

認識“量與實測”的教材架構與能力指標

鍾靜 國立台北師範學院數學教育學系教授

九年一貫課程強調的是帶著走的能力，而不是片斷零碎的知識。到底什麼是知識？什麼是能力？有一則高年級教學案例，可以給我們一些啓示。

師：我們教室的黑板有多長？（教師用手比劃黑板的長）

生：黑板長 20 公里。

師：你知道 1 公里是幾公尺？（老師臉仍面帶笑容的詢問）

生：1 公里是 1000 公尺。

師：你再想想看！黑板有多長？（老師以為學生會修正）

生：20 公里啊！

師：請你說說看，你怎麼知道教室的黑板有多長？

生：老師經常用兩手一比就說長 5 公里，那黑板的長是它的 4 倍，所以是 20 公里。（學生的解題策略正確）

師：……（一片顫然）

從這段教學對話中，我們看到學童可以說「1 公里=1000 公尺」但無量感，顯示出學生並不是真正了解“公里”或“公尺”普遍單位的意義。而教師在教學時，也未注意到其所表徵的長度和實際量的差距，對教學重點的掌握顯然不足。因此，本文意圖協助教師瞭解九年一貫課程數學領域之“數與量”主題中，“量與實測”的教材架構，再從架構中藉脈絡的觀點來認識能力指標，這樣教師較能掌握教材脈絡和教學重點。能力指標通常包含一些水平向度的子概念以及垂直向度的層次概念，甚少透過一、二個教學活動就可達成，我們可以從三個角度來認識能力指標，首先就是能力指標在教材架構中的定位，其次是該能力指標的垂直層次，最後是該能力指標的水平層次。因為“量與實測”的教材，按照量的特性可以分成二類：感官量和工具量（鍾靜，民 83、民 87），所以本文分成以下兩個部份來討論。

一、感官量部份

學童對長度、重量、容量、角度、面積、體積等存在於實體的感官量，其概念的認知發展形成都要經歷下列五個階段（教育部，民 90）才算完整：1.量的初步概念；2.量的間接比較；3.個別單位的描述；4.公制單位系統內的認識與換算（化聚）；5.量的公式概念（只有面積和體積有此階段）。

而這五個階段和八十二年版數學課程標準（教育部，民 82）的理念是相互呼應的，其重點整理於下表：

「量與實測---感官量」的發展階段	
基本想法（九年一貫）	架構理念（82年版，註200）
1.初步概念： 透過感官感覺一個量；能對兩個同類量作直接比較；能以整體、合成複製的方式複製一個量；利用刻度尺描述一個量。	1.某量的初步概念： 1-1 某量的認識 1-2 某量的直接比較 1-3 使用以某量為刻度單位的工具
2.間接比較： 對無法直接比較的兩個同類量，透過複製一個媒介量，利用此媒介量與另一量進行直接比較，並把比較的結果推論成原兩量比較的結果(含量的保留概念、量的相等、大小的遞移律)。	2.某量的間接比較 2-1 某量的間接比較
3.個別單位： 從等量的合成、複製的結果來描述一個量，並進行比較。能利用普遍單位之描述，對兩個同類量進行加、減、乘、除運作。認識各類量的基本普遍單位(如長度的米、厘米、千米；容量的公升、分公升、毫公升、千公升；重量的克、公斤、千公斤；面積的平方厘米、平方米、百平方米、千平方米；體積的立方厘米、立方米；角度的度)。	2-2 某量的個別單位比較與實測 3.某量的普遍單位比較 3-1 認識某普遍單位量的意義 3-2 以某普遍單位量為單位，進行實測及估測的活動
4.單位化聚： 將用小單位描述的量，改用大單位來描述，這種運算叫做『聚』。如：12345公尺可聚成12公里345公尺或12.345公里。反之則叫做『化』。如：1.65公斤可化成1650公克。	4.某量的測量單位制度概念 4-1 認識甲普遍單位量及乙普遍單位量的關係 4-2 甲普遍單位量及乙普遍單位量的化聚
公式化的概念：(只有面積和體積有此階段) 只有面積和體積兩量有此層次，此層次的要點是用公式來描述一個特定的幾何形體的體積和面積量。此層次包括3個階段，以面積為例說明如下： (1)利用乘法簡化點算的過程(一個長方形被多少個小正方單位所覆蓋?)。 (2)將平行四邊形、三角形、梯形切割重組成長方形而求算其面積(此處包含進一步將多邊形切割成幾個三角形，求算這些三角形面積後，算出其和)。 (3)將在(1)和(2)中求算面積的過程中，以公式描述並將這些公式整合成一個概念。(在此整合概念中，梯形是一般形，三角形可視為上底為0的梯形，而長方形、平行四邊形則可視為上下底等長的梯形，在這種看法下，上述各形的公式，其實是互通的)。	5.某量的測量公式概念： 5-1 透過對某平面圖形或立體的分解綜合，認識該平面圖形或立體上某量的求法 5-2 某平面圖形或立體上某量求法公式的應用

