

# 面積與體積

譚寧君

## 壹、前言

面積與體積乃一需兼備幾何與測量概念的教材，其分別描述物件在二維、三維空間中所佔有的量，其測量活動設計除需具備測量概念發展程序，亦應兼具兒童由知覺空間轉化為表徵空間與概念空間的發展，故面積與體積的問題，使數學不斷發展，面積與體積的教材亦從國小、國中、高中乃至大學均佔有一席之地。

根據荷蘭數學家 van Hiele 兒童幾何思考模式的發展層次中，層次 0 為視覺期，即兒童以視覺方式知覺到物體的形狀，但同時也看到大小；形狀的描述即奠定層次 1 分析圖形的構成元素的基礎。大小的描述即是面積與體積概念的基礎，由於數學概念的形不成離不開數學語言的描述、操作與思維過程的記錄，而數學語言狹義的說指的是數學符號語言，而符號是抽象的；廣義的說，數學語言則是包括一切數量關係、空間描述等形式上的語言。在一般數學教科書裏普遍存有三種型態的數學語言，即(1)自然語言，包括一般口頭或文字通的自然語言，這是連結概念原理與生活經驗間經常使用的。(2)符號語言，這是為了記錄簡捷思考過程，提高思維效率，形成共識的標幟，提供相同專業族群有效率的溝通之用。(3)圖象語言，這是透過圖象的具體呈現，將形而上的抽象思維過程轉化成較具象化的視覺過程以達到溝通的目的。面積與體積的語言引入即是從自然語言出發，達到用數學語言溝通得共識，再透過測量單位的操作與記錄再以具體圖象語言表現之，最後達到抽象思維的符號表徵。

根據教育部公布之國小數學課程標準，面積與體積歸於「量與實測」領域中，其領域目標為：

- 一、能獲得長度、面積、體積、容量、角度、時間、速度、重量、貨幣等各種基本量的概念。
- 二、能瞭解各種量均具備可比較、保存、可分割、可併合等性質。
- 三、能瞭解各種量的普遍單位的意義，並用以進行實測及估測。
- 四、能瞭解各種量的測量單位間的關係及化聚。

五、能運用周長、面積、體積的公式。

其次，將此領域的課程設計，依兒童認知發展層次，將教材先後順序細分為五個階段：

一、某量的初步概念。二、某量的間接比較。三、某量的普遍單位比較。四、某量的測量單位制度概念。五、某量的測量公式概念。

實驗教材設計中，體積與面積的設計則是低年級部分先從生活經驗出發，分別與平面圖形與立體圖形概念整合，中年級部分則連結測量與圖形的關係，建立能用數學語言與普遍單位量溝通的共識，高年級則從操作活動經驗中察覺公式的意義。每學期期末則進行總結性評量，以檢驗學生的學習成效，茲將評量通過水準低、中、高年級分別設定為 90%、80%、70%。以下分別從面積與體積二方面分析實驗班學生總結性評量結果。

## 貳、面積部份

### 一、教材綱要設計

根據課程標準，各年級面積教材綱要內容如下：

二年級----(1)面積的認識 (2)面積的直接比較(3)以平方公分為單位，進行實測及估測的活動。

三年級----(1)面積的間接比較(2)面積的個別單位比較與實測。

四年級----(1)認識平方公分、平方公尺的意義(2)以平方公尺為單位，進行實測及估測的活動(3)認識平方公分及平方公尺的關係(4)平方公分及平方公尺的化聚(5)透過對長方形、正方形的分析綜合，認識長方形、正方形面積的求法(6)長方形、正方形面積求法公式的應用。

五年級----(1)透過對平行四邊形、三角形、梯形的分析綜合，認識平行四邊形、三角形(2)梯形面積的求法(3)平行四邊形、三角形、梯形面積求法公式的應用(4)透過對圓的分析綜合，認識圓面積的求法(5)圓面積求法公式的應用(6)認識圓周率的意義(7)以圓周率進行實測及估測的活動。

六年級----(1)透過對  $1/2$  圓、 $1/4$  圓等特殊扇形的分析綜合，認識  $1/2$  圓、 $1/4$  圓等(2)扇形面積的求法(3)認識公頃、公畝的意義(4)以公頃、公畝為單位，進行實測及估測的活動 (5) 認識公頃及公畝的關係。

### 二、實驗教材設計

自古以來求面積的問題使數學不斷發展，然而「面積」是什麼？面積如何描述呢？其實面積指的是某一封閉區域的大小，亦即表示對此一特定區域被數個單位量所覆蓋的程度，但由於描述區域乃屬於圖形的範疇，故一般人往往將重點放在圖形的辨認，或分解與合成，待形狀確認後即選用最抽象的型式——亦即不同的圖形用不同的公式計算以求解，忽略測量教

材的本質——量感的培養及測量概念的建立。實驗教材為整合圖形與測量概念，活動設計從具體的覆蓋活動到簡化覆蓋的過程，達到抽象關係瞭解。教材設計根據面積概念的發展應分成三階段（1）保留概念的形成（2）測量概念的建立（3）估測概念培養。V 代表冊別，u 代表單元別，a 代表活動冊別。例 V6/u11/a4 表示第六冊第十一單元第四活動。


### （一）保留概念

保留概念指的是當兒童面對物體的某種轉換，如位置的移動、方向的轉動、形狀的切割變形活動等，能瞭解其原有特質保留不變的認知能力，如同量的水不因容器的不同而產生數量的改變，面積的大小不因切割變形後有所改變。此部份概念的發展是持續不斷的成長歷程而非一蹴而成的。實驗教材中低年級面積教材著重在保留概念的形成，由於學生缺乏面積的語詞進行溝通，故此部分分別呈現於圖形與空間的領域中，先透過塗色活動掌握封閉區域(V1/u6/a5)，再經由拼湊活動，經驗圖形分解再合成後面積的不變性(V2/u6/a4)。

### （二）測量概念

中、高年級著重在測量概念的形成，透過直接比較活動，確定被比較的量，形成用面積的語言進行溝通的共識(V5/u8/a1)，其次，透過複製活動，進行面積的間接比較，或利用全等圖卡的覆蓋活動，描述被覆蓋區域，亦即是面積大小(V5/u8/a2-5)；教材設計根據面積測量概念包括：

#### 1. 基本面積概念-格子的點數

格子的點數是建立在整數概念的基礎上，第三冊透過平方公分板的轉換，學生能點數以一格為計數單位的數數活動，並能透過視覺，察覺兩個半格合起來是一格的事實(V3/u6/a6)。第九冊則引入較複雜的格子圖形，需進行單位量選擇的判斷，如 ，此表示在給定的平方單位格內點數單位面積的個數，若以一格為單位量，則需透過出入相補原理找出可能誤差最小的值，但若選擇適當單位量，如以三格為一個單位量，則透過視覺即可知覺到面積是單位量的一半，即是 1.5 格。根據此即能處理其他多邊形面積問題(V9/u4/a3)。

#### 2. 單位面積概念 - 覆蓋活動

面積的測量是透過各個不同單位量的覆蓋或拼湊而成，如一個長邊 6 公分寬邊 3 公分的長方形，可透過不同單位量以描述面積的大小，如用邊長 1 公分的正方形加以覆蓋，則長方形可用 18 個  $\square$  蓋滿，即表示長方形的面積是 18 個平方單位，若用 36 個  $\blacktriangle$  蓋滿，則表示正方形的面積含有 36 個單位，此時雖為同一長方形，但由於單位量的不同（一為  $\square$ ，一為  $\blacktriangle$ ）故其單位數亦有不同（一為 18 個，一為 36 個）。第六冊從描述單位量覆蓋

的結果出發(V6/u11/a1-3)，第七冊從製作的角度出發，透過單位面積的覆蓋製作一個封閉區域(V7/u5/a5)，第八冊則透過覆蓋經驗，察覺邊長與面積的關係，形成面積公式的初步概念，並會使用乘法，簡化長方形及正方形面積的求法(V8/u5/a2)。同時引入普遍單位量「一平方公分」與「一平方公尺」，進行面積的實測活動。(V7/U5/A5)

### 3. 直線測量面積概念

直線測量法 (straight line measuring) 與前述基本面積概念透過格子點數測量，單位面積概念透過單位面積的覆蓋、拼湊、比較與切割等活動以進行測量是完全不同的，直線測量已包括單位在數學上的相乘關係，此屬於較抽象的推理層次，基本面積與單位面積則只是在單位數的累加與單位量的比較，但一般所謂的面積公式如長方形面積等於長乘以寬，三角形面積等於底乘以高除以二等則屬於此抽象的範疇。故自第八冊才確認長方形面積公式的意義，並對長方形的兩邊加以命名(V8/u5/a1-a4)；第九冊則連結長方形與平行四邊形的圖形屬性關係，察覺任何平行四邊形均可切割拼湊成平行四邊形，並解決平行四邊形的面積問題(V9/u8/a1)；第十冊建立在平行四邊形面積公式意義的瞭解上，連結三角形、梯形、圓形並解決其面積問題(V10/u3/a1)。第十一冊從面積意義的瞭解，到與幾何概念的連結計算立體物的表面積(V11/u7/a1)；第十二冊為公式的應用，透過分數概念的瞭解，解決邊長是非整數的面積問題(V12/u7/a3)。

#### (三) 面積估測

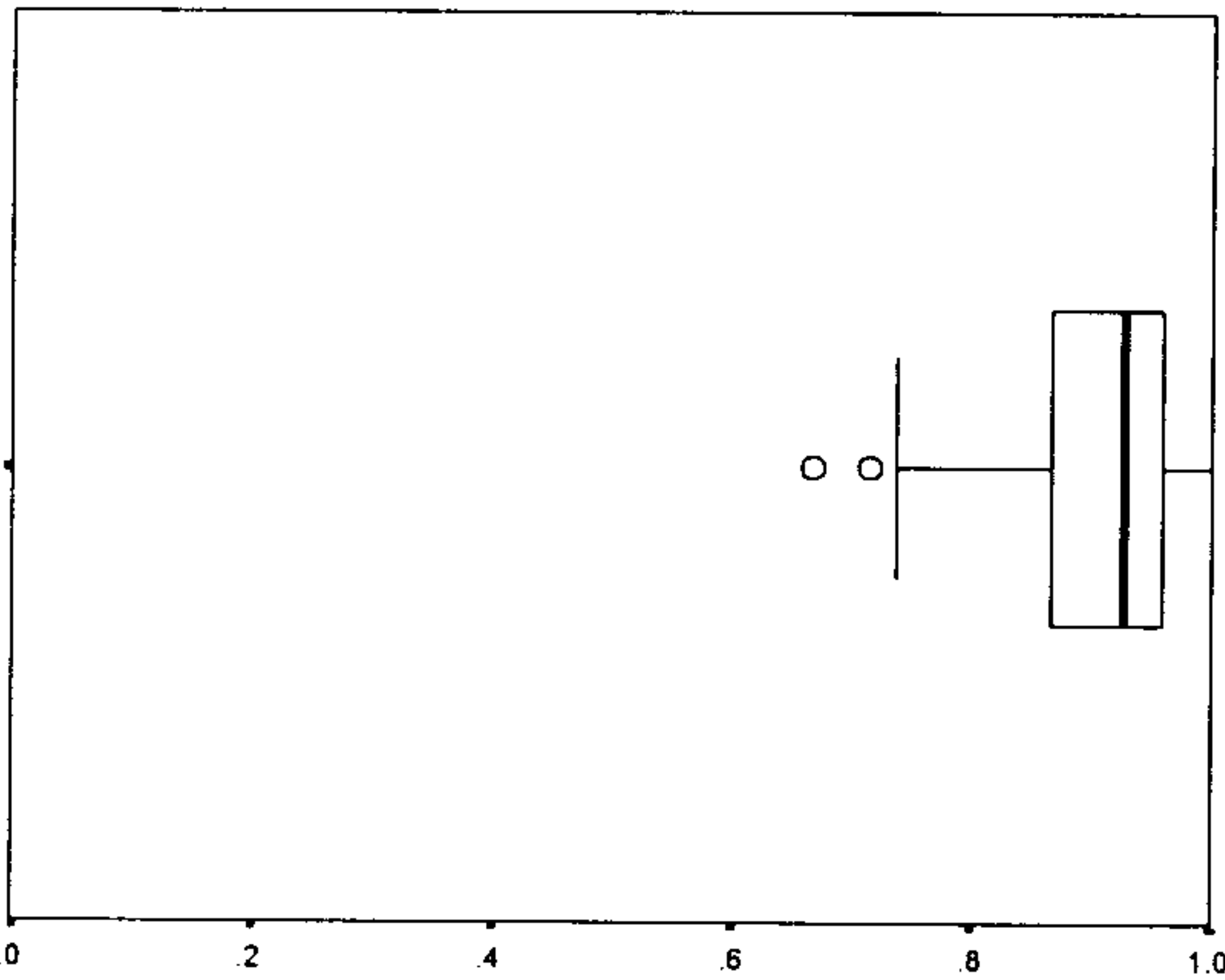
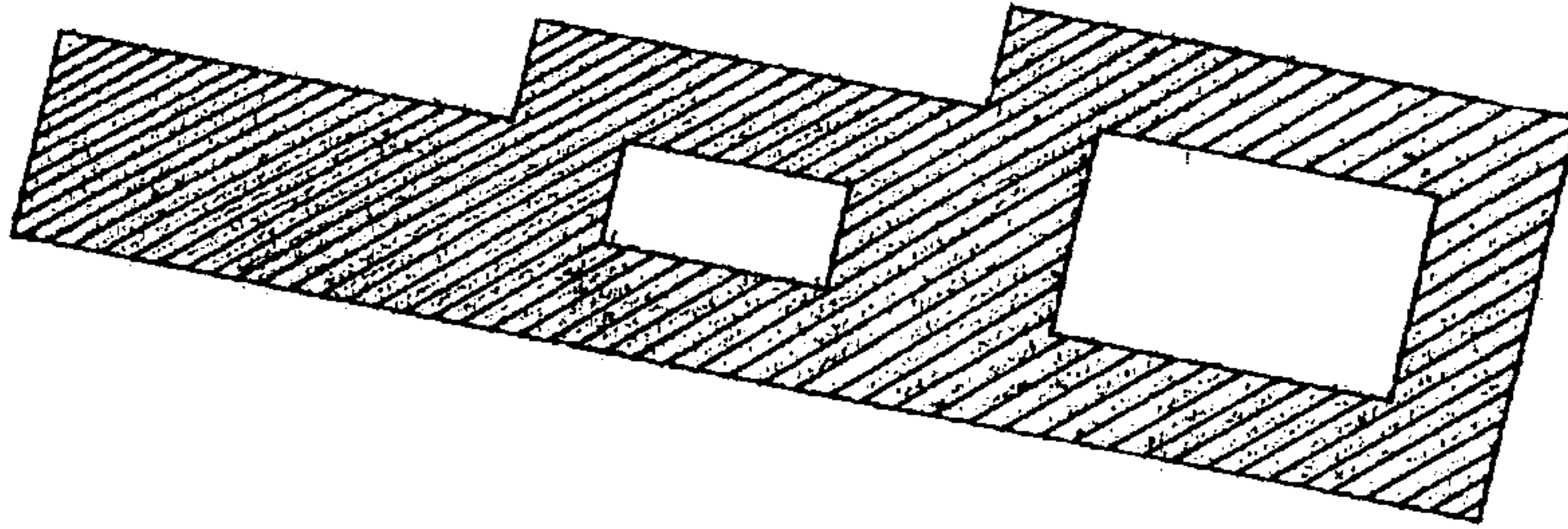
測量在實測領域中除了實測部分外，量感的培養是教學的重點，故面積的估測在教材中亦不可缺，如猜猜看黑板大概要多少張圖畫紙才能蓋滿，由於兒童已有覆蓋的經驗，即使透過任何自然工具，包括目測或手量以感覺到估測一個單位量與單位數的關係，又如猜猜看一張色紙有多大？再用工具去檢驗，此種先猜後檢驗的活動，既能引起兒童參與的興趣，又能培養估測的能力，尤其測量單位若呈現在紙上早已不是測驗而是等比例的縮小（雖然有時成年人一時疏忽，作圖本身即已失去標準比例，往往影響兒童學習），故若不在課程上提供估測的教材，將更不易培養兒童的量感，亦不容易產生有意義的學習，故安排在親子的參考活動。

### 三、總結性評量分析

◎量量看，有多長？

3-10

(10)是幾平方公分？



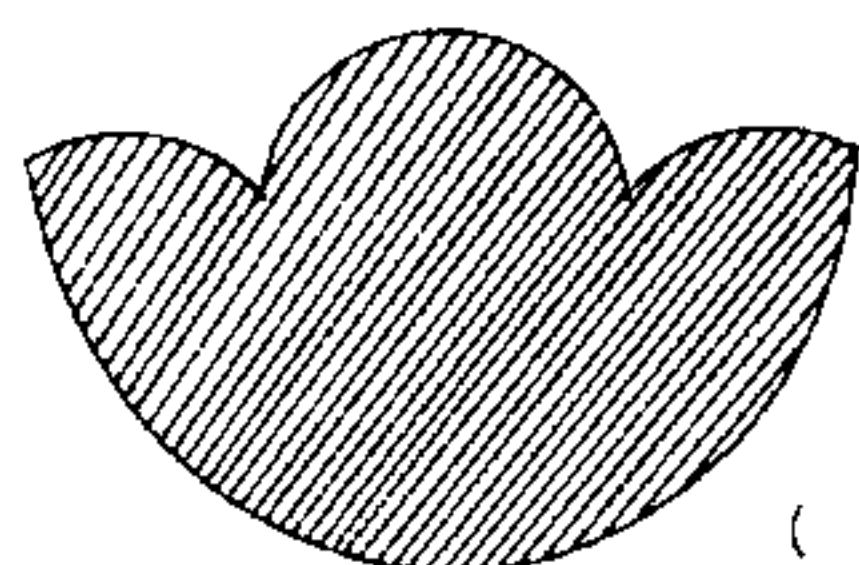
面積指的是二維平面的大小，題 3-10 雖未提供格子，但可透過平方公分板的覆蓋活動，製作格子痕跡加以點數，圖形設計包含兩格的合成活動，與斜線部分是全部剪去空白部分的分解活動。在 2788 位受試兒童中，平均答對率為 90.57%，有 27% 的實驗班級其通過率未達九成，就班級平均而言，最低為 67%，最高為 100%，兩者相差 33%，顯示班級反應差異不小，就學校平均而言，最低為 67%，最高為 100%，兩者相差 33%，顯示各校反應差異亦不小，此題雖平均有九成以上通過，但班級間在低年級即有三成以上的差異是應值得注意的。

三、下面兩個圖形哪一個面積比較小？在( )裡打√(2分)

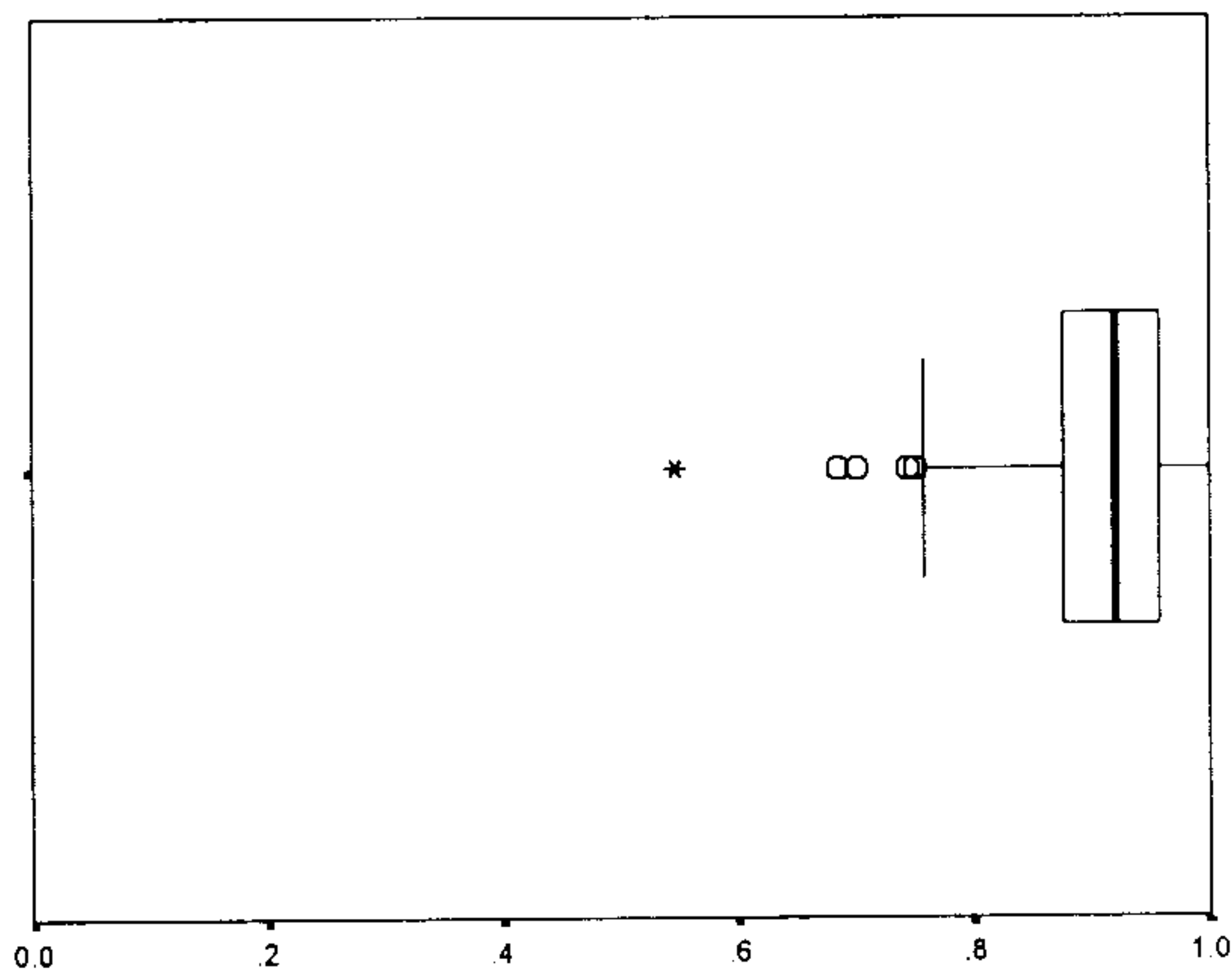
5-12



( )



( )

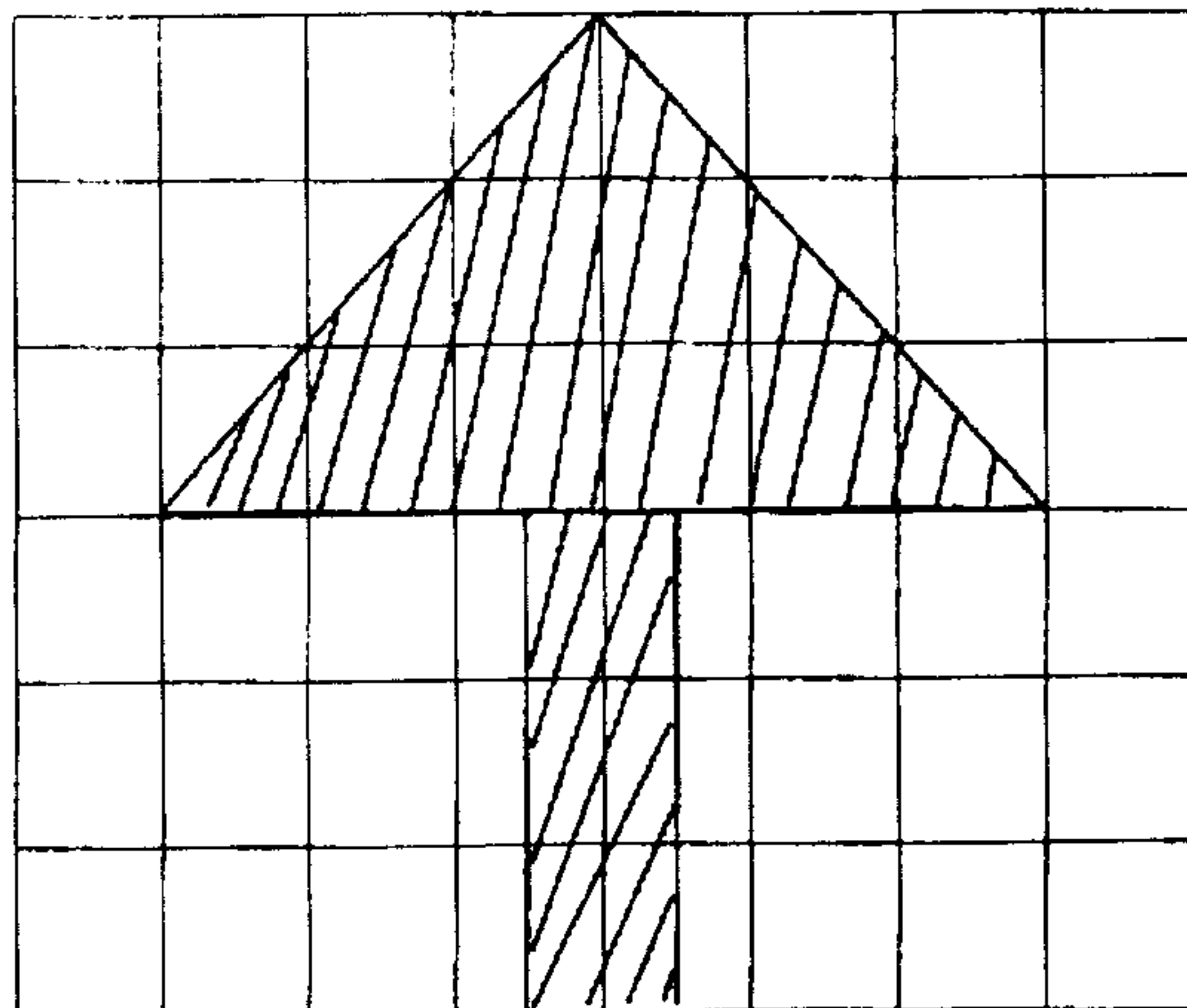


此題為比較兩個封閉區域內面積的大小，但兩圖大小差異顯著，在 2774 位受試兒童中，平均答對率為 94.48%，只有 1% 的實驗班級其通過率未達九成，就班級平均而言，最低為 79%，最高為 100%，兩者相差 21%，顯示班級反應差異不算大，就學校平均而言，最低為 83%，最高為 100%，兩者相差 17%，顯示各校反應差異還算小。

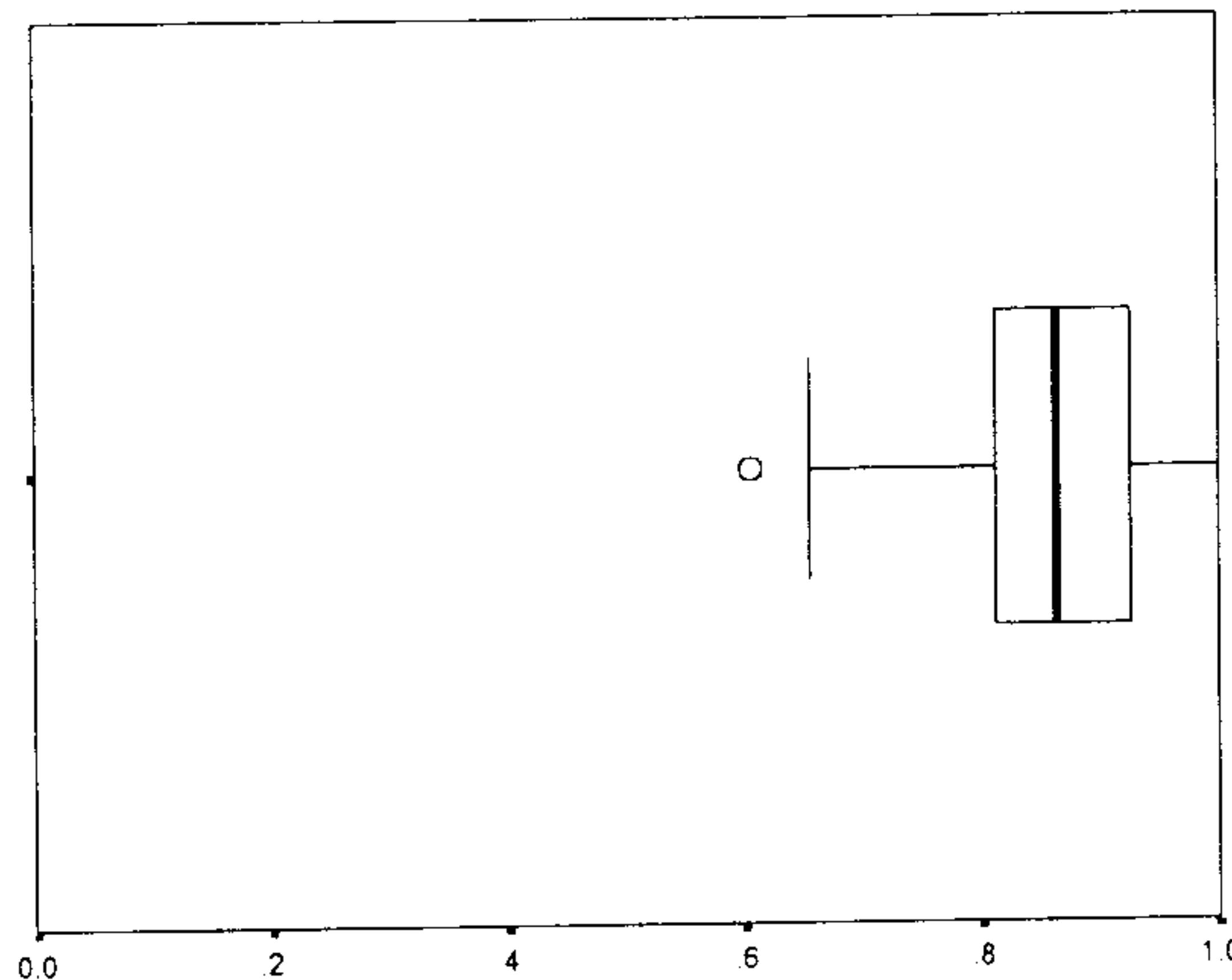
一、填填看：(每題 2 分，共 12 分)

