

小數符號的意義

梁惠珍 屏東縣南華國小

劉曼麗 屏東師範學院數理教育研究所

壹、設計想法

根據一些評量報告和研究結果，發現學生在小數的學習上困難很多（吳昭容，1996；陳文利，2001；劉曼麗，1998；Hiebert & Wearne，1985；1988）；尤其是當學生對小數符號的意義了解不夠，則容易產生許多的迷思概念（劉曼麗，2002）。筆者在參與台灣地區國小學童小數概念研究（II）—國小學童「小數與小數運算」概念之調查研究（國科會研究編號：NSC90-2521-S-153-003）的過程中，亦從全國學生的表現，發現學生大都只從數字表面的形式來解讀小數符號的意義，鮮少從等分割的概念來著手，以致造成許多錯誤。此外，在國小的小數教材中，用來幫助學生建立小數符號意義的具體物，大都以丹尼積木為主，而這樣的學習情境，易使學生對小數符號意義產生單一表徵化的現象，而產生一些迷思概念（陳文利，2001；劉曼麗，1998；2002）。可見，許多小數迷思概念的成因，是來自於學生對於小數符號意義的掌握不夠徹底。然而，小數符號意義是學習小數概念及其運算的基礎，教師應協助學生建立小數符號意義的正確概念，才能使學生學好小數概念及其運算。

Bell（1992）提出數學教師在教學時，如能針對學生迷思的想法，提供診斷教學策略，將有效地根除學生的迷思想法。Onslow（1986）提到診斷教學的原則包括：確認學生有系統的錯誤、針對這些錯誤進行教學、調整學童的概念。Onslow認為診斷教學進行時應包含下列三個步驟：

1. 開放性的活動：透過具體的解題活動，引出學生的錯誤，並為製造認知衝突做準備。
2. 有認知衝突的討論：在解題活動中，透過小組或全班共同討論，經由不同學生對問題的意見交換，產生不同的認知衝突。
3. 類似的練習題：在開放性的活動和認知衝突的討論後，學生會對問題有正確解題的反應，但這只是短暫的，所以須再給予一些相似的練習題，鞏固學生的概念。

故筆者希望採用診斷教學的三步驟，針對小數符號的意義，透過多元表徵的情境，進行一些等分割的具體活動，來幫助學生更深入地了解小數符號意義。

貳、設計內涵

一、學生能力分析

(一) 小數教材分析

本活動設計的對象為國小四年級學生，根據八十二年版課程標準內容可知，國小的小數概念係由三年級開始引入一位小數的認識，透過 $\frac{1}{10}$ 的聯絡，來瞭解「0.1」的意義；四年級則學習二位小數的概念，透過 $\frac{1}{100}$ 的聯絡，來瞭解「0.01」的意義。

目前國小數學課程一、二、四年級已開始進入了九年一貫課程（九十一學年度）。各家版本在編寫九年一貫課程的小數教材內容上，雖進度不太相同，但皆是依據數學能力指標所編寫的。第一階段中，有關小數的學習內容先是由1被明確十等分的情境中，介紹一位小數，約為三年級的課程；第二階段中，主要以認識二位小數為主，並包括二位小數的加減法及簡單的乘法內容，此為四、五年級的課程（劉曼麗，2002）。

由上可知，國小四年級學生應已學習過一位小數符號的意義，也認識到一位小數與 $\frac{1}{10}$ 的關係。至於二位小數符號的意義，及與 $\frac{1}{100}$ 的關係，則因各家版本教材編排的順序不一，而有學習先後的差異。

(二) 小數符號意義的迷思概念

小數符號的意義可透過分數的等分割觀點來了解。劉曼麗（2002）透過圖像表徵間的等分割，針對台灣地區全國國小學童進行小數概念調查研究的結果中發現，學生以在離散量的單位小數內容物為單一個物的表現最好，而在離散量的單位小數內容物為多個個物的表現最差，主要是因為學生將 a.b 視為 a 個和 b 小個，而這樣的解題策略在「內單」的情境雖能成功解題，但在「內多」的情境則可看出學生幾乎只從 a.b 的表面數字做猜答，而非是從等分割的觀點來解讀。可見，學生對於小數符號的意義是一知半解的。

