發展或加強一般技能的「跨學科目標」反而是課程目標的核心。而其學科的核心目標，重視培養學生的數學洞察力與運作，讓學生能使用適當的數學語言來組織自己的想法，向其他人解釋，並學會理解其他人的數學語言；能利用數學解決實際與正式的算術及數學問題，並能經由推理與估算調整之，以及適切地

用於特殊情況，也能評估解決方案；能有系統地描述、組織及視覺化數據，從中區辨意見（opinions）和主張（allegations），以批判的角度評估數據、表達與下結論，明確提出自己的論點（Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap，2008a，2008b）。

日本在「小政府、民營化」的體制鬆綁後，終身雇用制度瓦解，複合型、綜合型、有創新能力的知識人才需求倍增的背景下，1989年版學習指導要領以強調「思考力與應用力」的新學力觀取代「知識與理解」的舊學力觀。自2007年起以中三及小六全體為對象實施的學力與學習狀況調查，將「活用」列入試題是一大特色，除了「知識」外，包含以能將知識、技能等活用於生活中各種場面的能力，以及為解決各種課題的構思及評鑑、改善的能力等「活用」題型。

美國沒有國家的課程標準，而由學校根據各州及學區自行設定各學年的指導內容，NCTM 1989年公布《學校數學課程與評鑑標準》後，方有課程標準得以依循，以「問題解決」作為數學課程的核心，卻也引發須具備純熟的數學運算練習才能引出真正的概念理解，或是須先理解數學概念才能進行有意義的數學運算的論辯。採納各方回饋、爭辯與反省的意見後，2000年提出《學校數學的原則和標準》，具體指出K-2、3-5、6-8、9-12等四階段的數學教學的內容、方法和要求；2006年公布《課程焦點：追求一致性》，明示各學年數學核心課程內容；2008年全美國家數學諮詢委員會（National Mathematics Advisory Panel），根據可用數據，進行詳細分析，提出應當全面培養學生的概念理解、流暢計算以及問題解決的能力（NMAP, 2008）。

我國97年（2008年）公布，100學年度實施的「國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域」，以如下方式呈現我國數學課程綱要：「1.第一階段（國小一至二年級）：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形之認識。…（教育部國民教育司，2009a）」，雖有「我們希望課程目標的達成，可以培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學生欣賞數學的態度及能

力(教育部國民教育司, 2009a)」, 並指出能力目標的重要性(教育部國民教育司, 2009a), 但是只以「知識技能目標」方式呈現, 而將能力目標隱於一般的論述之中, 易引起我國只重視「知識技能目標」之誤解, 宜以數學課程總目標或以核心目標方式, 提綱挈領指出「知識技能目標」與「能力目標」而非隱於論述中。

相對於此, 我國溯自 1952 年版的小學目標「2.指導兒童解決日常生活中關於數的問題, 培養其理解思考的能力。」(教育部, 1948), 1952 年版的中學目標「4. 培養以簡馭繁以已知推未知之能力。」(教育部, 1952) 或是芬蘭、荷蘭、日本、美國等國的數學課程目標, 都將「知識技能目標」與「能力目標」呈現於數學課程總目標或以核心目標方式呈現。

## 五、數學課程取向

表 2-14 各國數學課程沿革與特色

國家	數學課程沿革與特色
我國	<p>1.新數學運動期(1960 年代)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 「SMSG 新數學」納入課程, 改用集合的觀點來解決有關數、量、形的問題。</li> <li>● 1965 年起高中教材引進線性代數、統計...等; 1968 年「SMSG 新數學」納入於修訂的國中、小課程。</li> </ul> <p>2.數學教學實驗期(1970 年代)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 背景: 中小學生無法數學化解決實際問題; 無法學會純數學的臆測、證明、推廣與再臆測之循環; 高三未討論「群」、「環」與「體」等性質及舉例。</li> <li>● 課本教材先經實驗再推出</li> <li>● 刪除集合相關教材及其相關的知識推理, 集合論退居輔助敘述數學問題。初等統計、微積分與線性代數納入高中課程。</li> </ul> <p>3. 數學課程研發(1970 年代)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 1974 年由臺灣省國民學校教師研習會主導「板橋模式(教材研發→教學實驗→教材修改→教材試用→教材修改→國定本教科書)」的課程發展模式, 展開數學課程改革。國小強調宜重視概念理解, 而不僅培養計算力。強調四則運算的意義及基本的計算能力, 引進電算器作為計算工具, 不要求熟練複雜計算。</li> <li>● 1975 年師大科教中心成立國中數學課程實驗研究小組。幾何淡化公理化系統; 強調數值「逼近法»; 引進電算器、微電腦、基本語言程式、流程圖等計算與解題的工具, 以解決無理方程式、高次方程式的繁雜計算。</li> <li>● 1976 年師大科教中心成立高中數學課程改進研究實驗小組, 從事大規模實驗研究。高中數學課程提前納入微積分; 以選修替代分組。</li> </ul>

國家	數學課程沿革與特色
	<p>4. 數學建構論辯期（2000 年代）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 建構主義理念下，1996 年實施的九年一貫數學課程，學生得以「一題多解」。錯誤解讀建構主義理念下，學生被要求須瞭解每一解題方法，甚至須利用多種方法解題。</li> <li>● 數學學會認為重視概念理解而輕忽計算，將淺化教材及弱化學生數理能力，教育部提供「樂在數學」加強計算力。</li> <li>● 數學學會建議暫緩實施「國民中小學九年一貫課程暫行綱要」，並以數學家為主的數學系教授重新審議暫綱，修訂 2010 年暫綱，於 2003 年公布「九年一貫數學學習領域課程綱要」。</li> <li>● 研究發現：接受建構式的小四生的數學程序性知識雖進步幅度較小，然概念及解題則大幅提升；接受建構式的國二生的概念瞭解也顯著高於未接受者。</li> </ul>
芬蘭	<p>1. 自行發展期（1960 年代前）</p> <p>2. 新數學運動期（始於 1970 年代）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 受美國數學教育影響，參與了「新數學」改革計畫，實施「新數學」課程。</li> </ul> <p>3. 回歸基礎期（始於 1975 年）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 重視數學技能訓練</li> <li>● 套現成公式與算法解決代數問題</li> <li>● 幾何變成周長、面積與體積的計算，以及在給定步驟下使用工具畫出結構。</li> </ul> <p>4. 問題解決期（始於 1985 年）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 自 1985 年迄今的數學課程，將「問題解決」列為總體目標。</li> <li>● 從小一開始安排「問題解決」課程</li> <li>● 教育委員會計畫性推動數學「問題解決」，1986、1987 年舉辦問題解決研討會研討會後，出版商出版問題集</li> <li>● 1990 年代，FNBE 出版指導手冊，新教科書將「問題解決」納入</li> </ul> <p>5. 日常生活數學期（始於 1990 年）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 將數學課程與民族文化傳統連結</li> <li>● 自學前教育已成為普遍活動</li> </ul> <p>6. 數學課程均衡設計期（始於 1995 年）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 基於「中學畢業的數學程度無法滿足高中」之課題，課程朝向均衡設計</li> <li>● 保持重視日常所需的優勢，另建立數學結構，將「數學思維」和「數學結構」同時列為新課程的基本要素。</li> <li>● 重視核心任務的達成甚於數學知識的學習。</li> <li>● 核心任務包括： <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ 經由調查與觀察，形成數學概念與概念系統</li> <li>◆ 理解數學概念與規則的重要性</li> <li>◆ 領會數學和實際世界之間的關連</li> <li>◆ 學習基本的計算能力解決數學問題</li> <li>◆ 藉由理解與解決問題，獲得滿足與樂趣</li> <li>◆ 利用數學作為表達的工具，說明行動和結論</li> </ul> </li> </ul>