有關82年版架構理念的詳細說明可以參看「國小數學教材分析---重量和容量」(鍾靜、朱建正、林素微、魯炳寰，民89)的緒論部份。從這兩份感官量教材架構條文的對照，我們不難發現有相當一致的發展階段；不但對「直接比較」、

「間接比較」、「個別單位」、「普遍單位」的前置、銜接及後續發展都有較豐富的歷程，而且強調要在「普遍單位」分別發展後，再進行「單位化聚」，其中普遍單位的教學要突顯個別單位的意義，普遍單位是一種特別的個別單位，通常是以公制系統，例如：幾公分是幾個1公分、幾公升是幾個1公升，來進行教學。整體而言，量與實測教材的發展階段是相容的，可以互相補充，同時閱讀，幫助我們對內容有更精確的掌握。

現在，再將感官量有關的能力指標配上教材架構，我們較能掌握這些能力指標的定位和內涵。

能力指標		教材架構	
		九年一貫	八十二年版
一、二年級	N-1-09 能透過感官活動感覺一個量，並能對兩個同類量作直接比較，進而對一個量作複製活動（量：長度、容量、重量、角度、面積、體積）。	1.初步概念	1-1 某量的認識 1-2 某量的直接比較
	N-1-10 能使用生活中常用的測量工具（刻度尺的方式，即不涉及其結構），以一階普遍單位描述一個量（量：長度、容量、重量、角度、面積、體積；普遍單位：米、厘米、分公升、千克、克、度、平方厘米、立方厘米）。	1.初步概念 3.個別單位	1-3 使用以某量為刻度單位的工具 2-2 某量的個別單位比較與實測 3-1 認識某普遍單位的意義 3-2 以某普遍量為單位，進行實測及估測的活動
四、五年級	N-2-09 能在保留概念形成後，進行兩個同類量的間接比較（利用完整複製）及個別單位的比較（利用等量合成的複製）（量：長度、容量、重量、角度、面積、體積）。	2.間接比較 3.個別單位	2-1 某量的間接比較 2-2 某量的個別單位比較與實測
	N-2-10 能認識各種量的普遍單位，應用在生活中的實測和估測活動，並培養出量感（普遍單位：千米、毫米、公升、毫公升、時、分、秒）。	3.個別單位	3-1 認識某普遍單位的意義 3-2 以某普遍量為單位，進行實測及估測的活動
	N-2-11 能理解生活中，各種量的測量工具上刻度間的結構，進而對以同單位表達的量作形式計算。		
	N-2-12 能知道同類量中二階單位之間的關係及使用二階單位作描述，並利用此關係作整數化聚。	4.單位化聚	4-1 認識甲普遍單位量及乙普遍單位量的關係 4-2 甲普遍單位量及乙普遍單位量的化聚
	N-2-13 能以個別單位的方式（利用等物合成複製後）描述面積、體積，並能用乘法簡化長方形面積、長方形體積之點算。	5.公式化概念 (1)利用乘法簡化點算過程	5-1 透過對某平面圖形或立體的綜合分析，認識該平面圖形或立體上某量的求法

六、七年級	N-3-09 能理解同類量中不同單位間的關係，並作化聚活動（可以有分數、小數）。	4.單位化聚	4-2 甲普遍單位量及乙普遍單位量的化聚
	N-3-10 認識生活中使用的大的測量單位，如：千公斤（公噸）、千公升（公秉）、百平方米（公畝）、千平方米（公頃）。	3.個別單位	3-1 認識某普遍單位的意義 3-2 以某普遍量為單位，進行實測及估測的活動
	N-3-11 能以切割後，重新拼湊組合的方式（幾何部份要配合），將平行四邊形、三角形和梯形，變形成長方形而計算其面積，形成面積之計算公式。	5.公式化概念 (2)變形為長方形，求算面積 (3)以公式描述	5-2 某平面圖形或立體上某量求法公式的應用
	N-3-12 能對非直線形的平面區域，選定適當的正方形單位，估計其概略面積，並檢驗圓面積公式（ πr^2 ， r 為圓的半徑）	5.公式化概念 (1)利用乘法簡化點算過程	5-1 透過對某平面圖形或立體的綜合分析，認識該平面圖形或立體上某量的求法
	N-3-13 能理解容量和容積（體積）之間的關係，並利用此關係計算大容器（如：游泳池）之容量。		
	N-3-14 能將各種柱體，變形成長方柱而計算其體積，形成柱體之體積計算公式。	5.公式化概念 (2)變形為長方體，求算體積 (3)以公式描述	5-2 某平面圖形或立體上某量求法公式的應用