二、教學目標

本活動設計的目的在於彌補教材中，小數表徵太過單一的缺點，希望在提供多元表徵的具體活動下，能加強學生對於小數符號意義的了解，而在學生的能力分析中發現，如能針對離散量情境，設計「內單」及「內多」的情境，可加深學生對於等分割概念的認識。故本活動主要的教學目標為：

1. 透過離散量表徵的具體活動，認識小數符號的意義。

- 藉由診斷教學三步驟，於教學進行時，診斷學生在小數符號意義的迷思概念，並透過師生間的質疑辨證及操作具體物產生認知衝突，最後由教師澄清小數符號意義，來幫助學生建立正確概念。

三、對應的能力指標

九年一貫課程中，有關「小數」學習的能力指標為：

- N-1-8：在一個整體 1 被明確十等分的具體情境中（包含離散量、連續量），能以一位小數描述其中的幾份，並能進行一位小數的合成、分解、比較活動（和及被減數 <1 ）。
- N-2-7：能以二位小數描述具體的量，並解決二位小數的合成、分解、比較及簡單整數倍問題。

本活動設計的內容，主要是在離散量表徵的操作下，讓學生體驗一、二位小數的十、百等分割性質，其教學過程可培養學生具有能力指標 N-1-8 中的「1 被明確十等分的離散量情境中」及 N-2-7 中的「以二位小數描述具體的量」的能力。

四、設計架構

本活動設計的架構乃是依據診斷教學三步驟，透過離散量表徵的具體活動，以教師先呈現教學問題，將學生對於一、二位小數符號意義的迷思概念（忽略離散量情境單位小數的內容物個數為單一或多個，而將 a.b 視為 a 個.b 小個）診斷出來，並以師生間的討論製造認知衝突，然後由教師講解等分割的概念，讓學生體驗十、百等分割的意義，並提供一些類似的練習題，鞏固學生的概念。活動設計的架構如下圖 1：

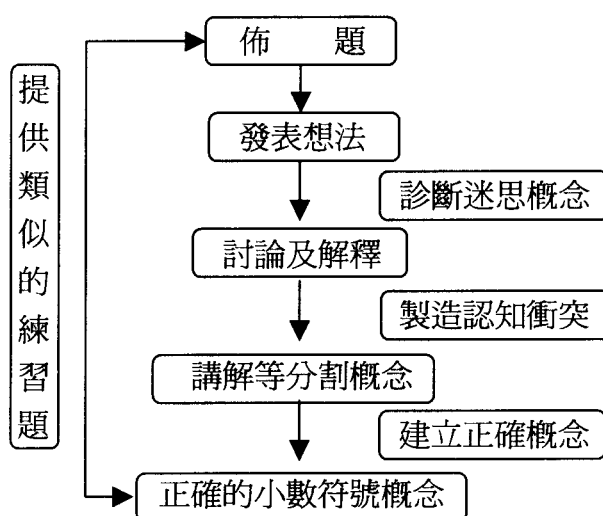


圖 1 活動設計架構

參、教學設計

一、活動目標

為達到教學目標，本活動設計的活動目標如下：

1. 認識一位小數符號的意義。
 - 1-1 在離散量情境的單位小數內容物為單一個物下，描述一位小數的量。
 - 1-2 在離散量情境的單位小數內容物為多個個物下，描述一位小數的量。
2. 認識二位小數符號。
 - 2-1 在離散量情境的單位小數內容物為單一個物下，描述二位小數的量。
 - 2-2 在離散量情境的單位小數內容物為多個個物下，描述二位小數的量。

二、教學年級

本活動適用的教學年級為國小四年級學生。

三、教學節數

本活動所需的教學時數為一節課。

四、實施方式

本活動實施的方式可在學生認識 0.1 和 $\frac{1}{10}$ ， 0.01 和 $\frac{1}{100}$ 的關係後直接進行，以加深學生了解小數符號的意義；也可斟酌將活動分散於相關的小數課堂中，以加強學生對於小數符號意義的認識；亦可作為補救教學之用，重新建立學生對小數符號意義的概念。