國家	數學課程沿革與特色
荷蘭	<p>◆學習數學思維模式，發現現象間的相似處、相異處、規律與因果</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.未受「新數學」的影響</li> <li>2. RME 期（始於 1960 年代末） <ul style="list-style-type: none"> <li>● RME 列為國家標準</li> <li>● 遠離「未分析問題本質的機械式背誦」，或「在灌輸中前進」的學習方式</li> <li>● 經由尋找問題、組織論點及解題，學習數學</li> </ul> </li> <li>3.RME 全盛期（「水平式數學化」）期（1985～2000 年） <ul style="list-style-type: none"> <li>● 使用 RME 課本的 12 年級生 TIMSS1995 排名第一</li> <li>● 從生活的世界進入數學符號的世界</li> <li>● 藉由數學組織與解決現實生活情境的問題，以圖式化與形象化手段的數學方式陳述問題，進而從中發現規律、關係與結構，或從不同問題中辨識同構的本質。</li> </ul> </li> <li>4. 「水平式數學化」與「垂直式的數學化」並重期（2000 年～） <ul style="list-style-type: none"> <li>● Freudenthal 接受 Treffers 數學化的新觀點，視水平式及垂直式這兩種數學化的價值相等，適用於各種層次的數學活動。</li> <li>● 垂直式重視數學系統本身的重組與再構的過程，以式子表達關係、證明規則、彙整模型、完備模型、形成新的數學概念，進而建立一般化理論等。</li> <li>● 目標分為「學科目標」與「跨學科目標」，發展或加強一般技能的「跨學科目標」反而是課程目標的核心。</li> <li>● 學科的核心目標，包括： <ul style="list-style-type: none"> <li>◆培養學生的數學洞察力與運作</li> <li>◆讓學生能使用適當的數學語言來組織自己的想法，向其他人解釋，並學會理解其他人的數學語言</li> <li>◆能利用數學解決實際與正式的算術及數學問題，並能經由推理與估算調整之，以及適切地用於特殊情況，也能評估解決方案</li> <li>◆能有系統地描述、組織及視覺化數據，區辨意見和主張，以批判的角度評估數據、表達與下結論，明確提出自己的論點。</li> </ul> </li> </ul> </li> </ol>
日本	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.生活單元學習期（1947-1957） <ul style="list-style-type: none"> <li>● 強調從生活經驗展開數學的學習</li> </ul> </li> <li>2.學科特性與內容系統期（1958-1967） <ul style="list-style-type: none"> <li>● 知識與技能理解，及其熟練與活用。</li> <li>● 強調創意與數學思考。</li> <li>● 廢除「生活單元學習」強調「系統學習」。</li> </ul> </li> <li>3.數學教育現代化期（1968-1976） <ul style="list-style-type: none"> <li>● 受 1957 年 Sputnik I 影響，導入高難度現代化課程的教學內容，學生無法跟進</li> <li>● 強調培養「數學的思考方式」，中學強化邏輯並導入集合、函數、機率、不等式、圖形變換等新概念。</li> </ul> </li> </ol>

國家	數學課程沿革與特色
	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 廢除中三數學選修</li> <li>● 中一至中三每週 4 節數學</li> </ul> <p>4.基礎與基本期（1977-1988）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 刪減學習內容並精簡學科目標</li> <li>● 減少教學節數，實施寬鬆充實教育</li> <li>● 重視基礎與基本</li> <li>● 刪除「集合與邏輯」，並降低學科內容程度。</li> </ul> <p>5.新學力觀期（1989-1998）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 在「小政府、民營化」的體制鬆綁後，終身雇用制度瓦解，複合型、綜合型、有創新能力的知識人才需求倍增，強調「思考力與應用力」的新學力觀取代「知識與理解」的舊學力觀，增加體驗學習及問題解決學習。</li> <li>● 強調「培養邏輯思考力與直觀力」，由體會「數理處理的好處」培養「主動活用於生活的態度」。</li> </ul> <p>6.教育內容嚴選期（1999-2007）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 嚴選學科學習內容，刪除難度高單元或挪至高年級，中小學每一年級每週縮減約 2 節</li> <li>● 中學選修科目時數增加，學校得以自行設定學科與科目</li> <li>● 強調「數學活動」及其帶來的「樂趣」，培養學生主體性探討數學。</li> </ul> <p>7. PISA 型學力觀期（2008-）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 2008 年版數學課程目標，小學強調「主動地應用於生活與學習的態度」，中學強調「培養主動活用、思考及判斷的態度」，都重視活用能力與態度的培養。</li> <li>● 充實數學活動，培養數學思考力與表達力，提高學習意願。</li> <li>● 螺旋式課程，以紮實學會雙基。</li> <li>● 增加節數，確保雙基學習，及活用時間，以培養思考力與表達力，及實感理解的喜悅與學習意義。</li> <li>● 強調 PISA 型學力觀，重視「社會中能使用的能力」甚於學科知識的學習</li> <li>● 評量「知識與理解」外，並納入「思考與判斷」、「技能與表達」，以及「關心與意願」。</li> <li>● 學力調查的「知識」以影響後續學年的學習內容，及生活中活用的不可或缺知識、技能為主；「活用」以能活用知識、技能於生活的能力，以及解決各種課題的構思、評鑑、改善的能力等為主。</li> </ul>
美國	<p>1.新數學運動期（始於 1960 年代）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Sputnik I 影響，開啓「新數學運動」</li> <li>● 中學引進集合、純邏輯和抽象概念等現代數學概念，強調知識結構。</li> </ul> <p>2.回歸基礎期（1970 年代）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 「新數學」造成計算力與應用力低落，「回歸基礎」重視雙基，反覆演練基本計算。</li> </ul> <p>3.問題解決期（始於 1980 年代）</p>

國家	數學課程沿革與特色
	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 「回歸基礎」造成能力下降，需求能數學思考解決問題的公民。</li> <li>● 《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議》建議將問題解決作為 80 年代數學教育核心。</li> </ul> <p>4.課程標準導向期（始於 1989 年）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 1989 年公布第一套的課程及評鑑標準《學校數學課程與評鑑標準》</li> <li>● 課程標準由記憶事實與計算，轉為概念理解、多種表達、問題解決、連結，以及模型化，重視統計、機率及離散數學。</li> <li>● 2000 年公布《學校數學的原則和標準》，以為課程標準制定的基礎，將 1989 年《學校數學課程與評鑑標準》、1991 年《數學教學的專業標準》以及 1995 年《學校數學的評量標準》合而為一，便於掌握教學內容，以及如何教與評量。</li> <li>● 2006 年出版《課程焦點：追求一致性的任務》，將重要的數學內容系統化，明示各學年數學核心課程內容。</li> </ul> <p>5.概念與運算孰先論辯期（始於 1997 年）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 1997 年 Stanford 大學數學教授主導《加州 K-12 數學內容標準》，著重技巧輕忽分析，引發是否重蹈「新數學」之轍的疑慮。</li> <li>● 數學家與數學教育家爭議「數學運算」與「數學概念理解」孰先孰後，數學家認為擅用蘇格拉底的詰問法，即使是直接教學亦能使低成就學生學會更高層次的數學。</li> <li>● 26 位數學教育與家數學家（5 位）共同完成《學校數學的原則和標準》草案，NCTM 對組織架構行使同意權，監督委員會掌握標準的前瞻性，審查小組負責初稿形成過程中的問題回應及事後批判。</li> </ul> <p>6.後設研究導向期（始於 2006 年）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 美國公民的數學素養與中小學數學教育面臨諸多嚴重問題，布希簽署總統行政命令，於 2006 年成立由數學教育家、數學家、認知學家組成的國家數學諮詢委員會，以求改善。</li> <li>● 委員會參閱了 16,000 份研究出版物和政策報告，聽取 110 位公開證言，檢視 160 篇機構與個人的評論，以及分析來自 743 位代數教師的調查結果，解答數學訓練能否加深學科見解，以及如何教方能使學生擁有基礎的數學能力，從而順利銜接進階課程，最後提出「如何建立代數學習基礎的數學教學法」的建議。</li> </ul>

### （一）重視「PISA 型學力」與「生活數學」之數學應用

「問題解決」被視為一種增進思考技能的手段，「問題解決」並不只是學習數學的目標，也是主要的手段（NCTM, 2000）。芬蘭自 1985 年一直將「問題解決」列為課程總體目標之一（FNBE, 1985, 1994, 2004b, 2004c, 2004d），從小一開始安排「問題解決」課程，1990 年起，同時重視「日常生活數學」，在就學之初甚至