這些能力指標分別在不同的年級達成，其中 N-3-13，N-3-14 在七年級（國一）能達到即可。因為，這六種感官量的特性不同，例如：長度、角度是一維的量，面積是二維的量，體積、容量是三維的量，其中角度、面積和體積都和“形”的教材有關，這五種量都可透過視覺來掌握；而重量則是透過肌肉覺來掌握。因此兒童對此六種量概念的發展進度不是一致的，是有前後的。而且這些感官量在進入間接比較之前，學童對該量的保留概念發展應大致形成才能進行活動；一般而言，容量、體積的保留概念發展會比長度的保留概念發展慢二年左右。所以，在教材的安排上，每種量的認識及直接比較（詳能力指標 N-1-09）的出現就有前後，長度在一年級，重量、容量和面積在二年級、體積在三年級；這就是垂直層次的意義。至於這些量的間接比較（詳能力指標 N-2-09），長度在一年級（可以放在下學期），面積在三年級，重量、容量和體積在四年級。而角度涉及圖形角、張開角和旋轉角，在三年級先教角度的認識和張開角的直接比較和間接比較，而旋轉角會延至四年級。因此，能力指標 N-2-09 中長度和面積的間接比較不是從四年級才開始，而是指所有感官量的間接比較在四、五年級完成。透過複製活動（涉及低層次保留概念，完整的複製）或切割重組（涉及高層次保留概念）後，進行間接比較就可能形式利用個別單位（等量合成的複製）來比較的策略，讓學生有利用小物件（個別單位）來描述大物件的經驗。因此，能力指標 N-2-09 中各種量都包含有保留概念、間接比較、以及個別單位比較與實測的活動，這就是水平層次的意義。有關個別單位（含普遍單位）階段的發展，與能力指標 N-1-10、N-2-10 及 N-3-10 有關，它們的區分是學童較容易掌控其意義的量愈早觸及，再

逐漸發展到大量。至於同類量中不同普遍單位間的等量關係，則需在該兩個普遍單位，例如：公分、公尺，學童都能分別掌握後，才能進行。要俟學童有了等量關係，再進行化聚活動才有意義。因為學童要到六年級才有較完備的分數、小數概念，所以化聚活動也分成二階段：整數化聚（詳能力指標 N-2-12）和分、小數化聚（詳能力指標 N-3-09）。

在感官量中，只有面積和體積需發展到公式概念階段。對兒童而言，要有意義的知道公式背後的含義，所以與個別單位有關的拼排、堆疊，或切割活動是很重要的。藉由乘法公式掌握普遍單位（如：1 平方公分、1 平方公尺，特別的個別單位）的總數量，來描述長方形的面積或長方體的體積（詳能力指標 N-2-13）。再視長方形、長方體為基本型，讓學童將各類平面圖形、柱體透過切割重組，或拼湊組成基本型後，而形成該形體之面積、體積公式（詳能力指標 N-3-11、N-3-14）。至於圓面積的求算，可利用小方格為個別單位的想法，估計圓面積的可能值，利用的小方格愈小其估計值愈精準。圓面積公式（ πr^2 ， r 為半徑）的形成，除透過切割重組活動變形為長方形或平行四邊形外，宜需配合學童對無理數 π 的掌握，通常在小學 π 是從 3 倍開始。用小方格的估算面積和利用圓面積公式求算面積，這二者是可以互相檢驗的（詳能力指標 N-3-12）。

雖然能力指標可以整理成下表和各量的關係：

能力指標	長度	重量	容量	面積	體積	角度
N-01-09	✓	✓	✓	✓	✓	✓
N-01-10	✓	✓	✓	✓	✓	✓
N-02-09	✓	✓	✓	✓	✓	✓
N-02-10	✓		✓			
N-02-11	✓	✓	✓			✓
N-02-12	✓	✓	✓	✓	✓	✓
N-02-13				✓	✓	
N-03-09	✓	✓	✓	✓	✓	
N-03-10		✓	✓	✓		
N-03-11				✓	✓	
N-03-12				✓		
N-03-13			✓		✓	
N-03-14					✓	

但只從這樣來分析是很表面的，必需如前面所述去瞭解該能力指標在教材架構中的定位，以及其包含的垂直層次和水平層次。

二、工具量部份

工具量的代表，在小學階段就是時間教材。時間對學童而言，是一種看不見、摸不到的量，它必需透過工具——時鐘的測量才能掌握日、時、分、秒，再配合日曆或月曆才能指出年、月、日。因為，時間不是在實體上存在的量，因此時間的教材脈絡就不宜從量感的掌握入手，而是從工具（如：時鐘、月曆）的報讀開始，再配合生活事件，和鐘面現象、時刻記錄產生關連，來建立量感。當分別有了時、分、秒的量感後，才藉同一事件，不同單位的計數活動，讓相鄰的二個單位量間建立等量關係。學童具備時間（量）、時刻概念後，才有能力處理時間（量）的運算，以及時刻和時間（量）的問題。因此，工具量的教材架構，可以分成四個