五、活動流程

本活動是依據設計架構及活動目標而設計，透過學生熟悉的離散量情境來佈題，引起動機。茲將各活動的佈題情境、問題、迷思概念及認知衝突的引導等內容說明如下表 1：

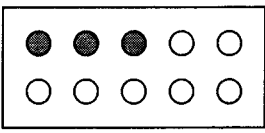
表 1 活動內容說明

活動單元	1-1	1-2	2-1	2-2
佈題情境 (內容物個數)	10 個小貼紙	20 個小貼紙	100 支吸管	300 支小吸管 200 個果凍
問題	0.3 張貼紙	①0.3 張貼紙 ②4.3 張貼紙	0.04 包吸管	①0.04 包吸管 ②0.04 盒果凍 ③7.04 盒果凍
可能產生的 迷思概念	x	①3 個小貼紙 ②4 張又 3 個 小貼紙	x	①4 支小吸管 ②4 個果凍 ③7 盒又 4 個 果凍
認知衝突的引導	x	與活動 1-1 的 0.3 張貼紙做 比較。	x	與活動 2-1 的 0.04 包吸管做 比較。

本活動的教學流程示例如下：

(一) 活動 1-1

活動目標：在離散量情境的單位小數內容物為單一個物下，描述一位小數的量。

師生互動歷程與學生解法	診斷教學
T：之前，我們看到的小數，都是使用方格，或百格板來表示。今天，我們要用不一樣的東西來表示。現在，這裡有一張貼紙，裡面有幾個？ S：10 個。 T：一張貼紙裡面有 10 個小貼紙，那 0.3 張貼紙是多少？  S6：拿裡面的 3 個。 T：0.3 是拿其中的 3 個，那 2.3 張貼紙呢？ S12：拿 2 張貼紙，再拿一張貼紙，取其中的 3 份。 T：為什麼要拿其中的 3 個？為什麼不拿一張。 S12：因為那個代表 0.3 張。 T：為什麼 3 個就是 0.3 張？ S3：10 份裡面的 3 份。 S12：一張貼紙裡面有 10 個，分成 10 份，所以其中的 3 份就是有 3 個，所以拿 3 個。 T：喔！2.3 的 2 是表示 2 張貼紙，0.3 是表示 10 份裡面的 3 份，所以只能拿 3 個。	佈題 發表想法 提供類似的練習題 討論與解釋 具有等分割概念 建立正確概念

註：T 表示教師，S 表示全體學生，S 後面的編號表示個別學生。

師生互動歷程與學生解法	診斷教學
<p>T：那剛才一包裡面是 10 個，0.3 包是 10 個裡面取出 3 個，如果用分數表示的話，是多少？</p> <p>S：十分之三。</p> <div data-bbox="268 415 989 659" style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>1 包有 20 個，0.3 包是 20 個裡面取 3 個 → $\frac{3}{20}$</p> <p>1 包有 10 個，0.3 包是 10 個裡面取 3 個 → $\frac{3}{10}$</p> </div> <p>T：所以 0.3 包用分數表示的話，可以是二十分之三 ($\frac{3}{20}$) 和十分之三 ($\frac{3}{10}$) 囉？</p> <p>S6：可是二十分之三 ($\frac{3}{20}$) 和十分之三 ($\frac{3}{10}$) 不一樣啊。</p> <p>T：S2，你覺得 $\frac{3}{20}$ 和 $\frac{3}{10}$ 一樣嗎？</p> <p>S2：...不太一樣。</p> <div data-bbox="722 1035 1094 1159" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>$\frac{3}{10}$ → 分成 10 份，取 3 份</p> </div> <p>T：那我們來看一下，什麼是 0.3？</p> <p>S：10 份裡面的 3 份。</p> <p>T：10 份裡面的 3 份，有人反對嗎？所以 0.3 是十分之.....</p> <p>S：十分之三。</p> <p>T：十分之三，就是要把全部分成幾份？</p> <p>S：10 份。</p> <p>T：分成 10 份之後，要從裡面取幾份出來？</p> <p>S：3 份。</p> <p>T：這張大貼紙裡面有 20 個小貼紙，把它分成 10 份以後，每一份是多少？</p> <p>S：2 個。</p> <p>T：每 1 份有 2 個小貼紙，要取出 3 份，所以會有幾個小貼紙？</p> <p>S：6 個。</p> <div data-bbox="832 1689 1099 1911" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> </div> <p>T：這樣是代表幾分之幾？</p> <p>S：二十分之六。</p> <p>T：但是如果是把 2 個看成一組，一共是幾組？</p> <p>S：10 組。</p>	<p>製造認知衝突</p> <p>講解等分割概念</p> <p>討論及解釋</p>