學前教育就已成爲一項普遍的活動 (Malaty, 2009)；荷蘭現實數學教育教父 Freudenthal 自 1970 年代起呼籲數學與現實連結 (Freudenthal, 1983)，指出數學教學不能只侷限於形式符號與邏輯體系，主張「學生不是學習『數學』，而是學習『數學化』」，應提供學生現實世界中的具體問題，讓學生運用數學知識、技能以及數學思維，經由觀察、分析與比較，以及類比、歸納的過程中，發現未知的規律、關係與結構，進而形成數學概念；日本從其國內教育課程實施狀況及國際性學力調查結果，發現學生計算基礎與基本知識與技能的紮根情形良好，但存有對計算意義理解不夠等以及未能利用已學的知識與技能充分活用於生活與學習的課題 (文部科学省, 2007a, 2007b)，小學階段增設「數學的活動」領域，從 1 年級開始增列「數量關係」，中學階段由現行的「數與式」、「圖形」、「數量關係」3 領域，改爲「數與式」、「圖形」、「函數」、「資料的活用」4 領域，將其中的「數量關係」改爲「函數」，增設「資料的活用」(文部科学省, 2008b, 2008g)，較之學科知識的學習，更重視「社會中能使用的能力」PISA 型的學力觀 (中原忠男, 2008)；美國基於社會需要能應用數學思考解決問題的公民，自 1980 年代起重視問題解決，NCTM 於 1980 年公布的《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議》(1980)，將問題解決作爲 1980 年代數學教育的核心。

總之，自 1980 年美國公布《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議》以來，無論是芬蘭、荷蘭或是日本，迄今都將「問題解決」作爲數學教育的核心，並將數學活用列爲目標，已成爲一項普遍的活動。重視在社會中能使用的能力的「PISA 型學力」以及與生活連結的「生活數學」已成趨勢。我國自國民政府治台後的 1952 年版至 1990 年版的小學總體目標 (教育部, 1952, 1962b, 1968a, 1975, 1993, 2000)，以及中學的總體目標自 1962 年版至 1990 年版，僅 1983、1985 年版未納入 (教育部, 1962a, 1968b, 1972, 1983, 1985, 1994, 2000)，無論中小學早已重視形成數學問題與解決數學問題的能力，反而於 2003 年版只是「學習應用問題的解題方法」(教育部, 2003a)，2008 年版雖有「懂得利用推論去解決數學問題，包括理解和解決日常問題，以及在不熟悉解答方式時，懂得自尋解決問題的途徑」

(教育部國民教育司，2009a)，卻隱含於一般論述之中。

## (二) 兼顧「邏輯思考力」與「直觀力」之數學思維

芬蘭數學課程的核心任務中列有「提供經驗做為理解數學概念與結構的基礎」，以及「找出現象間的相似處、相異處、規律和因果關係」的目標 (FNBE, 2004b)；荷蘭小學主要核心目標列有「學生學習解決實際與正式的算術及數學的問題，並能明確提出論點」，同時重視洞察力 (insight)，強調估算及利用靈巧方法 (clever ways) 與縮減或多或少的標準程序的方式進行計算，中學也強調經由洞察力的推估調整計算結果 (Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008a, 2008b)；日本小學數學課程目標強調培養對日常的事象能推估 (見通しをもつ) 及邏輯思考 (文部科学省，2008a)。

培養邏輯思考能力常見於數學目標之中，但無論是芬蘭、荷蘭或是日本的數學科目標中，除列有邏輯思考能力的培養外，強調以直觀形象後的發現，先行預估推測，再邏輯思考、判斷、表達與反思，同時重視邏輯思考能力與直觀力，相對於此，我國雖指出「直觀讓學生能從根本上，擺脫數學形式規則的束縛，豐富學童在抽象層次上的想像力與觀察能力，這二者是兒童數學智能發展中的重要指標。」(教育部國民教育司，2009a)，但隱於一般的論述，未明列於目標之中。

## (三) 兼具「水平式數學化」與「垂直式數學化」

芬蘭的「問題解決」與「日常生活數學」的數學課程，使芬蘭在 PISA 獲得成功，但在國際數學奧林匹克的表現卻不甚理想，然而芬蘭存有「中學畢業的數學程度無法滿足高中所需」的課題。芬蘭 1980-1990 最具代表的領導人物 Erkki Pehkonen 認為學校的數學並非真正的數學，而是綜合性的教育科目 (Malaty, 2006)。因此，自 1995 年起，數學課程目標朝向課程的均衡設計，除了繼續強調「問題解決」及「日常生活數學」，重視日常所需的優勢外，另建立數學結構，將「數學思維」和「數學結構」同列為新課程的基本要素 (FNBE, 2004b; Malaty, 2007)；荷蘭 1985~2000 年數學教育深受 Freudenthal 的強烈影響，重視水平式的數學化勝於垂直式 (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000)，但 Freudenthal 在其 1991

年版的最後一本書 (Freudenthal, 1991)，接受 Treffers 數學化的新觀點，將數學化分為水平式及垂直式，視水平式及垂直式這兩種數學化形式的價值相等，並認為水平式及垂直式的數學化，適用於各種層次的數學活動 (Heuvel-Panhuizen, 2003)，而不再獨尊水平式數學化，由重視與現實連結的水平式數學化，朝向兼具水平式與垂直式數學化，並視此二種數學化形式的價值相等 (Heuvel-Panhuizen, 2003)，強調現實的基礎上，同時重視數學內外部的連結；日本自 1989 年版開始重視學習過程及培養能主動因應社會變化的能力與態度 (教育情報ナショナルセンター, 1989, 1998a, 1998b)，2008 年版小學數學課程目標「主動地應用於生活與學習的態度」(文部科学省, 2008a)，中學數學課程目標「培養主動活用、思考及判斷的態度」(文部科学省, 2008e)，仍強調能力與態度的培養。此外，視數量形的基礎/基本知識與技能是生活與學習的基盤，重視基礎/基本知識與技能的紮根 (文部科学省, 2008b)；美國歷經「須具備純熟的數學運算練習才能引出真正的概念理解」，或「須先理解數學概念才能進行有意義的數學運算」的論辯，國家數學諮詢委員會根據可用的龐大數據，進行分析，於 2008 年指出「概念理解」、「熟練計算」、「在事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果，並在學習過程的建議中提出應當全面培養學生的概念理解、流暢計算以及問題解決的能力 (ED, 2008)。

我國 89 年版中小學數學目標除強調「掌握數、量、形的概念與關係」外，同時「重視發展形成數學問題與解決數學問題的能力。」(教育部, 2000)；92 年版「能利用常用數量關係，解決日常生活的問題」，較著重於利用數學所學，以解決日常生活問題 (教育部, 1993)。相對於此，溯自我國 52 年版小學數學目標「1. 從接觸日常生活中有關數量問題，養成兒童正確數量觀念，了解數量的意義；2. 從處理日常生活中有關數量問題，培育兒童基本數量知識，訓練計算技能；3. 從應用日常生活中有關數量問題，指導兒童了解數量關係，解決數量問題；4. 從接觸、處理、應用日常生活中有關數量問題，輔導兒童發展計算的興趣，實測的技能，以及計算正確迅速的能力和習慣。」業已重視從生活中學習數學。數學課程

目標同時兼顧「水平式數學化」及「垂直式數學化」業已成趨勢，而非獨尊「水平式數學化」或「垂直式數學化」，或有孰先孰後之分。

#### (四) 重視「數學表達」

芬蘭新課程中的核心任務之一是「溝通」，目標中列有「學習利用圖片、具體模型和工具，以書寫或口頭方式證明他們的解法和結論」、「證明他們的行動和結論，並呈現解法給其他人」、「學習明確地表達他們的想法，並證明他們的方法與結論。」(FNBE, 2004d)；荷蘭將「學會溝通」列於任何一門學科都應指向的跨學科目標中，而且主要核心目標中列有「明確提出論點」、「學生學會使用適當的數學語言來組織自己的想法，向其他人解釋，並學會理解其他人的數學語言」、「學生學習有系統地描述、組織及視覺化數據，並學習以批判的角度評估數據、表達與下結論」(Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008a, 2008b)；日本新課程的特色之一在於要求全學科培養溝通能力的「語言力」，強調語言不僅是知的活動(邏輯與思考)，同時是溝通及感性與情緒的基盤，數學重視由活用比較、分類、關連等思考的技法，並以歸納思考、演繹思考等方式說明之，小學數學總目標中，列有「培養對日常的事象能推估及邏輯思考，以及表達的能力」(文部科学省，2008a)，中學的數學學科目標「學會數學的表達與處理的方法」(文部科学省，2008e)，中小學都重視培養數學溝通的能力；美國 1989 公布的《學校數學課程與評鑑標準 (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)》五項目標中亦列有「學會數學溝通」的目標(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989)。