層次如下：

「量與實測---時間」的教材架構	
層次區分	架構理念(82年版，註200)
層次一、比對刻度觀點	以工具上的不同刻度作為不同情境的指標之後。
層次二、建立量感階段	再以比較紀錄上的差異引入刻度上的變化概念，從而建立所謂的相對量感。
層次三、建立等量感階段	再由等相對量感的不同階刻度的不同變化，引出及應用不同階刻度間的關係。
層次四、計算與應用	

進一步的說明及主張可以參看「國小數學教材分析---時間和速度」（鍾靜、魯炳寰、林素微，民90）。

在九年一貫課程暫行綱要中，有關時間教材的能力指標只有7個（教育部，民90），並未提出發展階段的基本想法。但可利用前述八十二年版數學課程標準（教育部，民82）提出的工具量的教材架構來認識這些能力指標的定位。

能力指標(時間教材)		教材架構 八十二年版
一、二、三年級	N-1-11 能區分幾個事件發生的先後順序。	層次一、比對刻度觀點
	N-1-12 能報讀鐘面上的幾點、幾點半以及數字鐘上的時刻，以便溝通。	層次一、比對刻度觀點
	N-1-13 能透過查月曆報讀幾月幾日星期幾，並知道一年有12個月及各月之日數。	層次一、比對刻度觀點
四、五年級	N-2-08 能報讀（鐘面上的）時刻以及點算兩時刻間的時間；能理解24時制並應用在生活中。	層次一、比對刻度觀點 層次二、建立量感階段
	N-2-10 能認識各種量的普遍單位，應用在生活中的實測和估測活動，並培養出量感（普遍單位：千米、毫米、公升、毫公升、時、分、秒）。	層次二、建立量感階段
	N-2-12 能知道同類量中二階單位之間的關係及使用二階單位作描述，並利用此關係作整數化聚。	層次三、建立等量感階段
六、七年級	N-3-09 能理解同類量中不同單位間的關係，並作化聚活動（可以有分數、小數）。	層次三、建立等量感階段
		層次四、計算與應用

能力指標 N-1-13 在層次一階段，所以利用查閱月曆，察覺不論今年、明年等只會有1月、2月、...、12月，因此一年有12個月，而且各月的日數是從月曆上點數日數，瞭解現象即可。在學童沒有“日”的量感之前，教學一星期有7天是沒有意義的；而且週期概念對兒童而言是很困難的。比較不明確的能力指標是N-2-08，它的垂直層次包括比對刻度觀點和建立量感階段。若在比對刻度觀點下進行鐘面上幾點幾分的報讀、利用月曆點數某時區の日數、利用時間線段圖的表徵來認識名稱日是從00:00到24:00，上午有12小時、下午也有12小時，一

天共有 24 小時的二十四時制，是可以在三年級前達成的。若在建立量感階段，報讀鐘面幾點幾分皆涉及“時、分”概念、二十四時制涉及“日、時”概念，則需在四年級以後教學。所以能力指標的達成，有一些前置活動應該可以提早讓學童有接觸的經驗。

總之，量與實測教材的教學應該培養學童量感，真正理解普遍單位的意義，以及測量工具和量感間的關連。而且，感官量和工具量特性不同，其教材架構和發展脈絡自然不同；教師宜有深度的了解，才能進行適當的教學活動。尤其，在九年一貫課程理念下，強調數學與生活的關連，此類教材經常被教師拿來設計和應用。如果只是表象上融入生活情境，未顧及學生的思考型態和學習方式，文首論述之教學案例的故事仍會重演。至於，速率教材的能力指標已移至“數與量”主題的“關係”部份，不是本文的內容，因此在此不予介紹。

三、參考文獻

- 教育部（民 82）國民小學課程標準。台北：作者。
- 教育部（民 90）國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北：作者。
- 鍾 靜（民 83）國民小學數學新課程低年級時間教材設計。國民小學數學科新課程概說（低年級）。板橋：教師研習會。頁 135-145。
- 鍾 靜（民 87）時間教材和速率教材的設計。國民小學數學科新課程概說（高年級）~協助兒童認知發展的數學課程。板橋：教師研習會。頁 230-256。
- 鍾 靜、朱建正、林素微、魯炳寰（民 89）。國小數學教材分析—重量和容量。教育部台灣省國民學校教師研習會出版。
- 鍾 靜、魯炳寰、林素微（民 90）。國小數學教材分析—時間和速度。教育部台灣省國民學校教師研習會出版。