

分數概念及加減運算

呂玉琴、駱美如

壹、前言

根據教育部八十二年修正公布的國小數學課程標準（以下簡稱新課程），國小數學課本的分數教材中，含有部分／全部、子集／集合、兩數相除的結果、數線上的一個點及比這五種分數意義，而兒童在日常生活中，常有分東西的經驗，所以我們便由此做低年級分數教學的入門。「分數」、「分子」、「分母」、「真分數」和「假分數」等名詞，是到了中年級才提到，同時，我們做同分母真分數相加減的教學，並以此類活動引進假分數。到了高年級，我們先教等值分數、分數的數線及把分數視做整數除法的結果，接下來再教「約分」、「擴分」和「通分」；在分數的計算上，則做同分母分數的加減、分數乘以整數的乘法及分數除以整數的除法。由新課程目前（八十七學年度）只全面更新至國小三年級，而實驗班已完成到六年級的階段，故為顧及新課程實驗班學生和一般學習六十四年版課程（以下簡稱舊課程）的學生，日後在一同進入國中學習同一套教材時（目前國中仍全面使用舊課程），不致發生課程銜接的問題，故乃在實驗課程中，酌量編入舊課程的教材。以本文所討論的「分數概念」與「分數的加減」部分來說，實驗課程便多編入了舊課程裡的「異分母加減」教材。

新課程頒布的數學課程目標中，數與計算方面的領域目標為：一、獲得各種數，如：自然數與零、小數、分數等的概念。二、能了解數的十進位記載結構。三、能了解各種數的數線表示方式。四、能了解數的分解合成。五、能了解加、減、乘、除的運算意義。六、能了解各種計算過程的意義，並用以解決問題。七、能運用現代化的計算工具。八、能了解概數並具有估計的能力。若針對「分數」而言，我們不難發現其主要目標為獲得分數概念、了解分數的數線表示方式、了解分數的分解合成及了解同分母分數在加、減及分數乘、除以整數的計算與過程意義。

對分數的布題方式而言，我們一般分為「連續量」情境與「離散量」情境。所謂「連續量」是含有部分／全體的意義，如一塊蛋糕切成一樣大的5塊，其中的4塊便佔全部蛋糕的 $\frac{4}{5}$ ；「離散量」則有子集／集合的意義，如5個一樣的鈕扣中的4個便佔全部鈕扣的 $\frac{4}{5}$ 。在分數的內容物方面亦分為「單一」與「多個」。「單一內容物」是指情境中的單位分數的內

容物為單一個，如「32 個小蕃茄裝一袋，詩雅有 $27/32$ 袋，吃了一些後，剩下 $11/32$ 袋。問吃了多少袋？」。此時，單位分數 $1/32$ 袋的內容物是一個蕃茄；「多個內容物」則是在描述單位分數的內容物為多個，如「44 個柿子裝一袋，曉晴有 $3/11$ 袋，曉憐有 $9/11$ 袋，兩人的柿子相差多少袋？」。此時，單位數 $1/11$ 袋的內容物是 4 個柿子，是多個內容物。以上幾個關鍵詞將直接引用於本文，用時不再贅述其含意。

以下我們依各年級在新課程標準中，關於分數的學習目標與教材綱要及實驗班學生的總結性評量做分析討論。在學生總結性評量結果中，每一道題目我們將提出三種數值，分別是全體施測學生的答對率、以施測學校為單位的答對率及以施測班級為單位的答對率；又為判定該年段學生是否學會該年段的學習內容，我們定出低、中、高年級的答對率分別應達到 90%、80%及 70%以上才算大部分的學生已學會該數學內容。

貳、各年段、年級的分數學習目標、教材綱要與教學及學生總結性評量的表現

一、低年級

在低年級時，我們僅要求學生有初步的分數概念，且在一年級時並沒有引進任何分數概念。

(一) 國小二年級的分數領域的學習目標的教材概念

二年級下學期的教材綱要上提到「分數概念的初步認識」與「分數的讀法轉換成記法」，並以以下幾種教學讓兒童有分數初步概念：1.安排適當的情境結合兒童既有的分數經驗(從分東西的經驗、一半的經驗…著手)。2.安排連續量與離散量情境的分數意義。3.在具體物與圖象上進行分的活動。4.重視具體物與分數數字表徵的雙向連結。5.在分數教學進行的過程中，讓學生辨認單位量。6.配合個別差異，讓學生有類推其他單位分數的經驗。

(二) 國小二年級的新課程教材的分數教學活動內容

新課程有別於舊課程的革新之一，即是課程的設計以活動為單位，而不像教材以單元為單位；如在二年級下學期的單元中，分數被第一次介紹，但卻是在「記錄兩(整)數的和、差」的活動之後。學生透過將繩子平分幾段(段數在十以內)的活動，充分經驗分數中各份(段)需完全相等，並在教師引導討論中，學童自己需為平分後的一段以含有「部份—全體」的關係命名，所用語詞應能為其他小朋友明瞭並接受。最後教師再引進「幾分之幾」的約定成俗的說法，要兒童模仿其他簡單的真分量(分母在十以內)說法。而在另一個單元的教材中，進行「 $1/2$ 個餅、 $1/4$ 個餅的命名活動」、「給一恰有 2、3、4、5、7 個元素量，等分成 2、3、4、5、7 個部

分，以此集合為單位量命名分量」、「 $1/2$ 、 $1/3$ 、 $1/4$ 、 $1/5$ 、 $1/6$ 、 $1/7$ 的說、讀、聽、寫」等活動。

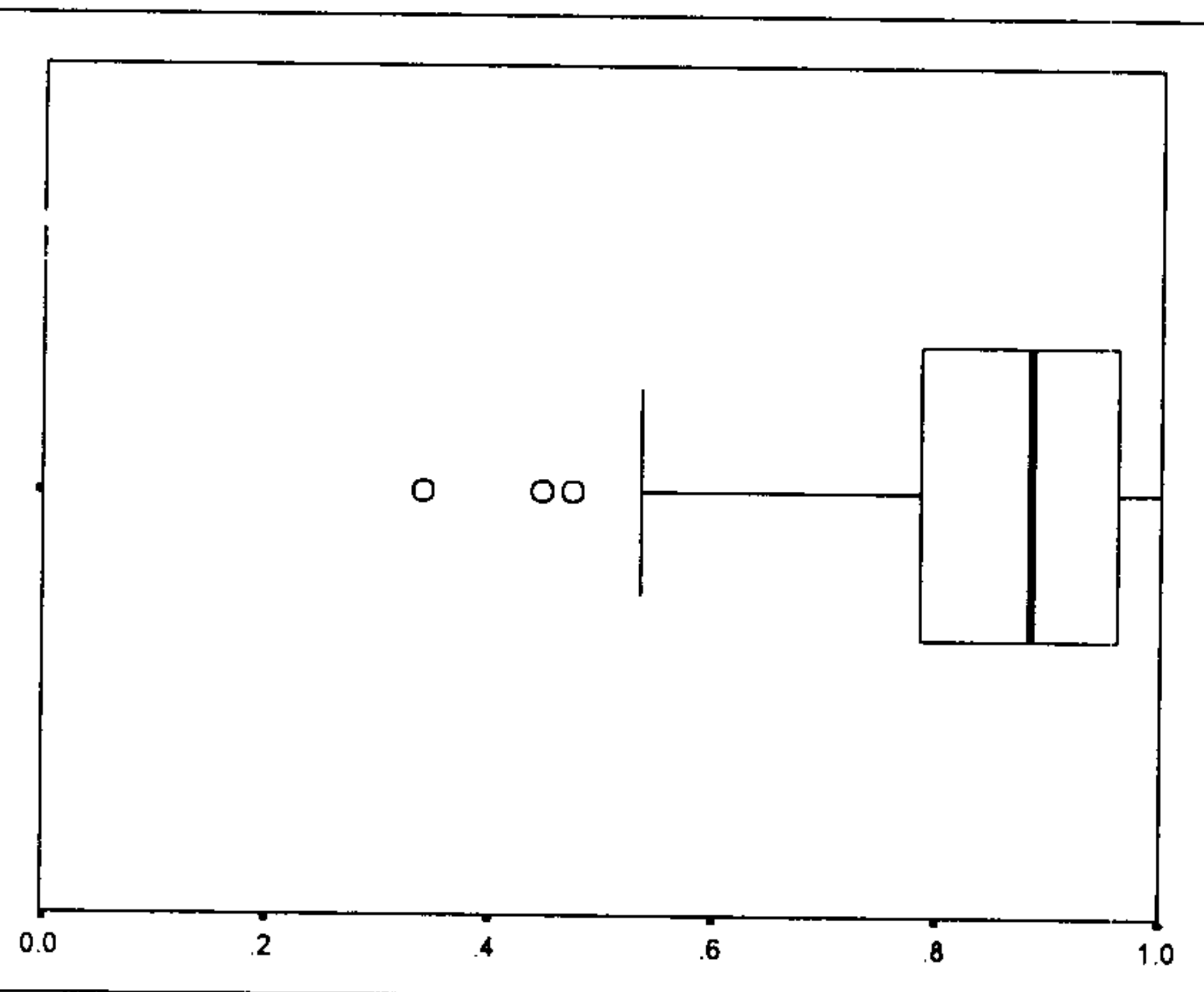
(三) 國小二年級學生分數概念的總結性評量的表現

低年級所教授的分數不多，僅要求做為日後學習真分數的基礎。學生習得的「起始單位分數」只是一個分量的指示詞，其本身不能當作單位，來進行計數活動，如做 $1/3$ 的教學時，不應傳達 2 個 $1/3$ 即為 $2/3$ 的概念， $1/3$ 只用來表示某種數量罷了，與一般的「單位分數」可以累計不同。故此處的評量也應著重在「起始單位分數」概念的理解。茲舉例如下：