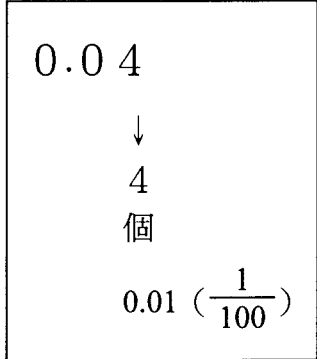
師生互動歷程與學生解法	診斷教學
<p>T：那 6 個的話，是幾組？ S：3 組。 T：10 組裡面，取了 3 組，是代表幾分之幾？ S：十分之三。 T：從 20 份裡面取 6 個，是 $\frac{6}{20}$，那如果是 2 個 1 組，可以是 $\frac{3}{10}$，也就是 $\frac{6}{20}$ 和 $\frac{3}{10}$ 是怎樣？ S：一樣多。 T：一位小數，小數點後面的第一位，就是要看有幾個 0.1，0.1 就是 10 等份取 1 份，那有沒有規定 10 等份裡面的 1 份只能有 1 個？ S：沒有。</p>	<p>建立正確概念</p>
<p>T：再來的是，老師要買 4.3 張這樣的貼紙，老師要怎麼買？ S5：..... T：我們全班來幫 S5 想一下，這個 4.3 張貼紙的 4 代表什麼？ S：4 張貼紙。 T：4 張完整的這種貼紙？還是 4 個小貼紙？ S：4 張完整的。 T：S5，4.3 張貼紙，要拿 4 張完整的貼紙，那後面的 3 要怎麼拿？ S5：...拿 3 個。 T：為什麼要拿 3 個。 S5：因為... T：4.3 的 4 是表示 4 個 1，那 3 也是指 3 個 1 嗎？還是什麼？ S5：3 個 0.1。 T：0.1 也就是十分之一，那 3 個 0.1 是多少？ S5：0.3。 T：那剛才說這一張貼紙的 0.3，有幾個貼紙？ S5：6 個。 T：所以 4.3 張貼只要怎麼拿？ S5：4 張，還要 6 個。 T：現在這一張貼紙裡面有 20 個小貼紙，不是 10 個喔。所以把它分成 10 等份之後，它的 1 等份有幾個？ S10：2 個。 T：那 0.3 張，要拿幾個出來？ S6：要拿 3 乘 2 個。 T：1 等份裡面有 2 個貼紙，那 3 等份就是要拿 6 個。</p>	<p>提供類似的練習題 討論及解釋 診斷迷思概念 討論及解釋 製造認知衝突 講解等分割概念 建立正確概念</p>

$ \begin{array}{r} 4.3 \\ \downarrow \downarrow \\ 4 \quad 3 \\ \text{個} \quad \text{個} \\ 1 \quad 0.1 \\ \left(\frac{1}{10}\right) \end{array} $
--