6-4

(4) 斜線部分的面積是多少？



( ) 平方公分

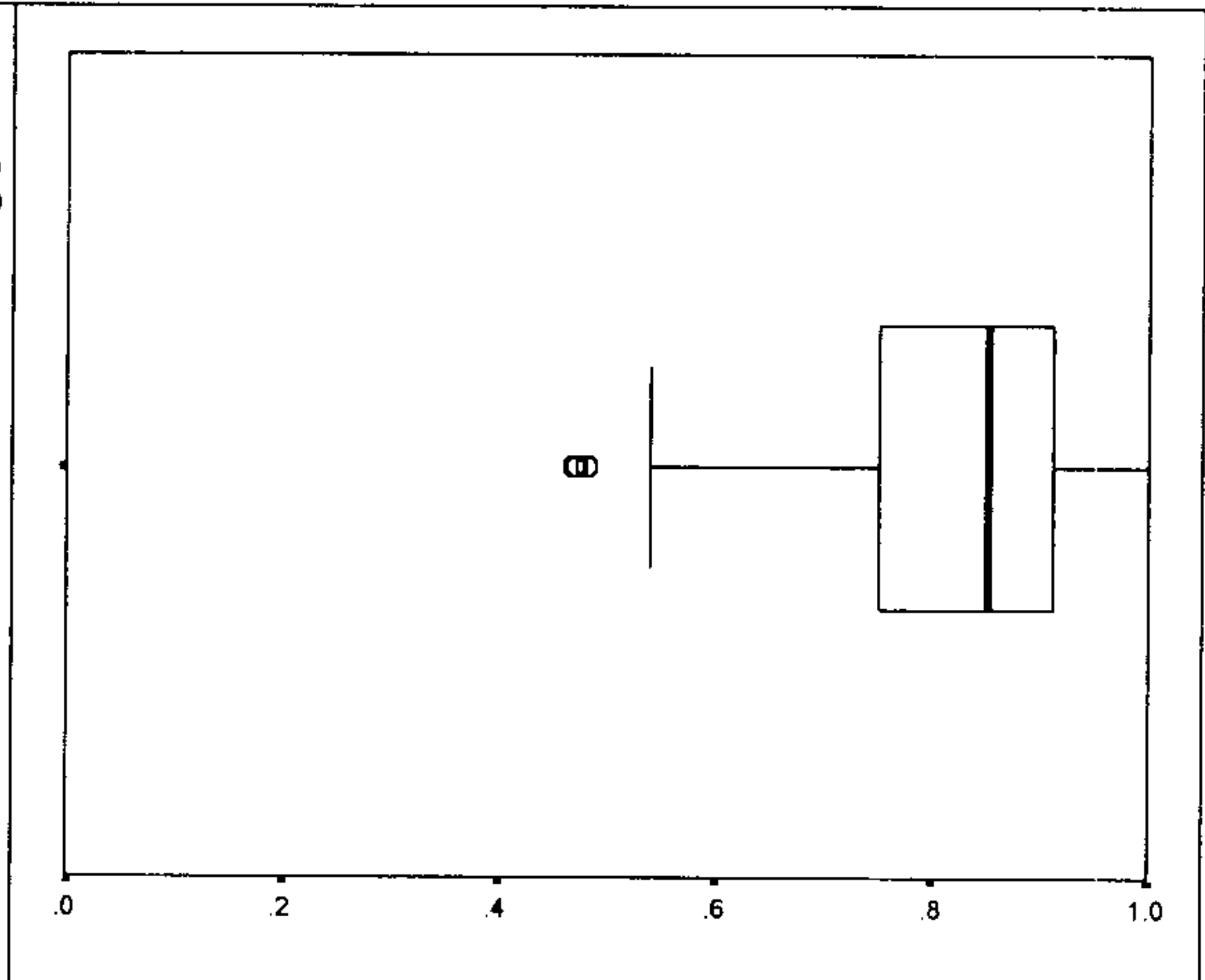


此題為格子的點數活動，其中涉及等積異形的初步概念，即有將正方形切割成二個長方形半格與切成二個三角形的半格，但由於此階段學生不會表示半格的記錄方式，故 6-4 中以合成後為整數格為主，在 2779 位受試兒童中，平均答對率為 86.22%，其中 13% 的實驗班級其通過率未達八成，就班級平均而言，最低為 66%，最高為 100%，兩者相差 34%，顯示班級反應差異不小，就學校平均而言，最低為 69%，最高為 100%，兩者相差 31%，顯示各校反應差異亦不小。

四、做做看：(第(17)、(18)、(20)題 4 分，第(19)題 8 分，共 20 分)

**7-17**

(17) 畫出一個有 4 平方公分大的圖形。

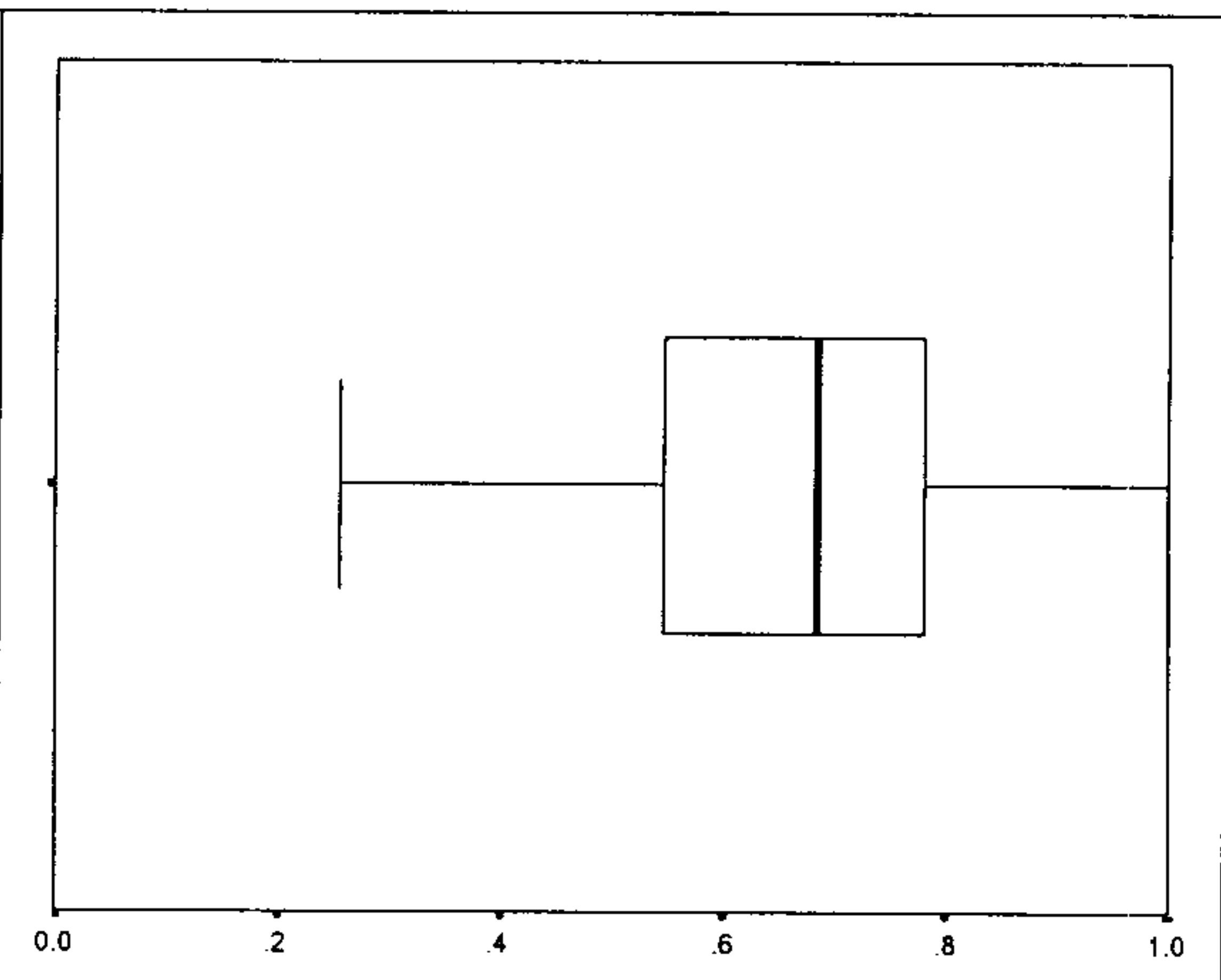


此題為量感的檢驗，學生可透過工具進行實測，在 2570 位受試兒童中，平均答對率為 81.87%，只有 1% 的實驗班級其通過率未達八成，就班級平均而言，最低為 47%，最高為 100%，兩者相差 53%，顯示班級反應差異很大，就學校平均而言，最低為 47%，最高為 98%，兩者相差 51%，顯示各校反應差異亦不小。此題為工具的使用與量感的檢驗，平均通過率雖有八成，但班級間差異很大，顯見部分班級在實測活動上有差異存在。

二、用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

**8-10**

(10) 一長方形紙條，長邊的長是 2 公尺，短邊的長是 3 公分，紙條的面積是多少平方公分？

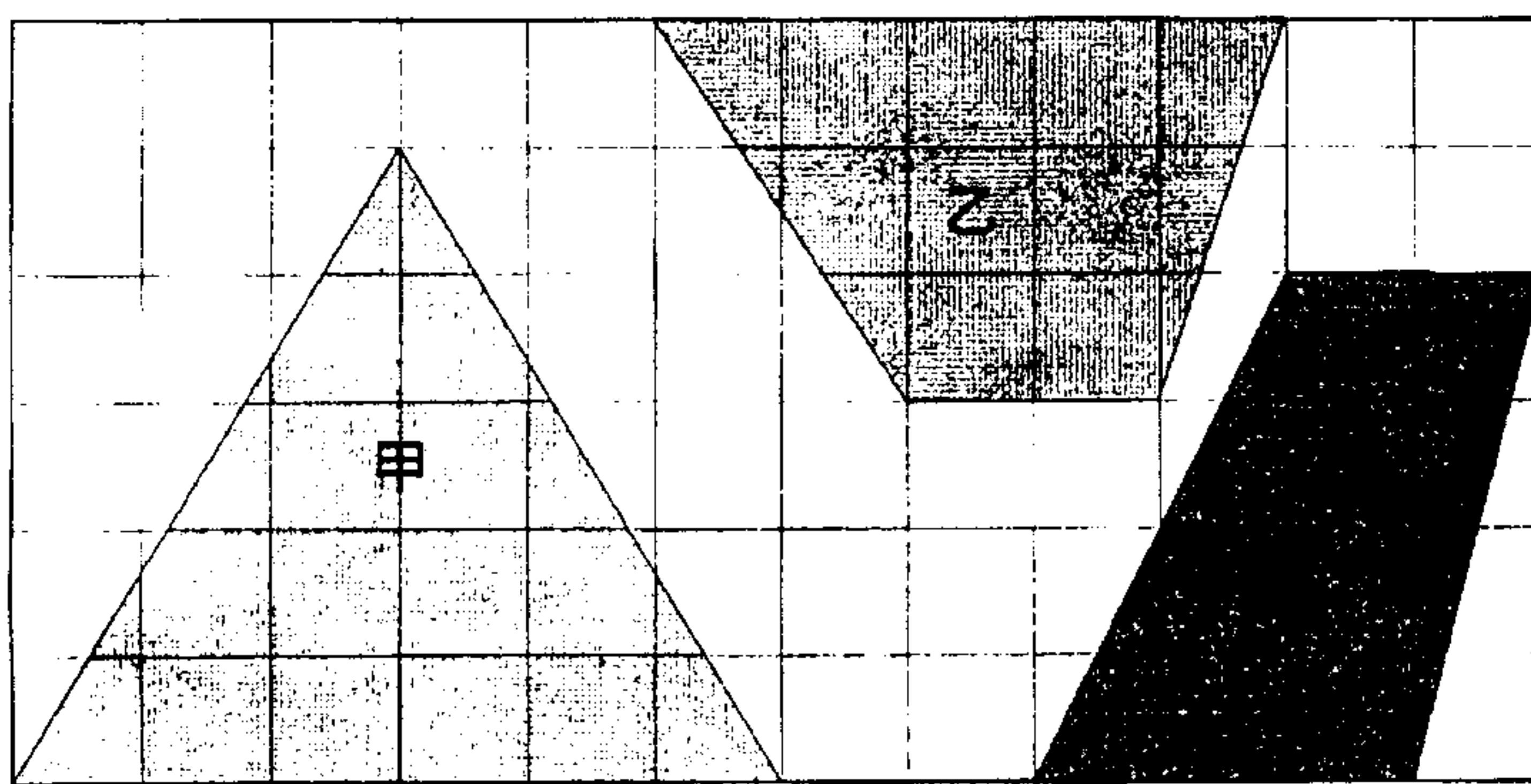


此題為純文字題，學生必須從文字題中找出關鍵元素，其中包括單位量間的轉換，在 2465 位受試兒童中，平均答對率為 65.11%，有 54% 的實驗班級其通過率未達八成，就班級平均而言，最低為 26%，最高為 100%，兩者相差 74%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 35%，最高為 90%，兩者相差 55%，顯示各校反應差異亦不小，此題並無多餘資訊，學生通過率卻只有六成五，顯然單位量的關注與掌握，學生仍有不足。

五、填填看：(第(19)題每格 1 分，其餘每格 2 分，共 16 分)

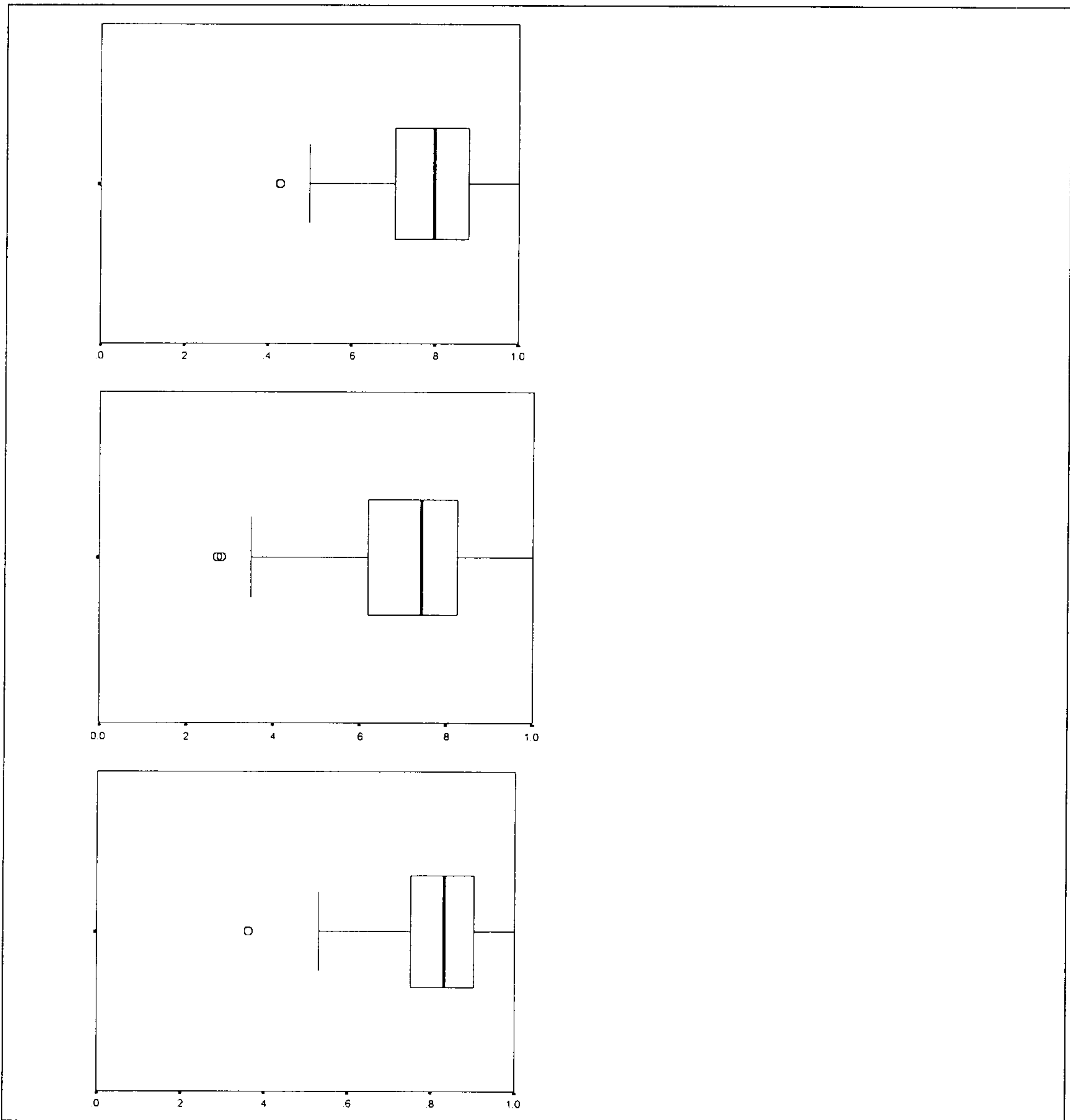
9-23-①

(23) 下圖中每一小格的面積都是 1 平方公分，算算看，下面各圖形的面積有多大？



- ① 甲的面積是 (                      )
- ② 乙的面積是 (                      )
- ③ 丙的面積是 (                      )





此題為有格子的平面圖形，其與 6-4 的差異在於單位量的選擇有所不同，前者以 1 格為單位量，再合成數個半格形成整數格，此題則由解題者自定單位量，因各圖均可切成長方形與直角三角形的合成，而直角三角形面積正是長方形面積的一半，故可以自定長方形面積大小為單位量，以解決直角三角形面積問題。甲圖在 2420 位受試兒童中，平均答對率為 78.80%，有 17% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 43%，最高為 90%，兩者相差 47%，顯示班級反應差異很大，就學校平均而言，最低為 52%，最高為 96%，兩者相差 44%，顯示各校反應差異亦不小。乙圖平均答對率為 72.48%，有 28% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 27%，最高為 100%，兩者相差 73%，顯示班級反

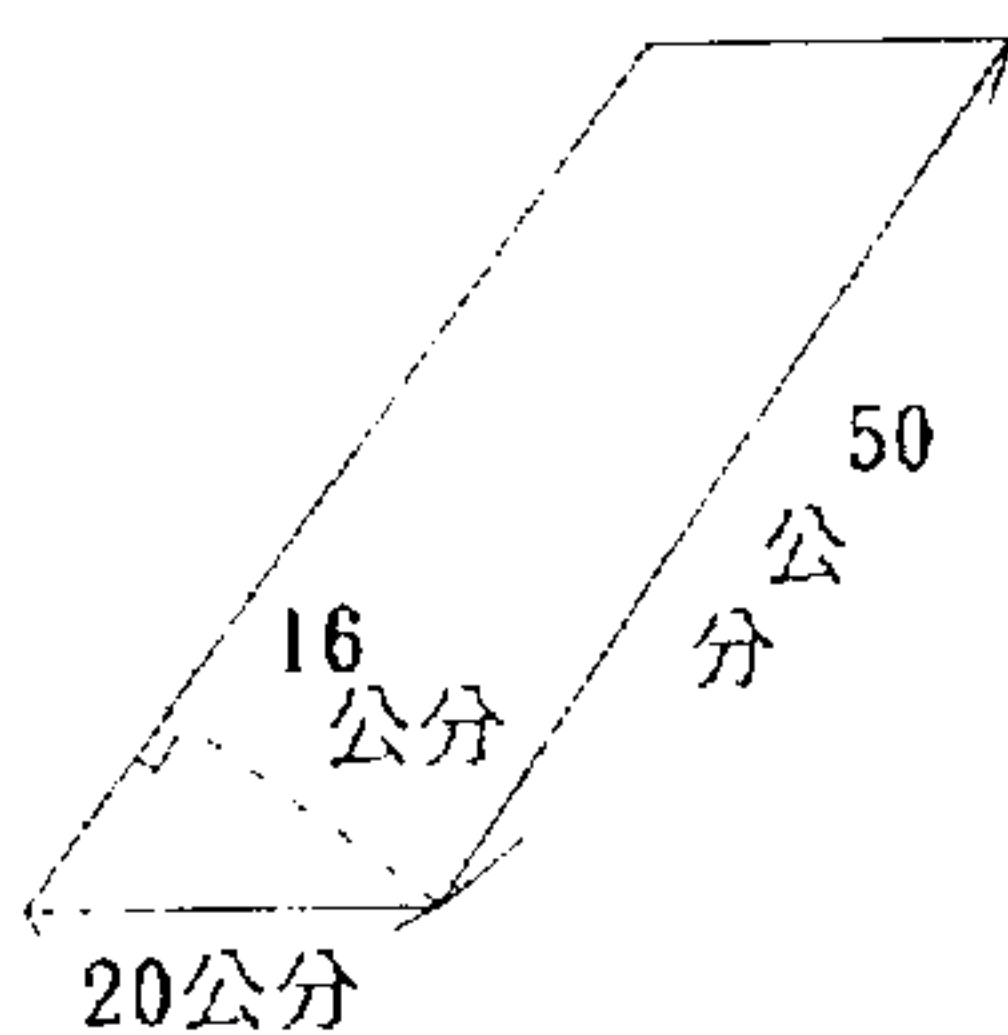
應差異極大，就學校平均而言，最低為 27% ，最高為 100% ，兩者相差 73% ，顯示各校反應差異亦不小。丙圖平均答對率為 81.65% ，有 12% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 36% ，最高為 100% ，兩者相差 64% ，顯示班級反應差異不小，就學校平均而言，最低為 36% ，最高為 100% ，兩者相差 64% ，顯示各校反應差異亦不小，從甲乙丙觀之，甲為等腰三角形，雖通過率非最高，但班級間差異較小，乙、丙兩圖均為梯形，但顯然乙圖通過率較低，可能是此圖為倒立與學生一般的習慣不同所導致。

三、用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 36 分)

9-15-①

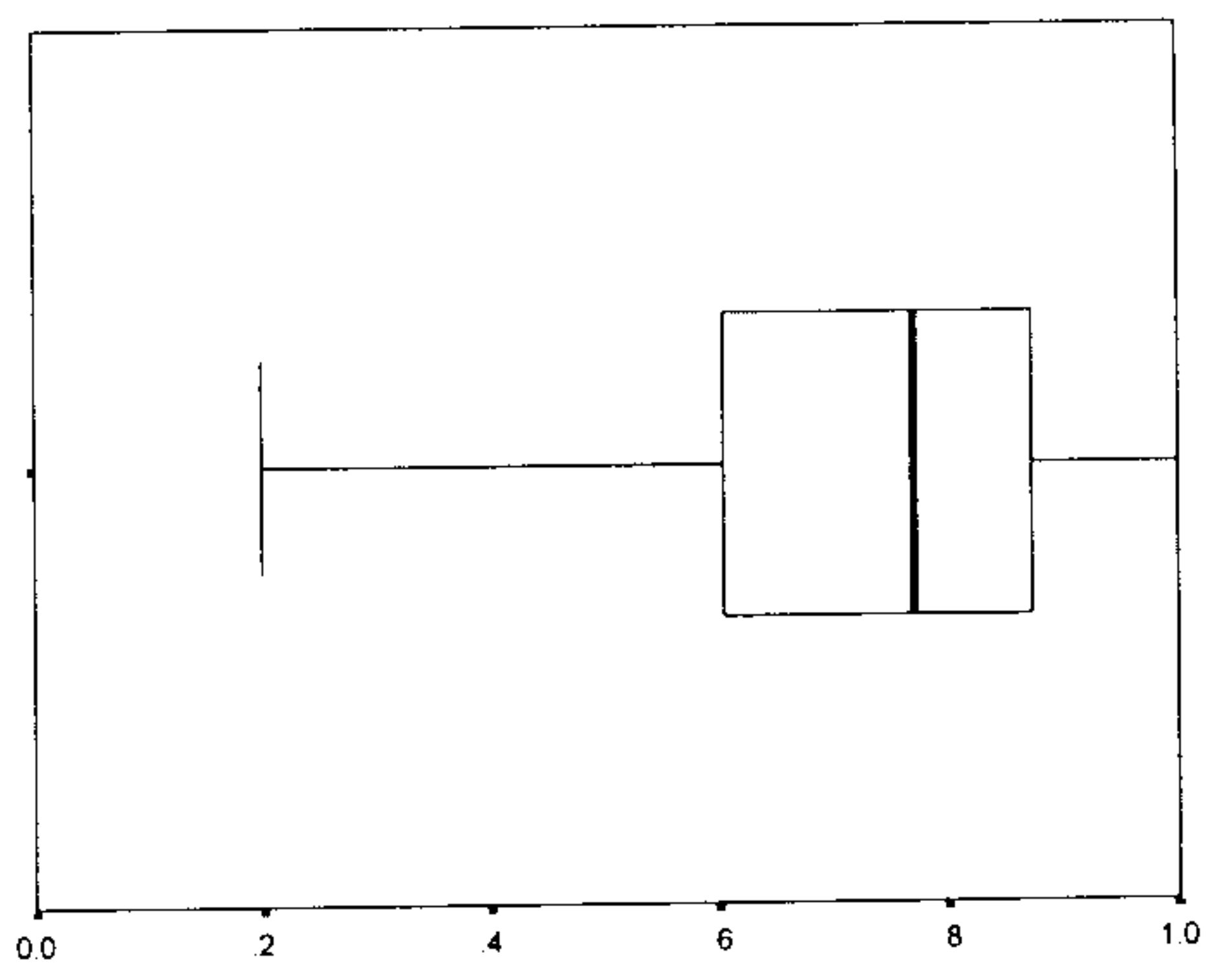
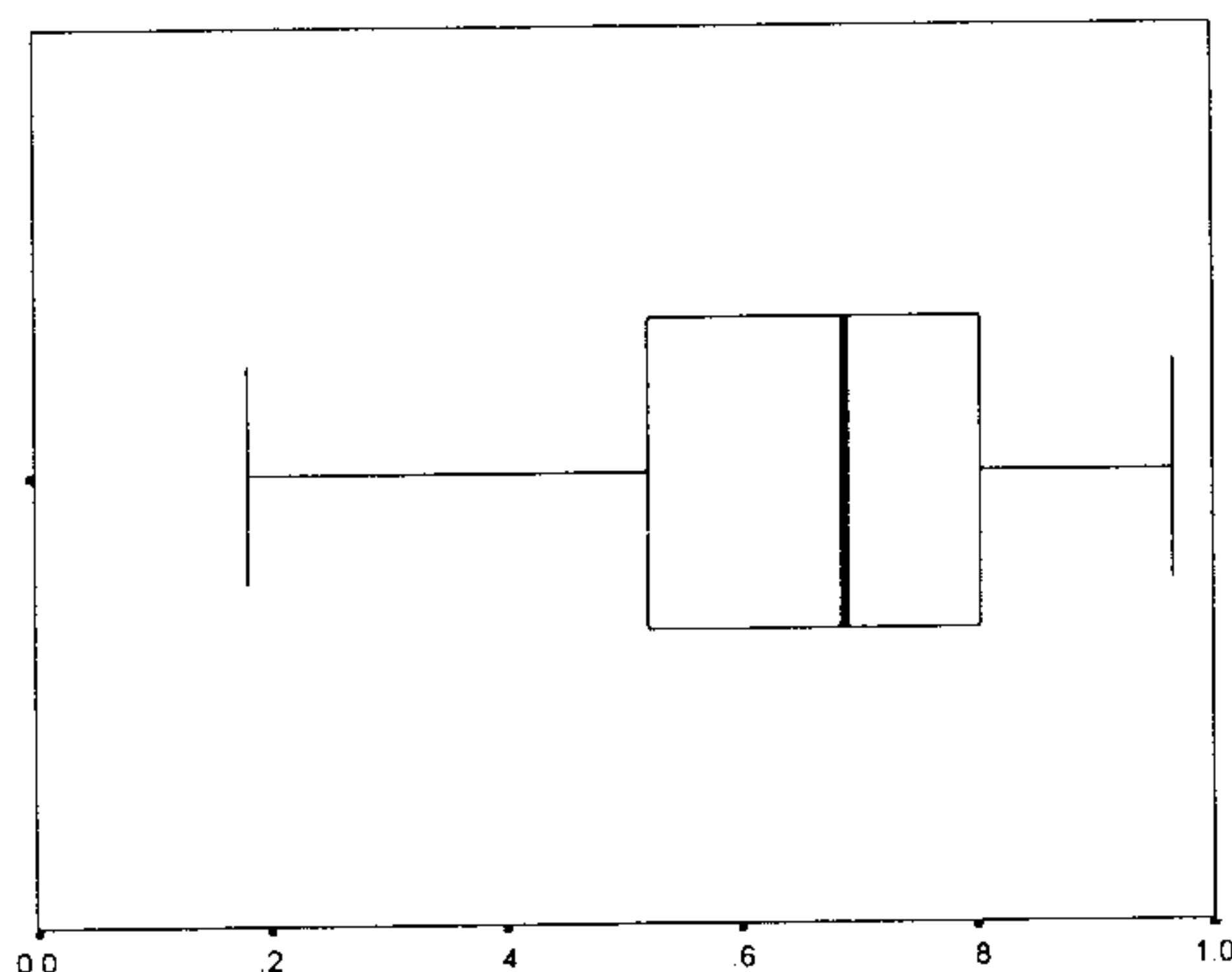
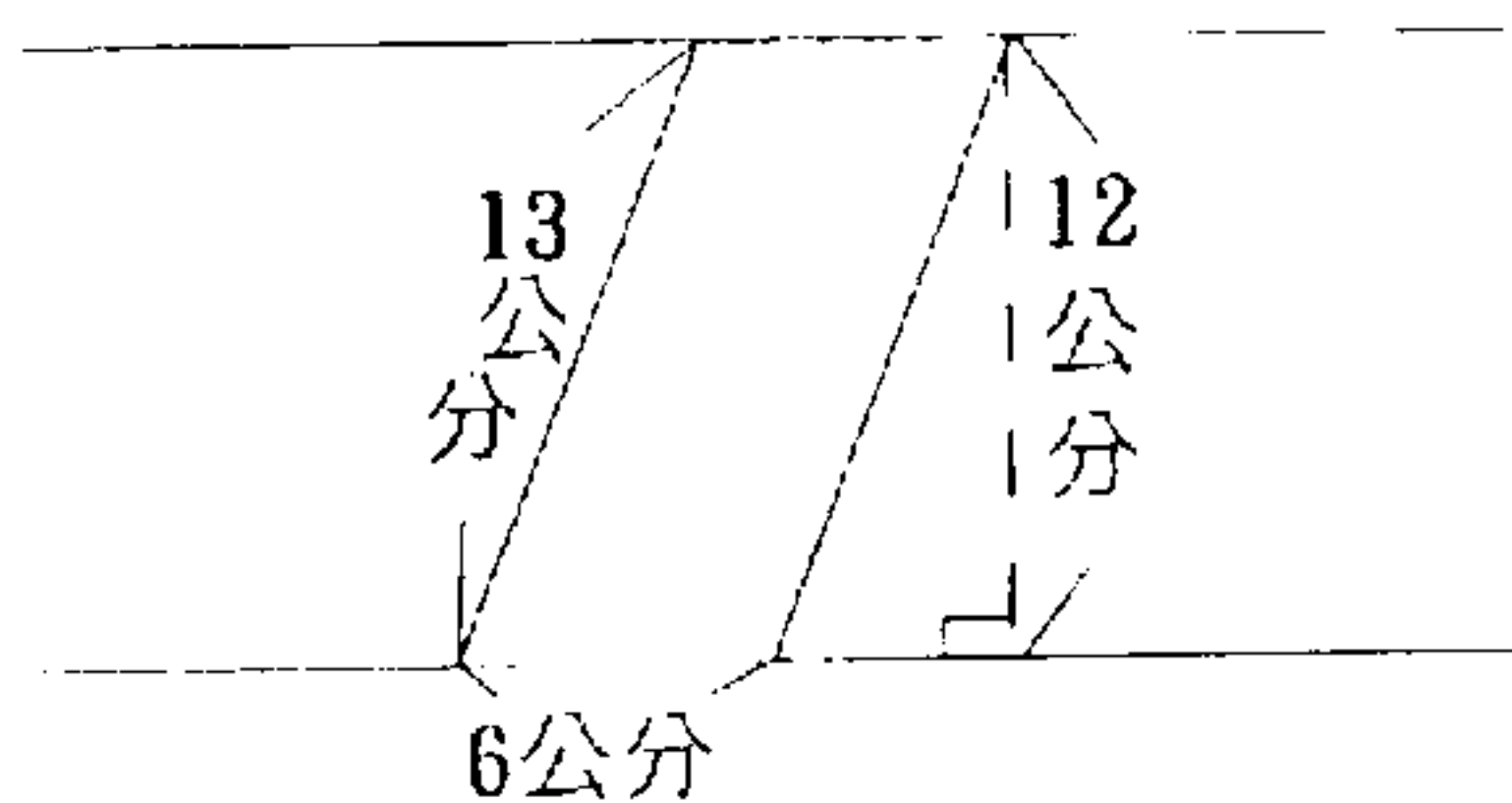
(15) 下面縮小的圖形，實際的面積有多大？