◎填填看：

4-3

(3) 把一個餅平分給 2 個人，
1 個人可得多少個餅？
() 個餅。



在受測的 2790 人中，答對率為 85.77%，亦即有 14.23% 的小朋友不會，然而此題低於 90% 的答對率顯示該分數概念並未達到教學成效。就班級平均答對率來看，最低為 45%，最高為 100%，相差 55%，顯示班級間的學習效果差異大；就學校平均答對率來看，最低為 55%，最高為 100%，相差也在 45%，顯示學校間的學習效果的差異也不少。在施測的 69 個班級，有超過一半（38 個）的班級未達 90% 的答對率。

二、中年級

中年級有關於分數的教學目標為「認識真分數及假分數」與同分母分數的加減。

(一) 國小三年級的分數領域的學習目標與教材綱要

三年級要求認識「分母為 20 以內的真分數」及「分母為 10 的真分數」（做為教 0.1 的前置經驗），此處我們只要求兒童習得 $2/3$ 表示全部三塊中所標示出的兩塊，不必了解 $2/3$ 為兩個 $1/3$ 累積的結果。

(二) 國小三年級的新課程教材的分數教學活動內容

在三年級上學期，我們先透過給一條等分成 6、8、9 或 10 個部分的繩

子，介紹單位分量的命名。接下來給一條等分成 5、7 個部分的繩子，對真分量加以命名，再給一恰有 6、8、9、10 個元素的集合，等分成 6、8、9、10 個部分，以此集合為單位量命名分量；將元素個數換成 3、5、7 再做一次命名活動。最後做真分量的說、讀、聽、寫。到了三年級下學期，先引入分數的數詞序列，來描述逐次累積單位分量（幾分之一）的合成結果（如十分之二條的橘色積木再來十分之一條橘色積木合起來是多少條橘色積木），並在活動中，強調單位分量的累積，以奠定日後進行分數合成或分解活動的基礎。接下來在離散量的情境下，進行同分母分數的合成與分解活動，討論分子與分母相同的分數「1」之間的等價關係，作為聯結整數數詞序列與分數數詞序列的基礎。最後引入小數與分數的聯結，透過十分之幾意義的聯結，進行小數的說、讀、聽、寫、做的活動。

（三）國小三年級學生的分數概念和加減運算的總結性評量的表現
 三年級的分數教學僅侷限在真分數，施測題目如下：

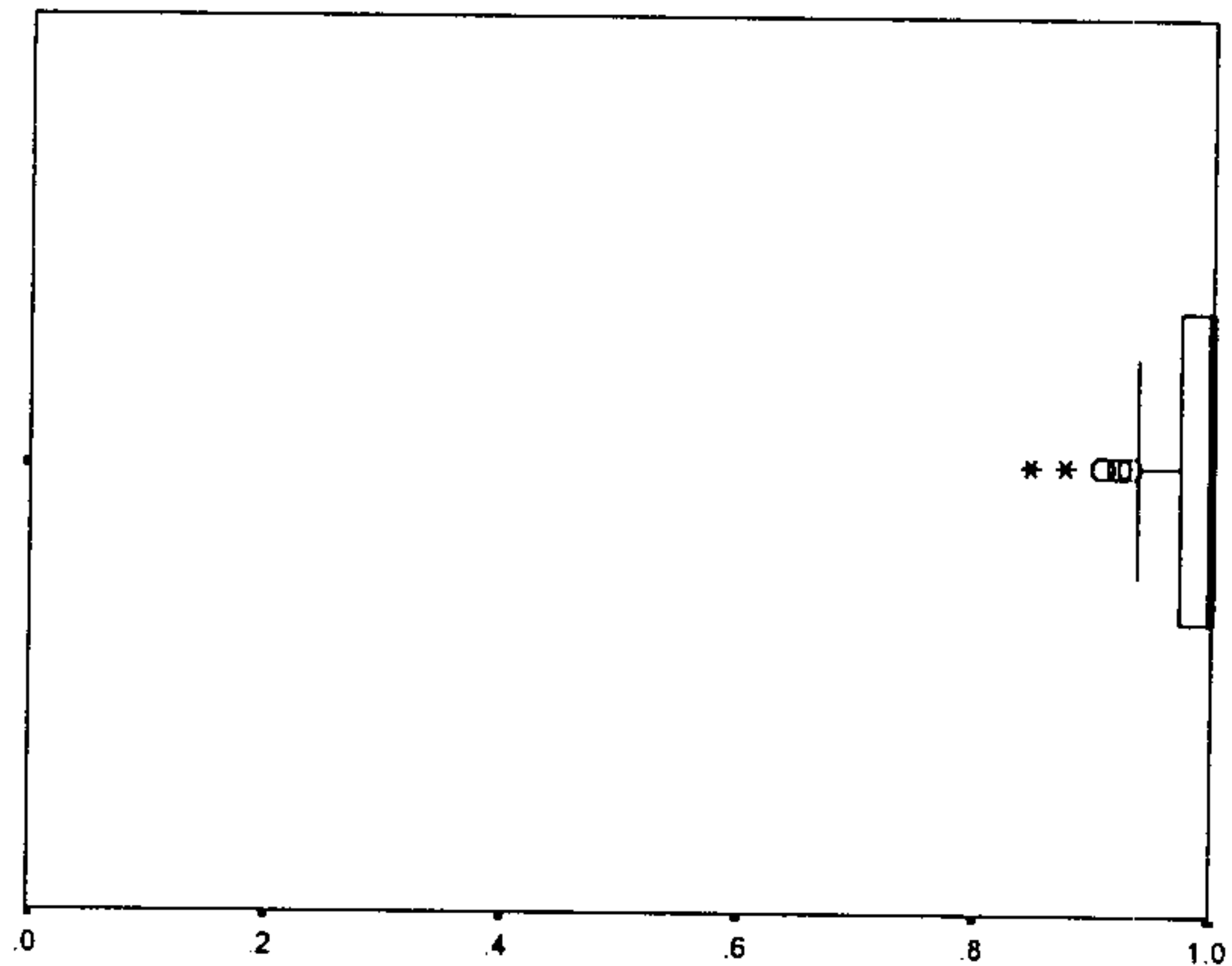
<p>一、填填看：(一個括號 2 分，共 26 分。)</p> <p>5-2</p> <p>(2) 「三分之二」記成()</p>	
---	--

在受測的 2774 人，答對率高達 90.77%，以班級和學校為單位來看其答對率，最高皆為 100%，最低皆為 55%，差異性很大，有 45%，但是在施測的 71 個班級中，只有 6 個班級未達 80%的答對率。

一、填填看：(每題 2 分，共 12 分)

6-1

(1) $\frac{2}{11} + \frac{4}{11} = (\quad)$



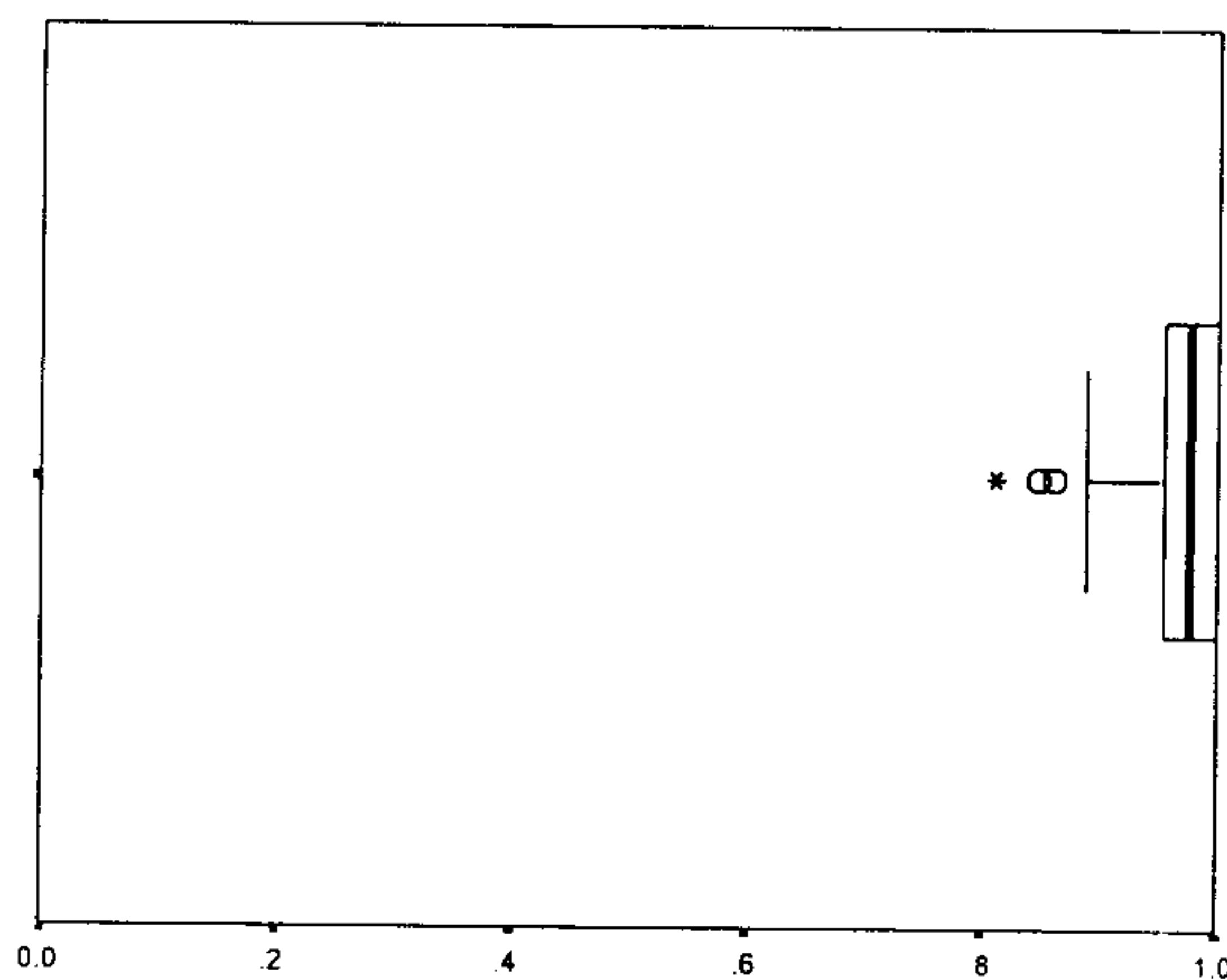
在受測的 2779 人中，答對率高達 98.56%，以班級和學校為單位來看其答對率，最高皆為 100%，最低皆為 85%，差異性只有 15%，且在受測的 72 個班級中，沒有一個班級的答對率低於 80%，顯示兒童在做真分數的同分母相加時的概念清楚或分數計算能力佳，而後者有可能是學習環境較強調計算的結果。