以數學語言組織自己的想法、表達與溝通列於數學科目標中，已成趨勢，我國 82 年版「培養以數學語言溝通、討論、講道理和批判事物的精神」(教育部，1993) 及 89 年版「發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。」業已將表達溝通列於目標中(教育部，2000)。97 年版雖將「數學溝通能力：溝通包括理解與表達兩種能力，所以，數學溝通一方面要能瞭解別人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊；另一方面，也要能以書寫、圖形，或口語的形式，運用精

確的數學語言表達自己的意思。」，但隱於一般的論述之中，未明列於總目標之中（教育部國民教育司，2009a）。

#### （五）意圖活動方式置於學科內容

表 2-15 我國、芬蘭、荷蘭、日本、美國學科內容

國別	學科內容
我國	「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」、「連結」
芬蘭	一年級、二年級：「數與計算」、「代數」、「幾何」、「數據處理與統計」
	三年級~五年級：「數與計算」、「代數」、「幾何」、「數據處理」、「統計與機率」
	六年級~九年級：「思考技能與方法」、「數與計算」、「代數」、「函數」、「幾何」、「機率與統計」
荷蘭	小學：「數學洞察力與運算」、「數與計算」、「測量與幾何」
	中學：「學生學會使用適當的數學語言來組織自己的想法，向其他人解釋，並學會理解其他人的數學語言。」
日本	小學：「數與計算量」、「量與實測」、「圖形」、「數量關係」、「算數的活動」
	中學：「數與式」、「圖形」、「函數」、「資料的活用」
美國	「數與運算」、「代數」、「測量」、「幾何」、「數據分析」

如表 2-15 所示：無論是我國或芬蘭、荷蘭、日本、美國學科內容除了一般常見的學科內容「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」外，也將如下內容強調於學科內容中：如芬蘭的「思考技能與方法」；荷蘭的「數學洞察力與運算」與「數學語言的溝通」；日本的「算數的活動」、「資料的活用」，以及我國的「連結」。將意圖的活動置於學科內容，可提醒教學者或教科書編寫者等，非僅讓學生「學數學」還要讓學生「做數學」、「思考數學」，不僅是「垂直式數學化」還需「水平式數學化」。

## 六、數學教學方式

### （一）做數學

模仿與模仿與記憶的數學學習方式，只是知識的形式堆砌，Freudenthal 主張從尋找問題、解題與組織論點的「做數學（doing mathematics）」學習數學（Freudenthal, 1971, 1973），數學學習由「學數學」的過程轉為「做數學」，不是被動吸收數學已知的知識，而是學生的思維活動，是實踐與創新的過程，不斷地



經歷直觀感知、觀察發現、歸納類比、空間想像、抽象概括、符號表示、運算求解、資料處理、演繹證明、反思與建構等之思考與探索的過程。

### （二）從學生熟悉及有意義的方式著手

荷蘭的數學教育改革被視為「現實 (realistic)」並不僅只是因為與真實世界連結，而是因為 RME 提供學生可以想像的問題情境。荷蘭文的「想像」是「zich REALISERen」，強調讓某些事在你心中成真，由此產生 RME 這個名稱。將問題呈現給學生時，可取自真實世界，但非必要，只要在學生的心中是真實的，無論是童話的幻想世界，甚至是能提供適當情境的數學正式世界，都是合適的情境 (Heuvel-Panhuizen、Wijers, 2005；Van den Heuvel-Panhuizen, 2000)，以對學生而言較有意義的非正式數學語言的描述與訊息的辨識著手，相對地比較容易解題，非正式的數學用語經由垂直式數學化的過程，簡化和形式化漸漸發展成更正式的用語，最後以數學的語言或演算法解出，進而發展成更正式的語言，學生再運用已有的知識與技能去發現未知的規律、關係和結構將符號與策略運用於另一脈絡問題，熟練所學的數學語言 (K. E. P. Gravemeijer, 1994; Lange, 1996)。

### （三）提供學習機會

教師只負責提問，學生在討論與批判之下，不斷地修正概念，最後由學生自己提出所有的答案的蘇格拉底詰問法，能成功教會低成就學生更高層次的數學以及破除學習發展等候的迷思 (劉柏宏, 2004)。能否學習某一數學概念與否，大多數是端賴於先前的學習機會，此觀點已打破某一數學概念的學習，必需等到大腦成熟到某一程度不可的假設 (ED, 2008)。

### （四）擇其一教學方式不宜

特定教學方式只有在特定的條件下才能有效發揮作用，不宜執著於特定教學方式。「以學生為中心」，或是「教師主導」的教學方式，何者為宜，都得不到研究的支持，研究並不支持擇其一的教學方式 (ED, 2008)。

### （五）小組協助的個別化學習能夠改善計算技能

學生的四則運算能力及分數能力不足，將造成無法進一步學習代數及其他高等教學，「小組協助的個別化學習」對概念理解及問題解決的效果雖不明顯，但能夠改善學生的計算技能（ED, 2008）。

（六）「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」並重

「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果（ED, 2008）。

## 七、數學評量方式

荷蘭的現實數學教育強調評量應如金字塔涵蓋所有數學領域的深度和廣度（Lange, 1996），尚須滿足有意義的（meaningful）與具訊息性（informative）這兩個條件（Van den Heuvel-Panhuizen, 1996），強調從有意義的問題情境中學習分析和組織，益於數學的彈性應用，指出有意義的評量題必須反映重要的學習目標，並從學生易於接近的、吸引人的、具挑戰性的，而且值得去解決的觀點出發（Treffers, 1987），並且要讓學生清楚知道為何需要針對給定的評量題找出答案，讓學生自己想題與佈題，決定購買物的內容等，來控制評量題的困難度（Van den Heuvel-Panhuizen, 1996），以及讓學生成為評量題的所有者（owner），藉此掌握問題情境。具訊息性的問題情境須：（1）對學生而言必須是容易理解的，必須儘可能明確；（2）提供學生用自己的說法提出答案的機會；（3）數學化活動儘可能可見；（4）讓學生自己解決開放式問題，並有系統地闡述答案；（5）提供學生在不同的學習階段，用不同的方式解決相同問題的空間；（6）提供「正向測驗」（positive testing），讓學生展現出他們懂什麼，而非呈現他們還不懂什麼（Van den Heuvel-Panhuizen, 1996），指出如何設計有意義且具有訊息性的形成性評量題，提供教師有關學生知識、洞察力與技能的訊息，支援教師以為引導學生重新發明數學概念。

日本自 2007 年起以中三及小六全體為對象（2010 年改採抽測方式），實施數學及語文的學力調查，「知識」的部份鎖定會影響後續學年學習的內容及生活中活用不可或缺的知識、技能為主；另將「活用」列入試題是一大特色，「活用」則以

能將知識、技能等活用於生活中各種場面的能力，以及為解決各種課題的構思及評鑑、改善的能力等之內容為主，重視 PISA 型的學力觀（文部科学省，2009）。

總之，「活用題型」與「形成性評量」已成趨勢。數學教學評量除反映重要的學習目標，問題情境須具深度和廣度外，從真實世界的脈絡著手，由有意義的問題情境中學習分析和組織，方裨益於數學的彈性應用，具訊息性的形成性評量，方能支援教師以為引導學生重新發明數學概念。

## 肆、結論與建議

### 一、結論

本研究基於如何解決我國「卓越有餘，意願不足」學習意願偏低，以及優劣差距甚大等之現況，首先探討我國數學課程之沿革，再探討芬蘭、荷蘭、日本、美國等國數學課程之沿革及其近期中小學數學領域課程（課程主要學習目標、核心內容、學習時數等）、教學（教學觀等）、評量等理論與發展的趨勢，進而釐清近期中小學數學領域課程的特色與取向。這些國家的背景脈絡等與我國有所差異，但這些國家的經驗，足以為我國解決學習意願偏低及優劣差距甚大等現況問題之借鏡。研究發現接觸數學時數的多寡不是國際評比勝出的決定因素，這些國家的數學課程重視活用數學的「PISA 型學力」與「生活數學」，以及「邏輯思考力」與「直觀力」的數學思維；教學著重於「水平式數學」與「垂直式數學」的均衡化，並重視「數學表達」；評量強調「形成性評量」的落實與「活用題型」，以及將意圖的活動置於學科內容之中