①



9-15-②

②



此題為面積公式的應用，但其呈現方式略有不同，第①小題在 2420 位受試兒童中，平均答對率為 66.69% ，有 35% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 18% ，最高為 97% ，兩者相差 89% ，就學校平均而言，最低為 18% ，最高為 93% ，兩者相差 75% ，第②小題平均答對率為 73.84% ，有 25% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 30% ，最高為 100% ，兩者相差 70% ，就學校平均而言，最低為 45

%，最高為 96%，兩者相差 51%，兩小題均顯示各班與各校間差異頗大，但顯然的，第②小題與學生經驗較一致，即底與高的關係是建立在水平線與垂直線的關係上。

六、做做看：(第(26)題每題 4 分，其餘每題 3 分，共 10 分)

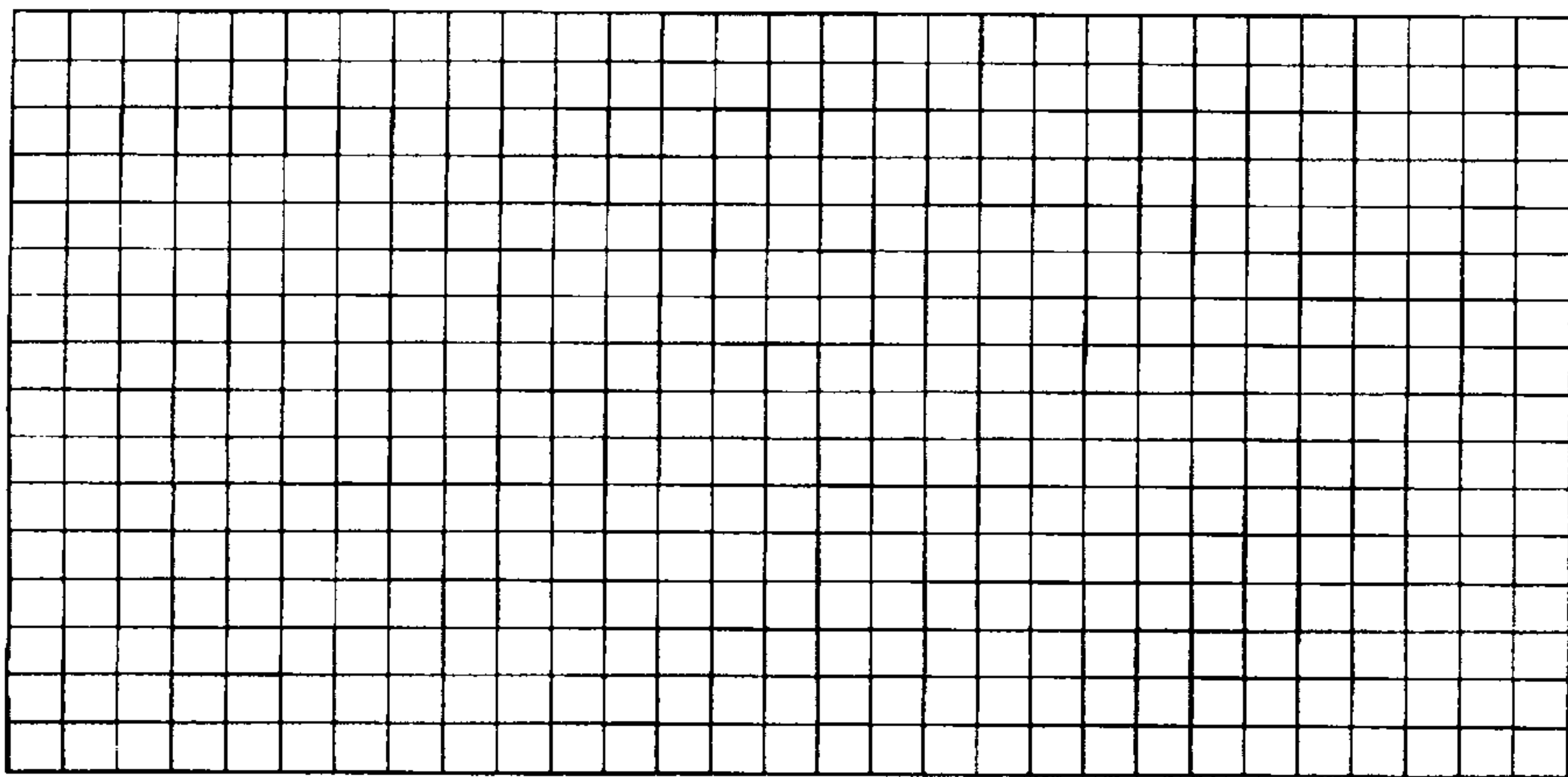
9-26-①

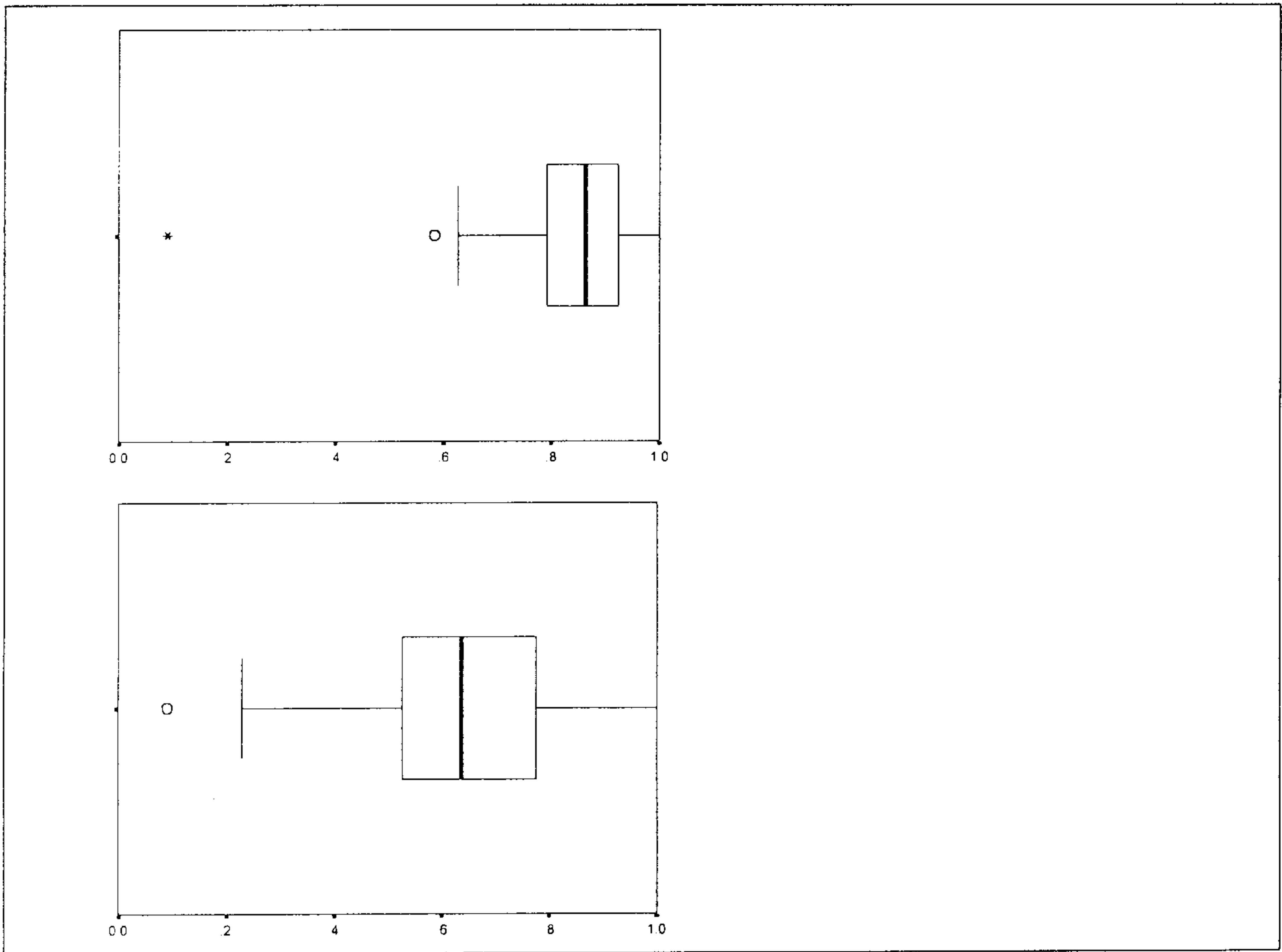
(26)為了節省空間，讓我們約定下面方格圖上的每一小格的面積是 1 平方公分。

①在方格圖左邊畫一個長方形，面積是 24 平方公分，最長邊的長小於 15 公分。

9-26-②

②在方格右邊畫一長方形，面積是 28 平方公分，其中一邊的長是 8 公分。



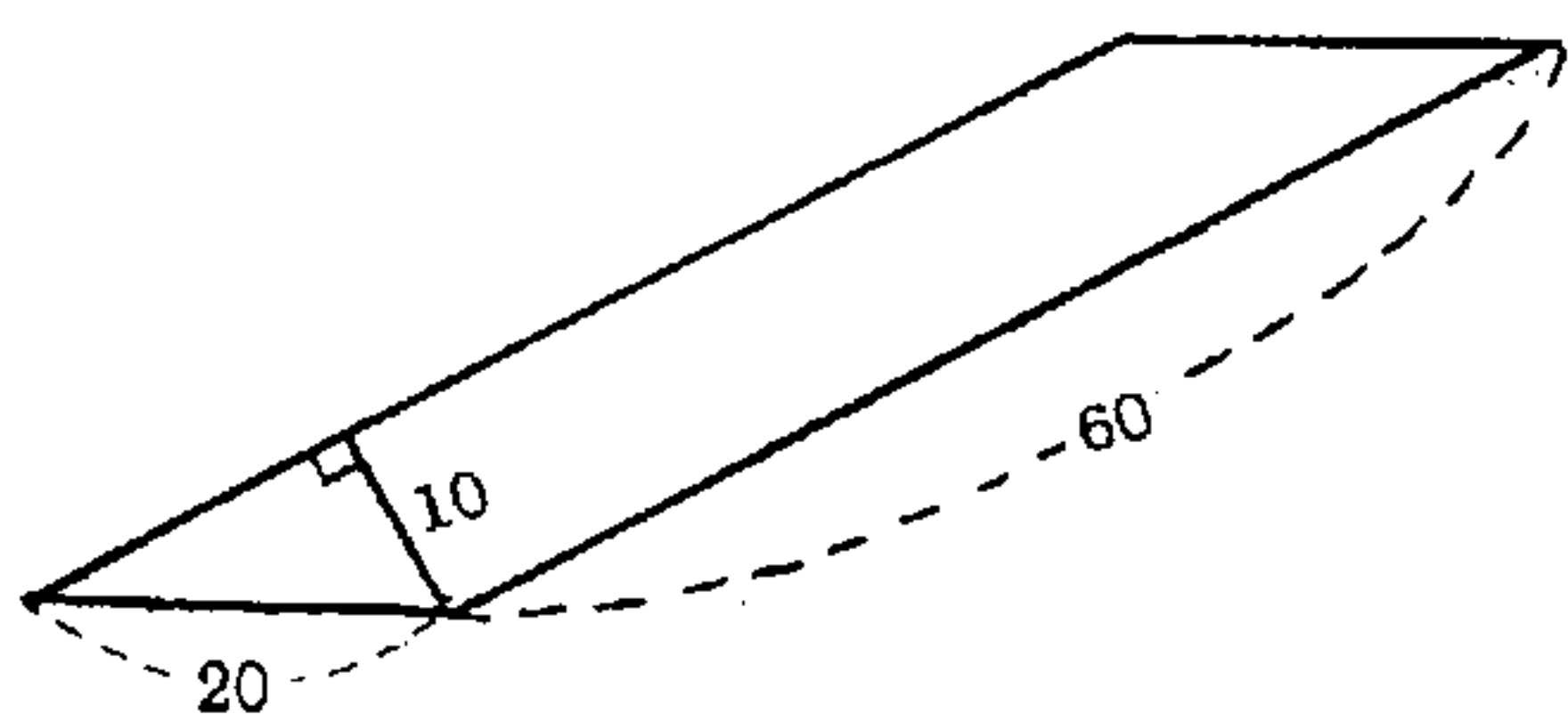


此題為畫圖題，透過給定面積，圍出可能的長方形，第 1 小題有多種組合關係，但均可以完整格表示之，第 2 小題則因會有非完整呈現，故設定一固定邊長，學生可能從逐步累加，達到解題目的。第 1 小題在 2420 位受試兒童中，平均答對率為 85.25%，有 8% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 9%，最高為 100%，兩者相差 91%，就學校平均而言，最低為 9%，最高為 94%，兩者相差 85%，第 2 小題平均答對率為 62.81%，有 44% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 9%，最高為 100%，兩者相差 91%，就學校平均而言，最低為 9%，最高為 100%，兩者相差 91%，上述兩題均為習作題型，雖然非整數格的確較困難，但班級與學校間差異如此大，可見部分班級無法掌握課程精神。

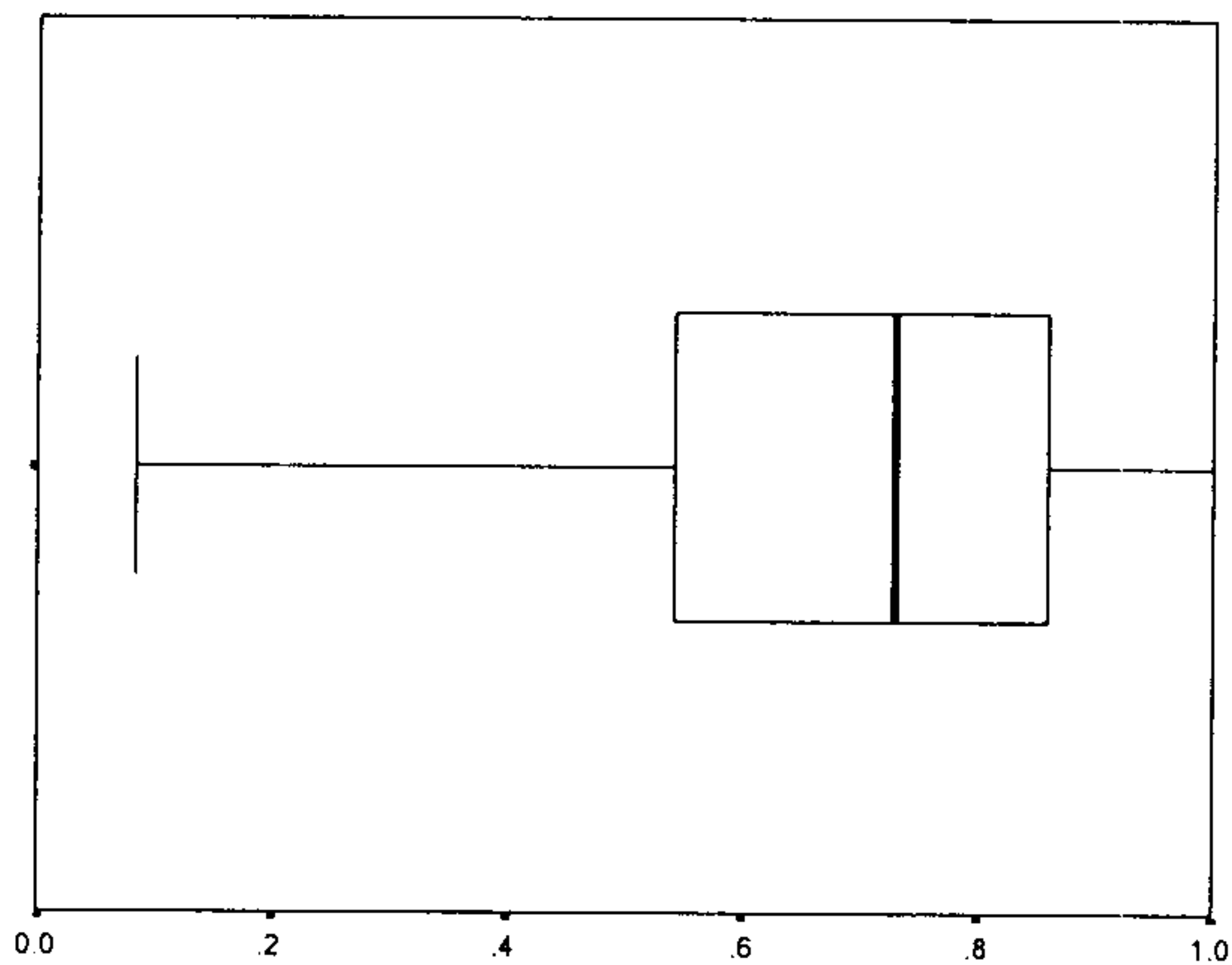
二、算算看，下面圖形的面積有多大？(每題 3 分共 6 分)

10-3

(3)



(單位：公分)

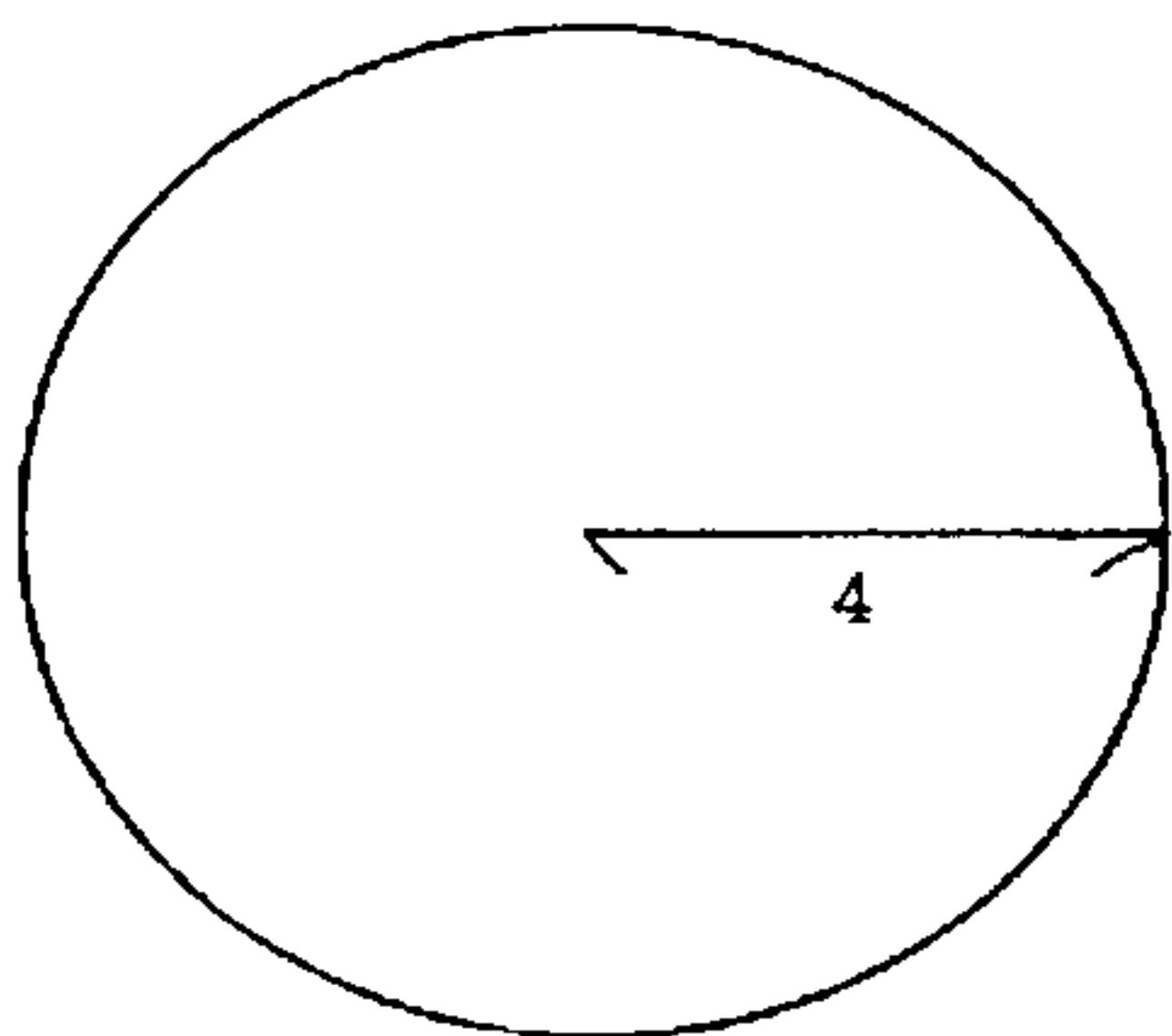


此題與 9-15 相同，檢驗學生對平行四邊形面積公式意義的瞭解，此時的圖形傾斜度較高，在 2046 位受試兒童中，平均答對率為 70.87%，有 28% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 8%，最高為 100%，兩者相差 92%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 8%，最高為 100%，兩者相差 92%，顯示各校反應差異亦極大，從通過率觀之，同樣題型平均通過率只增加四個百分點，但班級間的差距卻擴大，顯示部分班級學習情形，不進反退。

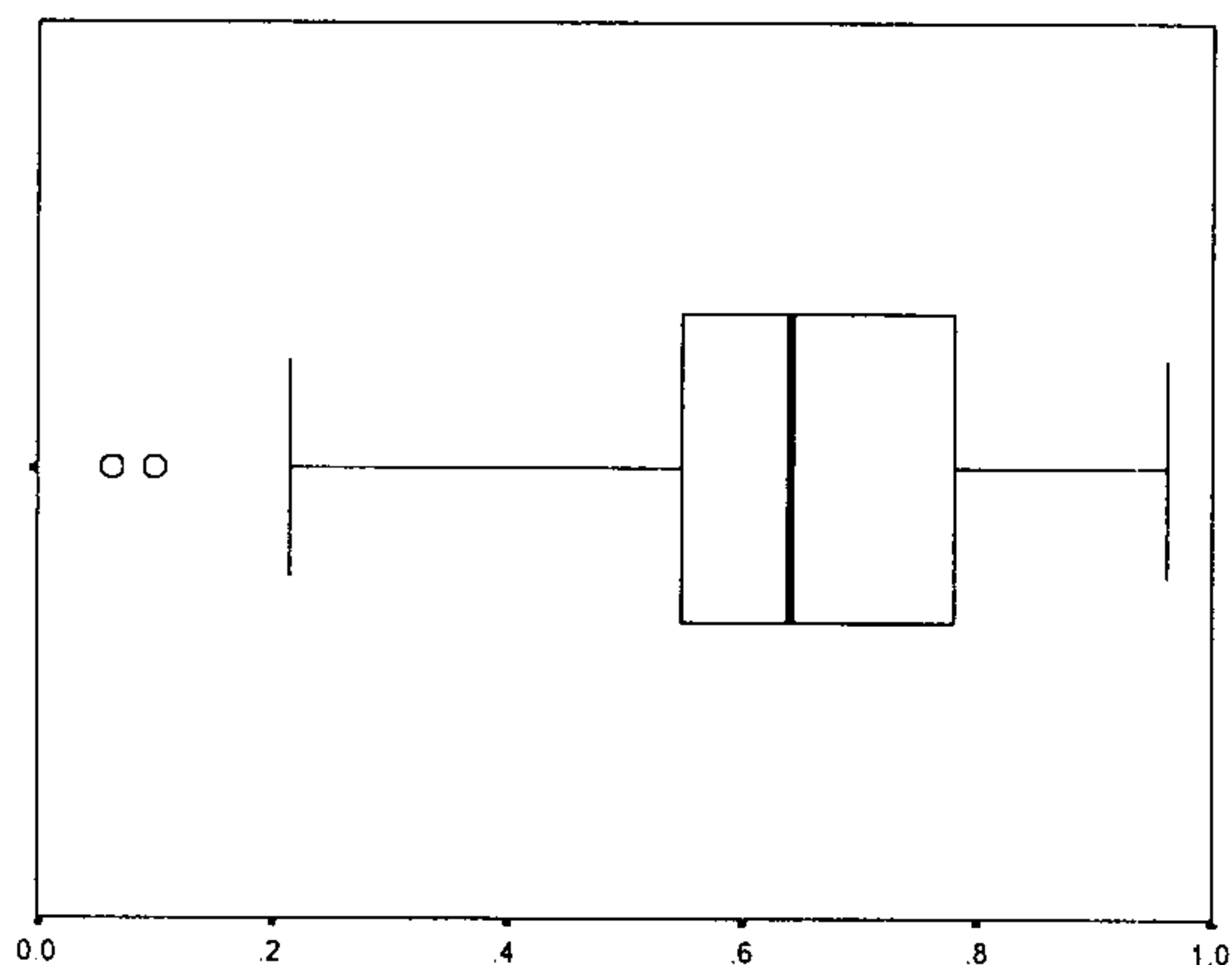
二、算算看，下面圖形的面積有多大？(每題 3 分共 6 分)