三、算算看，把你的做法用算式記下來：(每題 6 分共 48 分)

6-13

(13) 妹妹有 $\frac{5}{7}$ 包口香糖，吃掉 $\frac{3}{7}$ 包，還剩多少包？

(\quad) 包口香糖



在受測的 2779 人中，答對率高達 97.01%，以班級和學校為單位來看其答對率，最高皆為 100%，最低分別為 81%與 88%，高低的差異性很低，且在受測的 72 個班級中，沒有一個班級的答對率低於 80%，顯示兒童在做真分數的同分母相減時的概念清楚。

由 6-1 與 6-13 的答對率均高達 97% 以上來看，顯示在真分數的加減上，計算題與應用題的難度並無差異。

(四) 國小四年級的分數領域的學習目標與教材綱要

四年級時，我們介紹「分數的種類」、「真分數的概念」、「假分數

的認識」及「同分母分數的加減」。其中「帶分數」的記錄形式為整數加真分數的形式（即以 $2 + \frac{1}{2}$ 表示以往的 $2\frac{1}{2}$ ），並由真分數的相加無法以真分數表示的活動來引入假分數，並安排假分數的單位量辨認。

（五）國小四年級的新課程教材的分數教學活動內容

四年級上學期，我們在等分活動情境下，進行分母不大於 100 的單位分量的命名活動，溝通單位分數數詞的意義，並使用分數數字來記錄；以對單位分數意義掌握為基礎，進行以單位分量為被計數單位的合成分解活動；進而學習使用真分數數詞（字），來描述由單位分量合成的數量，並在說、讀、聽、寫活動中，加強與檢查學童對真分數數詞（字）意義的掌握與對真分數數詞（字）描述的數量，進行合成、分解或倍的活動。接下來重新進行命名活動，建立單位分數與分數數詞序列的意義，且在做數過程中，為了讓兒童在無法解題時，能方便透過操作具體物或圖示來協助解題，因此，限制分母不大於十二，而且單位分數所指示的內容以不多於 4 個為原則。

（六）國小四年級學生的分數加減運算的總結性評量的表現

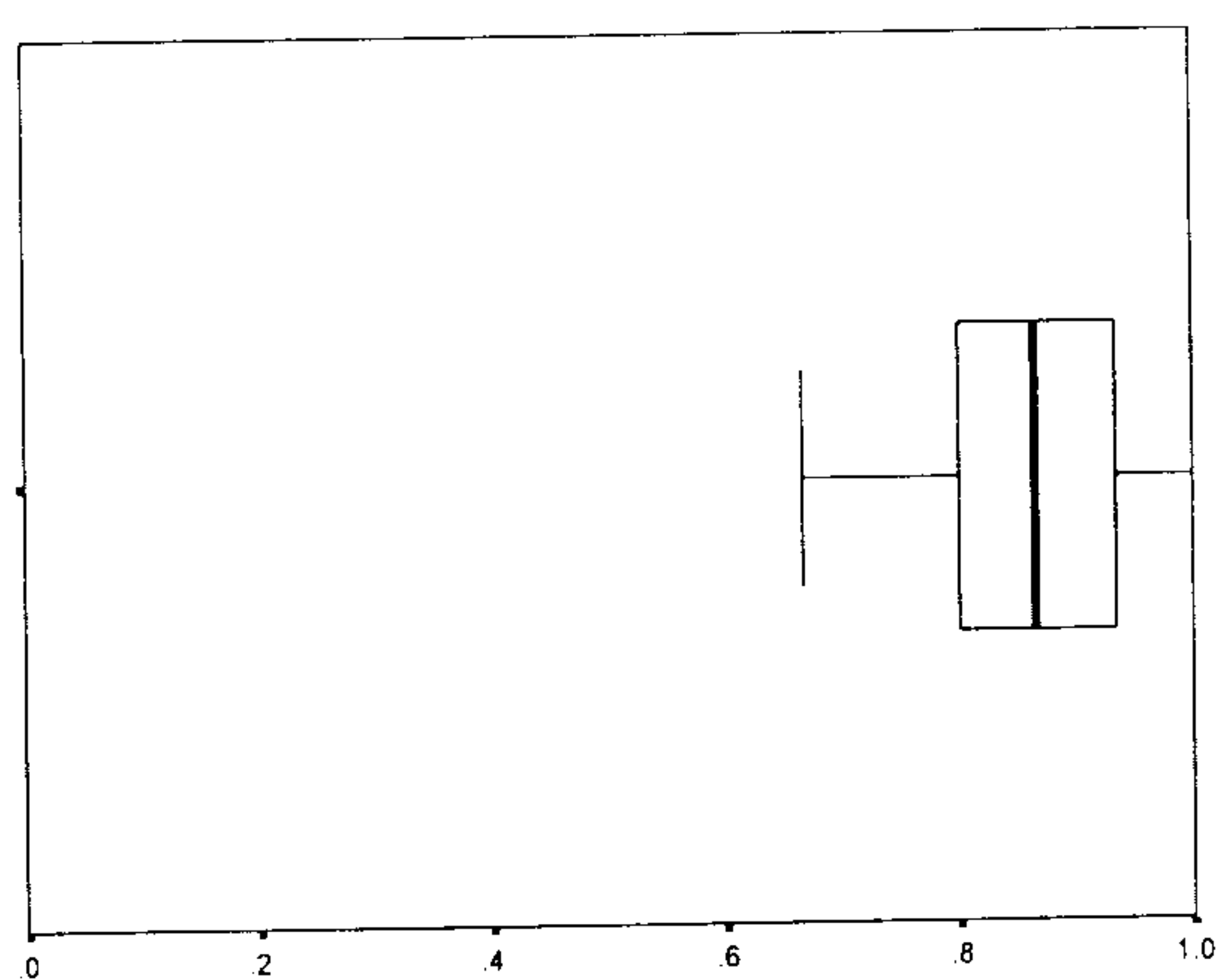
四年級出現同分母真分數相加減的運算及假分數可分解成整數和真分數，施測題目如下：

三、填填看：(第(9)-(14)題，每格 2 分；第(15)、(16)題，每格 1 分；共 32 分)

7-10

(10) 100 個花裝成一袋，黑盒子裡的花片和 $\frac{32}{48}$ 袋一樣多，紅盒子裡的花片和 $\frac{29}{100}$ 袋一樣多。請問黑、紅兩個盒子裡的花片合起來和()袋一樣多。

有分數的算式：_____



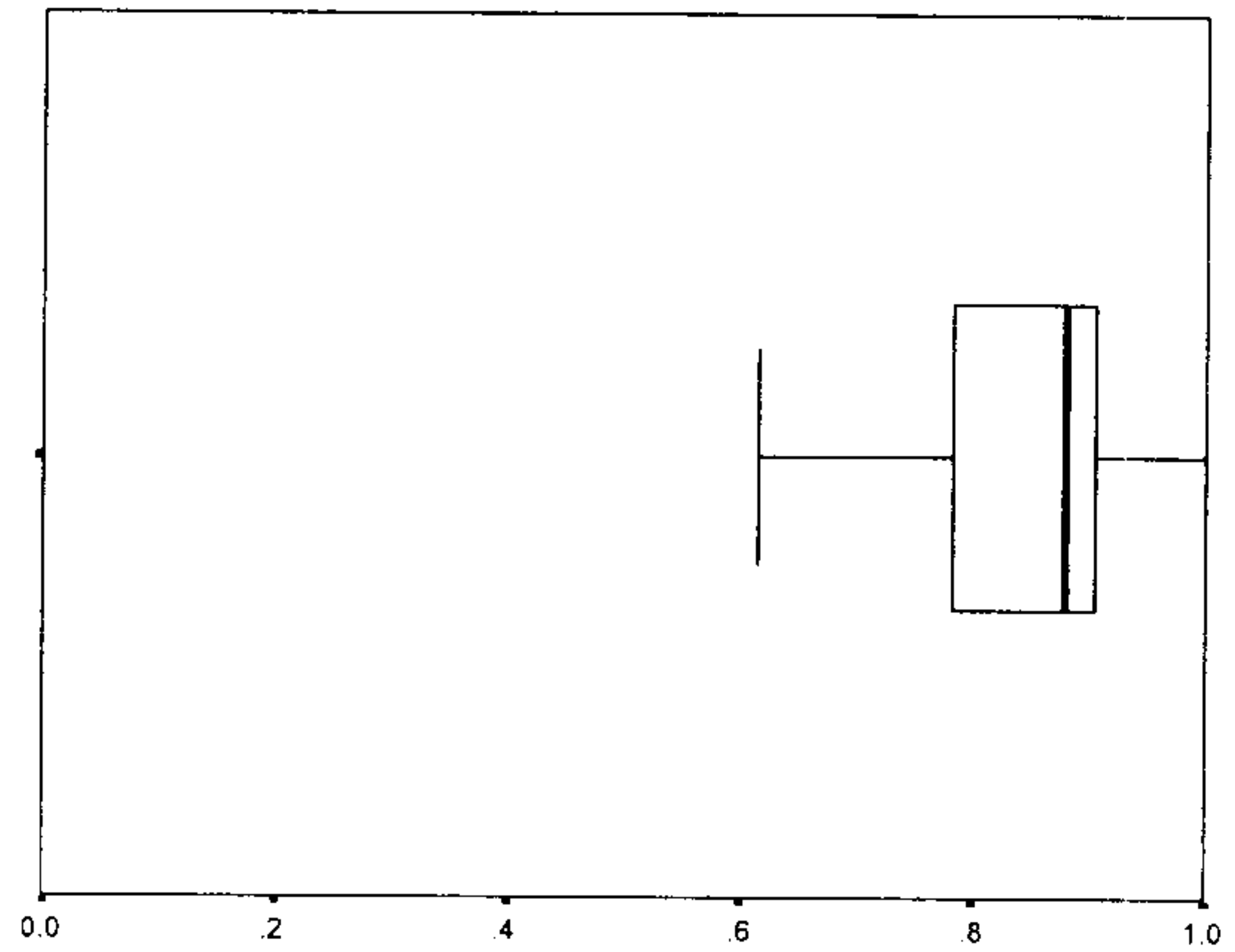
在受測的 2570 人中，答對率達 87.12%，以班級和學校為單位來看其答對率，最高皆在 95%以上，最低皆為 67%，差異性在 30%以上，而施測的 70 個班級中，有 16 個班級未達 80%的答對率。