### 二、建議

#### （一）對教育當局者之建議

##### 1. 數學教育改革方向植基於實證研究後設分析

美國將未來數學教育改革方向植基於實證研究的後設分析，而非訴諸於數

學家與數學教育家的論辯結果。布希總統為改善學生的數學，2006 年成立國家數學諮詢委員會，該委員會共參閱 16,000 份研究出版物和政策報告，聽取 110 位公開證言，檢視 160 篇機構與個人的評論以及分析來自 743 位代數教師的調查結果，綜合分析後形成總報告，點出許多不曾被重視的改革重點，為提升數學教育提出許多具體可行的方法，為美國形塑數學教育的改革方向。

## 2. 根據本土學習現況進行數學課程改革

日本根據本土學習現況進行數學課程改革，不淪為國外數學課程改革理念的實驗室。從其國內教育課程實施狀況及國際性學力調查結果，發現學生存有對計算意義理解不夠，而且未能利用已學的知識與技能充分活用於生活與學習的課題，因此，較之學科知識的學習，更重視「社會中能使用的能力」PISA 型的學力觀，而且自 2007 年起實施的學力調查內容，試題除「知識」外，同時將「活用」列入試題。

## 3. 根據本土所需提出數學課程改善方向

美國根據本土數學課程所需制定課程標準，方能符應本土所需。美國基於社會需要能應用數學思考解決問題的公民，自 1980 年代起重視問題解決，公布《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議》，將「問題解決」作為 1980 年代數學教育的核心；數學課程曾被嘲諷「1 呎廣而 1 吋深」，2006 年公布的《課程焦點：追求一致性》，將重要的數學內容系統化安排，明示各學年數學核心課程內容，使課程得以首尾一貫，並確定每年教什麼樣的關鍵數學技能與知識。

### (二) 對課程修訂者之建議

#### 1. 教學時數用於解決本土課題

亞洲國家學生以較長的數學學習時間換取高成就的傾向，然而從國際評比結果可以得知數學教學時數不是勝出的唯一決定因素。日本雖大幅增加數學教學時數，但強調教學時數用於充分確保基礎/基本知識與技能的反覆學習，以及利用於活用數量形相關知識與技能於實際場面等的時間，以培養思考力與表達力等，進而促使實感理解的喜悅及學習的意義。我國的課題是如何縮小數學學

習優劣差距與提高學習意願，而非僅就增加時數提高學科能力，教學時數宜用於解決本土課題，以達數學表現的質高且均，並引發數學學習「正向態度」與提高數學「自信心」。

## 2. 根據數學課程發展取向釐清數學課程基盤

數學課程架構除了重視前後學年階段目標的數學邏輯順序，以及各學年教學內容的核心外，最重要的是指出數學課程的基盤，根據數學課程發展取向，如圖 2-3，本研究認為基盤宜植基於：「數學邏輯思考」、「數學直觀掌握」、「數學溝通表達」，不僅是「垂直式數學化」還需「水平式數學化」，評量範圍不僅是「知識」還包括「活用」與「評量指導一體化」。

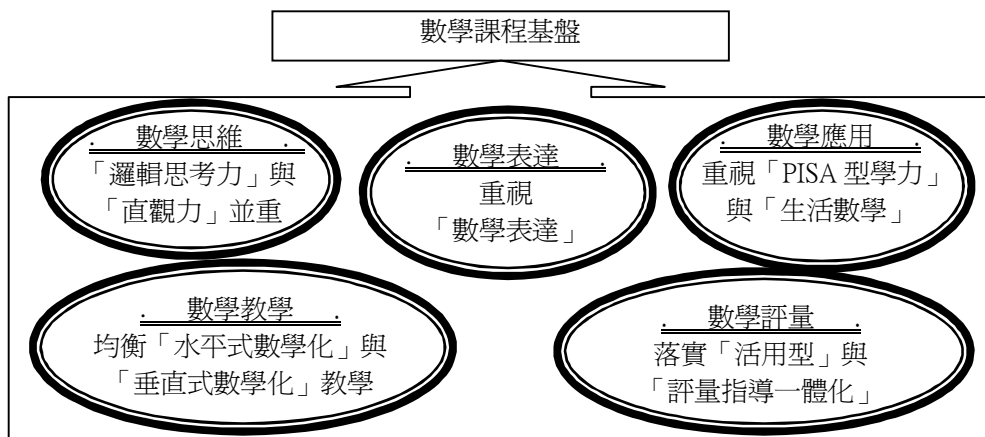


圖 2-3 數學課程基盤

## 3. 數學課程總目標提綱挈領指出意圖目標

我國 2008 年公布，2011 學年度實施的「國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域」，以如下方式呈現我國數學課程綱要：「1.第一階段（國小一至二年級）：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形之認識。…（教育部國民教育司，2009a）」，雖有「我們希望課程目標的達成，可以培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學生欣賞數學的

態度及能力（教育部國民教育司，2009a）」，並指出能力目標的重要性（教育部國民教育司，2009a），但是只以「知識技能目標」方式呈現，而將能力目標隱於一般的論述之中，易引起我國只重視「知識技能目標」之誤解，宜以數學課程總目標或以核心目標方式，提綱挈領指出「知識技能目標」與「能力目標」而非隱於論述中。

相對於此，我國溯自 1952 年版的小學目標「2.指導兒童解決日常生活中關於數的問題，培養其理解思考的能力。」（教育部，1948），1952 年版的中學目標「4.培養以簡馭繁以已知推未知之能力。」（教育部，1952）或是芬蘭、荷蘭、日本、美國等國的數學課程目標，都將「知識技能目標」與「能力目標」呈現於數學課程總目標或以核心目標方式呈現。2008 年版數學課程綱要，明列「知識技能目標」而將「能力目標」等意圖目標隱於一般的論述之中，易引起我國只重視「知識技能目標」之誤解，宜以數學課程總目標或以核心目標方式，提綱挈領指出「知識與技能目標」、「數學思考與表達目標」、「解決問題目標」及「情感與態度目標」等意圖課程的目標，以為數學課程導向的明顯依據。

### （三）對教育現場之建議

#### 1. 提高學習意願

##### （1）重視數學價值及信念轉變

日本針對 PISA 排名的節節後退，以及 TIMSS 國際評比中，小四生及八年級生對「數學自信心」，排名倒數第一的現象，強調經由欣賞數學與培養活用數學的態度，感受數學學習的意義及有用性，增進對數學價值的理解，讓學生充分感受數學的力量，激發學生學好數學的動機；美國的研究發現由注重「個人能力」轉為「努力能變得更棒」的信念，有助於對數學學習的投入。

##### （2）以「做數學」替代「學數學」提升數學素養與學習意願

PISA2003 及 PISA2006 都名列第 2 的芬蘭，非考試導向，但國家競爭力都保持前幾名，名列 4、5 的荷蘭，百分之九十的大學生選課時，會選修高

等數學，學生不怕數學的原因在於芬蘭與荷蘭的數學教育向來以問題解決為主，重視數學的實際應用，強調「數學來自於現實生活，將其再利用於現實生活」以及「學生經由自己熟悉的現實生活，自行發現和理出數學結論」。1980年代，荷蘭只有5%課本趨向RME，1990年代，則有75%的課本以RME理念編寫數學課程，營造豐富的學習環境，讓學生主動學習，從真實世界的情境中出發，學生根據真實世界的素材，在視覺化下發現規則，粹取數學概念形成基模，再經由同儕間和師生間的說明、討論、賞析等相互質疑與反思的過程，以及一般化的過程，發展成更完整的概念，進而形成數學概念。日本2008年版的中小學數學課程目標增列「數學的活動」，強調經由數學活動實際感受數學學習的意義及有用性，提高學生學習數學的意願。我國1993年版數學課程總目標中強調「1.養成主動地從自己的經驗中，建構與理解數學的概念」，數學學習由「學數學」的過程轉為「做數學」，林福來指出建構式數學因缺乏配套及教師在職訓練，10年前推動的建構式數學落實教學現場產生很大落差，但現在的學生拚命練習艱澀的題目，可能導致信心缺乏（張錦弘，2007）。