10-4

(4)



(單位：公尺)  
(圓周率取 3)

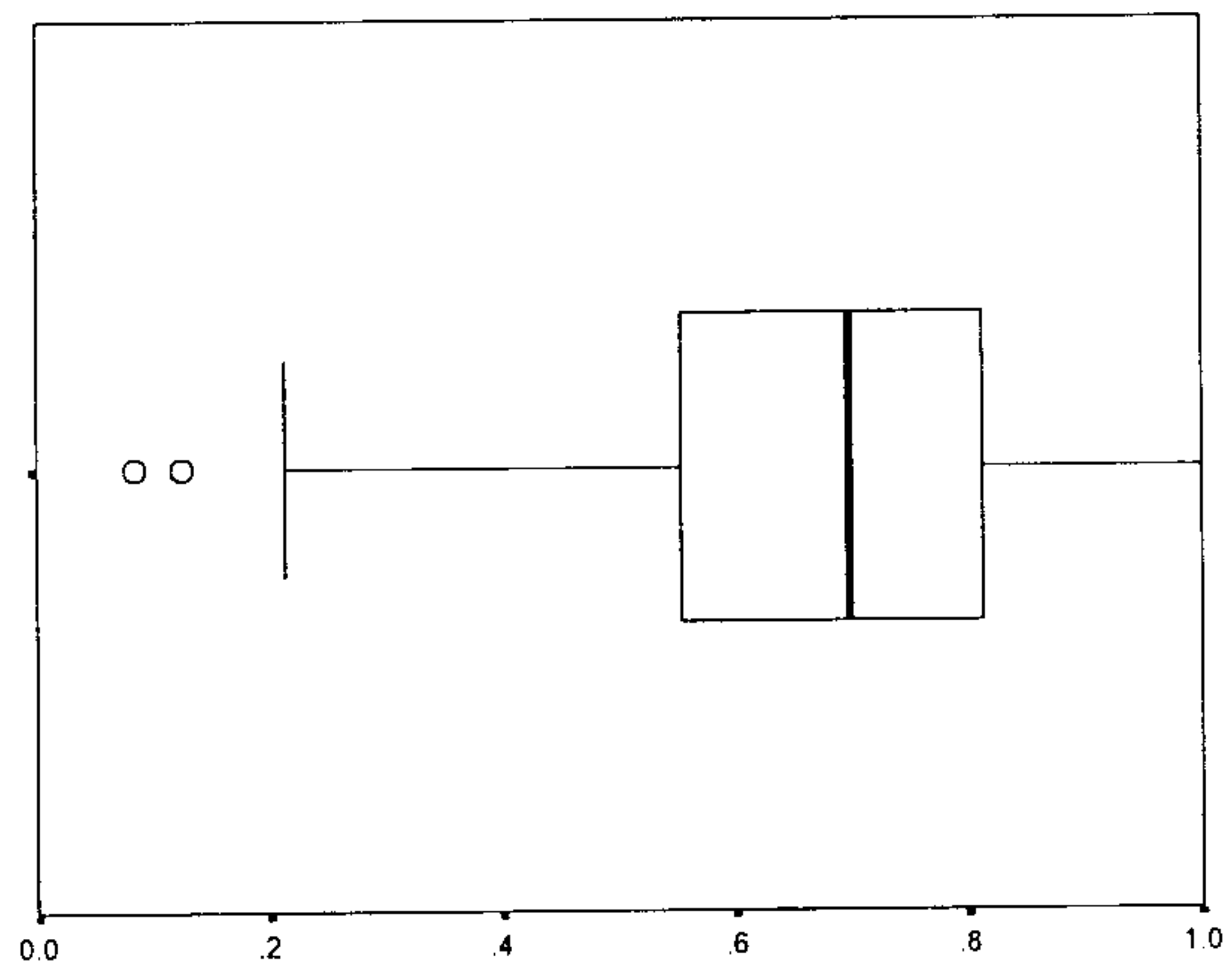
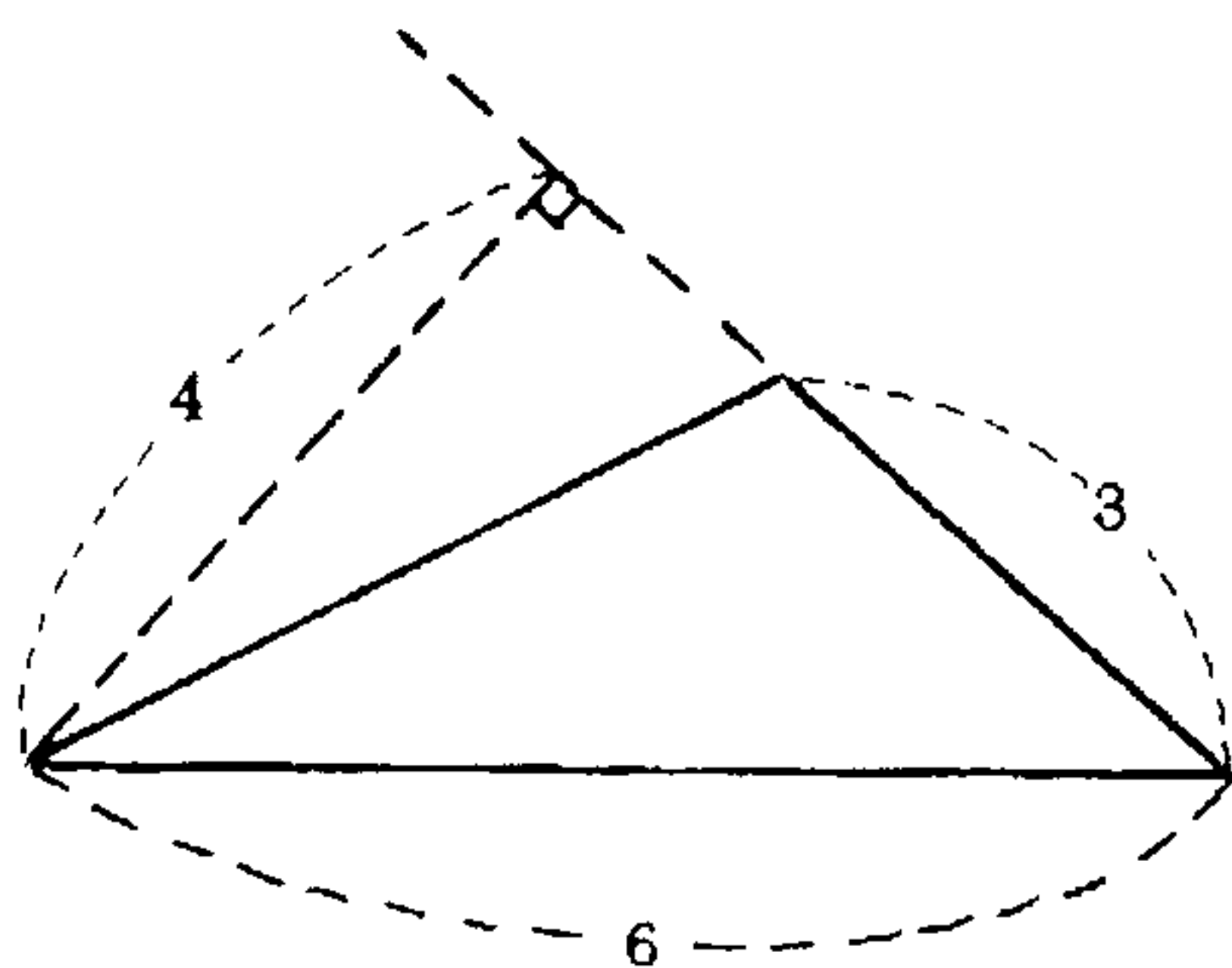


此題為圓形面積公式的應用，實驗教材設計是透過切割、拼湊或格子點數察覺面積公式的意義。在 2046 位受試兒童中，平均答對率為 64.32%，有 31% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 6%，最高為 96%，兩者相差 90%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 29%，最高為 96%，兩者相差 67%，顯示各校反應差異亦不小，從通過率與班級差距觀之，學生各題填答情形有呈兩極化的現象。

五、先用算式填充題記錄問題，再用「逐次減項」的記法把做法記下來。  
(每題 3 分，共 9 分)

10-22

(22) 這個圖形的面積有多大？  
算式填充題：\_\_\_\_\_

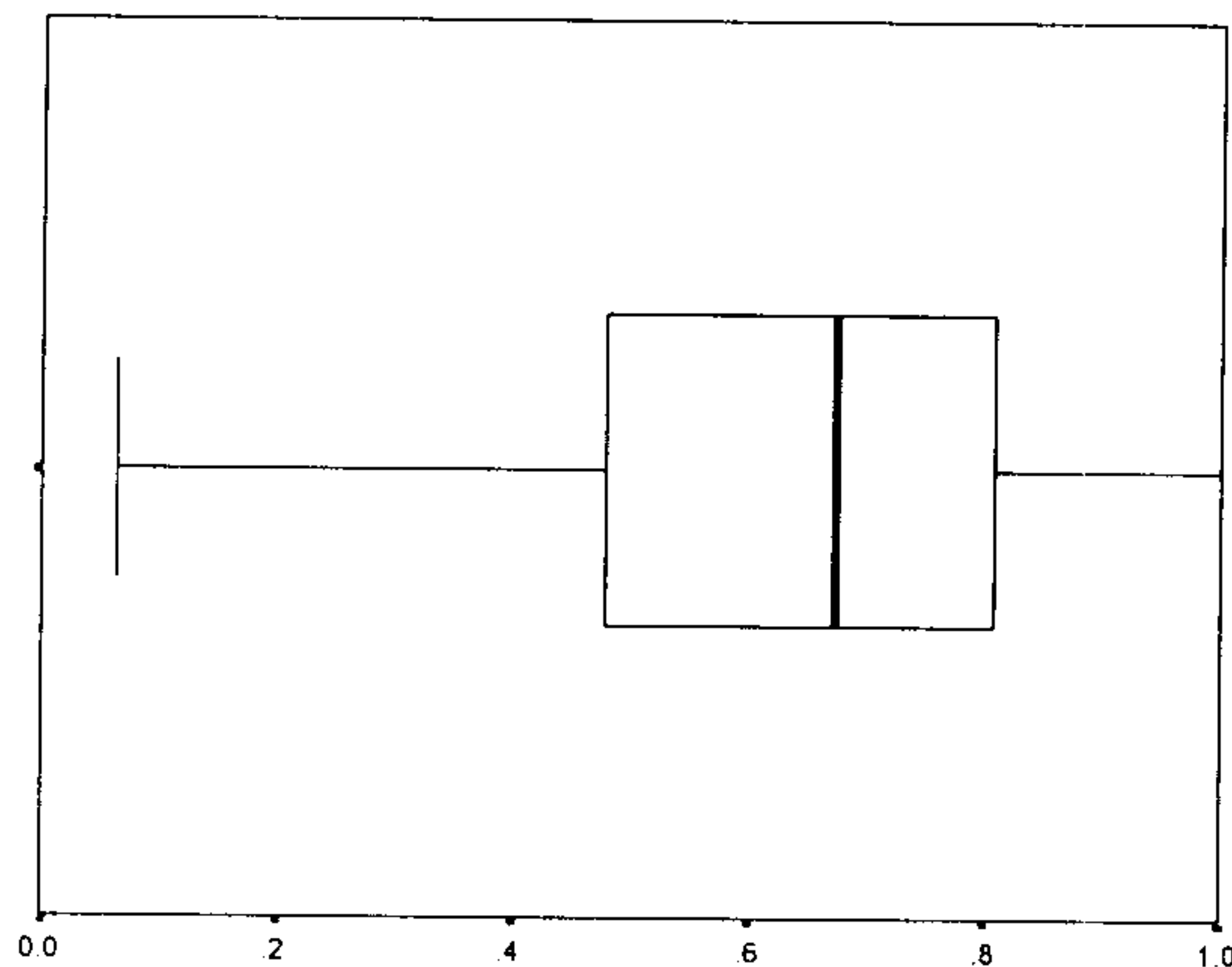
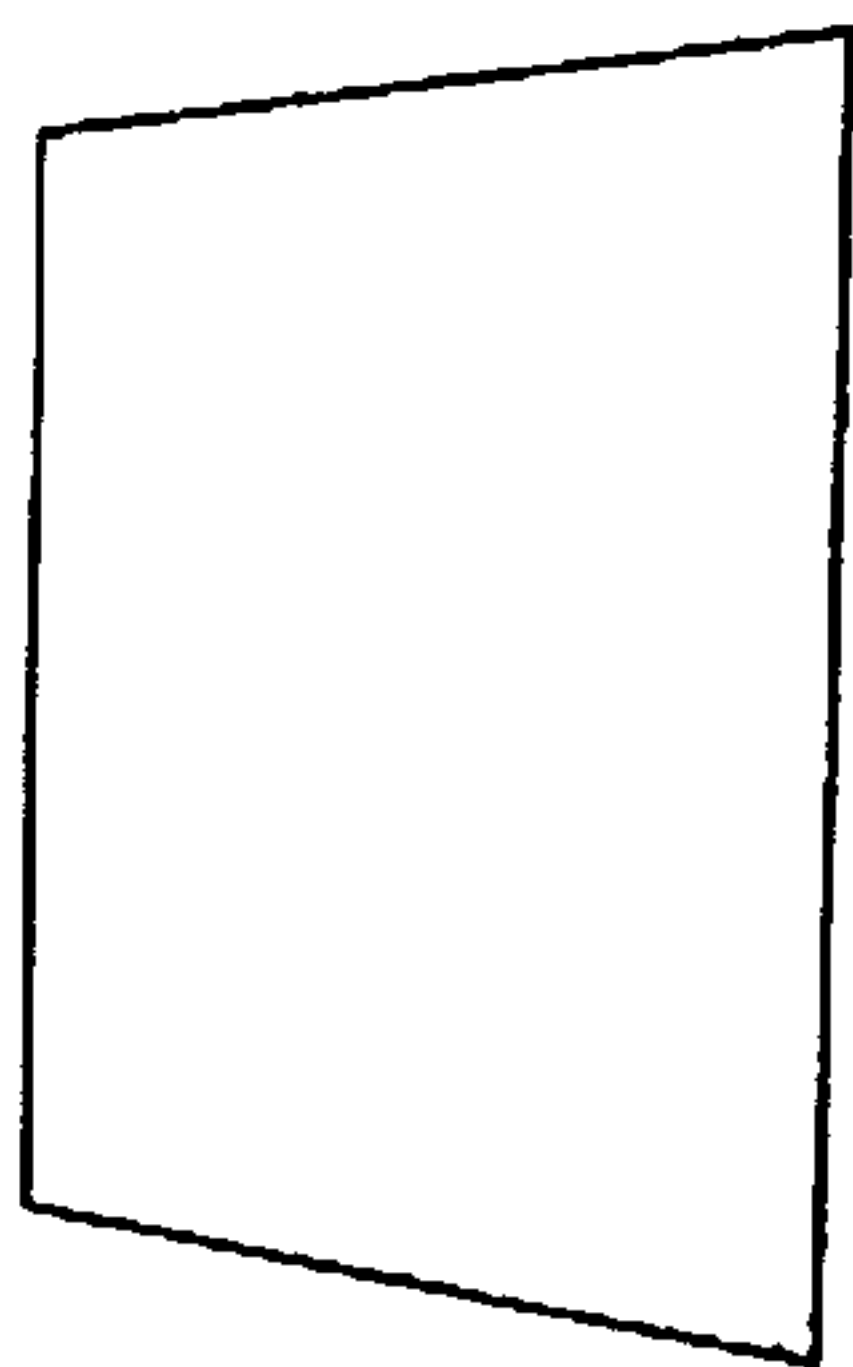


此題為檢驗學生對三角形面積公式意義的瞭解，其與平行四邊形相同，提供多餘資訊讓學生有判斷概念。在 2046 位受試兒童中，平均答對率為 67.5%，有 30% 的實驗班級其通過率未達九成，就班級平均而言，最低為 8%，最高為 100%，兩者相差 92%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 8%，最高為 100%，兩者相差 92%，顯示各校反應差異亦極大，且呈兩極化的現象。

六、量量看，並算出下圖的面積。(長度量到整公分)(4分)

10-23

(23)



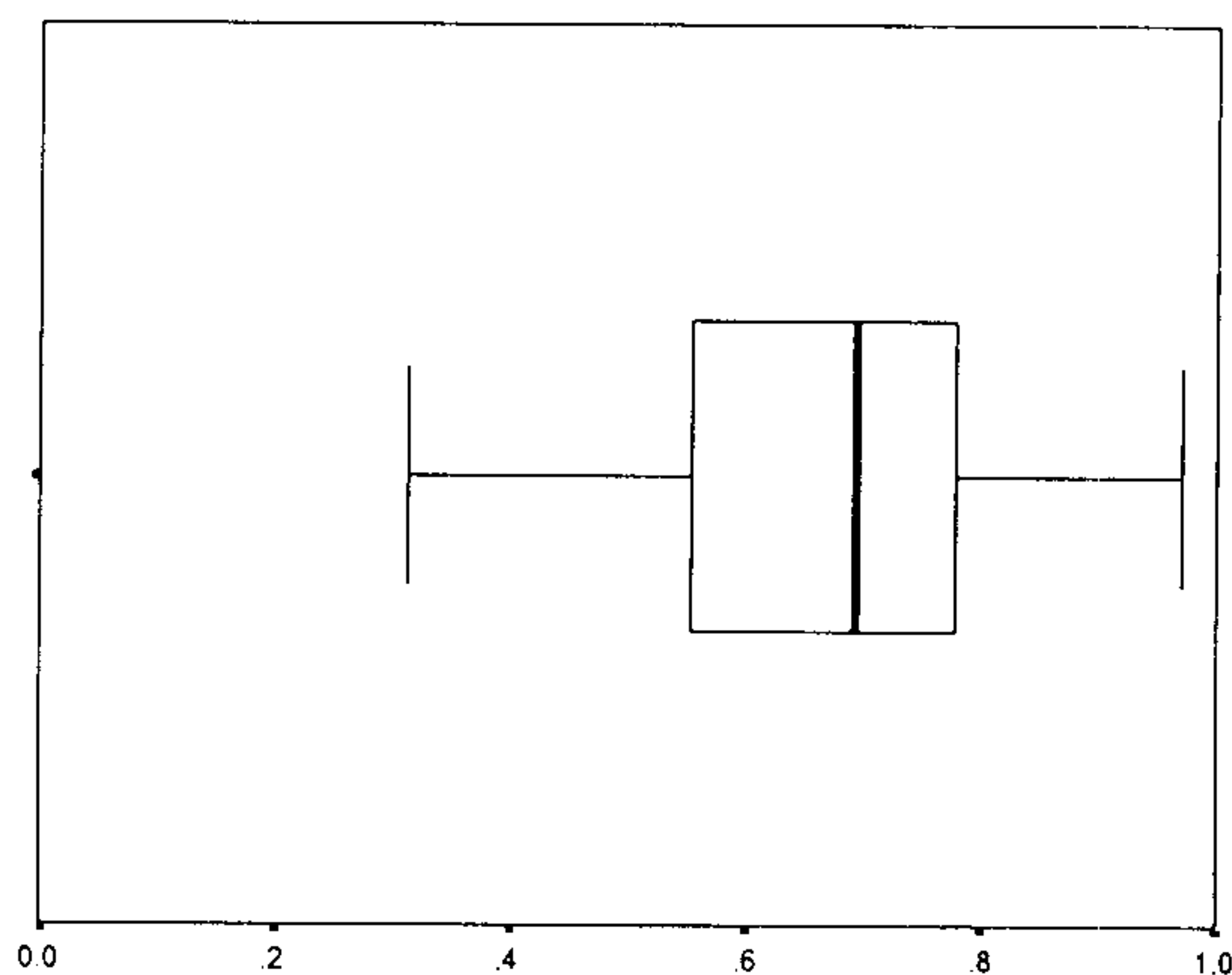
此題未提供任何數據，學生可自由使用工具測量面積，並檢驗對梯形面積公式意義的瞭解，在 2046 位受試兒童中，平均答對率為 63.39%，有 34% 的實驗班級其通過率未達九成，就班級平均而言，最低為 6%，最高為 100%，兩者相差 94%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 8%，最高為 100%，兩者相差 92%，顯示各校反應差異亦極大，而各題通過情形相當一致。

二、用算式把做法記下來。

((7)-(15)每題4分,(16)題6分,共42分)

11-13

(13)長 2 公里，寬 400 公尺的長方形土地的面積是多少公畝？也可以說是多少公頃？  
(100 平方公尺 = 1 公畝, 100 公畝 = 1 公頃)

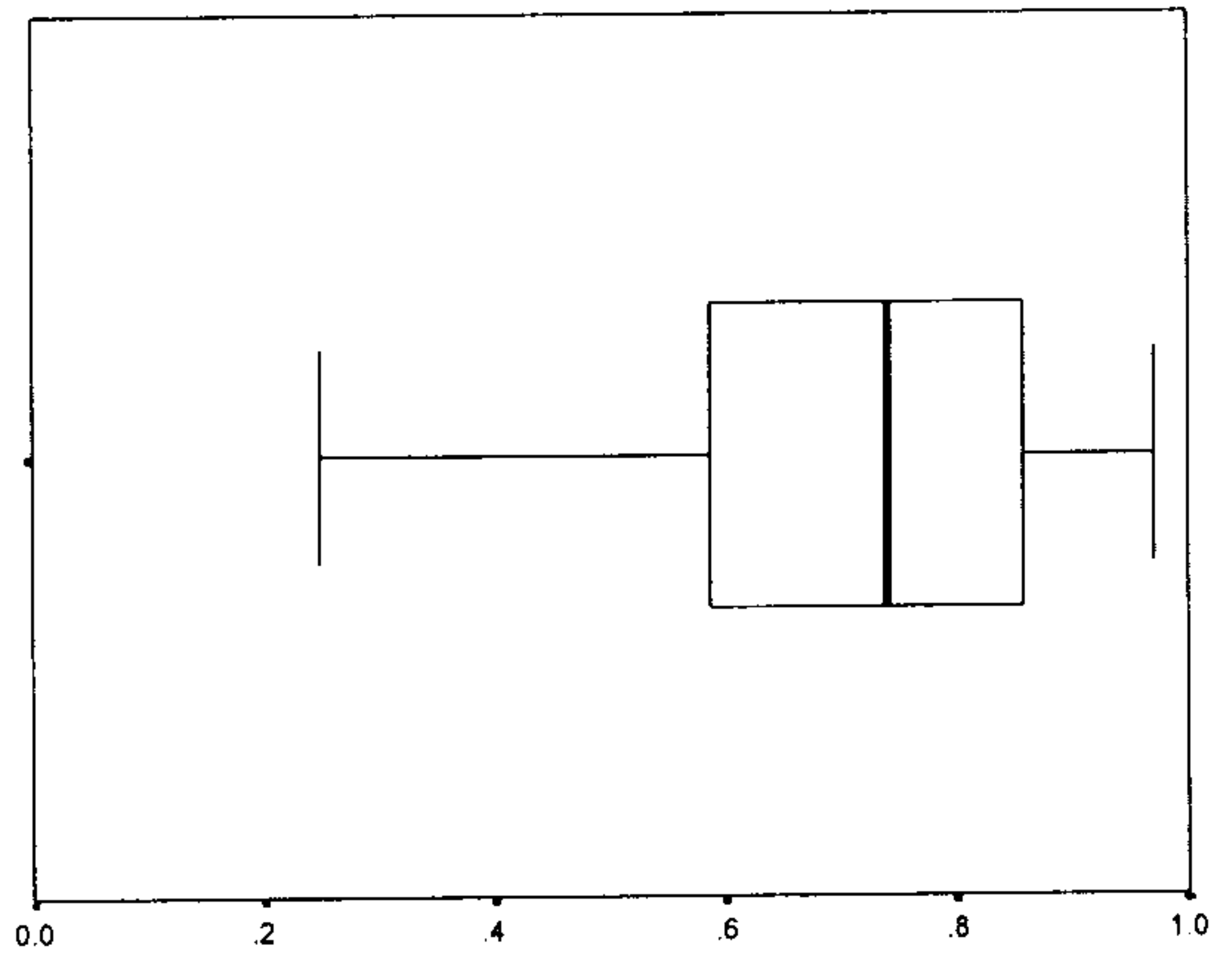
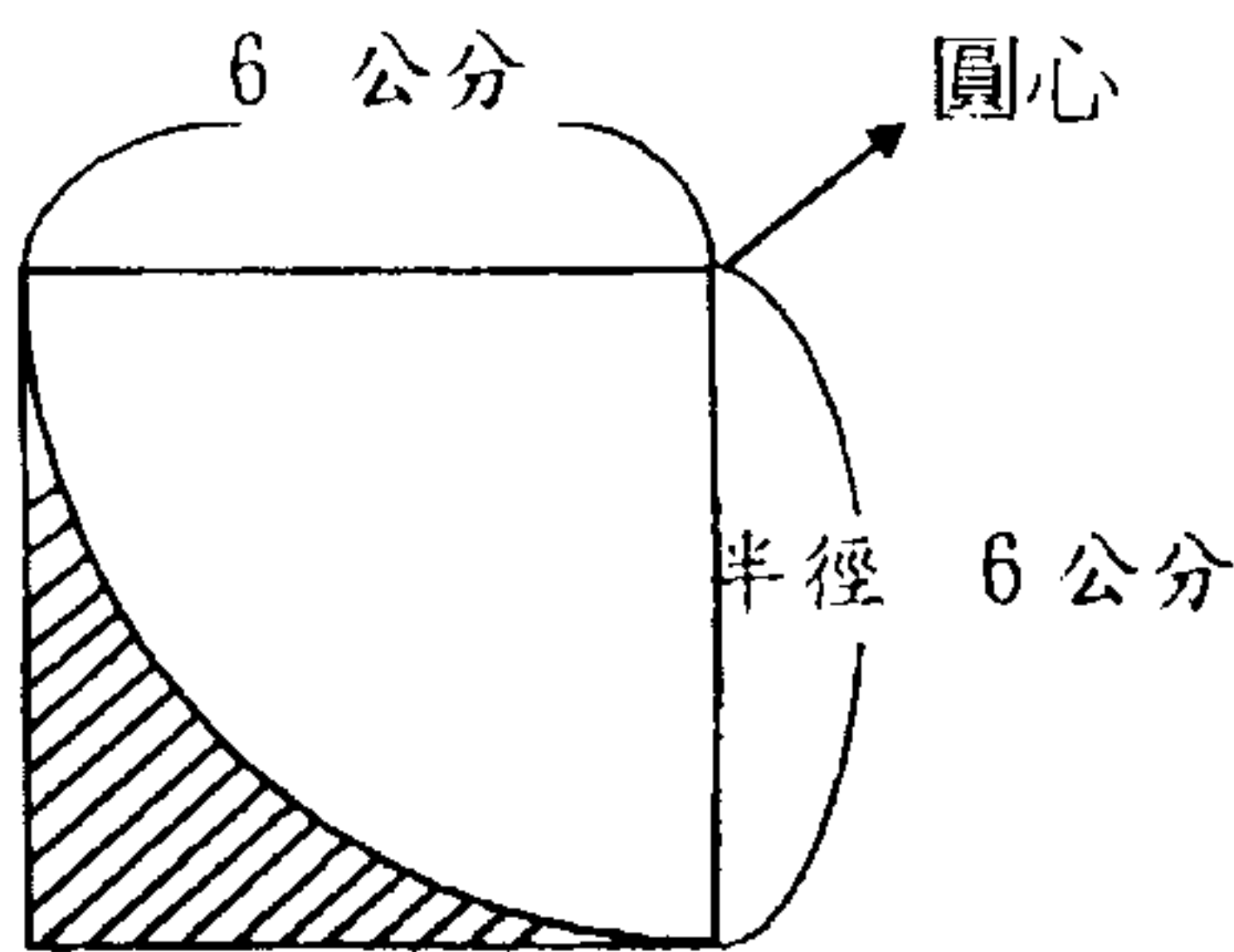