三、填填看：(第(9)-(14)題，每格 2 分；第(15)、(16)題，每格 1 分；共 32 分)

7-12

(12)48 瓶果汁裝成一箱，上星期喝掉的果汁和 $\frac{36}{48}$ 箱一樣多，這星期喝掉的果汁和 $\frac{14}{48}$ 箱一樣多。請問這星期比上星期少喝了()箱果汁。

有分數的算式：_____



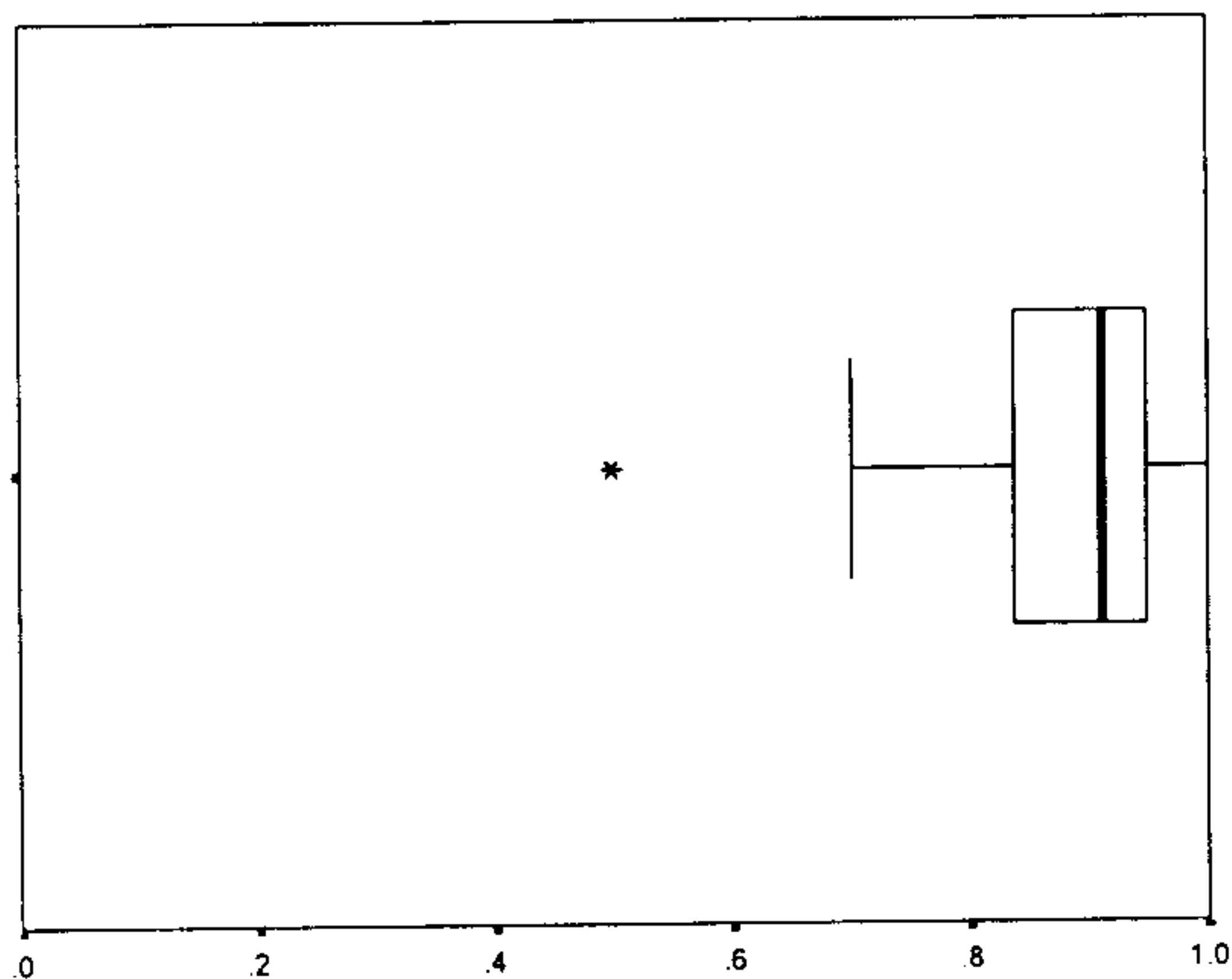
在受測的 2570 人中，答對率達 84.98%，以班級和學校為單位來看其答對率，最高皆在 95%以上，最低為 62%和 67%，差異性在 30%以上，且在受測的 70 個班級中，有 19 個班未達 80%的答對率。

6-13 的答對率明顯高於 7-10 及 7-12，造成這個現象的可能原因包括：在同分母分數的加減中，分母較小的較容易；連續量題型較易於離散量題型；語句描述的直接與否，亦即，在 6-13 中，妹妹有 $\frac{5}{7}$ 包口香糖是一個直接描述妹妹口香糖數的句子，但是在 7-10 或 7-12 中，不是直接描述黑盒子裏的花片數，而是以黑盒子裏的花片和 $\frac{36}{100}$ 袋一樣多的間接的方式描述。

四、填填看：(每格 2 分，共 34 分)

8-16

(16) 1 公尺是 100 公分，有一條繩子長 $\frac{21}{10}$ 公尺，剪掉 $\frac{13}{10}$ 公尺後，還剩下 () 公尺。



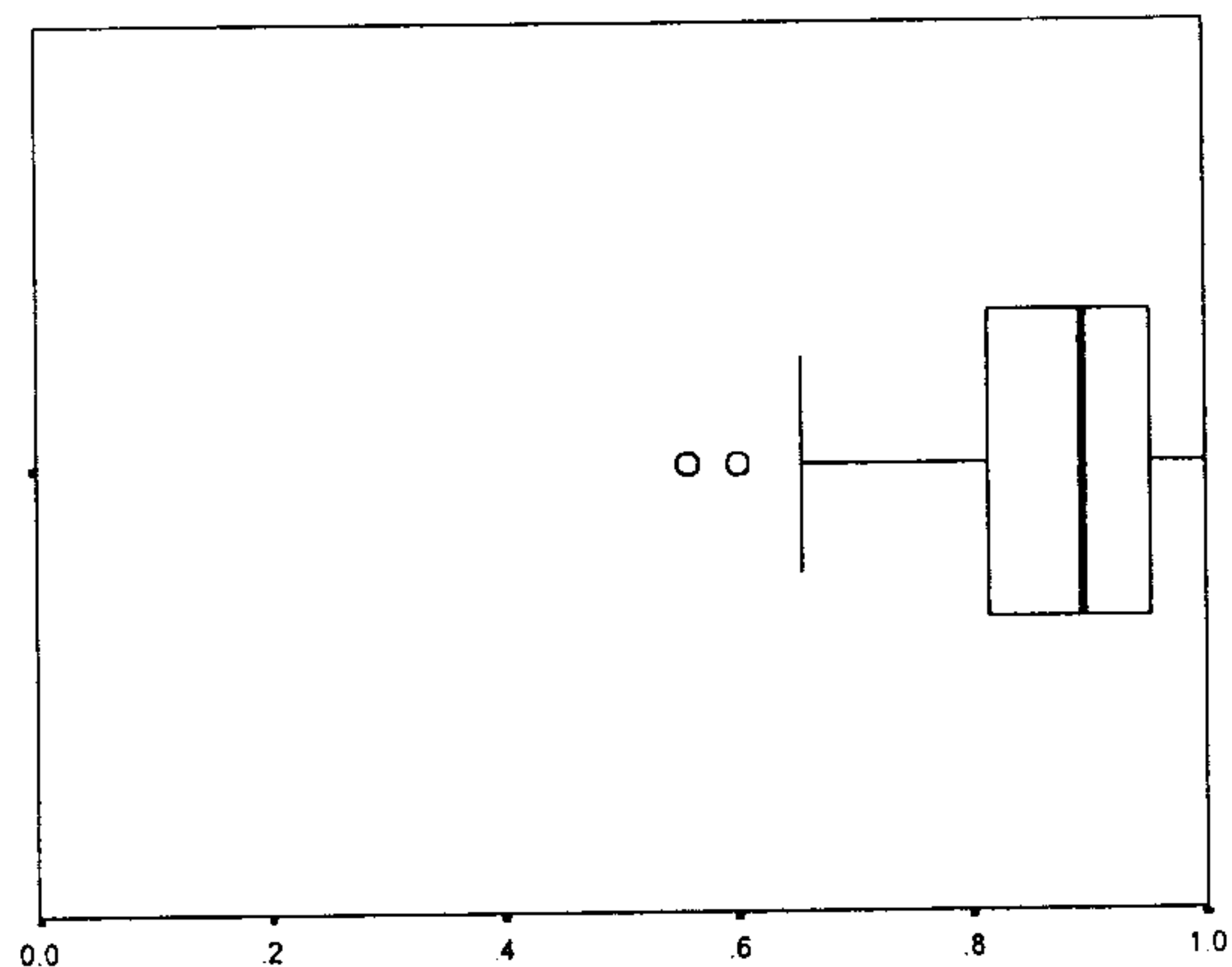
在受測的 2465 人中，答對率高達 89.09%，以班級和學校為單位來看其答對率，最高皆為 100%，最低皆為 50%，高低的差異很高，達 50%，在受測的 68 個班級中，有 12 個班級的答對率低於 80%。