### (3) 從學生熟悉及有意義的情境著手

將問題呈現給學生時，可取自真實世界，但非必要，只要在學生的心中是真實的，無論是童話的幻想世界，甚至是能提供適當情境的數學正式世界，都是合適的情境，以對學生而言較有意義的非正式數學語言的描述與訊息的辨識著手，相對地比較容易解題。

### (4) 感受運用已知引出新知的成就感

荷蘭的數學教育強調由非正式的數學用語經由垂直式數學化的過程，簡化和形式化漸漸發展成更正式的用語，最後以數學的語言或演算法解出，進而發展成更正式的語言，學生再運用已有的知識與技能去發現未知的規律、關係和結構將符號與策略運用於另一脈絡問題，熟練所學的數學語言。日本相對於現行課程小學數學課程目標「主動地應用於生活的態度」的目標，2008

公佈的小學新課程目標不僅只停於「主動地應用於生活的態度」，而增加成爲「應用於生活與學習的態度」，強調活用學過的知識與技能創造新知識與技能，安排螺旋式課程，藉由運用已有的知識與技能發現未知的規律、關係和結構，感受引出新知的成就感，提高學習意願。

## 2. 縮短優劣差距

國際評比中，我國數學表現優異，但我國數學成就高低差距大，由國際評比結果及接觸數學的學習時間比較，可以得知數學教學時數不是數學成就的唯一決定因素，可從「滿足孩子們天生的求知」以及「擅用教學法」改善數學學習。

### (1) 滿足孩子們天生的求知欲

芬蘭每週數學教學平均僅 2.7 小時，非考試導向，但國家競爭力都保持前幾名，而且學生數學表現質高且均，在於其《基礎教育法案》明文指出：教育的宗旨須滿足孩子們天生的求知欲，讓學生充分自主發展並配合孩子的需要進行調整，以便適合異質性的學生，由於學校照顧每一位學生，得以縮短學生成績優劣的差距。

### (2) 擅用教學法

教室現場宜擅用以詰問法、清晰教學法、小組協助的個別化學習等教學法，可以改善數學學習，「以學生爲中心」，或是「教師主導」的教學方式，何者爲宜，都得不到研究的支持，研究並不支持擇其一的教學方式，特定教學方式只有在特定的條件下才能有效發揮作用。美國數學家投入的非營利組織 Project SEED 等 K-12 的課程改革運動，發現教師只負責提問，學生在討論與批判之下，不斷地修正概念，最後由學生自己提出所有的答案的「蘇格拉底詰問法」，能成功教會低成就學生更高層次的數學，破除學習發展必需等到大腦成熟到某一程度不可的等候迷思；經常性實施形成性評量能夠改善小學生的數學學習；教師提供解決問題的明確示範，學生參照示範使用於新的學習策略和技能並進行大量練習，而且大聲說出思考過程，以獲得充分回



饋的教學方式的「清晰教學法」非適用於所有學生，但有助於文字題及計算有困難的學生，對無能力學習者及一般的班級名列於後三名者也有效；根據診斷測驗結果，形成個別化的問題，由不同能力學生組成相互幫助的小組，並有特別教師指導，以及根據小組及個人兩者表現給予獎賞的學習方式的「小組協助的個別化學習」對概念理解及問題解決的效果雖不明顯，但能夠改善學生的計算技能；「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果。

## 參考文獻

### 一、中日文部分

中原忠男（2008）。算数科 pisa 型学力の教材開発&授業。東京：明治圖書。

文部科学省（2002）。完全学校週5日制の実施について（通知）13文科初第一

〇〇〇号。2008年10月5日，取自

[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/houdou/14/03/020313.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/14/03/020313.htm)

文部科学省（2007a）。Oecd 生徒の学習到達度調査～2006年調査国際結果の要約～。2009年12月23日，取自

[http://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/gakuryoku-chousa/sonota/071205/001.pdf](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/gakuryoku-chousa/sonota/071205/001.pdf)

文部科学省（2007b）。算数・数学科の現状と課題，改善の方向性（検討素案）（教育課程部会等の審議を踏まえて）。2009年11月28日，取自

[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/shingi/chukyo/chukyo3/013/siryu/07101711/002.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/013/siryu/07101711/002.htm)

文部科学省（2008a）。小学校学習指導要領。2009年10月12日，取自

[http://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/new-cs/youryou/syo/syo.pdf](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/syo/syo.pdf)

文部科学省（2008b）。小学校学習指導要領解説-算数編 第1章~第2章。2009年12月1日，取自

[http://www.mext.go.jp/component/a\\_menu/education/micro\\_detail/\\_icsFiles/afieldfile/2009/06/16/1234931\\_004\\_1.pdf](http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2009/06/16/1234931_004_1.pdf)

文部科学省（2008c）。小学校学習指導要領解説 算数編 第3章~第4章。2009年12月1日，取自

[http://www.mext.go.jp/component/a\\_menu/education/micro\\_detail/\\_icsFiles/afieldfile/2009/06/16/1234931\\_004\\_2.pdf](http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2009/06/16/1234931_004_2.pdf)

文部科学省（2008d）。小学校学習指導要領解説 総則編。東京：東洋館。

- 文部科学省（2008e）。中学校學習指導要領。2009年10月12日，取自  
[http://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/new-cs/youryou/chu/chu.pdf](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/chu/chu.pdf)
- 文部科学省（2008f）。中学校學習指導要領解説。2009年4月2日，取自  
[http://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/new-cs/youryou/chukaisetsu/index.htm](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/chukaisetsu/index.htm)
- 文部科学省（2008g）。中学校學習指導要領解説 数学編。東京：教育出版。
- 文部科学省（2009）。平成21年度全国学力・學習狀況調査 調査結果について。  
2009年9月29日，取自 <http://www.nier.go.jp/09chousakekka/index.htm>
- 王九達（2000）。集合論與數學教育。科學月刊，31(3)，241-243。取自數學知識  
網站 [http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm\\_31\\_03\\_1/index.html](http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_31_03_1/index.html)
- 何淑真（2003）。荷蘭的數學教育。2009年3月20日，取自  
<http://iwebs.url.com.tw/main/html/hef/840.shtml>
- 呂溪木（2007a）。我國數學課程演變。載於「吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術  
研討會~我國近五十年之科學教育發展~」研討會論文集（頁46-54）。臺  
北市：國立臺灣師範大學科學教育研究所。
- 呂溪木（2007b）。變遷時代中我國數學課程的發展。載於「吳大猷先生百歲冥誕  
科學教育學術研討會~我國近五十年之科學教育發展~」研討會論文集（頁  
61-66）。臺北市：國立臺灣師範大學科學教育研究所。
- 周玉秀（2006）。從 pisa 看數學素養與中小學數學教育。科學教育月刊，293，  
2-21。
- 林宜臻（2009）。日本國家課程改革脈絡、內涵及其啓示之研析。載於中小學課  
程發展之相關基礎性研究 2009 年成果討論會論文輯。臺北市：國家教育  
研究院籌備處。
- 林宜臻、林沂昇（2007）。數學教育改革之檢討、成效評估與未來展望。載於陳  
清溪編著，十年教改的回顧與展望（頁241-273）。臺北縣：國立教育研  
究院籌備處。
- 邱石虎、莊仁宗（1999）。數學科板橋模式之成長歷程。載於臺灣省國民教師研

習會編著，**四十三週年會慶暨三峽會區落成紀念**。臺北：臺灣省國民教師研習會。

洪萬生（2004）。美國數學家如何介入數學教育？。《科學月刊》，35（2），160-161。

洪萬生、曹博盛、譚克平、張少同、陳創義、林碧珍 ... 蔡文煥（2003）。**九十一學國二、小四暨九十二學年度國二數學成就測驗計畫**。

NSC92-2521-S003-004。臺北市：國立臺灣師範大學數學系。

胡志偉（1997）。國小教師對建構教學的看法與使用意願。《教育與心理研究》，20，55~70。

范信賢（2002）。芬蘭國家課程改革脈絡、內涵及其啓示之研析。載於**中小學課程發展之相關基礎性研究 2009 年成果討論會論文輯**。臺北縣：國家教育研究院籌備處。