此題為不同單位量的化聚，先佈出兩個不同單位長度的邊長，提供學生判斷，再提供單位量間的化聚關係。在 2047 位受試兒童中，平均答對率為 67.79% ，有 32% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 31% ，最高為 97% ，兩者相差 66% ，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 43% ，最高為 94% ，兩者相差 51% ，顯示各校反應差異亦不小，此題因已提供不同單位量間的數量關係，故只能診斷出學生對單位量的不同意義的瞭解。

二、用算式把做法記下來。  
 ((7)-(15)每題 4 分，(16)題 6 分，共 42 分)

**11-15**

(15) 下圖中，斜線部份的面積是多少？(圓周率取 3)



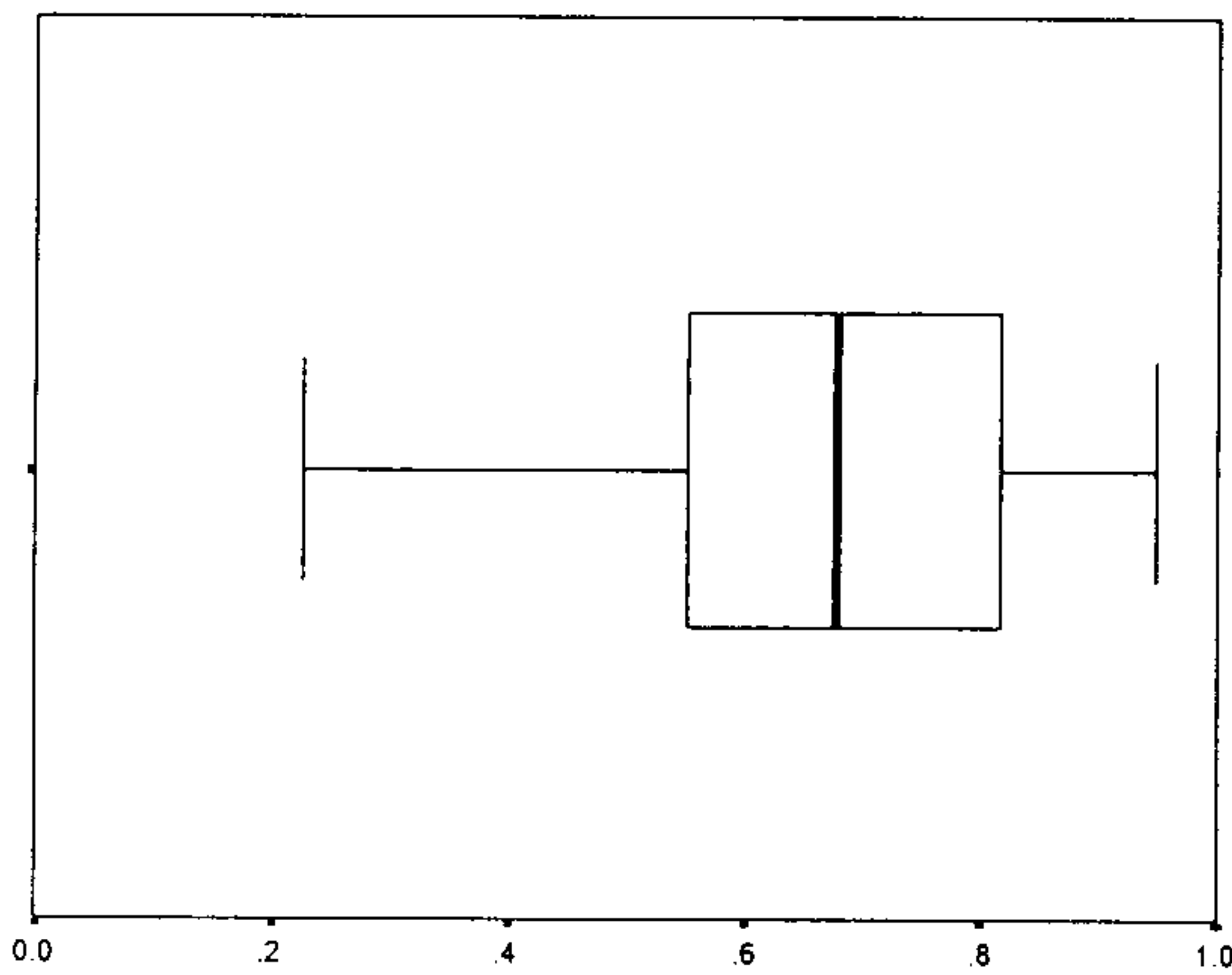
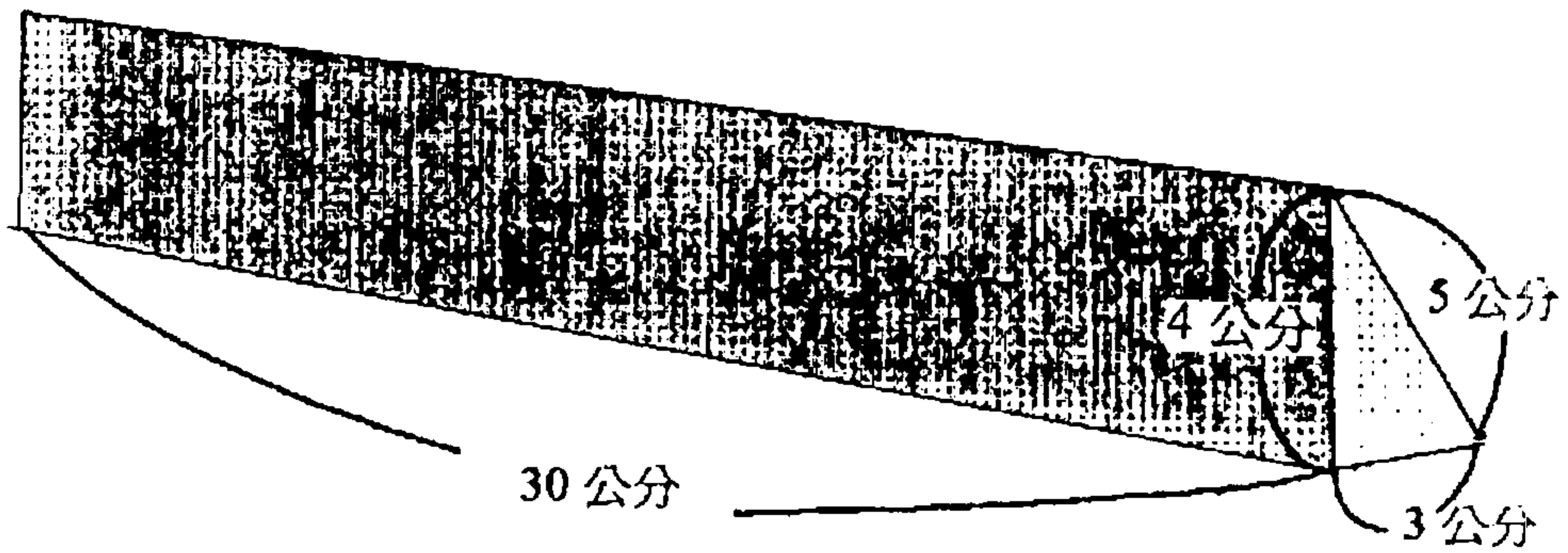
此題為複合圖形檢驗學生對正方形與圓形關係的瞭解，由於此類圖形可涉及到相當大的差異難度，如圖形間的交集、聯集關係等，但實驗教材在國小階段仍以視覺即可知覺到的切割關係為主。在 2047 位受試兒童中，平均答對率為 71.70% ，有 25% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 25% ，最高為 97% ，兩者相差 72% ，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 42% ，最高為 95% ，兩者相差 53% ，顯示各校反應差異亦不小，從通過情形與班級間差異觀之，圓的面積問題在六年級雖只比五年級增加七個百分點，但班級或學校間的差異則較為縮小。



二、用算式把做法記下來。((7)-(15)每題 4 分，(16)題 6 分，共 42 分)

11-16-①

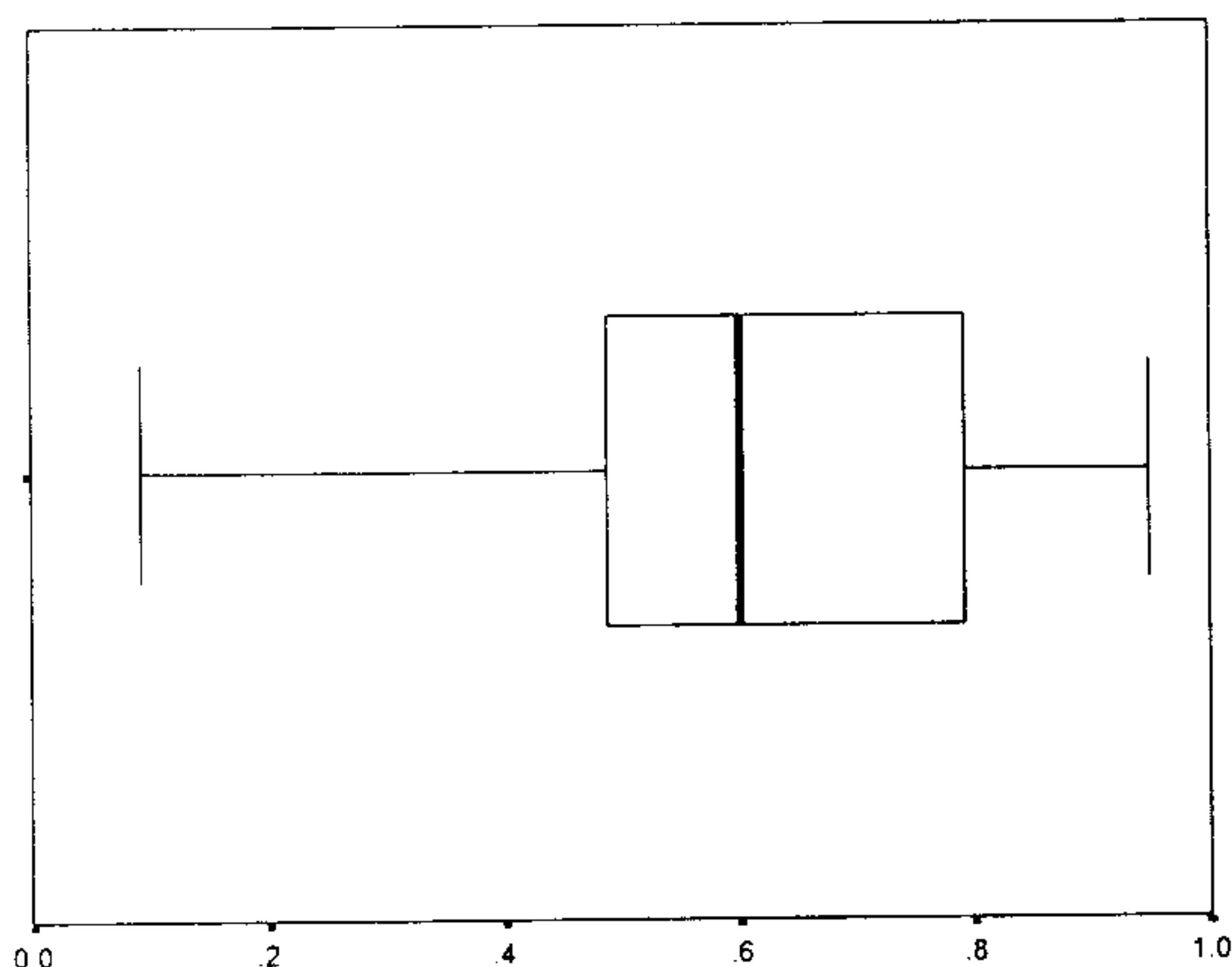
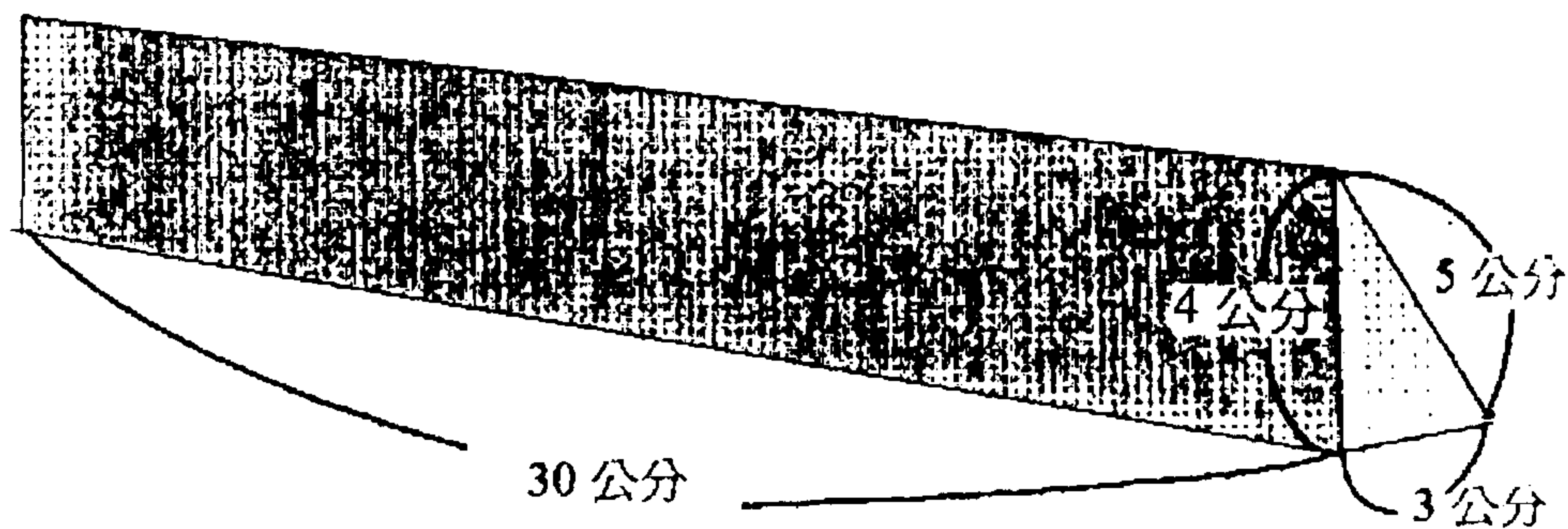
(16) 有一個三角柱，它的高是 30 公分，它的底是直角三角形，直角三角形直角的兩個邊的長度是 3 公分和 4 公分，第三個邊的長度是 5 公分。這個三角柱的體積是多少？



二、用算式把做法記下來。((7)-(15)每題 4 分，(16)題 6 分，共 42 分)

11-16-②

(16) 有一個三角柱，它的高是 30 公分，它的底是直角三角形，直角三角形直角的兩個邊的長度是 3 公分和 4 公分，第三個邊的長度是 5 公分。這個三角柱的表面積是多少？



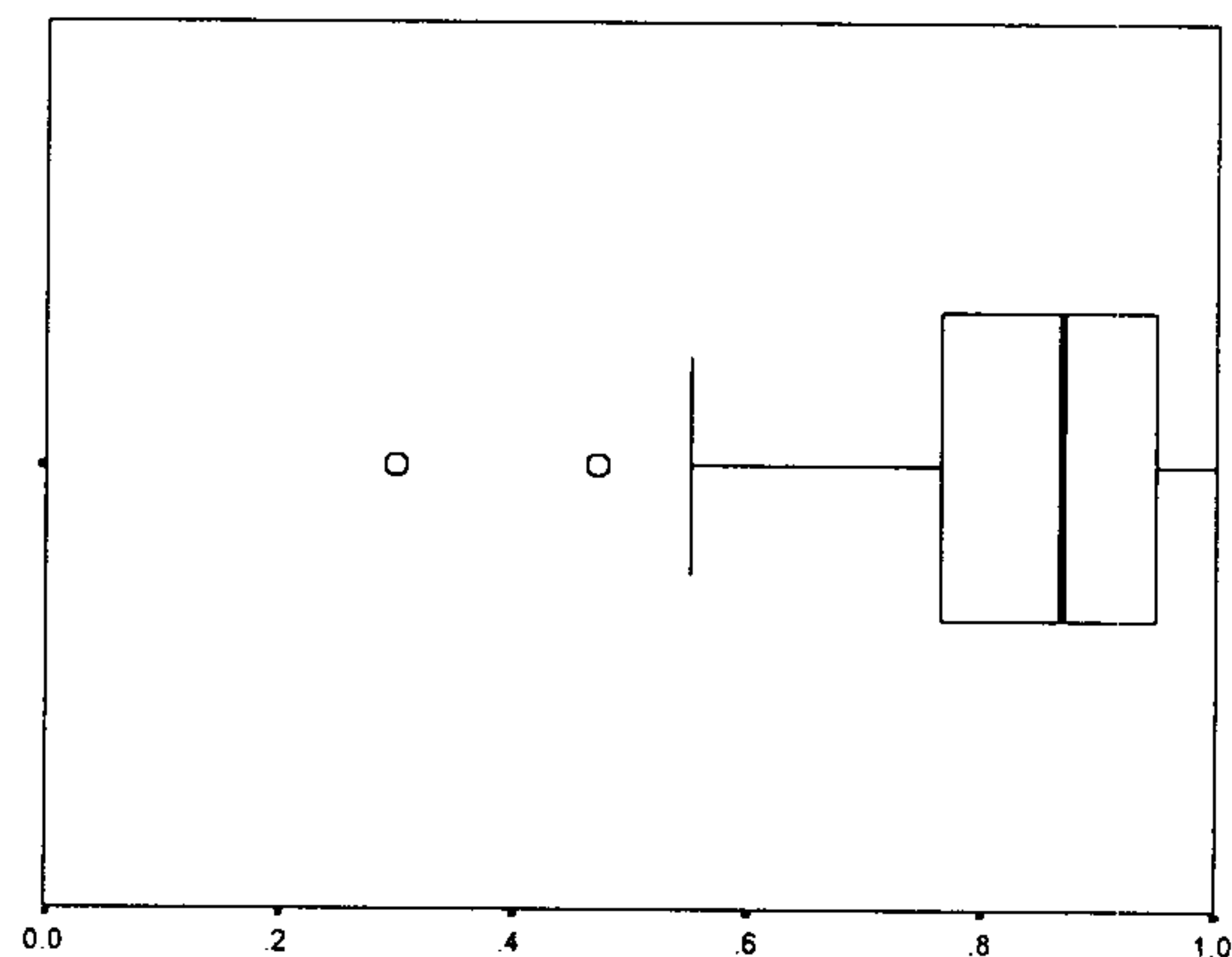
立體實物與平面圖形的瞭解，需具備空間轉換能力，表面積的解題活動，包括了幾何預測量概念的整合。在 2047 位受試兒童中，平均答對率為 60.26%，有 39% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 9%，最高為 95%，兩者相差 86%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 21%，最高為 85%，兩者相差 64%，顯示各校反應差異亦不小，此題先檢驗學生對立體展開圖的瞭解，以確定三角柱側表面的個數，形狀與大小，再檢驗測量概念公式的應用，結果顯示通過率只有六成，顯示學生空間概念仍有不足。

三、填填看：((17)-(22)每題 3 分，(23)題每格 2 分，共 22 分)

1000 毫升=1 公升  
 1000 公斤=1 公噸  
 100 平方公尺=1 公畝  
 100 公畝=1 公頃

**11-21**

(21)  $\frac{1}{2}$  公畝 = ( ) 平方公尺

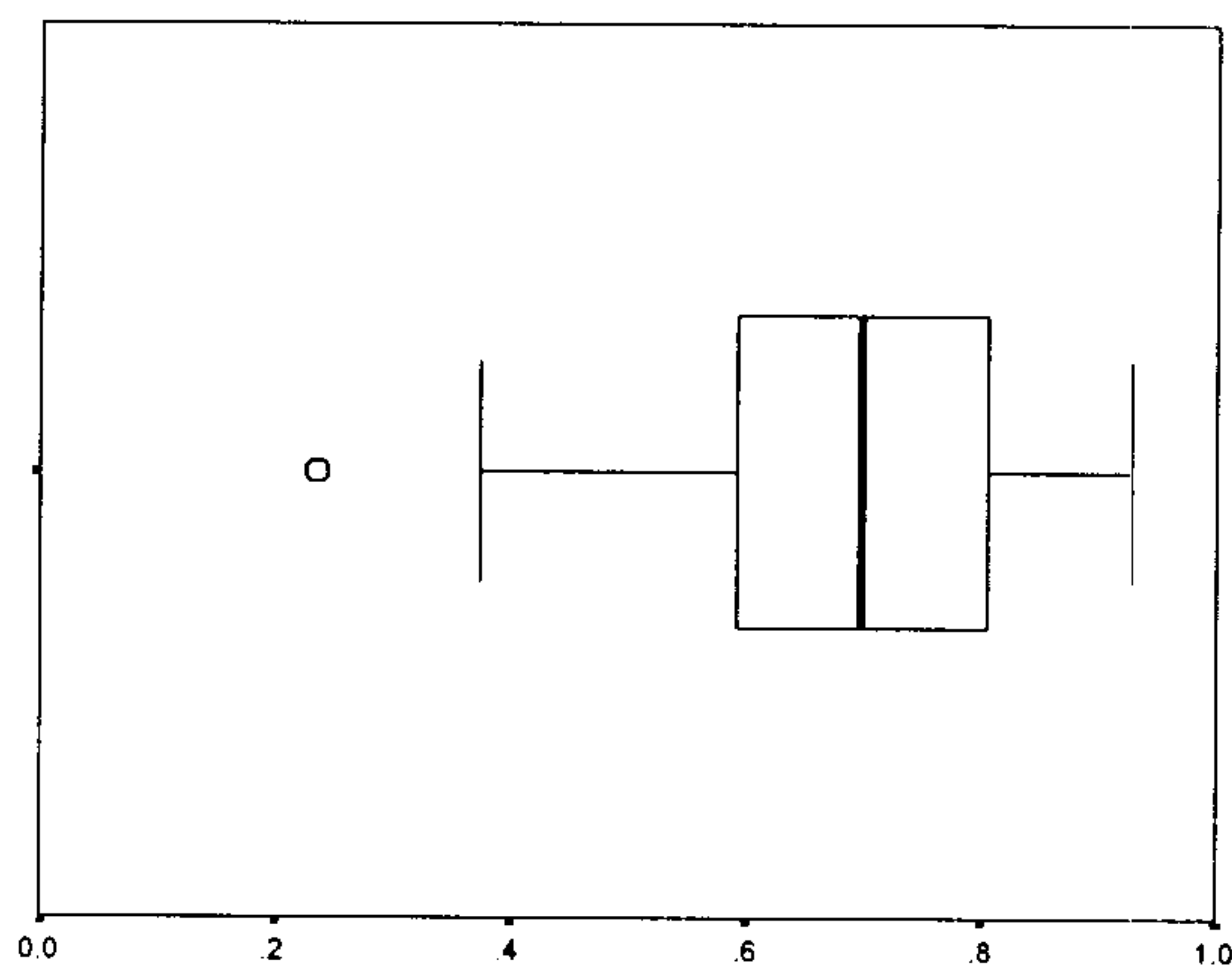


三、填填看：((17)-(22)每題 3 分，(23)題每格 2 分，共 22 分)

1000 毫升=1 公升  
 1000 公斤=1 公噸  
 100 平方公尺=1 公畝  
 100 公畝=1 公頃

**11-22**

(22)  $30\frac{1}{2}$  公頃 = ( ) 公畝



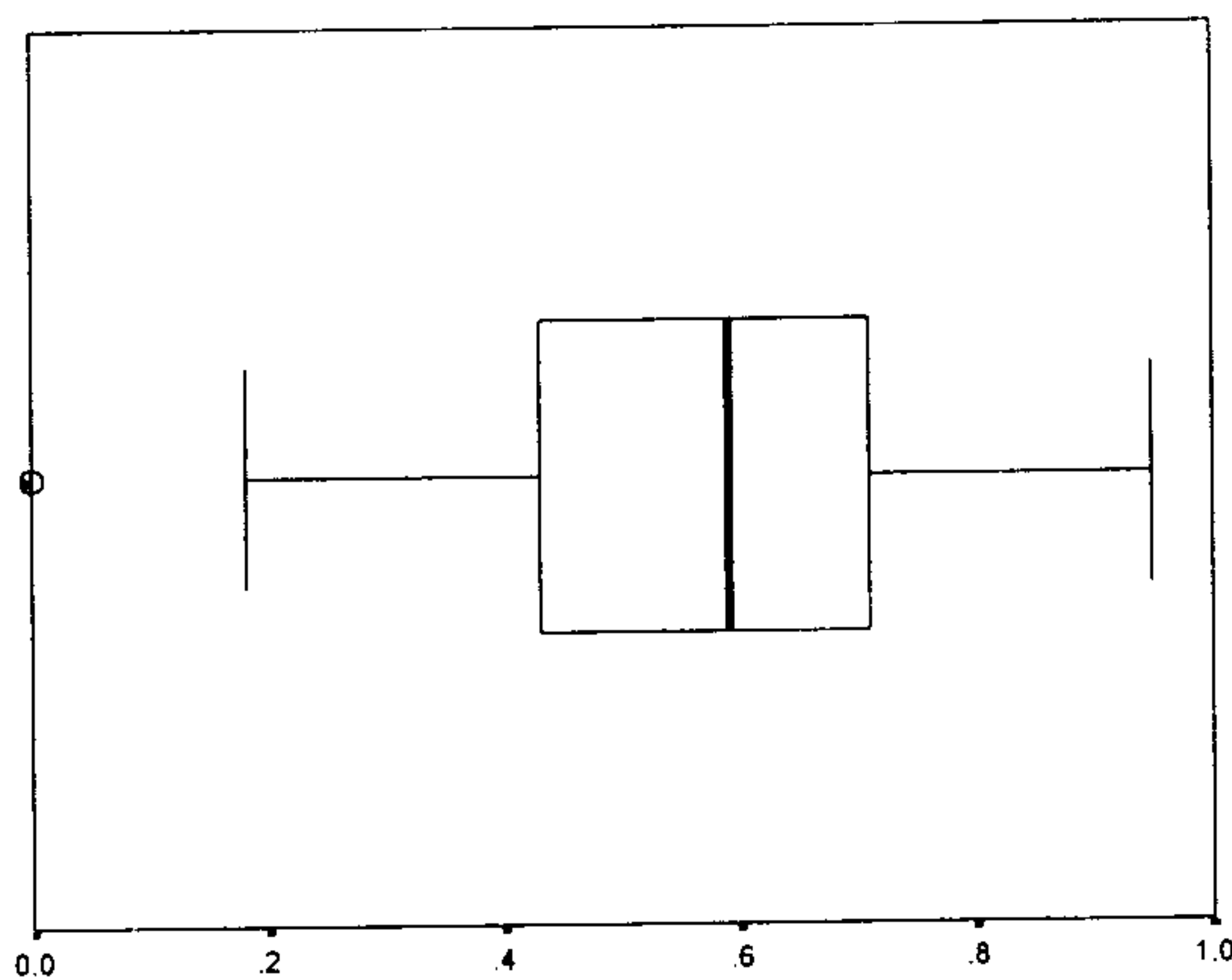
不同單位間的化聚關係是建立在量感的培養上，故均透過實作活動察覺兩量間的關係，此時均以整數個為單位量數進行之，兩者間的轉換關係釐清後，再進行分數個的單位點數，此題即是分數個的單位量化聚關係，且均為大單位化成小單位量，但第 1 小題為單位分數，第 2 小題則為帶分數。11-21 在 2047 位受試兒童中，平均答對率為 84.56%，有 9% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 30%，最高為 100%，兩者相差 70%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 30%，最

高為 100% ，兩者相差 70% ，顯示各校反應差異亦極大。11-22 平均答對率為 70.04% ，有 31% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 24% ，最高為 93% ，兩者相差 69% ，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 42% ，最高為 93% ，兩者相差 51% ，顯示各校反應差異亦不小，從通過率觀之，帶分數概念較單位分數為難。

五、填填看：(每題 2 分，共 8 分)

12-12

(12) 有甲、乙兩個長方形。甲長方形的長邊是  $7\frac{3}{5}$  公尺，寬是  $4\frac{3}{4}$  公尺。乙長方形的寬邊和甲長方形的寬邊等長，長邊的長是 1 公尺。甲長方形的面積是乙長方形的 ( ) 倍。



此題為檢驗學生對面積公式意義的瞭解與應用，其可透過邊長與面積關係性的瞭解，察覺甲、乙兩長方形面積的比例關係，亦可從工具上直接利用公式分別算出甲、乙的面積，再比較其大小。在 2216 位受試兒童中，平均答對率為 57.78% ，有 48% 的實驗班級其通過率未達七成 就班級平均而言，最低為 0% ，最高為 95% ，兩者相差 95% ，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 0% ，最高為 83% ，兩者相差 83% ，顯示各校反應差異亦極大，從通過率觀之，學生對文字題的理解顯然較不足，近乎五成者未達到預期的水準，然有些班級全班均為通過，或許因課本尚未出現類似的題型所造成的。