同為直接陳述類型的 6-13 與 8-16 卻有將近 10% 差異的答對率，以此我們推測或許連續量題型 (6-13) 較易於離散量題型 (8-16) 或真分數的加減 (6-13) 較易於假分數 (8-16)。

四、填填看：(每格 2 分，共 34 分)

8-17

(17) 12 枝鉛筆裝成一盒，文具店賣掉 $1 + \frac{2}{3}$ 盒後，還剩下 $8 + \frac{1}{3}$ 盒，文具店原有鉛筆 () 盒。



在受測的 2465 人中，答對率為 86.77%，以班級和學校為單位來看其答對率，最高為 100% 和 99%，最低為 56% 和 60%，高低的差異很高。在受測的 68 個班級中，有 14 個班級的答對率低於 80%，本題與 6-13 的 97% 的答對率相比，仍有將近 10% 的相差，顯示真分數的同分母相加減問題仍

較易於帶分數的同分母相加減的問題。

由 8-16 與 8-17 相近的答對率來看，假分數與帶分數的分解、合成的難度對國小四年級學生來說並無差異。

三、高年級

高年級有關於分數的教學目標為「瞭解整數、小數及分數三者之間的相互關係」、「理解小數、分數計算規則的意義」、「會做小數、分數的計算並用於解決問題」及「比、比值、比例的初步認識」。

由於本文僅分析國小學生在「分數概念」及「分數加減」這二部分的表現，故在此範圍以外的教學活動內容與學生總結性評量的結果將不在下文中討論。

(一) 國小五年級的分數領域的學習目標與教材綱要

五年級的分數教學中，出現「等值分數」及「分數的數線」。

(二) 國小五年級的新課程教材的分數教學活動內容

在五年級上學期，我們在單一內容物與多個內容物的情況下，分別進行「帶分數的合成與分解」的復習、「重新探討帶分數的書寫格式，如使用 $4\frac{2}{3}$ 來記錄四又三分之二」。接下來引進分數的「比較問題」。當解分母不同的分數比較問題時，應先找出這兩個分數的『共測單位』，才能比較。如以「24 枝彩色筆裝一盒， $\frac{3}{8}$ 盒彩色筆和 $\frac{5}{12}$ 盒彩色筆，誰比誰多？」為例，找 $\frac{3}{8}$ 盒和 $\frac{5}{12}$ 盒的共測單位的方法主要有二種。一種以「盒」為對象，找出它們的共測單位為 $\frac{1}{24}$ 盒。亦即，以 $\frac{1}{24}$ 盒為單位， $\frac{3}{8}$ 盒是 $9\frac{1}{24}$ 個盒，而 $\frac{5}{12}$ 盒是 10 個 $\frac{1}{24}$ 盒，再比較兩者的多寡。另一種是以彩色筆的自然單位「枝」，為共測單位，找出 $\frac{3}{8}$ 盒是 9 枝， $\frac{5}{12}$ 盒是 10 枝，再比較兩者的多寡。由以上分析不難推知，連續量的分數問題較不易找到以自然單位為共測單位，如 $\frac{3}{8}$ 塊蔥油餅和 $\frac{5}{12}$ 塊蔥油餅的比較，就只能找適當的單位分數為基準，將 $\frac{3}{8}$ 與 $\frac{5}{12}$ 做同分母的轉換才能比較，故在本冊，僅出現較容易的離散量題型。最後我們在離散量的情境中，給定單位量與分量（皆以內容物的個數描述），探討使用分數來描述分量，以擴展分數的意義，如「10 張色紙裝成一包，7 張色紙是多少包？」

五年級下學期，我們在單位分數的內容物為整數個物的限制下，在各種問題情境下，探討分數的比較問題，並探討等值或次序關係的遞移性質；探討「給定單位量及分量，用分數數詞（字）描述分量」的問題，並討論不同形式的答案彼此等值，且進行分母為 1000 的同分母分數的合成、分解活動，以做為認識三位小數加減的問題。接著，進行將分數轉換為指定分母的等值分數，如把單位分數轉換為指定的分母的分數（「24 枝鉛筆裝成一盒， $\frac{1}{3}$ 盒和十二分之多少盒一樣多？」）或將真分數和帶分數轉換成

等值分數時，教師可從約分或擴分兩個方向來選擇分數與指定的分母，並考慮各種情境，其中，在連續量的情境較不易處理，教師可採用「線段圖」來幫助理解。線段圖可用在解決異分母的比較上，如「有 2 條緞帶，包裝禮物用去 $\frac{3}{4}$ 條。算算看， $\frac{3}{4}$ 條緞帶和 $\frac{5}{6}$ 條緞帶，誰比誰長？」，我們可選用 12 公分長的線段代表這一條緞帶，因此，9 公分和 10 公分可分別代表 $\frac{3}{4}$ 條緞帶和 $\frac{5}{6}$ 條緞帶。

(三) 國小五年級學生的分數概念的總結性評量的表現

五年級的分數已開始出現等值分數的概念、帶分數的書寫格式與利用線段圖解題，其施測的題目如下：

<p>一、選選看：(每題 1 分共 2 分)</p> <p>10-2</p> <p>(2) () 54 個夾子裝一盒，$2\frac{8}{18}$ 盒夾子和多少盒夾子一樣多？ ① $\frac{28}{18}$ 盒 ② $2\frac{6}{9}$ 盒 ③ $\frac{36}{18}$ 盒 ④ $2\frac{12}{27}$ 盒。</p>	
---	--

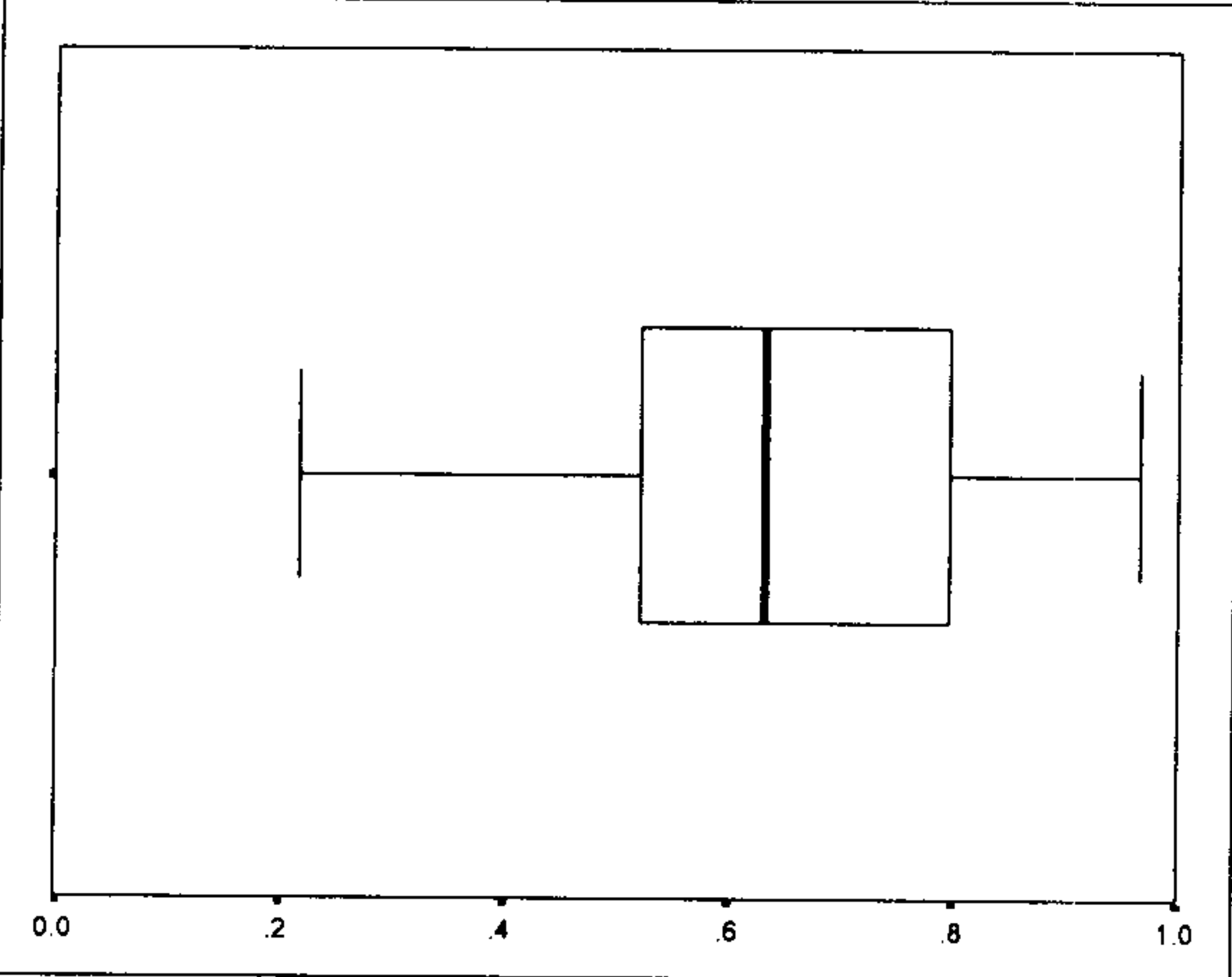
在受測的 2046 人中，全體答對率 71.92%，以班級和學校為單位來看答對率，最高皆為 100%，最低為 27%與 34%，而在施測的 60 個班級中，有 28 個班級未達 70%的答對率，亦即有將近一半的班級的學生不了解此部分的教材。

<p>三、先用算式填充題記錄問題，再用算式把你的做法記下來。(每題 4 分，共 28 分)</p> <p>10-9</p> <p>(9) 24 顆糖果裝一包，把 4 包糖果全部平分成 3 盒，一盒可以裝多少包糖</p>	
--	--