重建教育連線（2003）。「**終結教改亂象，追求優質教育**」宣言。臺北市：重建教育連線。

香港特別行政區政府教育局（2002）。**基礎教育課程指引—各盡所能・發揮所長（小一至中三）**。2010年4月13日，取自

[http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/TC/Content\\_2909/html/index.html](http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/TC/Content_2909/html/index.html)

高正忠（2006）。終身教育理想國，芬蘭孩子上課時間少，素質卻是世界頂尖。《講義》，39（4），108-109。

張錦弘（2007年12月10日）。學者：數學補到第一？犧牲閱讀更糟。《聯合報》，C3版。

教育出版教育研究所（2006）。**教育情報シリーズ 69：新教育課程-理数教育の充実**。東京：教育出版。

教育出版教育研究所（2008）。**教育情報シリーズ 76：一目でわかる「新学習指導要領」小学校算数・中学校数学編**。東京：教育出版。

教育学研究会（1997）。**新数学教育の理論と實際<中学校>**（3版）。東京：聖文社。

- 教育情報ナショナルセンター（1958a）。小学校学習指導要領（昭和 33 年）。  
2009 年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/s33e/>
- 教育情報ナショナルセンター（1958b）。中学学習指導要領（昭和 33 年）。2009  
年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/s33j/>
- 教育情報ナショナルセンター（1968）。小学校学習指導要領（昭和 43 年）。2009  
年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/s43e/>
- 教育情報ナショナルセンター（1969）。中学校学習指導要領（昭和 44 年）。2009  
年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/s44j/>
- 教育情報ナショナルセンター（1977a）。小学校学習指導要領（昭和 52 年）。  
2009 年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/s52e/>
- 教育情報ナショナルセンター（1977b）。中学校学習指導要領（昭和 52 年）。  
2009 年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/s52j/>
- 教育情報ナショナルセンター（1989）。小学校学習指導要領（平成元年）。2009  
年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/h01e/>
- 教育情報ナショナルセンター（1998a）。小学校学習指導要領（平成十年）。2009  
年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/h10e/>
- 教育情報ナショナルセンター（1998b）。中学校学習指導要領（平成十年）。2009  
年 10 月 12 日，取自 <http://www.nicer.go.jp/guideline/old/h10j/>
- 教育部（1948）。小學課程標準：教育部。
- 教育部（1952）。國民學校課程標準。臺北市：商務印書館。
- 教育部（1962a）。中學課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部（1962b）。國民學校課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部（1968a）。國民小學暫行課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部（1968b）。國民中學暫行課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部（1972）。國民中學課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部（1975）。國民小學課程標準。臺北市：正中書局。

- 教育部（1983）。國民中學課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部（1985）。國民中學課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部（1993）。國民小學課程標準。臺北市：教育部。
- 教育部（1994）。國民中學課程標準。臺北市：教育部。
- 教育部（2000）。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。臺北市：教育部。
- 教育部（2003a）。92年國民中小學九年一貫課程綱要-數學學習領域。2010年4月6日，取自 [http://www.edu.tw/files/site\\_content/b0056/math.doc](http://www.edu.tw/files/site_content/b0056/math.doc)
- 教育部（2003b）。「教育部具體提出銜接、補救之配套方案—樂在數學—強化國中小學生數學能力」。2003年1月27日，取自 <http://140.111.1.192/high-school/importance/920127-1.htm>
- 教育部國民教育司（2009a）。97年國民中小學九年一貫課程綱要（100學年度實施）—數學學習領域。2009年11月30日，取自 [http://www.edu.tw/files/site\\_content/B0055/980424\\_數學課程綱要修訂\(單冊\).doc](http://www.edu.tw/files/site_content/B0055/980424_數學課程綱要修訂(單冊).doc)
- 教育部國民教育司（2009b）。97年國民中小學九年一貫課程綱要（100學年度實施）—總綱。2009年11月30日，取自 [http://www.edu.tw/files/site\\_content/B0055/總綱.doc](http://www.edu.tw/files/site_content/B0055/總綱.doc)
- 清水美憲（2007）。算数科カリキュラムにおける焦點は何か—米国 nctm の最新文章“curriculum focal point”より—。新しい算数研究，438，32-33。
- 清水靜海（2003）。戰後学校数学の変遷。日本：筑波大学数学教育研究室。
- 陳之華（2008）。沒有資優班，珍視每個孩子的芬蘭教育。臺北：天下文化。
- 陳之華（2009）。每個孩子都是第一名—芬蘭教育給臺灣父母的45堂必修課。臺北：天下文化。
- 陳梅生（1986）。在研習會幾樁值得回憶的事。載於臺灣省國民學校教師研習會編著，臺灣省國民學校教師研習會三十紀念專刊（頁41-55）：臺灣省國民學校教師研習會。

楊小微(2009)。课程与教学关系再审视—基于 30 年变革实践的回顾与反思。論文發表於新課程改革研究與成果展示交流會暨黑龍江省課程與教學論專業委員會第 2 屆年會，中國牡丹江市。

劉柏宏(2004)。從美國「數學戰爭」看臺灣的數學教育。《數學傳播》，28(4)，3-16。

盧楓(2003a)。芬蘭：提高全民族基礎教育整體素質。2009 年 8 月 12 日，取自 <http://www1.hfut.edu.cn/organ/xzbgs/gjyj/view.php?id=64>

盧楓(2003b)。芬蘭基礎教育成功原因初探。2009 年 8 月 28 日，取自 <http://www.edu.cn/20030303/3078827.shtml>

## 二、英文部分

An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.

(1980). Education Resources Information Center. Retrieved December 2, 2009, from National Council of Teachers of Mathematics

[http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search/detailmini.jsp?\\_nfpb=true&ERICExtSearch\\_SearchValue\\_0=ED186265&ERICExtSearch\\_SearchType\\_0=no&accno=ED186265](http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search/detailmini.jsp?_nfpb=true&ERICExtSearch_SearchValue_0=ED186265&ERICExtSearch_SearchType_0=no&accno=ED186265)

Aho, E., Pitkänen, K., & Sahlberg, P. (2006). Policy Development and Reform

Principles of Basic and Secondary Education in Finland since 1968. Retrieved from

[http://siteresources.worldbank.org/EDUCATION/Resources/278200-1099079877269/547664-1099079967208/Education\\_in\\_Finland\\_May06.pdf](http://siteresources.worldbank.org/EDUCATION/Resources/278200-1099079877269/547664-1099079967208/Education_in_Finland_May06.pdf)

Basic Education Act (1998).

Bordewich, F. (2005). 因材施教—芬蘭學校的榜樣，值得世人學習。 Retrieved

August, 29, 2009. Retrieved from <http://www.readersdigest.hk/article/2147>

Case, R. W. (2005). Report from the Netherlands: The Dutch Revolution in Secondary

School Mathematics. *Mathematics Teacher*, 98(6), 374-384.

Education Audiovisual and Culture Executive Agency [EACEA] (2009). National summary sheets on education system in Europe and ongoing reforms -FINLAND. Retrieved November 20, 2009, from

[http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/eurybase/national\\_summary\\_sheets/047\\_FI\\_EN.pdf](http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/eurybase/national_summary_sheets/047_FI_EN.pdf)

Education Audiovisual and Culture Executive Agency[EACEA] (2008). Organisation of the education system in Finland. Vol. 2009. Retrieved from

[http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/eurybase/eurybase\\_full\\_reports/FI\\_EN.pdf](http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/eurybase/eurybase_full_reports/FI_EN.pdf)

Education Audiovisual and Culture Executive Agency[EACEA] (2009). National summary sheets on education system in Europe and ongoing reforms-THE NETHERLANDS. Vol. 2009. Retrieved from

[http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/eurybase/national\\_summary\\_sheets/047\\_NL\\_EN.pdf](http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/eurybase/national_summary_sheets/047_NL_EN.pdf)

Finnish National Board of Education[FNBE] (1985). Basics for the curriculum in the comprehensive school 1985. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Finnish National Board of Education[FNBE] (1994). Framework Curriculum for the Comprehensive School 1994. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Finnish National Board of Education[FNBE] (2001). Distribution of lesson hours in basic education 2001 (Vol. 2009).