六、從下邊的方格中選擇適當的單位名稱，填入( )中：(每格 2 分，共 16 分)

1 公秉=1000 公升

1 平方公里=100 公頃

平方公尺  
平方公分  
平方公里  
公分  
公克  
毫升  
公斤  
公升  
公頃  
公秉  
公噸

(15)陽明國小校園的面積是 2.5( )；

12-15-①

台北市的面積約

272( )；

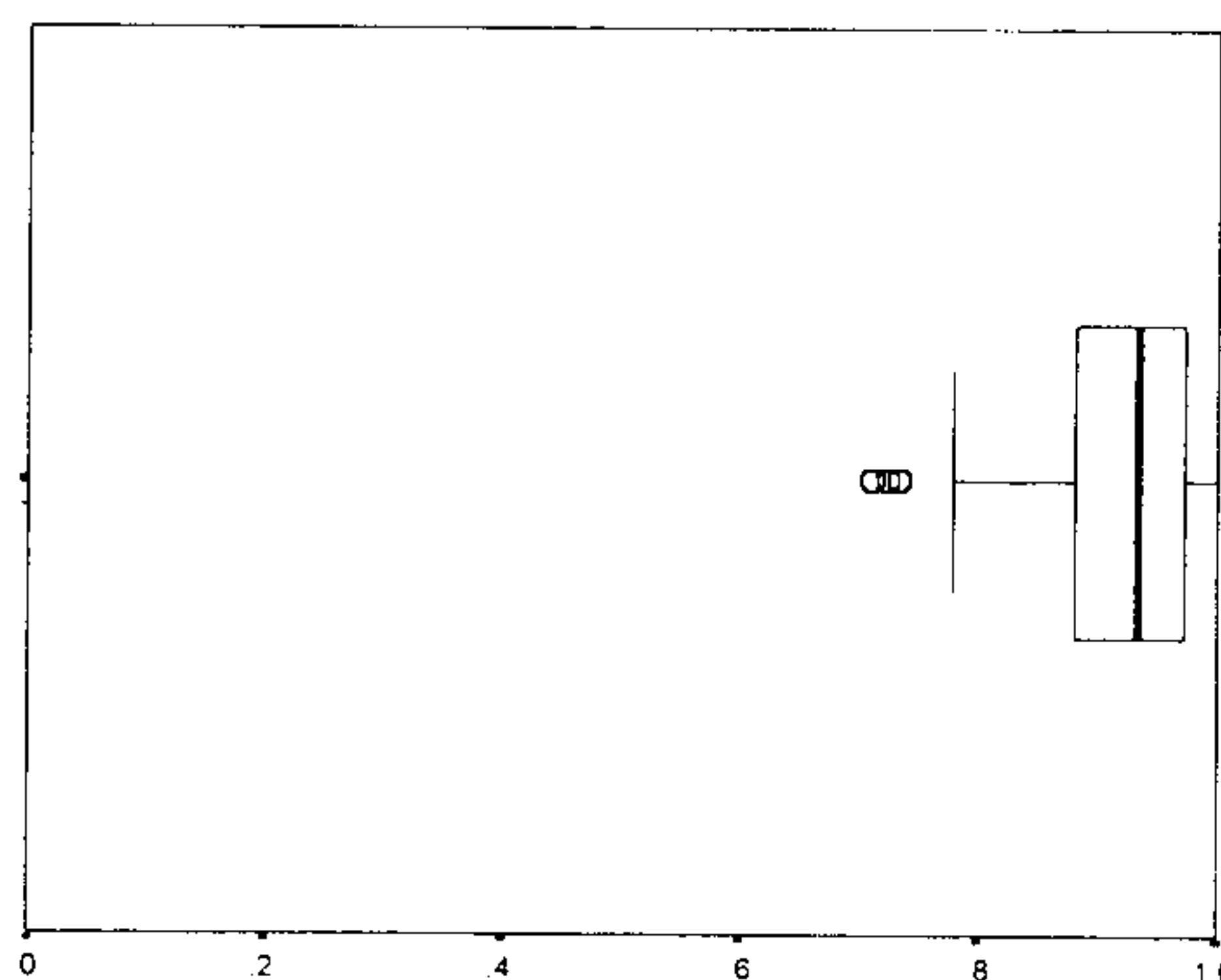
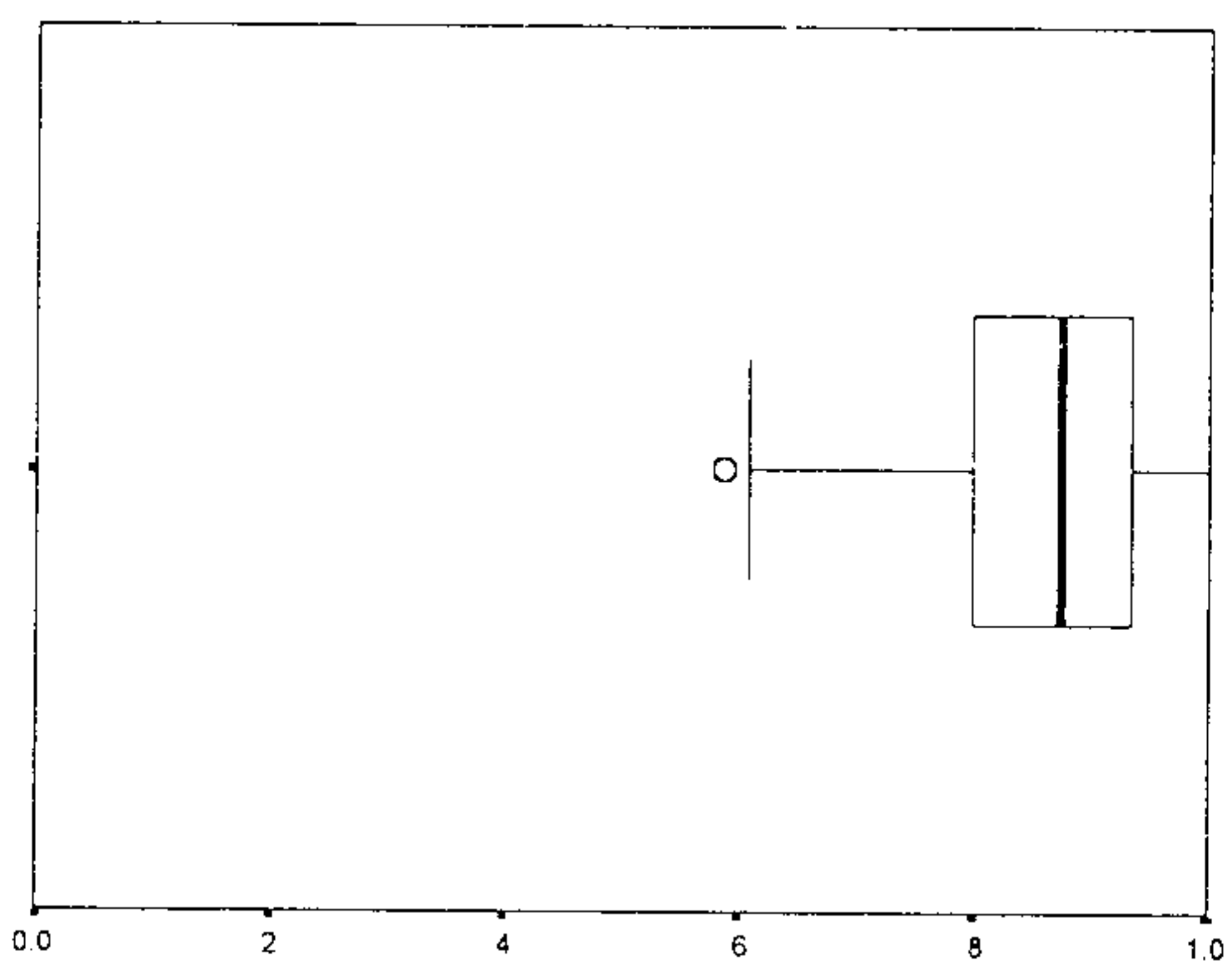
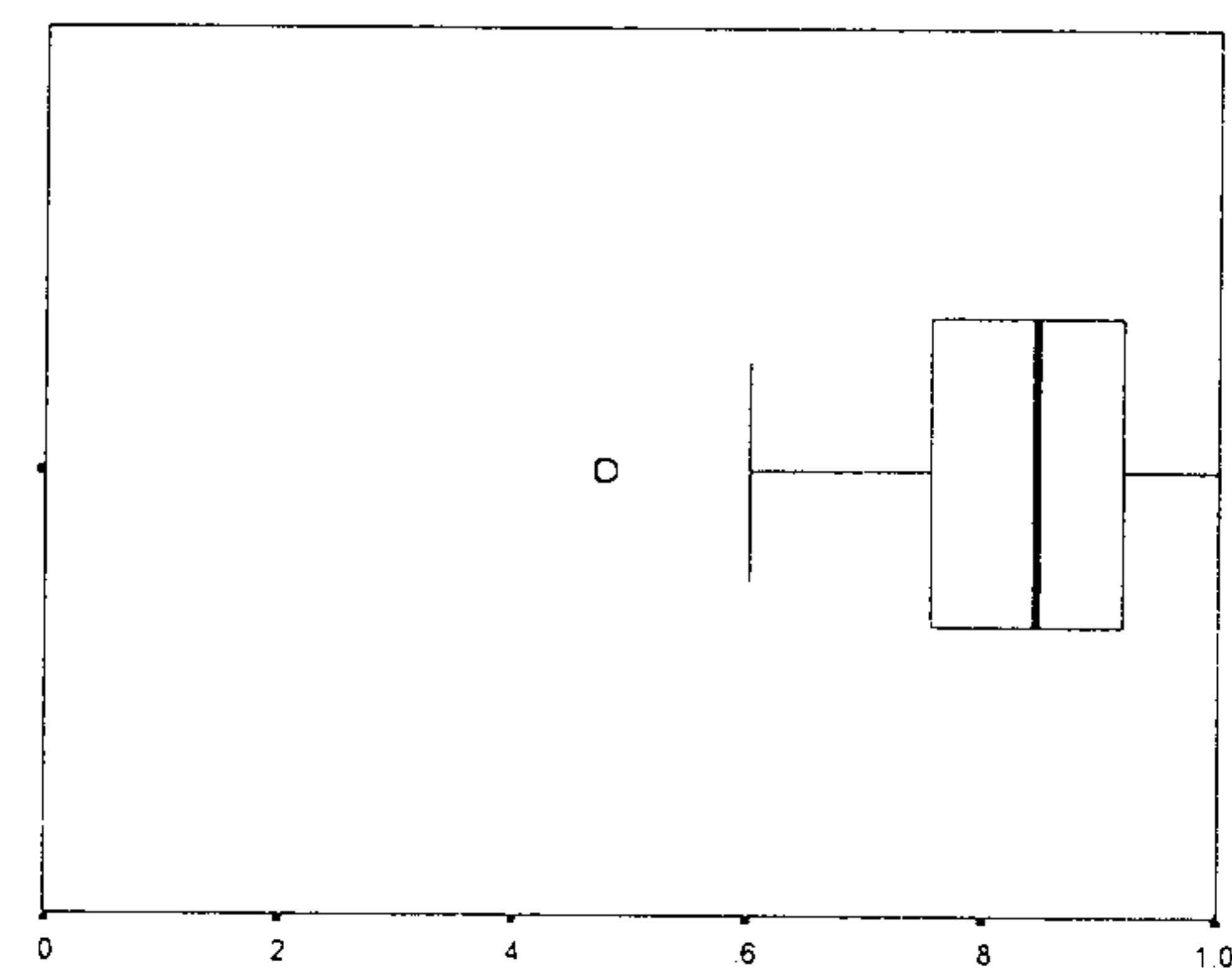
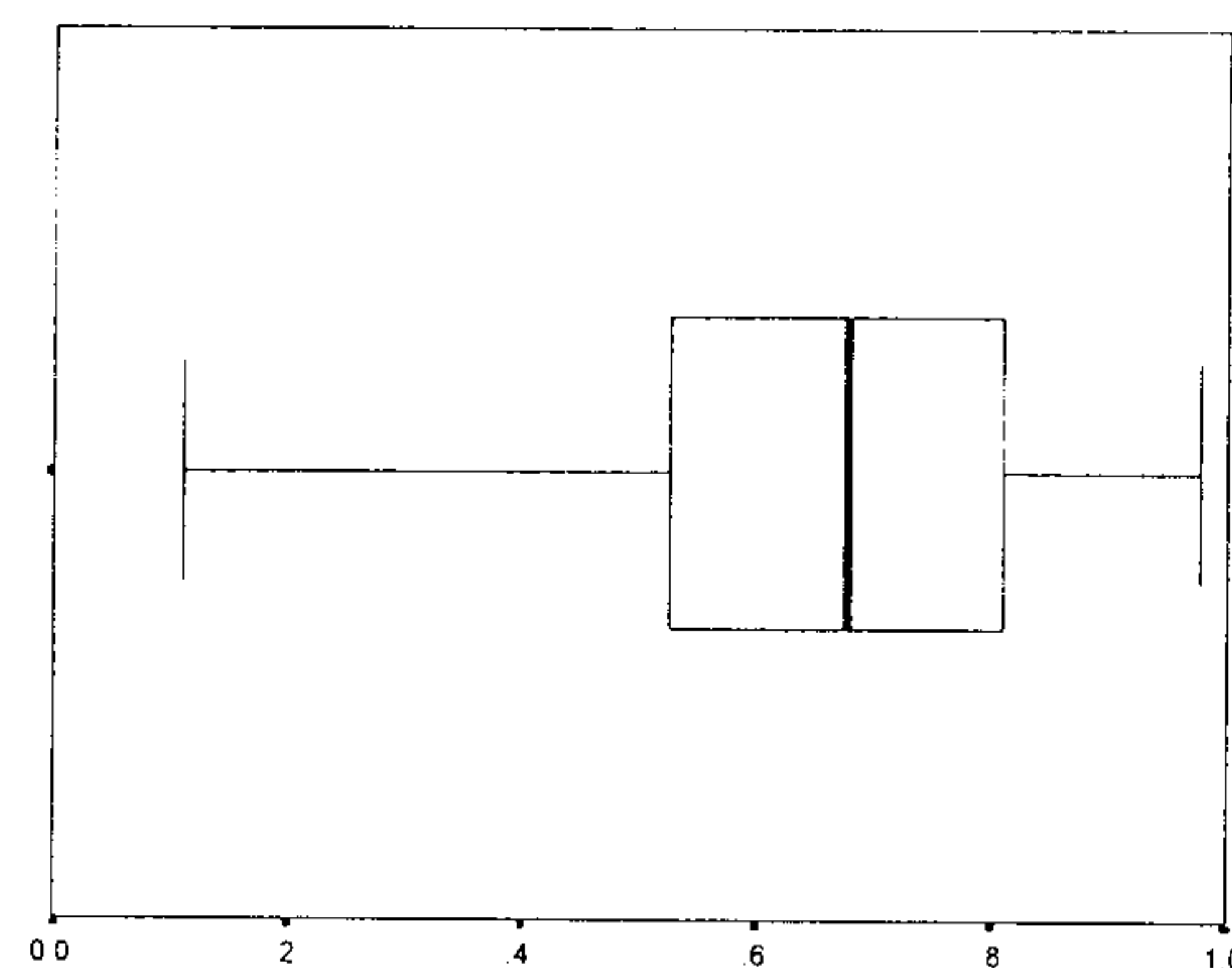
12-15-②

和平國小的一個教室的面積是 98( )。

12-15-③

兒童的數學課本封面的面積是 494( )。

12-15-④



單位制度的訂定與單位量的選擇是測量的基本概念，此題即為判斷如何選擇適當的單位量，第 1 小題在 2296 位受試兒童中，平均答對率為 66.03%，有 38% 的實驗班級其通過率未達七成。就班級平均而言，最低為 11%，最高為 98%，兩者相差 87%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 22%，最高為 97%，兩者相差 75%，顯示各校反應差異亦極大。第 2 小題平均答對率為 83.54%，只有 6% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 48%，最高為 100%，兩者相差 52%，就學校平均而言，最低為 68%，最高為 100%，兩者相差 32%，第 3 小題平均答對率為 86.32%，有 5% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 59%，最高為 100%，兩者相差 41%，就學校平均而言，最低為 67%，最高為 100%，兩者相差 33%，第 4 小題平均答對率為 92.42%，全部實驗班級其通過率均達預期水準，就班級平均而言，最低為 71%，最高為 100%，兩者相差 29%，就學校平均而言，最低為 78%，最高為 100%，兩者相差 22%，上述題中發現，其中第 3 題填答情形一致性較高，唯獨對校園面積的認知，有較大的差異，此可能與兒童所熟悉的生活環境與經驗有關，教室、書本均為其生活中的一部份，但校園大小的比較則會有相對的差異，在不熟悉陽明國小校園的前提下，的確很難做適當的選擇。

## 參、體積方面

### 一、教材綱要

根據 82 年教育部公布之國民小學課程標準，各年級體積教材綱要內容如下：

三年級---(1)體積的認識(2)體積的直接比較(3)使用以立方公分為刻度單位的工具。

四年級---(1)體積的間接比較(2)認識立方公分的意義(3)以立方公分為單位，進行實測及估測的活動(3)透過對長方體的分析綜合，認識長方體體積的求法(4)長方體體積求法公式的應用。

五年級---(1)認識立方公尺的意義(2)以立方公尺為單位，進行實測及估測的活動(3)認識立方公分及立方公尺間的關係(4)立方公分及立方公尺的化聚。

六年級---(1)認識體積及容積的關係(2)認識公秉的意義(3)以公秉為單位，進行實測及估測的活動

### 四、實驗教材設計

由於體積是描述立體空間的大小，立體圖形是屬於三維物件轉換成二維平面的圖象表徵，此屬於幾何的空間轉換能力，生活經驗中可時常發現

具體實物與立體圖形的對照比較，如相片等，故實驗教材中自第一冊起即有透過實物與圖象的對應活動，一年級即從實物中分辨出類似長方體、圓錐體、球體、角錐等模型的形體，但不比較大小。二年級則利用各種積木，堆積造型並數出各積木的數量，培養描述體積的先備經驗，再利用相同數量全等積木，比較形體大小，經驗等積異形初步概念。並從長方體的構成元素分析立體物的視圖與透視圖，培養學生空間轉換能力。第六冊第九單元活動四首次引入體積的語言，透過兒童對物件大小的既有經驗，將生活語言與數學語言產生連結，以達到以數學語言進行溝通的目的，如從兩個皮球的大小比較，察覺被比較的量即是比較兩者體積的大小，由於在此之前缺乏具共識的語言，而以肚子較大或表面較大表示之，迷思概念往往即在缺乏有效溝通模式下形成，故國小數學實驗課程中體積教材設計如前述於低年級進行立體實物與立體圖形的連結後，自第六冊則分別從立體實物操作、立體圖形操作、推理關係三方面描述，此時 V 代表冊別，u 代表單元別，a 代表活動別，例 V6/u11/a4 表示第六冊第十一單元第四活動。

#### (一) 立體實物操作方面

先透過兩物的比較活動，如比較兩皮球大小或觀察一物的改變，如吹氣球活動等，以確定被比較量即是物體佔有空間大小的改變情形，並形成用「體積」的語言以方便溝通的共識，進而瞭解體積即是物體占空間大小的意義 (V6/u11/a4)。其次，經由直接比較活動察覺兩物的包含關係，即表示體積的大小關係，如保鮮盒的比較 (V6/u11/a5)，其次再透過個別單位的堆疊，複製全等的立體物，即製造一個體積相等的物件，再利用此一個別單位測量的結果，以描述原物體體積大小，如電視機有 60 個錄影帶盒這麼大、鉛筆盒有 40 個橡皮擦這麼大 (V6/u11/a6)，由於個別單位的選擇必須建立在對單位量有共識的基礎上，故各國度量衡機構會有普遍單位，如 1 立方公分與 1 立方公尺 的引入，形成描述體積大小的單位體積，此時，若用了 10 個單位體 (如  $1\text{cm}^3$ ) 堆成一個全等的立體物，即可用  $10\text{cm}^3$  描述該物體積 (V7/u9/a8)，亦可經驗到等量的單位體積可堆疊成不同立體造型，而其體積相等的事實，此即是等積但異形的初步概念 (V7/u9/a9)。

第八冊從不規則的立體物到規則的長方體或正方體，長 5 公分、寬 4 公分、高 3 公分的長方體，透過單位體積的堆疊，察覺長邊 5 公分一排可以排 5 個，寬邊 4 公分可以排 4 排，高邊 3 公分則可排 3 層，故體積是  $5(\text{個}) \times 4(\text{排}) \times 3(\text{層})$  共有 60 個單位體積，此即是獲得體積公式的前置經驗 (V8/u8/a6)。第九冊則設計流程如前述，只是以較大單位量的  $1\text{m}^3$  為單位體積進行實測 (V9/u6/a4)。第十冊則為圖像推理活動，能瞭解邊長與堆疊個數關係，若仍未達此階段者，則可於長方體物件上，引導切出堆疊

痕跡，察覺物體體積與單位體積的關係(v10/u3/a5)。

## (二) 立體圖形操作方面

立體圖形的辨識，涉及空間能力的轉換，其轉換過程又受是否提供單位量的影響，故教材設計可從有無於圖形上提供格子為分類的標準。

### 1. 提供單位量的立體圖形——即含有格子的圖形

單位量的確定與否即呈現在立體圖形的格子點數上，第四冊進行實物與視圖的對應，如將實物與平面立體圖形對照，使學生能從平面認識立體圖形(V4/u6/a2)。再透過說、讀、聽、做的練習加強實物與平面立體圖形的連結(V4/u6/a3)，其次，再仿造一個實心的長方體或正方體，其大小與原立體物大小相同，從實作活動培養空間能力(V4/u6/a5)與獲得等積異形的初步經驗(V4/u6/a6)。單位量堆積過程與有格子的立體圖形的連結，建立空間轉換能力(V7/u9/a5)，以上透過實作與視覺比較，較易複製全等的立體物，故難度較低，可透過單位體積的堆積與計數解決其體積問題，最後能從有格子的立體圖形中描述體積的大小(V7/u9/a7)。

### 2. 未提供單位量的立體圖形——即不含有格子的圖形

體積概念的建立，不是透過公式的記憶，而是對單位體積的堆積活動抽象化的結果，而單位量的選擇即是測量概念發展的基礎，在未提供格子的立體圖形上，不易從格子點數，只有從實作經驗中察覺邊長與單位個數的關係，如長5公分、寬4公分、高3公分的長方體，察覺長邊5公分一排可以排5個，寬邊4公分可以排4排，高邊3公分可以排3層(V8/u5/a5)，此種堆疊活動的抽象結果，較易產生自定單位量的心象，而從邊長的關係連結到堆積的痕跡，形成心象切割的圖象，此時，單位體積與立體物體積的關係，即如建立在已具備切割記錄的有格子立體物上，儘管圖示上未呈現切割的盒子痕跡，但心象上已有切割的紀錄。

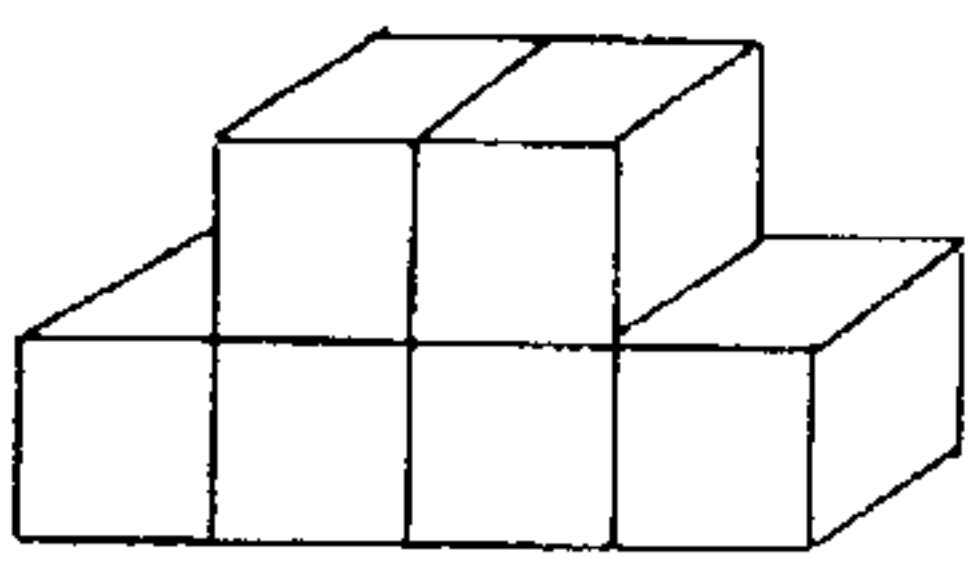
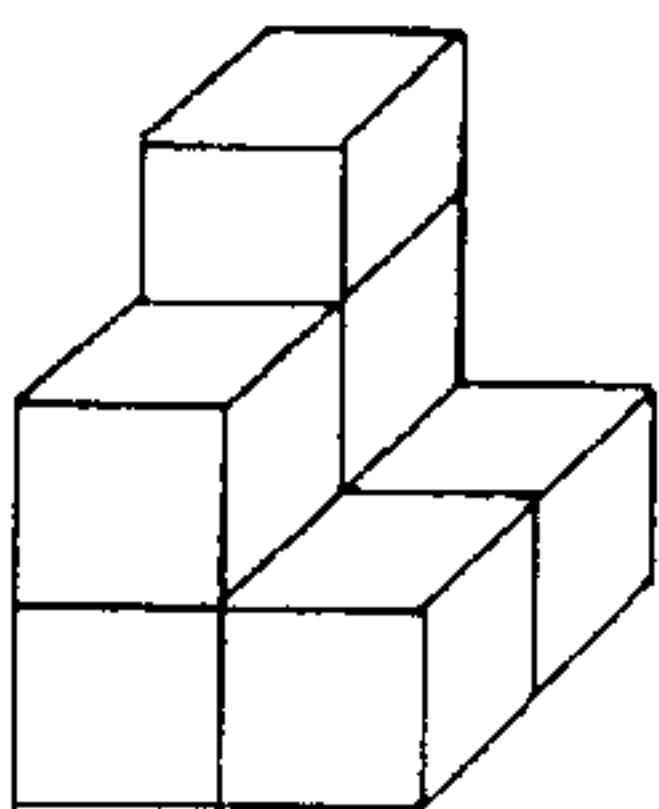
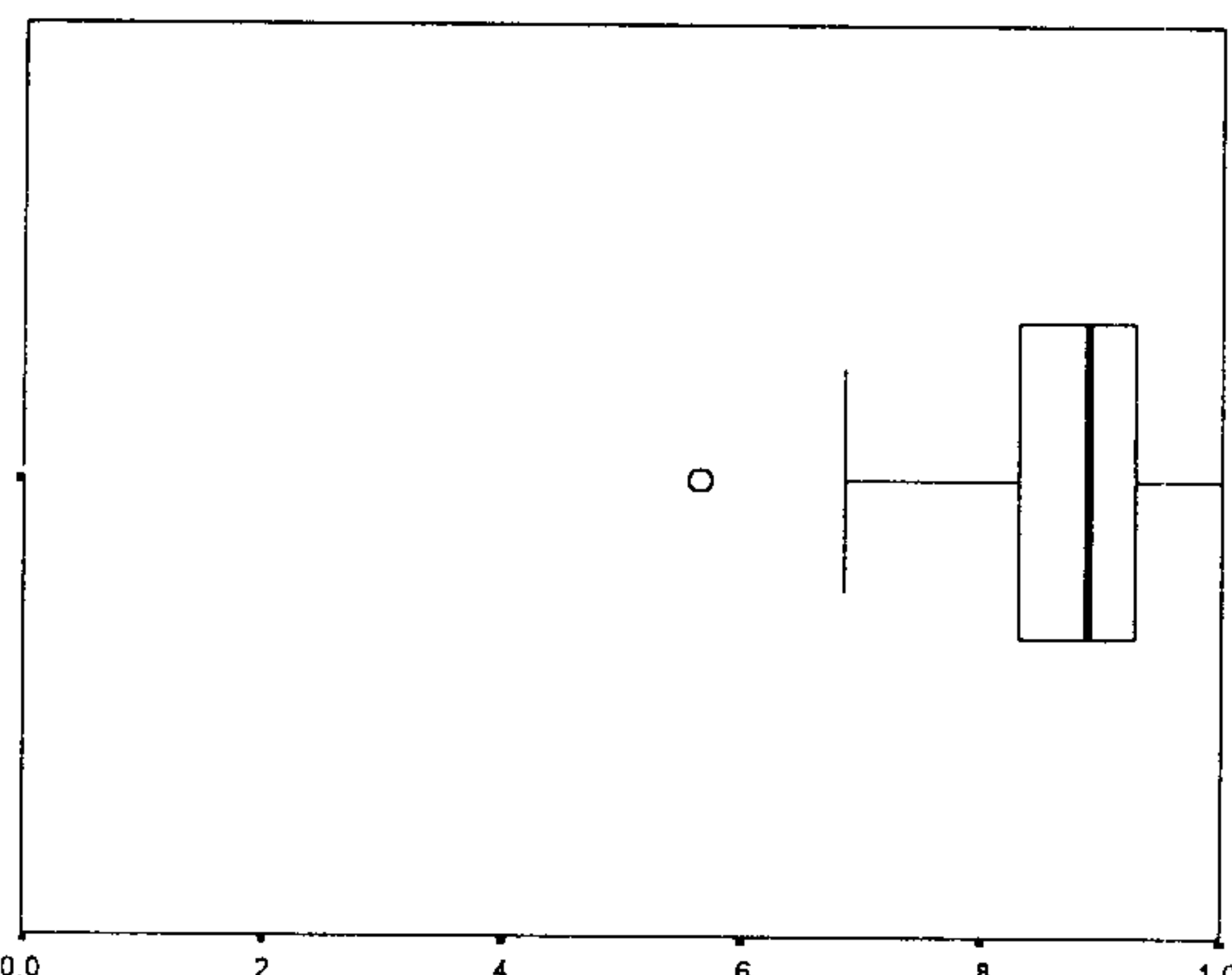
## (三) 推理關係的連結方面