果？

最後答案儘量用帶分數回答。

算式填充題：_____



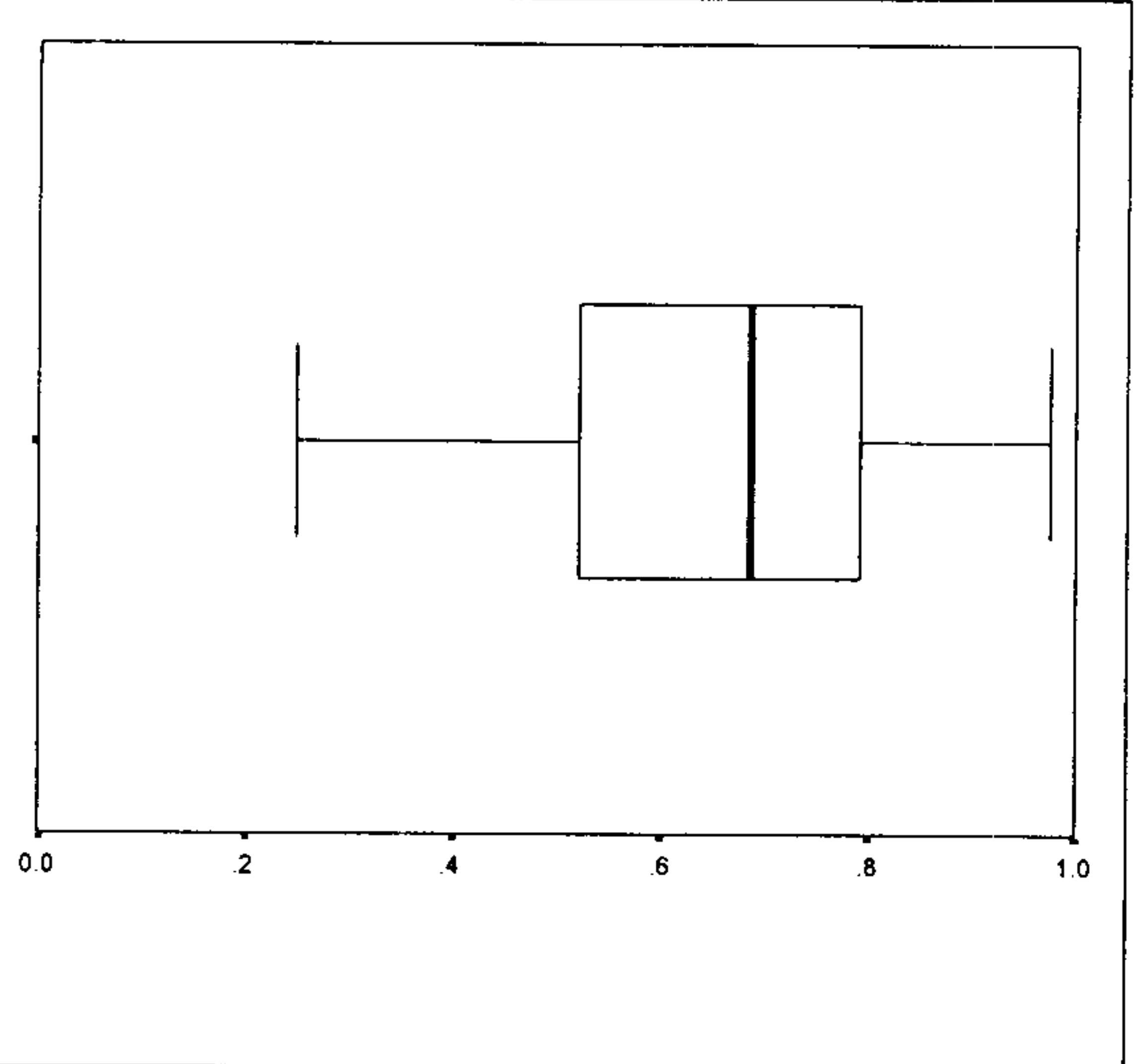
在受測的 2046 人中，全體答對率 65.59%，以班級為單位的答對率在 22%和 97%之間；以學校為單位的答對率則是在 28%和 92%之間。在施測的 60 個班級中，有 37 個班級未達 70%的答對率，亦即已有超過一半的班級的學生不了解此部分的教材。

四、把你的做法記下來。(每題 4 分，共 32 分)

10-18

(18)一條水管長 30 公尺，12 公尺長的水管可以是多少條水管？(只要寫出 1 個答案即可)

你的做法：



在受測的 2046 人中，全體答對率 66.86%，以班級為單位的答對率在 25%和 91%之間；以學校為單位的答對率則是在 25%和 90%之間。在施測的 60 個班級中，有 30 個班級未達 70%的答對率，亦即有一半的班級的學生不了解此部分的教材。

七、畫出上下並排的線段圖，並填填看。(每格 1 分，線段圖 3 分，共 6 分)