Finnish National Board of Education[FNBE] (2004a). National Core Curriculum for Basic Education 2004- Part III: Chapters 7.4–7.9. Vol. 2009. Retrieved from [http://www.oph.fi/download/47672\\_core\\_curricula\\_basic\\_education\\_3.pdf](http://www.oph.fi/download/47672_core_curricula_basic_education_3.pdf)

Finnish National Board of Education[FNBE] (2004b). National Core Curriculum for Basic Education 2004-Part V Chapters 8–9 and Appendix (Vol. 2010).



- Finnish National Board of Education[FNBE] (2004c). National Core curriculum for comprehensive education 2004. Helsinki: Finnish National Board of Education.
- Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.
- Freudenthal, H. (1971). *Geometry Between the Devil and the Deep Sea*. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796.
- Gravemeijer, K. E. P. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlands: CD-Press.
- Halonen, L. (1982). *Karjalaisen koulun taival*. Joensuu: Pohjois-Karjalan Kirjapaino.
- Hautamäki, J., Harjunen, E., Hautamäki, A., Karjalainen, T., Kupiainen, S., & Laaksonen, S. (2008). *PISA 06 Finland - analyses, reflections and explanations*. Retrieved November 20, 2009, from <http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2008/liitteet/opm44.pdf?lang=en>
- Heuvel-Panhuizen, M. V. d. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education An Example from A Longitudinal Trajectory on Percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.

- Heuvel-Panhuizen, M. v. d., & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(4), 287-307.
- Kupiainen, S., Hautamäki, J., & Karjalainen, T. (2009). The Finnish education system and PISA. Retrieved November 20, 2009, from <http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2009/liitteet/opm46.pdf?lang=en>
- Kupiainen, S., & Pehkonen, E. (2008). *Mathematical Literacy Assessment PISA 06 Finland - analyses, reflections and explanations* (pp. 117-143). Helsinki: Ministry of Education.
- Lange, J. d. (1996). *Using and Applying Mathematics in Education International handbook of mathematics education* (pp. 49-97). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Malaty, G. (2006). What are the Reasons Behind the Success of Finland in PISA? *Matilde*, 29, 4-9.
- Malaty, G. (2007). *PISA Results and School Mathematics in Finland: strengths, weaknesses and future*. Paper presented at the Mathematics Education into the 21st Century Project: Mathematics Education in a Global Community, Charlotte, NC.  
[http://math.unipa.it/~grim/21\\_project/21\\_charlotte\\_MalatyPaperEdit.pdf](http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_MalatyPaperEdit.pdf)
- Malaty, G. (2009). *Mathematics and Mathematics Education Development in Finland: the impact of curriculum changes on IEA, IMO and PISA results*. Paper presented at the Mathematics Education into the 21st Century Project: Models in Developing Mathematics Education, Dresden, Germany.  
[http://math.unipa.it/~grim/21\\_project/Malaty390-394.pdf](http://math.unipa.it/~grim/21_project/Malaty390-394.pdf)
- Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap [OCW] (2008a). *Core objectives primary education*. Retrieved November 13, 2009, from

<http://www.minocw.nl/documenten/core%20objectives%20primary%20education.pdf>

Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap [OCW] (2008b). Core objectives secondary education. Retrieved November 13, 2009, from

<http://www.minocw.nl/documenten/core%20objectives%20secondary%20education.pdf>

Ministry of Education, S. a. T. (2007). Primary and Secondary School Curriculum of Korea\_ Summary. Retrieved April 13, 2010, from

[http://english.mest.go.kr/main.jsp?idx=0301010101&brd\\_no=51&cp=3&pageSize=10&srchSel=&srchVal=&mode=l](http://english.mest.go.kr/main.jsp?idx=0301010101&brd_no=51&cp=3&pageSize=10&srchSel=&srchVal=&mode=l)

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1997). Mathematics Achievement in the Primary School Years: IEA's

Third International Mathematics and Science Study. Retrieved from

<http://timssandpirls.bc.edu/timss1995i/TIMSSPDF/amtimss.pdf>

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Olson, J. F., Preuschoff, C., Erberber, E., . . .

Galia, J. (2008). TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Retrieved from

[http://timss.bc.edu/TIMSS2007/intl\\_reports.html](http://timss.bc.edu/TIMSS2007/intl_reports.html)

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Gregory, K. D., Garden, R. A.,

O'Connor, K. M., . . . Smith, T. A. (2000). TIMSS 1999 International Mathematics Report. Retrieved from

[http://timssandpirls.bc.edu/timss1999i/pdf/T99i\\_Math\\_All.pdf](http://timssandpirls.bc.edu/timss1999i/pdf/T99i_Math_All.pdf)

National Commission on Excellence in Education [NCTM] (1983). A nation at risk:

The imperative for educational reform. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Retrieved December 2, 2009, from <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909>

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2006). Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nevanlinna, R. (1966). Reform in Teaching Mathematics. American Mathematical Monthly, 73, 451-464.

No Child Left Behind Act (2002).

Organization for Economic Cooperation and Development[OECD] (2001). Knowledge and Skills for Life : First Results from PISA 2000. Retrieved from <http://www.oecd.org/dataoecd/44/53/33691596.pdf>

Organization for Economic Cooperation and Development[OECD] (2004). Learning for Tomorrow' s World - First Results from PISA 2003. Retrieved from <http://www.oecd.org/dataoecd/1/60/34002216.pdf>

Organization for Economic Cooperation and Development[OECD] (2007). PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow's World Volume 1: Analysis. Retrieved from <http://www.oecd.org/dataoecd/30/17/39703267.pdf>

Pascopella, A. (2007). Focal Points for Pre-K8 math. District Administration, 43(5), 30-41.

Pehkonen, E. (2007). Problem solving in mathematics education in Finland. Retrieved from <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ALL/Papers/PEHKON.pdf>

- Peschar, J. L., & Wal, M. v. d. (2001). Netherlands. Retrieved from  
<http://www.deseco.admin.ch/bfs/deseco/en/index/05.parsys.6214.downloadList.53370.DownloadFile.tmp/sfsodesecoccpnetherlands19122001.pdf>
- Roitman, J. (1999). Beyond the math wars. *Contemporary Issues in Mathematics Education*, 36, 123-134.
- Roitman, J. (2000). Revising the NCTM Standards. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(1), 5.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen, S. A. (1996). *A Splintered Vision: An Investigation of U.S. Science and Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- The International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA] (2009a). *Trends in International Mathematics and Science Study - TIMSS 2007 Assessment Results Student Background Data Almanac by Mathematics Achievement (Weighted) - 4th Grade*. Retrieved from  
[http://timss.bc.edu/timss2007/PDF/T07\\_Almanacs.zip](http://timss.bc.edu/timss2007/PDF/T07_Almanacs.zip)
- The International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA] (2009b). *Trends in International Mathematics and Science Study - TIMSS 2007 Assessment Results Student Background Data Almanac by Mathematics Achievement (Weighted) - 8th Grade*. Retrieved from  
[http://timss.bc.edu/timss2007/PDF/T07\\_Almanacs.zip](http://timss.bc.edu/timss2007/PDF/T07_Almanacs.zip)
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht, The Netherlands: IOWO.
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction-the Wiskobas Project*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- United Nations Educational Scientific and Cultural Organization [UNESCO] (1986). *The Place of Science and Technology in School Curricula: A Global Survey*.

- Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.
- United States Department of Education [ED] (2008). Foundations for Success—The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. Retrieved from <http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf>
- Väljjarvi, J., Kupari, P., PirjoLinnakylä, Reinikainen, P., Sulkunen, S., Törnroos, J., & Arffman, I. (2003). The Finnish success in PISA - and some reasons behind it 2. Retrieved from [http://ktl.jyu.fi/img/portal/8317/PISA\\_2003\\_screen.pdf](http://ktl.jyu.fi/img/portal/8317/PISA_2003_screen.pdf)
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). Assessment and realistic mathematics education. Utrecht:: CD-β Press Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics Education in The Netherlands: A guided tour. Utrecht: Utrecht University.