除了上述實物與圖象的操作活動以描述體積大小外，更應從不同層面分析體積的意義。根據 Linda, Maragaret & Olwen (1984) 認為體積包含外體積、內體積、排他性體積與液積、容量，故除了從外部看到物體占空間的大小外，亦應考慮到物體的實心與空心的差異，物體內部中空部份即是器皿最大的負載容量，即是內體積，透過單位體積的點數加以描述，又稱為容積，透過水量的刻度報讀即是液量，其占空間大小用單位體積描述又稱液積，此時兩者的連結即表示了體積與容積間的轉換關係(V11/U2/a3)。除此之外，不規則物體體積不易透過堆積活動中精確描述，而是透過容量與容積間的轉換關係，察覺物體體積與容量關係，此又稱為排他性體積(V12/U3/a3)。



### 五、總結性評量分析：

根據國小數學實驗班期末總結評量，體積問題共計 9 題，茲分別逐題分析之。

<p>七、做做看、數數看：(每題 2 分共 4 分)</p> <p><b>6-25</b></p> <p>(25) 下面兩個立體圖形中，哪一個體積大？大的打「√」</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"><div style="text-align: center;"> ( )</div><div style="text-align: center;"> ( )</div></div>	
--	--

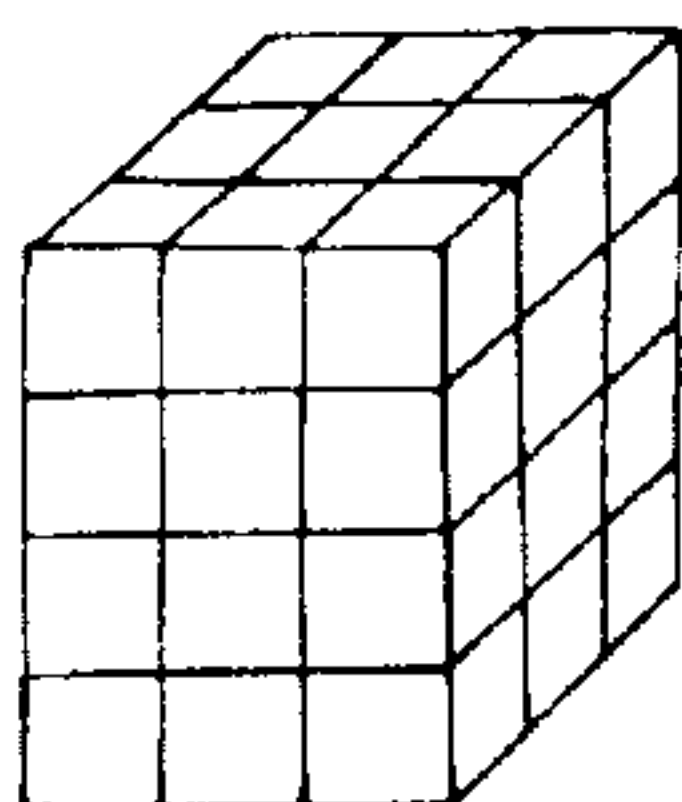
比較兩物件體積時，必需透具體實物的比較活動描述大小，再分析其所描述的比較策略，以了解兒童的體積概念發展層次，此種評量往往以實作評量為佳，但若需透過紙筆測驗，則空間轉換能力不可缺，需先將立體物件置於二維平面上的空間轉換能力。

根據皮亞傑兒童認知發展層次，兒童在七歲前仍屬於具體操作期，雖然第四冊即進行立體物與立體物視圖間的連結，但仍屬於具體物操作活動，尚無測量的意義，至三年級才首次引入體積的語詞與透過堆積操作過程烙下的心象痕跡與實物和視圖的比對連結，以建立立體圖形大小比較的初步概念，從 6-25 在 2779 名的受試兒童中，平均答對率 87.41%，有 15% 的實驗班級其通過率未達八成，就班級平均而言，最低為 57%，最高為 100%，兩者相差 43%，顯示班級反應差異不小，就學校平均而言，最低為 65%，最高為 100%，兩者相差 35%，顯示各校反應差異亦不小，此時兒童大多能從有格子的視圖中點數單位個數。

三、填填看：(第(9)-(14)題，  
每格 2 分；第(15)、(16)  
題，每格 1 分；共 32 分)

7-14

(14) 這是用 1 立方公分積木堆積  
成的立體。

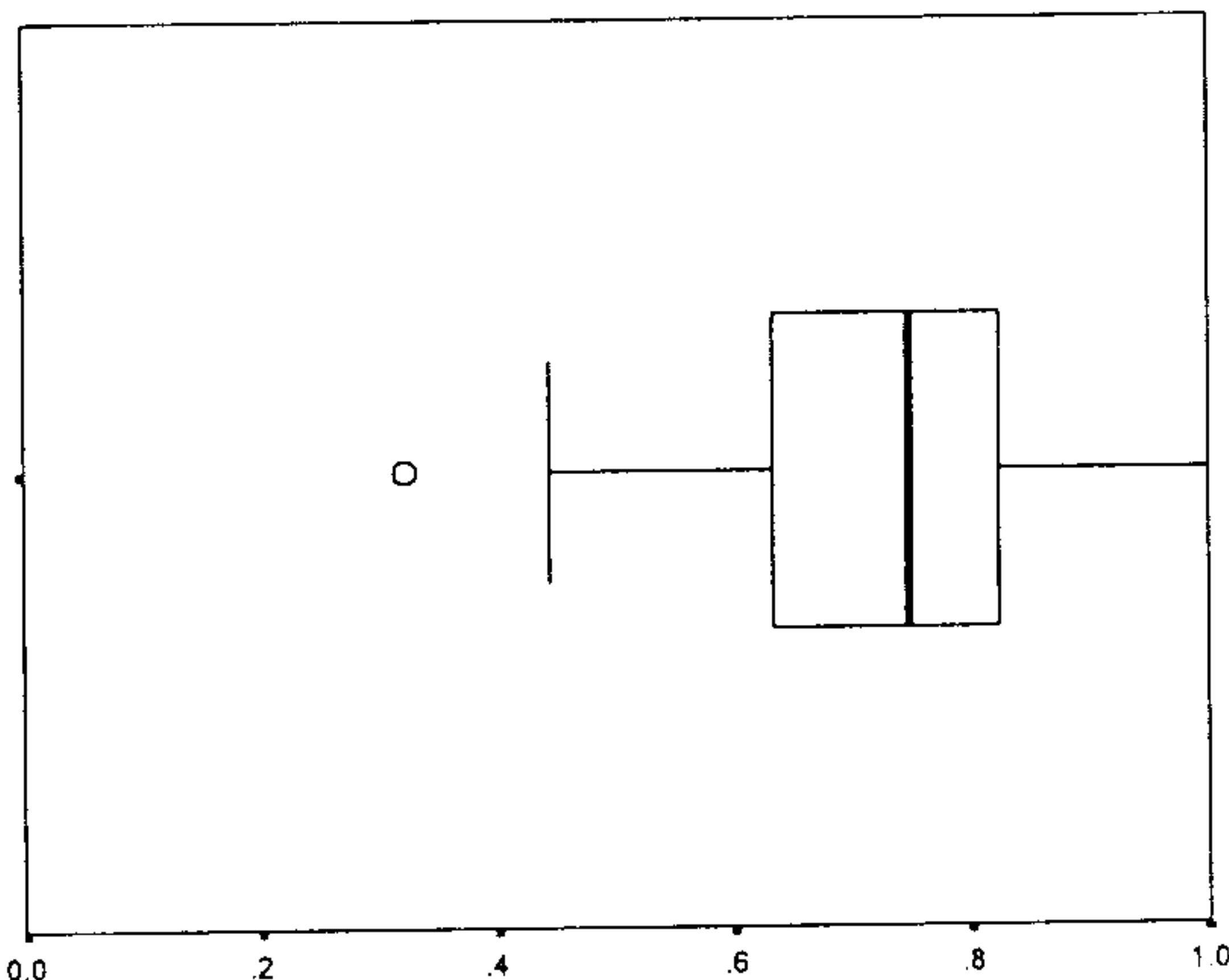


這是長方體，還是正方體？

( )

它的體積是多少立方公分？

( )

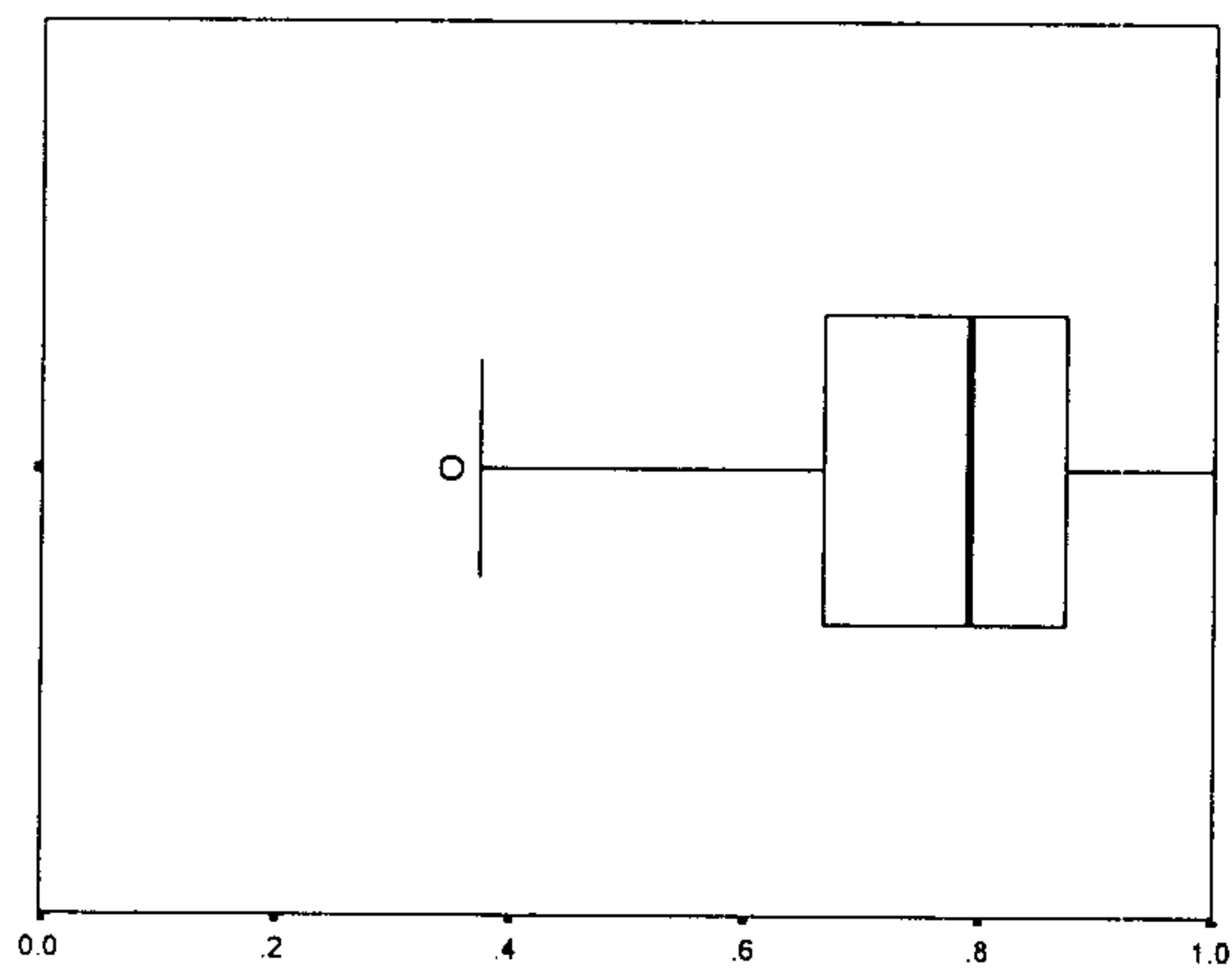
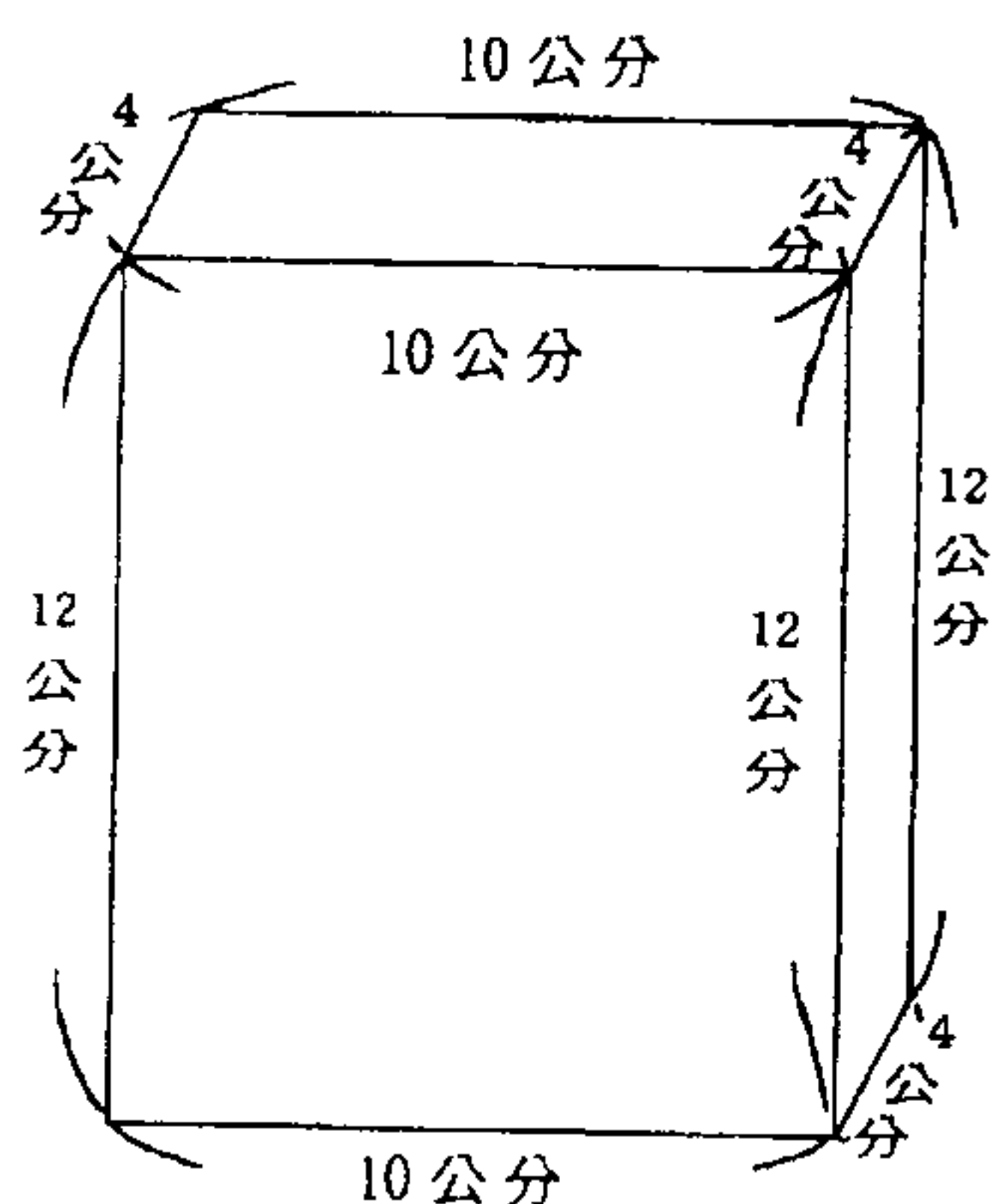


此題與 6-25 相同，評量學生空間轉換能力，唯此題格數較多且為緊密排列，較缺乏暗隱線索，其計分方式亦以兩題均答對者才算通過，在 2570 位受試兒童中，平均答對率為只有 74.44%，且有約 46% 的實驗班級通過率均未達八成；就班級平均而言，最低為 32%，最高為 100%，兩者相差 68%，顯示班級反應差異不小；就學校平均而言，最低為 44%，最高為 97%，兩者相差 53%，顯示各校反應差異亦不小。從通過率觀之，學生雖成長了一學期，但空間轉換能力未見顯著增進，反而有退步現象，推估可能原因是因堆積物較前一題多，且為緊密排列，不易察覺實物與圖像的區分，又因兩題均通過才計分，此時有正方體單位體積與長方體的立體物體積的混淆。

二、用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

### 8-12

(12) 下圖長方體的體積是多少立方公分？



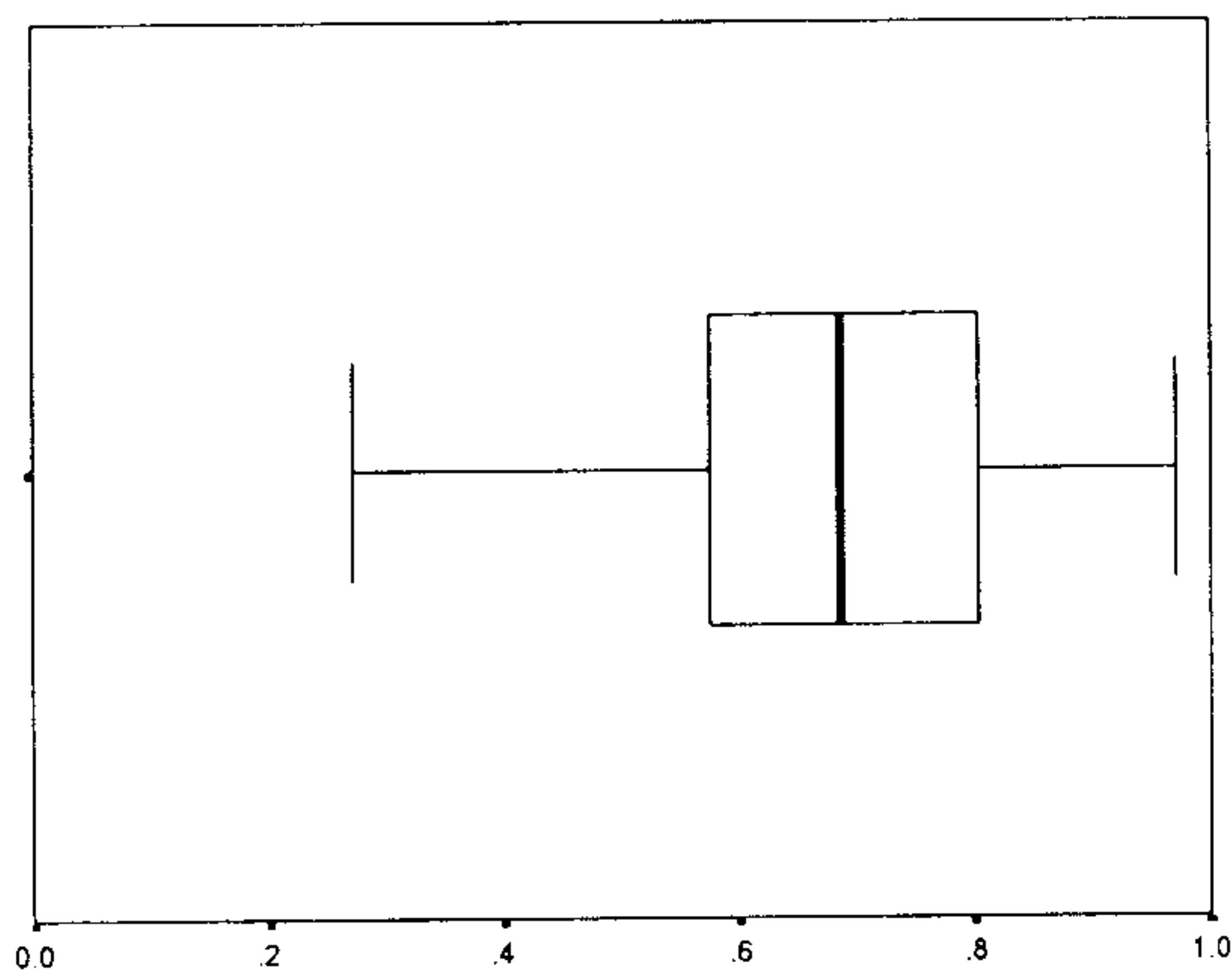
由於物體形狀差異大，故在國小階段只經驗規則立體物，如長方體，正方體。角柱與圓柱等公式形成的過程，其重點在於發現組成立體物件的關鍵元素，如長方體的長、寬、高，柱體中底面與高的關係等。

8-12 為提供多餘資訊的長方體體積求法，學生需先釐清組成長方體的關鍵值，才能將其所理解的體積公式加以應用，在 2465 位受試兒童中，平均答對率為 76.71%，有 34% 的實驗班級通過率未達八成，可見公式意義的了解還是稍有不足。就班級平均而言，最低為 35%，最高為 100%，兩者相差 65%，顯示班級反應差異不小，就學校平均而言，最低為 47%，最高為 100%，兩者相差 53%，顯示各校反應差異亦不小，從有近四成班級未達預期水準觀之，可能教材設計者應更詳細說明教材目標與執行方式，若以記憶公式方式進行學習，則出現多餘資訊的問題，將會造成判斷的干擾。

三、用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 36 分)

**9-16**

(16) 一塊長方體鐵板長邊是 2 公尺，寬邊是 50 公分，厚度是 10 公分，這塊鐵板的體積是多少立方公分？



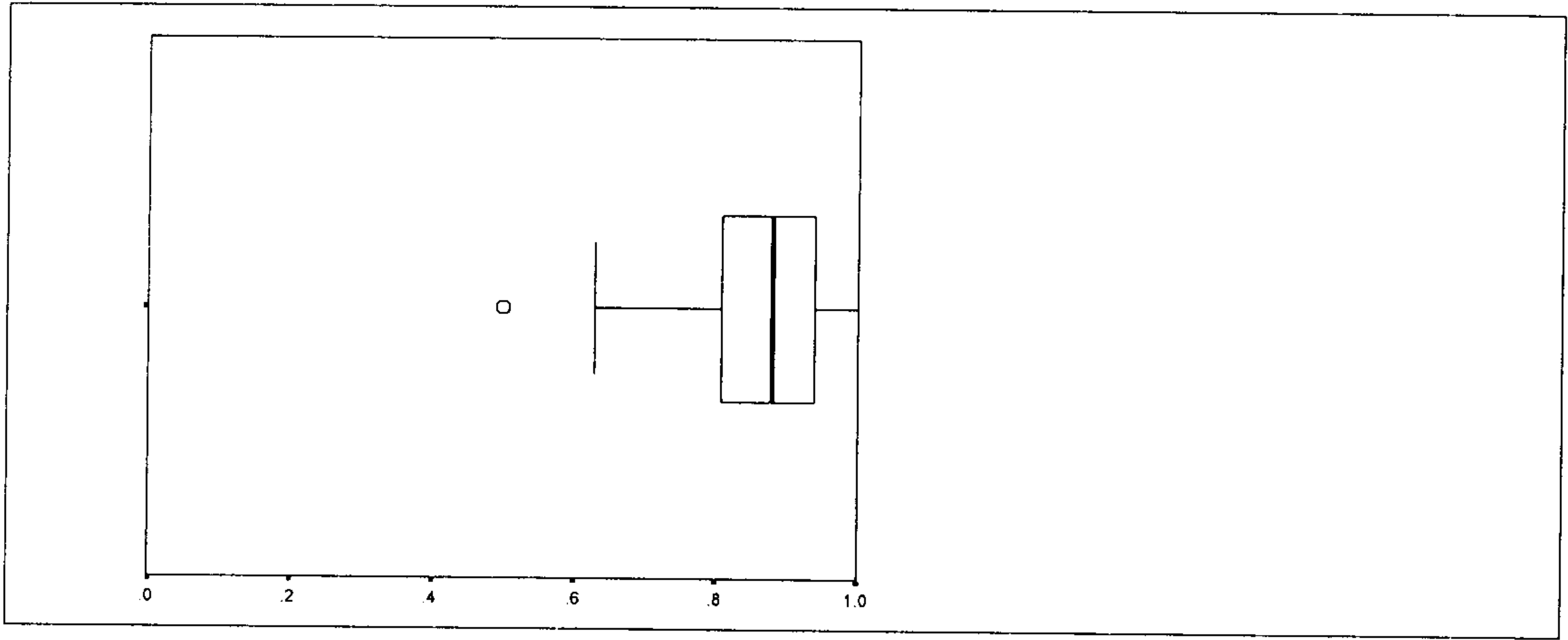
長方體體積的求法在第九冊透過相同單位量的堆積及單位個數的點數，已經驗到長方體體積可由長邊有幾個，寬邊有幾排，高邊有幾層，即長乘寬乘高個立方單位所組成，而不同單位量的化聚也是檢驗其量感的能力。9-16 未提供圖象，只以文字題方式寫出關鍵元素即長、寬、高的值，此為檢測學生對語意的了解，為避免落入公式的記憶，故同時檢測學生對單位量化聚的概念，在 2420 名的受試兒童中，平均答對率為 68.55%，且有 39% 的實驗班級其通過率未達七成，就班級平均而言，最低為 27%，最高為 97%，兩者相差 70%，顯示班級反應差異很大，就學校平均而言，最低為 27%，最高為 91%，兩者相差 64%，顯示各校反應差異亦不小，可見學生對單位量間關係的轉換較缺乏注意。

九、填填看：(每格 1 分，共 10 分)

- |                     |             |            |
|---------------------|-------------|------------|
| 1公斤 = 1000公克        | 1分升 = 100毫升 |            |
| 1公升 = 10分升          | 1公尺 = 100公分 | 1公分 = 10毫米 |
| 1公里 = 1000公尺        | 1時 = 60分    |            |
| 1日 = 24時            |             |            |
| 1立方公尺 = 1000000立方公分 |             |            |