(24) 1 公斤重的鹽裝成一包，媽媽上個月用掉 $1\frac{1}{3}$ 包，這個月用掉 $\frac{2}{5}$ 包。

注意！代表 1 包、 $1\frac{1}{3}$ 包和 $\frac{2}{5}$ 包鹽的線段長都要是 1 公分的倍數。

10-24-①

①代表 1 包鹽的線段長 () 公分。

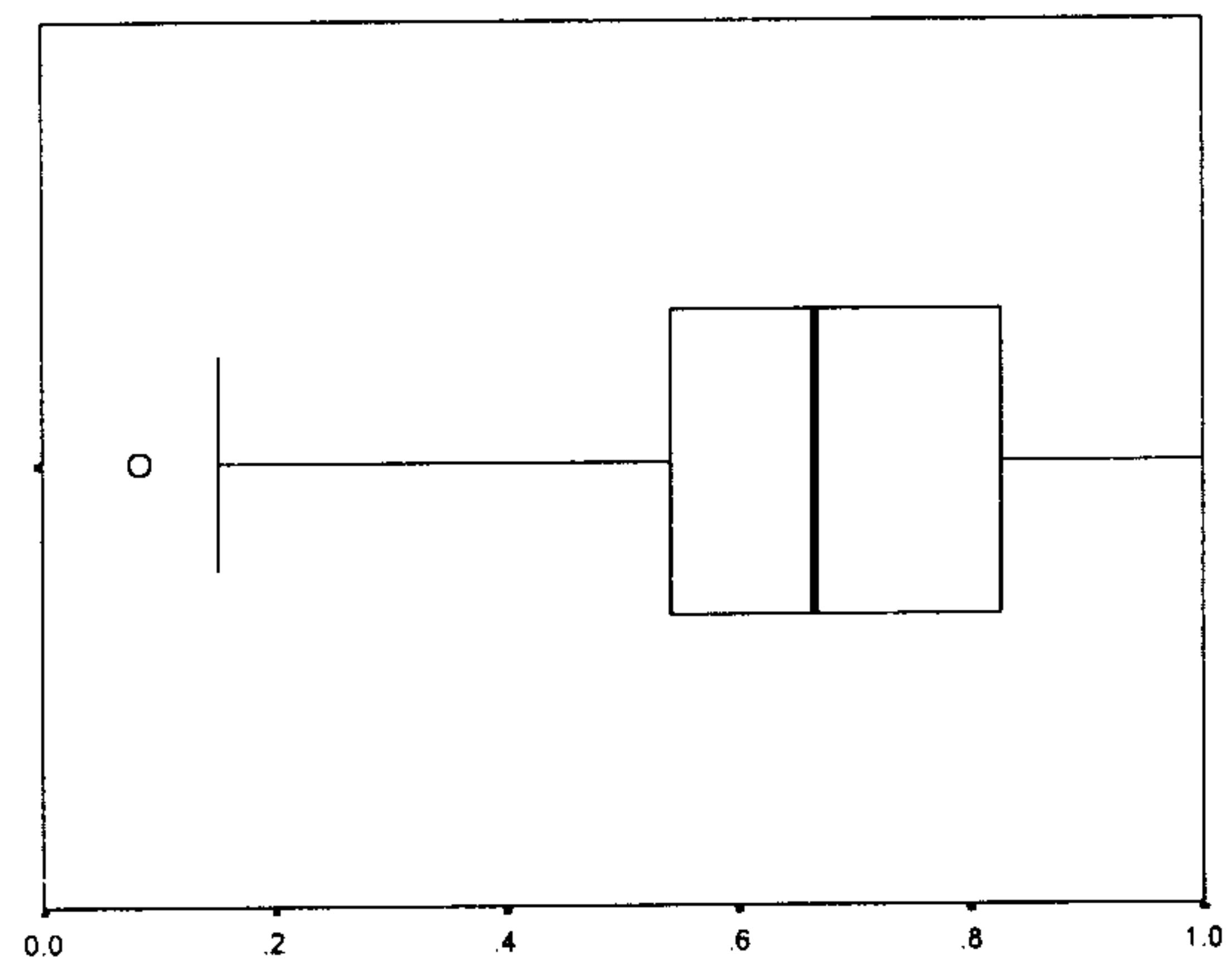
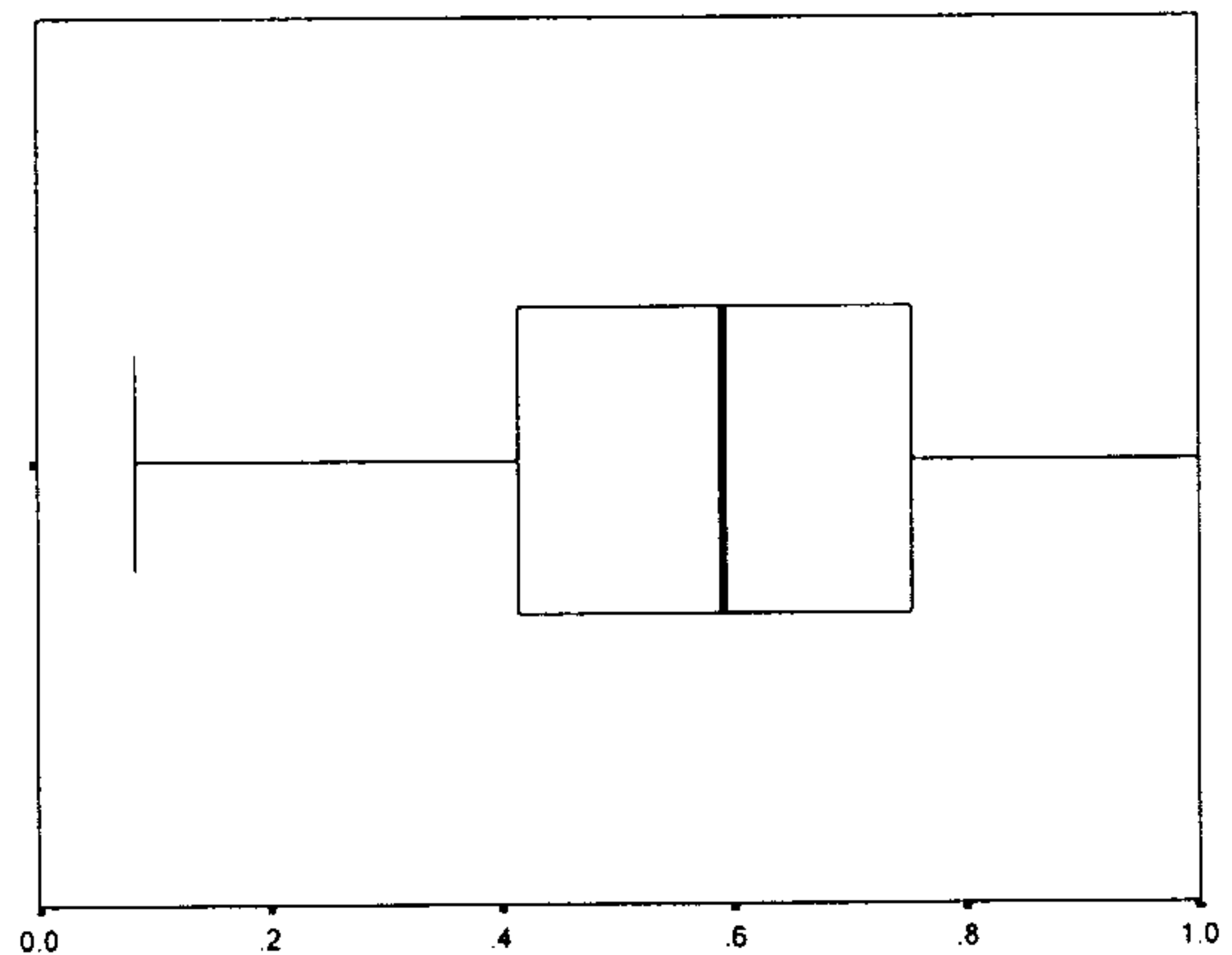
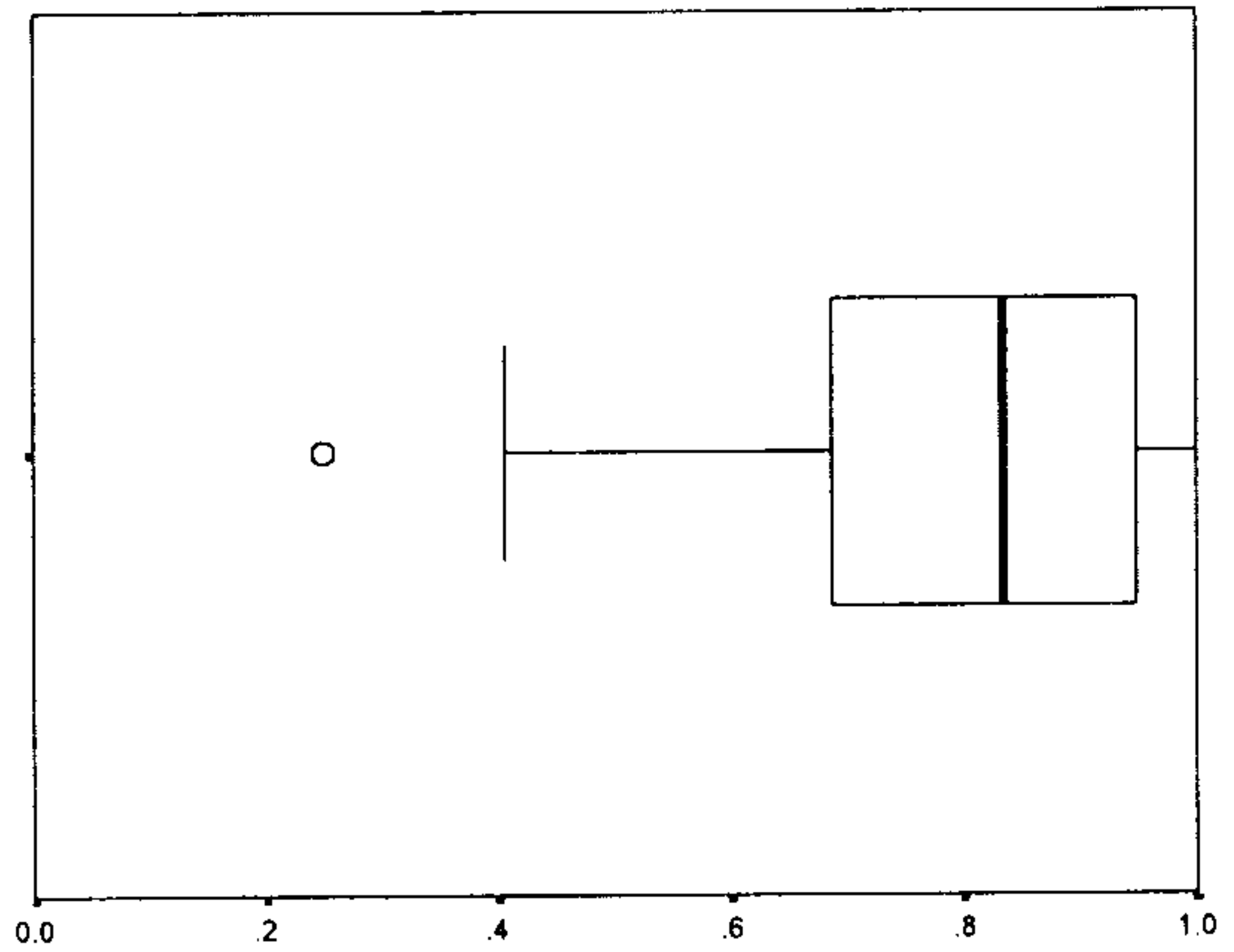
10-24-②

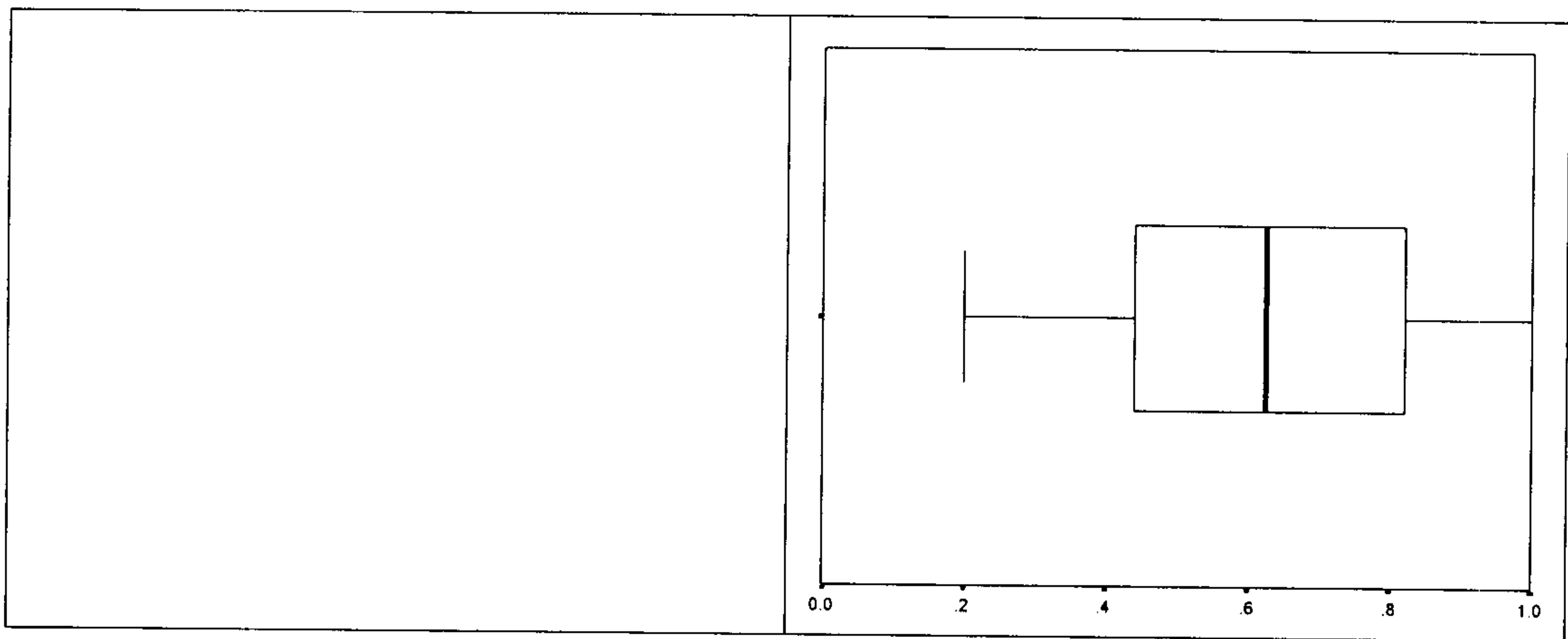
②代表 $1\frac{1}{3}$ 包鹽的線段長 () 公分。

10-24-③

③代表 $\frac{2}{5}$ 包鹽的線段長 () 公分。

10-24-④





在 2046 人中，上述四小題的全體學生的答對率依序為 79.96%、60.70%、66.03%、63.25%，顯示在作圖時，整數部分是比較容易理解，而帶分數因含真分數與整數部分，顯得較難圖示。在施測的 60 個班級中，依序有 16、37、35、36 個班級沒有達到 70% 的答對率。顯示國小五年級學生不易學會以線段圖來表示分數或幫助運算。