(三) 活動 2-1

活動目標：在離散量情境的單位小數內容物為單一個物下，描述二位小數的量。

師生互動歷程與學生解法	診斷教學
<p>T：這是 1 包吸管，你們猜猜看裡面有幾枝？</p> <p>S7：100 枝。</p> <p>T：哇！真聰明，恭喜你答對了，這裡面真的是 100 枝。那請問你們，0.04 包吸管是不是把 4 包放上去？</p> <p>S：不是。</p> <p>T：那是整包囉？</p> <p>S：不是。</p> <p>T：那怎麼辦？</p> <p>S：拿 4 枝吸管出來。</p> <p>T：S8，為什麼要拿 4 枝。</p> <p>S8：因為 0.04。</p> <p>T：0.04 的 4 代表什麼？</p> <p>S8：100 份裡面的 4 份。</p> <p>T：那是幾枝吸管？</p> <p>S8：4 枝。</p> <p>T：拿 4 枝吸管出來，代表 0.04，那 0.04 的 4 代表 4 個什麼？</p> <p>S：4 個 0.01。</p> <p>T：那 0.01 又是多少？</p> <p>S：一百分之一 ($\frac{1}{100}$)。</p> <p>T：$\frac{1}{100}$，所以是要把它分成 100 份，那其中的 1 份是幾枝？</p> <p>S：1 枝。</p> <p>T：0.04 是 4 個 0.01，也就是 4 個 $\frac{1}{100}$，那就要取幾份？</p> <p>S：4 份。</p> <p>T：所以取幾枝？</p> <p>S：4 枝。</p> <p>T：0.04 是 4 個 0.01，也就是要從 100 等份中取出 4 等份，1 份是 1 枝，4 份就會有 4 枝。所以 0.04 包就是有 4 枝吸管。</p>	<p>診斷教學</p> <p>佈題</p> <p>發表想法</p> <p>討論及解釋</p> <p>講解等分割概念</p> <p>建立正確概念</p>



師生互動歷程與學生解法	診斷教學
<p>T：那剛才拿出的 4 枝吸管會變成幾枝小吸管？ S：12 枝。 T：0.04 是 4 個 0.01，也是 4 個 $\frac{1}{100}$，所以要取一百分之多少？ S：一百分之四 ($\frac{4}{100}$)。 T：現在一共有幾枝小吸管？ S：300 枝。 T：要分成 100 等份，1 等份是幾枝？ S：3 枝。 T：那 0.04 包是要取 100 等份裡面的幾份？ S6：3 乘 4。取 12 枝。 T：那是取幾份？ S：4 份。 T：取 4 份，每份有 3 枝，那就是要取幾枝？ S：12 枝。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>300 支 → 100 等份 3 支 → 1 等份 12 支 → 4 等份</p> </div>	<p>講解等分割概念</p> <p>建立正確概念</p>
<p>T：這裡有一盒蒟蒻果凍，裡面有 200 個小果凍。那如果要給 S6，0.04 盒果凍，要怎麼拿？ S11：8 個。 T：還有沒有別的答案？ S：(沒回應) T：為什麼是 8 個？ S11：200 除以 2，就是說一份有 2 個，也就是 0.01 裡面有 2 個，所以有 8 個。 T：為什麼 200 要除以 2？ S6：我知道！因為百分位，所以要把 200 個平分成 100 份。 T：200 個，把它分成 100 等份，所以一份裡面有幾個？ S：2 個。 T：那 0.04 要取幾份？ S：4 份。 T：那是幾個？ S：8 個。</p>	<p>提供類似的練習題</p> <p>發表想法</p> <p>討論及解釋</p> <p>講解百等分割概念</p> <p>建立正確概念</p>
<p>T：那如果要買 7.04 盒果凍，要怎麼買？ S13：先拿 7 盒，再拿... S6：8 個。 T：所以老闆會拿 7 盒果凍之後，再拿 8 個給我。</p>	<p>提供類似的練習題</p>

六、評量方式

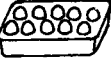
教學活動進行後，可透過筆試和訪談來評量，提供的試題（引自劉曼麗 NSC90-2521-S-153-003 的研究工具）如下：

試題一

欲測概念：一位小數符號意義

表徵情境：離散量情境的單位小數內容物單一

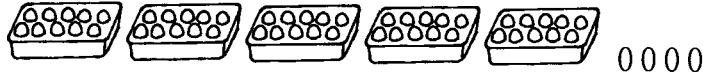
題目：

() 一盒雞蛋  有 10 顆，請問 5.4 盒雞蛋要怎樣表示？

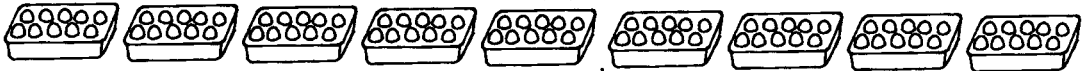
① 將一盒雞蛋分成 5 等份，取其中的 4 份



② 取 5 盒雞蛋和 4 顆雞蛋



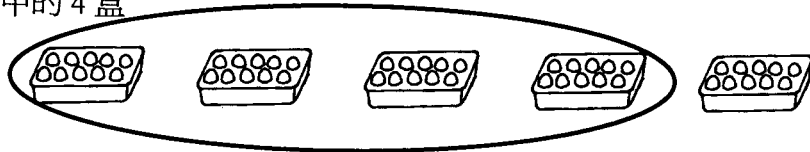
③ 取 5 盒雞蛋，點上小數點，再取 4 盒雞蛋



④ 5 顆雞蛋，取其中的 4 顆



⑤ 5 盒雞蛋，取其中的 4 盒



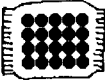
⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：