**10-29**

(29) 10 立方公尺 = ( ) 立方公分



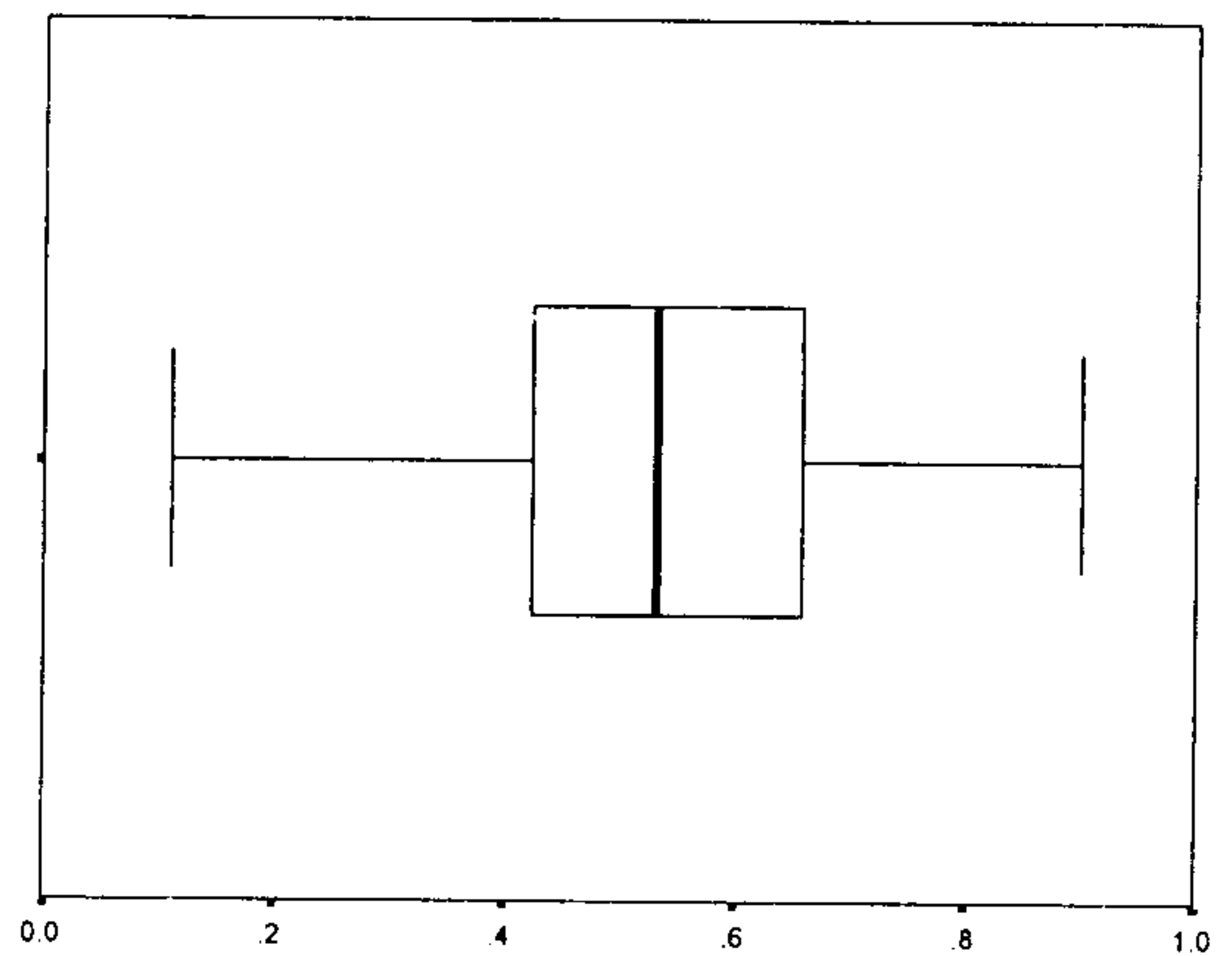
此題在提供 1 立方公尺=1000000 立方公分的線索下，學生對單位量化聚感覺較易，故在 2046 位受試兒童中，平均答對率為 86.22%，且只有 4% 的實驗班級其通過率未達七成，但從 9-16 觀之，若由學生自行判斷，則通過率驟減，經檢討化聚的意義時發現，立方公尺與立方公分間的轉換才是化聚的本質，若提供此線索，本題即為倍數關係的了解而非化聚意義的應用。就班級平均而言，最低為 50%，最高為 100%，兩者相差 50%，顯示班級反應差異不小，就學校平均而言，最低為 50%，最高為 99%，兩者相差 49%，顯示各校反應差異亦不小。

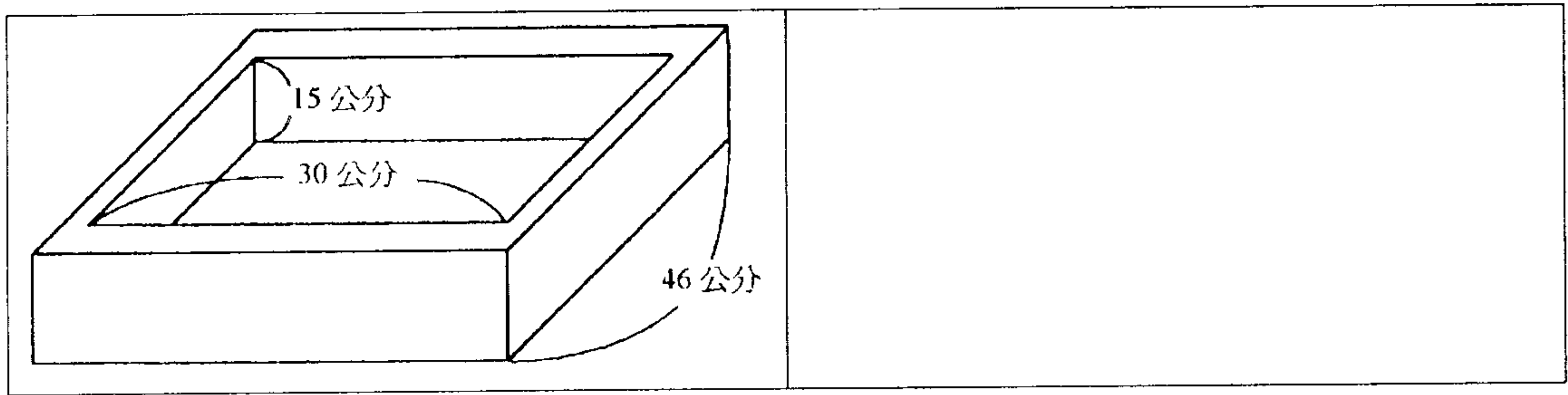
二、用算式把做法記下來。

((7)-(15)每題4分,(16)題6分,共42分)

**11-14**

(14)下圖是一個用厚 3 公分的塑膠板做成的長方體塑膠盒(邊長標示在圖上)。塑膠盒內部的形狀也是長方體，這個塑膠盒的容積是多少立方公分？



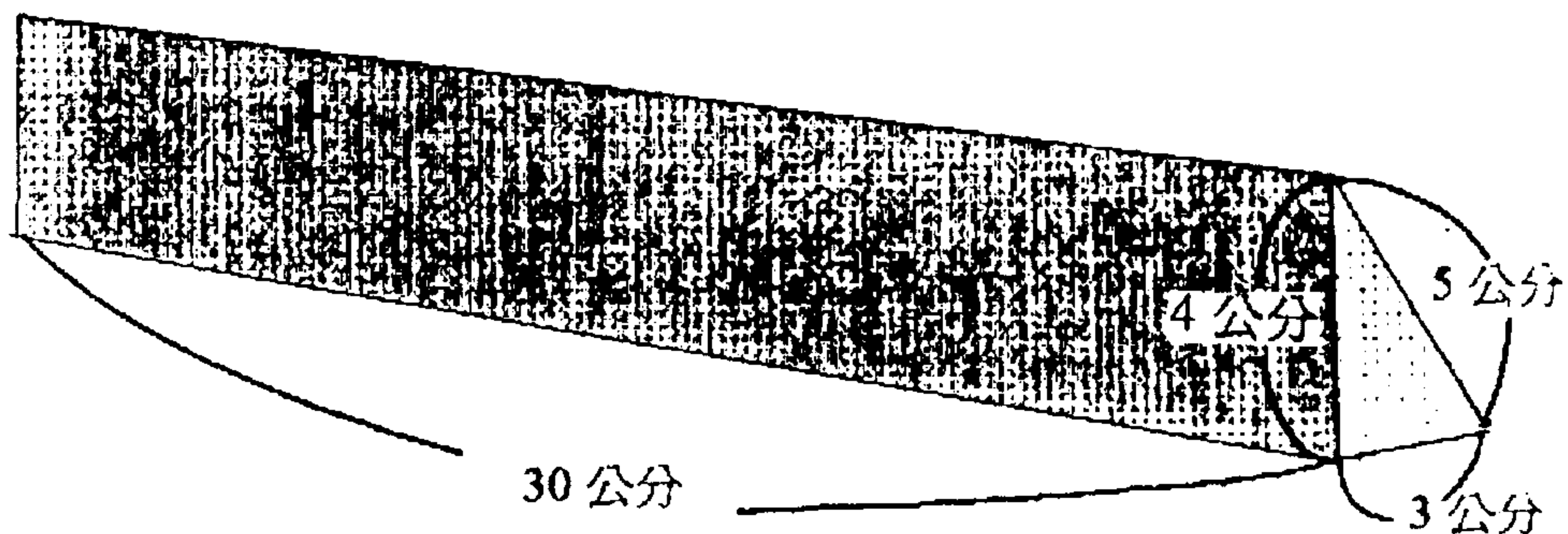


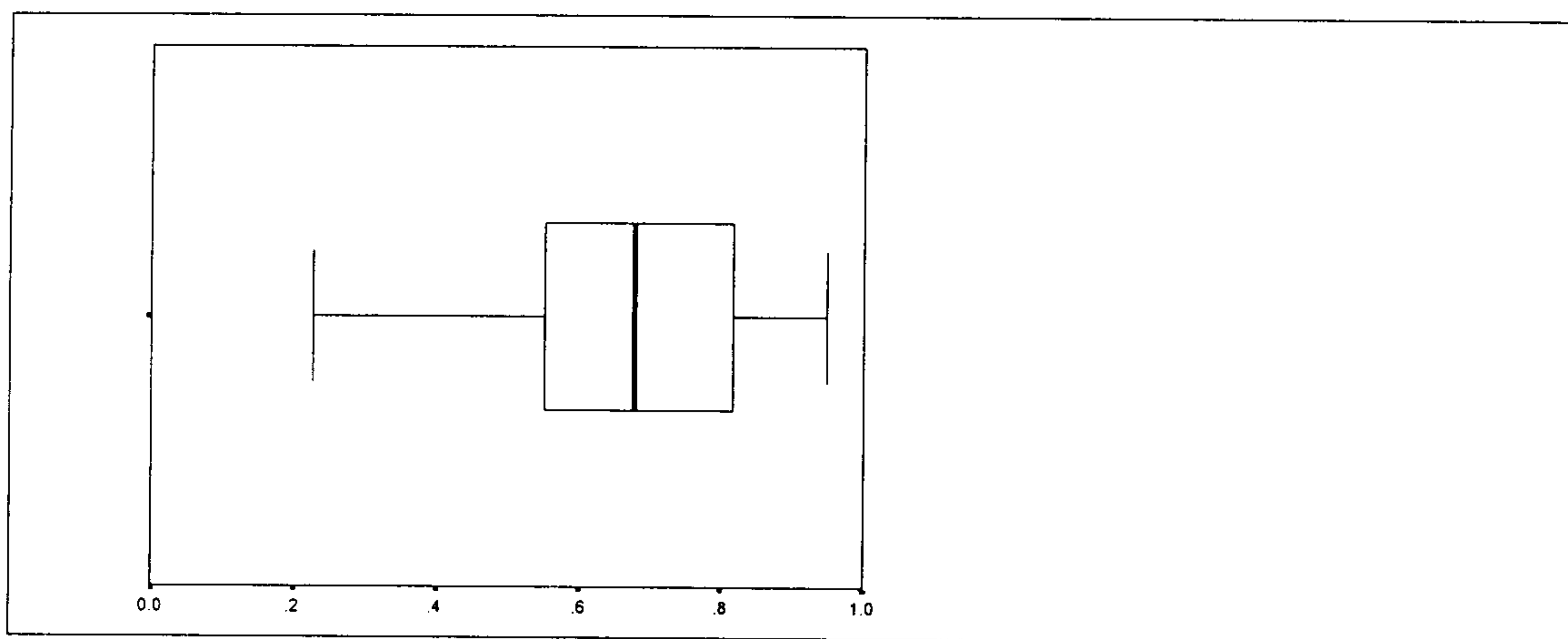
體積指的是三維物體占空間的大小，但會因物體的屬性差異而有不同，如物件的實心或空心均會影響其體積的描述，故又有內體積與外體積之分，如空心盒子，從外表觀之其占空間大小稱為外體積，而盒子中空部分所佔的空間大小稱為內體積，又稱容積。在 2047 位受試兒童中，平均答對率為 52.39%，且有五成班級通過率未達 70%，可見其概念形成較為困難，就班級平均而言，最低為 11%，最高為 90%，兩者相差 79%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 16%，最高為 90%，兩者相差 74%，顯示各校反應差異亦不小，經分析發現此題雖提供長、寬、高三個同單位量的數據，但其中一邊為外體積的長度，學生必須先從文字題情境中察覺到塑膠板的厚度是 3 公分，才能找出內體積的三個關鍵邊長，故必須同時具備空間能力、體積公式應用能力與內外體積概念者才能正確解題。

二、用算式把做法記下來。((7)-(15)每題 4 分，(16)題 6 分，共 42 分)

**11-16-①**

(16) 有一個三角柱，它的高是 30 公分，它的底是直角三角形，直角三角形直角的兩個邊的長度是 3 公分和 4 公分，第三個邊的長度是 5 公分。這個三角柱的體積是多少？





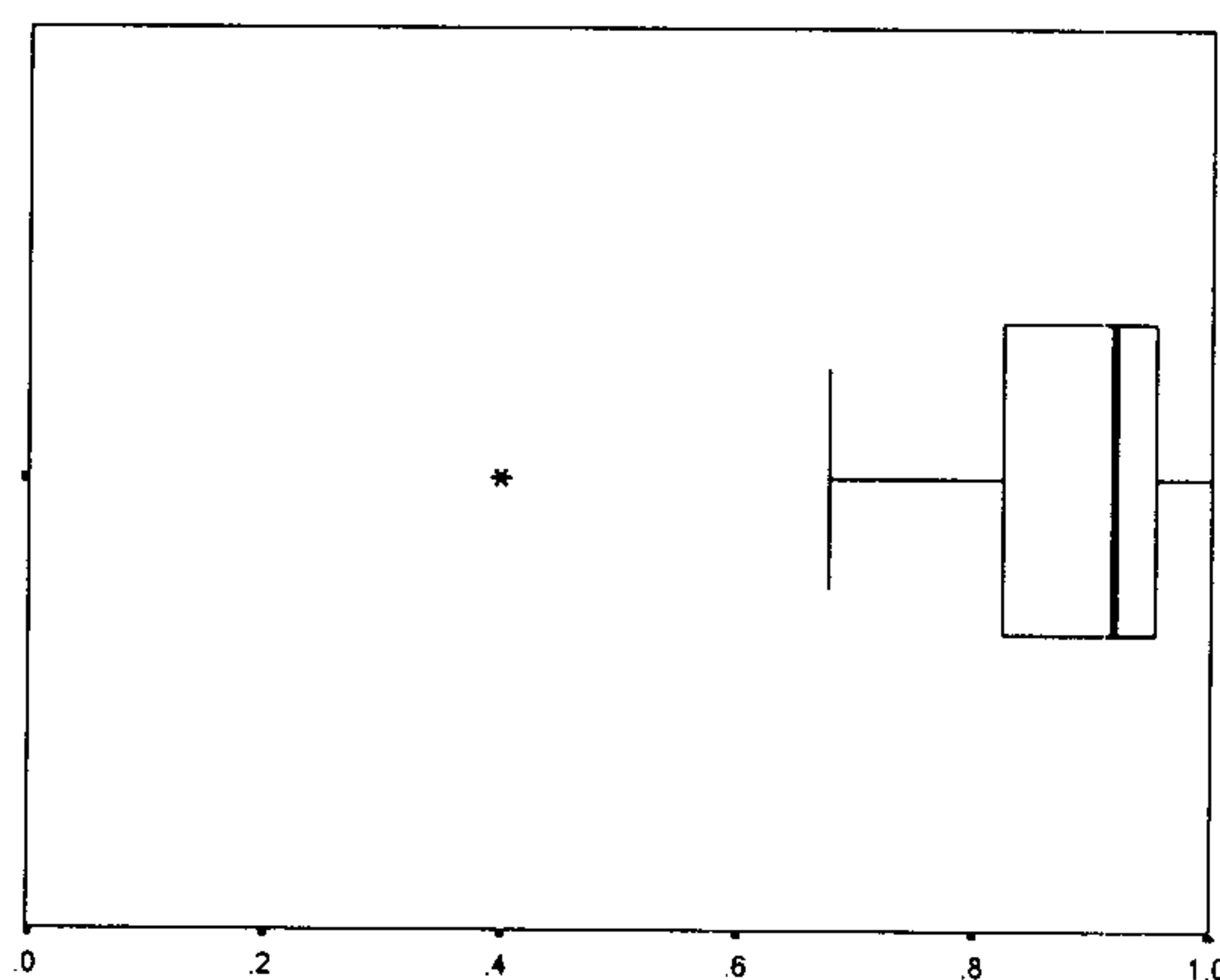
此題檢驗學生空間能力與公式意義的瞭解與單位量間轉換關係，因其需將圖示的三角柱轉換成立體的三角柱，而察覺邊長與體積的關係始能解題。在 2047 位受試兒童中，平均答對率為 67.06% ，且有 33% 的班級通過率未達七成。再就班級平均而言，最低為 23% ，最高為 95% ，兩者相差 72% ，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 32% ，最高為 94% ，兩者相差 62% ，顯示各校反應差異亦不小，此題不只是長方體的長、寬、高的關係，而涉及體積公式是底面積乘高意義的瞭解，從通過率觀之，實驗班學生在六年級差異越來越顯著。

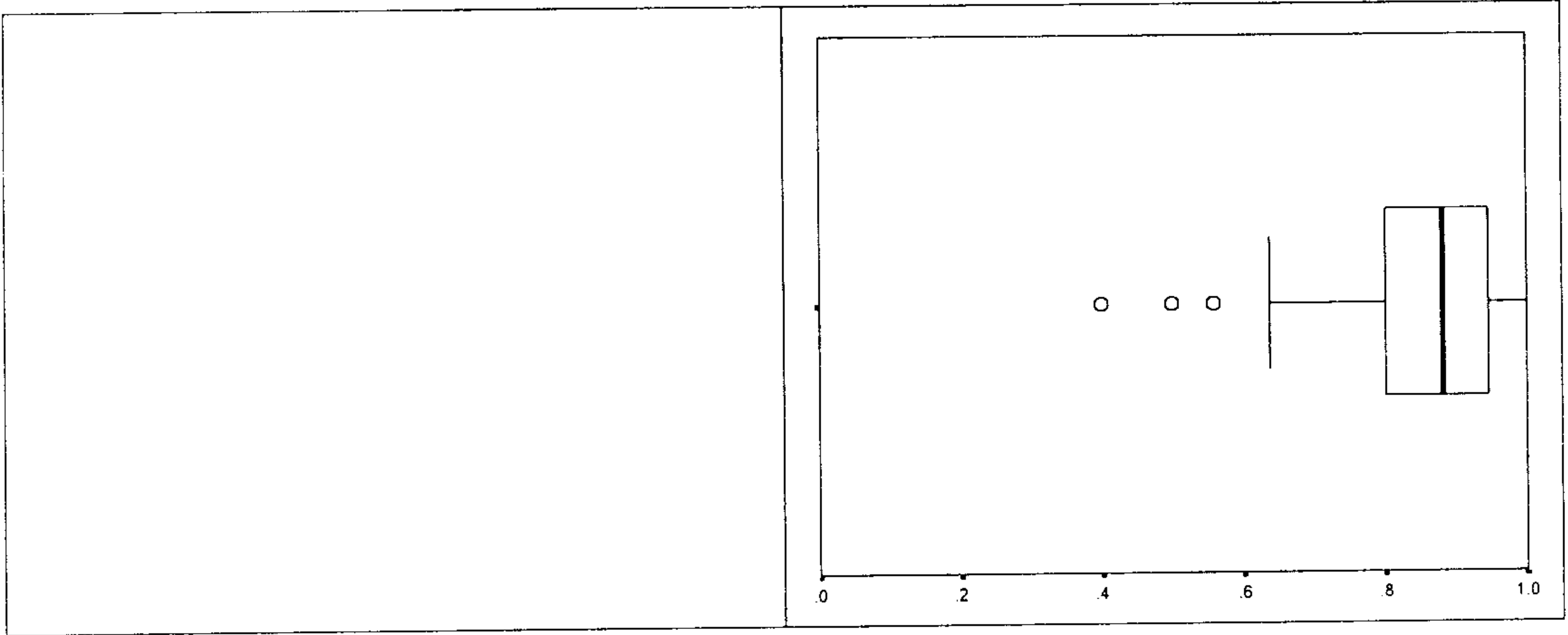
三、填填看：((17)-(22)每題 3 分，(23)題每格 2 分，共 22 分)

**11-23-①**

(23) 一個燒杯原來裝水到 500 毫升的刻度，放入一塊石頭完全沉入水中後，水面上升到 740 毫升處。

- ① 水一共上升( ) 毫升。
- ② 石頭的體積是( ) 立方公分。



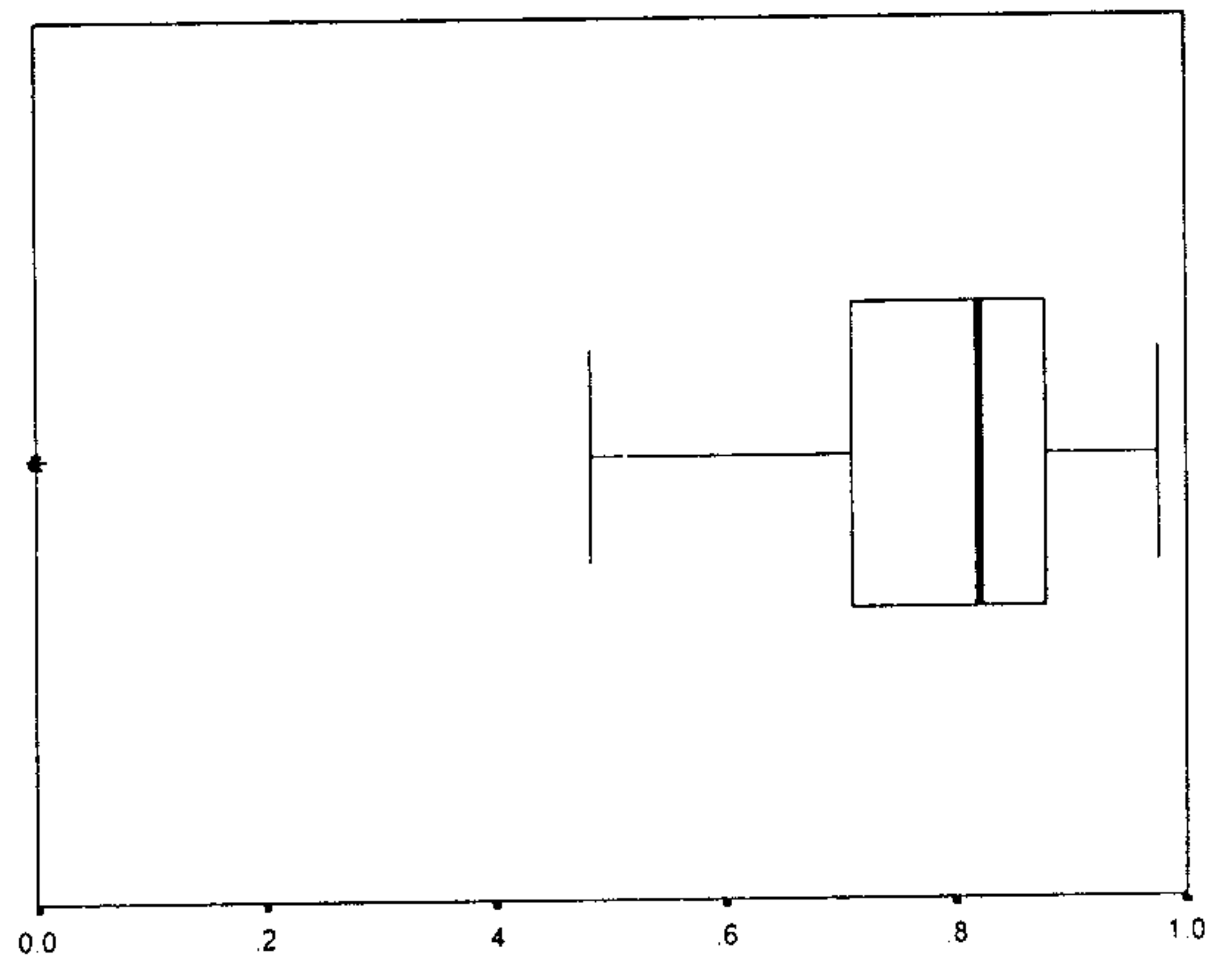


此題為排他性體積，即將一石頭完全沉入水中後，造成液體體積的擠壓而水面上升，此時液體增加占有空間的大小即可表示石頭的體積，第 1 小題，在 2047 位受試兒童中，平均答對率為 89.10%，學生可透過刻度報讀即可解題，不易診斷出排他性體積概念的理解情形，就班級平均而言，最低為 40%，最高為 100%，兩者相差 60%，顯示班級反應差異不小，就學校平均而言，最低為 40%，最高為 100%，兩者相差 60%，顯示各校反應差異亦不小。第 2 小題，則需容量單位與體積單位的轉換，在 2047 位受試兒童中，平均答對率為 86.12%，就班級平均與學校平均而言，最低與最高均與第 1 小題同，從題型上分析，此題只能診斷學生報讀刻度與容量單位與體積單位間的轉換，至於排他性體積意義的瞭解則不易在此問題展現。

五、填填看：(每題 2 分，共 8 分)

12-11

(11) 有甲、乙兩個長方體。甲長方體的長邊是 2.5 公尺，寬是 4 公尺，高邊是 4.5 公尺；乙長方體的長邊和寬邊與甲長方體的一樣長，但是高邊只有 1 公尺。甲長方體的體積是乙長方體體積的 ( ) 倍。





此題可從邊長的關係性瞭解，察覺兩長方體間體積比例關係，亦可從多步驟問題，第一步驟為從知甲長方體的長邊、寬邊、高邊求出其體積，再分析乙長方體各邊長與甲長方體長的關係求出乙長方體體積，最後再從兩體積大小求出倍數關係，以檢驗倍數意義的理解，雖需經三步驟解題，但亦可解決問題，但因實驗課本內未曾出現此類問題，故亦有班級通過率為 0。在 2296 位受試兒童中，平均答對率為 79.75%，就班級平均而言，最低為 0%，最高為 97%，兩者相差 97%，顯示班級反應差異極大，就學校平均而言，最低為 0%，最高為 97%，兩者相差 97%，顯示各校反應差異亦很大，部分學校學生已呈現放棄解題的現象。

## 肆、結語

數學實驗課程期望是以解題、溝通、推理、連結為教學核心，故教材設計著重在質的討論與習慣的培養，教材內容亦以基本概念為主，預期在紮實的概念基礎上，能透過推理過程，解決延伸性的數學問題，但從各年級學童總結性評量的分析結果，發現幾個現象：

### 一、研究發現

- (一) 實驗結果為如預期目標。根據總結性評量預期通過水準，高、中、低年級分別設定為 70%、80%、90%，從施測分析結果，面積部分高年級平均有約三成實驗班無法達到目標，中年級只有 8-10 有 54% 的實驗學校未達目標，其餘尚可，體積部分則平均有 45% 的實驗班無法達到目標，如 8-12 只是有多餘資訊的體積概念，即有 34% 實驗學校未通過，11-14 含內、外體積概念，則有 50% 的實驗班級未通過。
- (二) 文字題處理能力不佳。從通過率顯示，學生對未提供任何圖像的純文字題處理能力較差，面積中如 8-10 與 10-23，體積中如 9-16，均顯然通過率較低。
- (三) 非例行性圖像不易掌握。學生對不熟悉的圖像呈現解題時較感困難，面積部分問題 9-23-③ 為典型上底小於下底的梯形，則通過率較高，問題 9-23-② 為上底長於下底的倒立梯形，或問題 9-15-① 為平行四邊形的底邊並非水平線的一邊，高邊亦非垂直線的一邊，則通過率較低。
- (四) 忽略測量單位的化聚關係。學生對同單位量關係的掌握較缺乏關注，化聚關係亦較感困難，而對同單位名稱則通過率較高，如面積的問題 8-10，一邊長 2 公尺，另一邊長 3 公分，及問題 11-

13 長 2 公里，寬 400 公尺的長方形面積，其通過率分別只有 65% 和 67.79%。

- (五) 不易選擇適當的單位量。單位量的選擇因其大小而異，如面積的問題 6-4 以一格為單位量的點數，通過率可為 85%，如問題 9-23 的三小題則發現必須依圖形的差異而有不同設計，其通過率顯然有差異。
- (六) 不易掌握多餘資訊的問題。多餘資訊處理的能力與習慣仍應加強，面積的問題 9-15 與 10-22，除了兩個關鍵邊長，如底與高外，多提供一個邊長，通過率則只有 65%，體積的問題 3 亦有相同結果，顯然學生較缺乏思考判斷的習慣。
- (七) 空間轉換能力仍有不足。瞭解立體物的平面圖形表徵，是空間能力不可或缺的，但無論體積或表面積的問題，通過率即較低，且班級差異較大，可能與是否有使用教具的經驗有關。
- (八) 整數與非整數概念連結的困難。邊長的數字型態是影響解題成功的關鍵因素，當整數邊長時，學生可透過實作活動解決問題，但為分數邊長的計數與化聚活動，如面積問題 11-21, 11-22 和 12-12，通過率較低，體積的問題 12-11，顯示從實作活動到推理關係間連結的困難。

## 二、教材設計與評量設計的檢討

- (一) 教材設計以具體操作為主，評量問題不易檢驗概念形成過程，而以概念應用為主，故部分問題題型未曾於教材中呈現，形成班級差異極大，應可適度調整，將面積與體積教材均勻分佈於實作中練習。
- (二) 教師的教學信念、教學策略與對課程精神的掌握，對學童的學習成就有極密切的關係，面積與體積概念建立為實作活動的抽象化，而非公式的記憶與應用，尤其到高年級更明顯，學生的學習似乎已呈兩極化現象。
- (三) 編制教學資源手冊，增加教學實驗案例與檢討的紀錄，提供教師於在職進修之用，才能更瞭解課程設計的理念架構與可能實施策略。