綜合 10-9、10-18、10-24 的分析，我們發現五年級學生對分數概念及其加減的教材的學習困難。

(四) 國小六年級的分數領域的學習目標與教材綱要
六年級，我們介紹「約分和擴分」及「通分」。

(五) 國小六年級的新課程教材的分數教學活動內容

我們透過成比例的線段圖，來表示兩異分母的分數，進行分數的比較活動。在線段圖的輔助之下，解決異分母分數的加減問題。此處應多進行異分母的比較或合成、分解等活動，務使學生能充分熟悉異分母的通分意義，再做加減。接下來介紹最簡分數並繼續探討分數間的等值關係和次序關係的遞移性質。

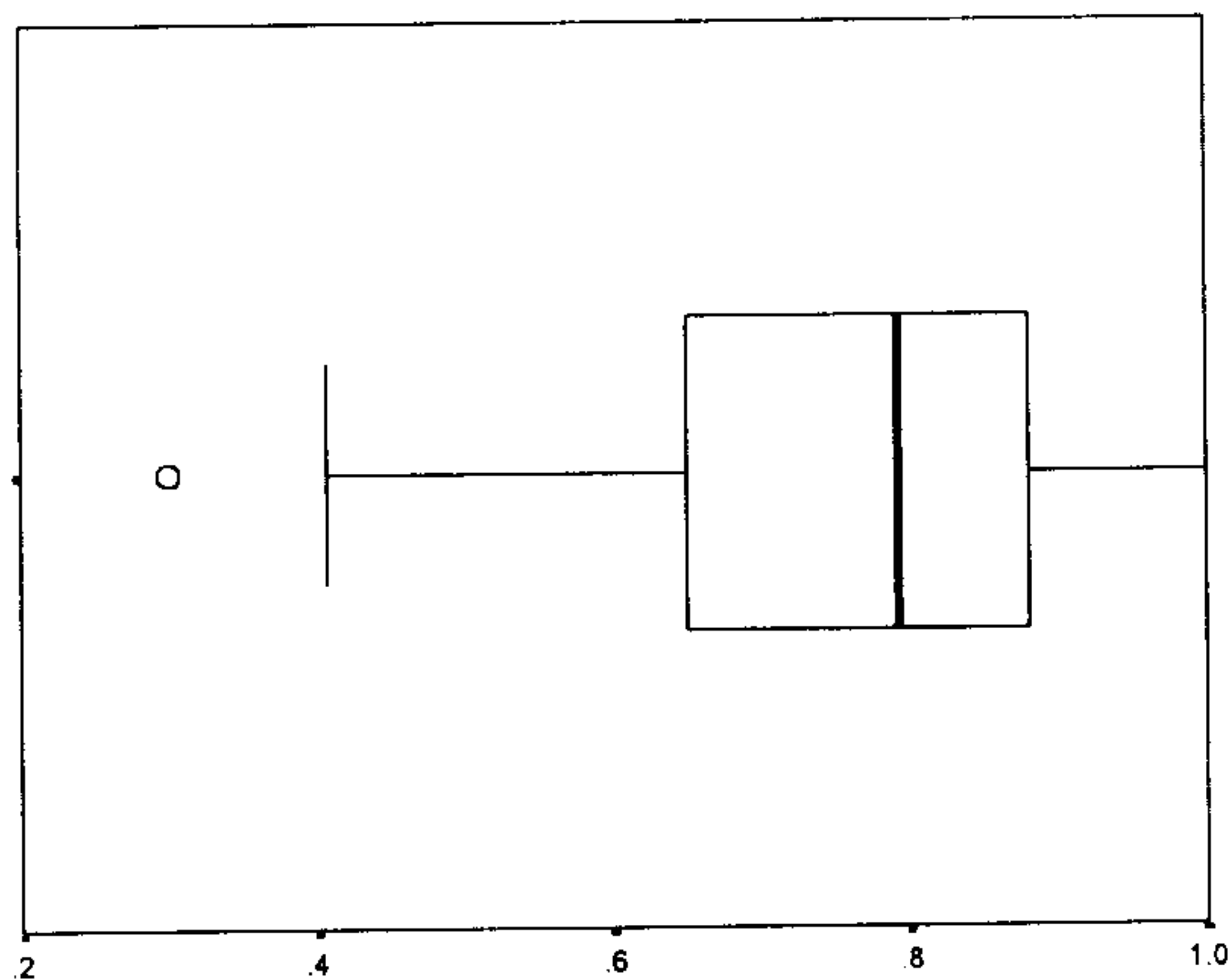
(六) 國小六年級學生的分數加減運算的總結性評量的表現
六年級的分數運算為異分母分數的加減，其施測的題目如下：

一、先用算式填充題記錄問題，再用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

11-1

(1)一包仙貝有 24 枚，籃子裡原有 $4\frac{3}{8}$ 包，弟弟拿走 $1\frac{7}{12}$ 包後，籃子裡還剩下多少包仙貝？

算式填充題：_____



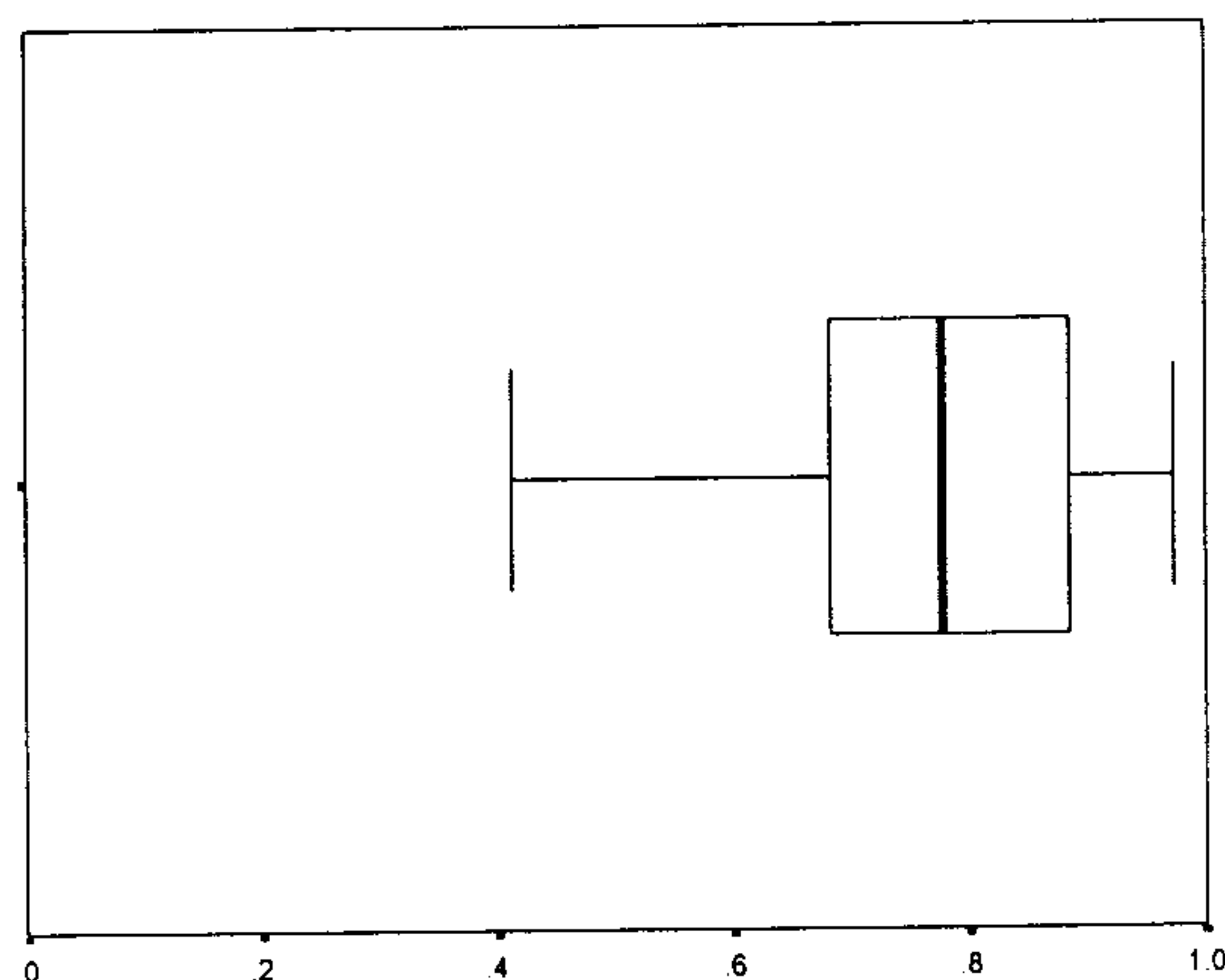
在受測的 2047 人中全體答對率 76.98%，以班級為單位的答對率在 30% 和 100%之間；以學校為單位的答對率則是在 30%和 97%之間。在施測的 62 個班級中，有 19 個班級未達 70%的答對率，亦即有超過三分之二的班級的學生能了解此部分的教材。

一、先用算式填充題記錄問題，再用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

11-2

(2)紅繩長 $\frac{16}{23}$ 公尺，黃繩長 $\frac{39}{46}$ 公尺，這兩條繩子接起來長多少公尺？

算式填充題：_____



在受測的 2047 人中，全體答對率 77.47%，以班級為單位的答對率在 41%和 97%之間；以學校為單位的答對率則是在 50%和 97%之間。在施測的 60 個班級中，有 17 個班級未達 70%的答對率，亦即已有超過三分之二的班級的學生能了解此部分的教材。

由 11-1 與 11-2 的答對率發現，連續量的異分母真分數合成問題與異分母離散量的帶分數的分解問題的難度並無顯著差別。

參、結語

根據本課程研究小組所訂的國小低、中、高年級學生是否學會該數學內容的標準判斷，國小學生學習分數概念及其加減法運算的教材時，除了約有一半的二年級及五年級學生無法了解該年級的分數教材外，其他各年級學生的學習情況尚稱良好。因此，在課程修訂時，修訂委員應針對二年級及五年級的分數教材重新檢討與設計，以協助學生的分數學習。