試題二

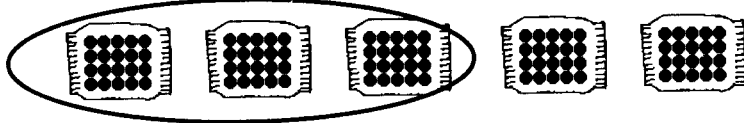
欲測概念：一位小數符號意義

表徵情境：離散量情境的單位小數內容物多個

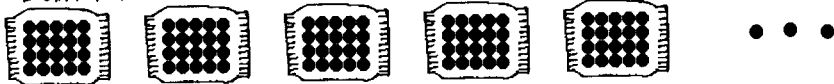
題目：

() 一袋糖果  有 20 顆，請問 5.3 袋糖果要怎樣表示？

① 5 袋糖果，取其中的 3 袋



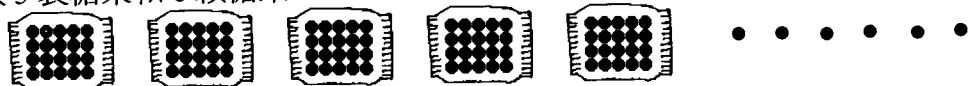
② 取 5 袋糖果和 3 顆糖果



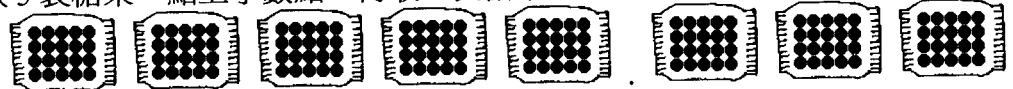
③ 5 顆糖果，取其中的 3 顆



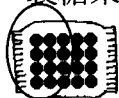
④ 取 5 袋糖果和 6 顆糖果



⑤ 取 5 袋糖果，點上小數點，再取 3 袋糖果



⑥ 將一袋糖果分成 5 份，取其中的 3 份



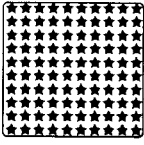
⑦ 以上都不對，我覺得應該畫成：

試題三

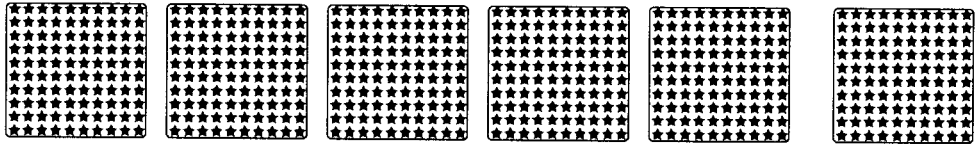
欲測概念：二位小數符號意義

表徵情境：離散量情境的單位小數內容物單一

題目：

3. () 一盒星星巧克力  有 100 顆，請問 5.01 盒巧克力要怎樣表示？

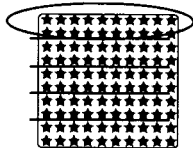
① 畫出 5 盒巧克力，點上小數點，再畫出 1 盒巧克力



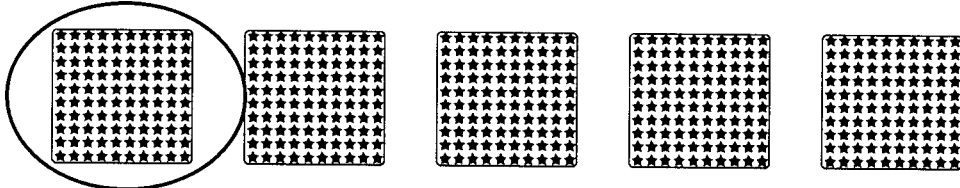
② 畫出 5 顆巧克力，取其中的 1 顆



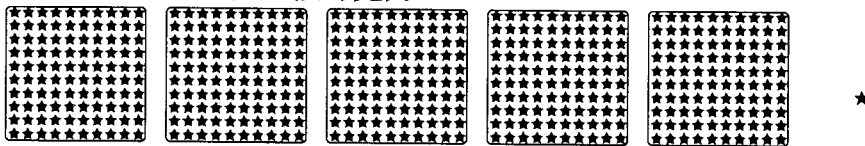
③ 將一盒巧克力分成 5 等份,取其中的一份



④ 畫出 5 盒巧克力，取其中的 1 盒



⑤ 畫出 5 盒巧克力和 1 顆巧克力



⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：

試題四

欲測概念：二位小數符號意義

表徵情境：離散量情境的單位小數內容物多個

題目：

() 一包巧克力  有 200 顆，請問 4.02 包要怎樣表示？

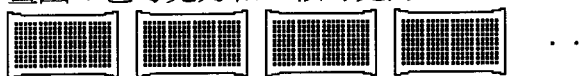
① 畫出 4 包巧克力和 4 顆巧克力



② 畫出 4 包巧克力，點上小數點，再畫出 2 包巧克力



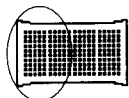
③ 畫出 4 包巧克力和 2 顆巧克力



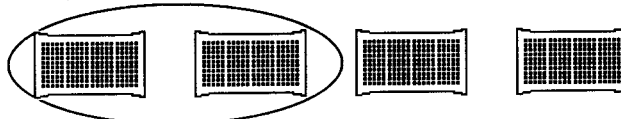
④ 畫出 4 顆巧克力，取其中的 2 顆



⑤ 將一包巧克力分成 4 份，取其中的 2 份。



⑥ 畫出 4 包巧克力，取其中的 2 包



⑦ 以上都不對，我覺得應該畫成：

肆、教學省思與改進

一、教學省思部分

1. 學生的上課表現：以往教材內容有關小數表徵的部分，在離散量（丹尼積木）的呈現上，其單位小數的內容物個數大都以單一為主，所以 a.b 幾乎都可被表徵為 a 個和 b 小個的情形。而這樣的學習經驗也使得學生在活動一、三均有較佳的表現。
2. 學生的錯誤：學生對於離散量情境的單位小數內容為多個個物，是非常陌生的。然而，透過這樣的活動，可發現學生對於小數符號的意義掌握並不透徹，所以學生會忽略單位小數的內容物個數，直覺認為 a.b 就是 a 個和 b 小個，而產生錯誤。
3. 診斷迷思部份：筆者在離散量的單位小數內容為多個個物情境下，當學生有出現將 a.b 視為 a 個和 b 小個的迷思想法時，都能成功地診斷出，並提問學生的想法，為製造認知衝突做準備。
4. 製造認知衝突部分：筆者大都是透過師生間的討論，先讓學生發表其理由，再試圖由學生的說明中，尋找不合理的部分，以產生學生的認知衝突。主要以口頭問話方式進行，如能改以讓學生操作具體物，可能會有較佳的效果。
5. 建立正確概念部分：筆者主要是透過單位小數的十、百等分割概念，並透過小數位值（0.1、0.01），來幫助學生建立小數符號意義的正確概念。
6. 學生的筆試表現：教學活動進行後，透過評量方式中所提供的試題，對學生進行學習成效的評量，發現八成以上的學生在內多的情境問題，不再存有 a.b 即是 a 個.b 小個的迷思概念。
7. 其他發現：在活動二中，透過具體物的操作結果，即使未學過等值分數概念，學生也能了解 $\frac{3}{10}$ 和 $\frac{6}{20}$ 所表示的量是相同。

二、教學改進部分

1. 在單位 1 的內容物個數為數百個以上的情境下，可同時探討一、二位小數符號的意義。如在內容物為 400 個的情境下，可同時探討單位小數 0.1 和 0.01 的內容物個數，讓學生感受 1、0.1 和 0.01 之間的關係。
2. 在認知衝突的引導部分，當學生出現錯誤的想法時，可要求其他學生表示其贊成或反對的理由，由同儕間對問題的意見交換，產生質疑辯證而製造多樣的認知衝突。