

# 整數的四則運算

P81-27

謝 堅

## 一、課程概要

依據民國八十二年國民小學數學課程標準(教育部,民82)教材綱要,在整數四則運算教材部份,一年級進行兩步驟的加減問題,但是只強調解題的方法,並不要求學童使用算式記錄解題活動與結果。二年級進行兩步驟的加、減、乘問題,除了強調解題的方法外,還要求學童使用算式記錄解題的過程與結果,但並不要求學童使用一個併式記錄解題活動與結果。三年級進行兩步驟的四則問題,並讓學童嘗試合併一式,但不硬性要求。四年級則進行簡易的整數四則計算。

學童整數概念的品質限制了他們整數四則運算的方式與歷程,也限制了學童使用算式或併式記錄解題活動與結果的能力,實驗課程(以下簡稱本課程)依據學童數概念的認知發展,以及對算式及併式意義的掌握,彈性的調整及延後部份的教材。在第二冊第九單元,本課程引入兩步驟合成問題、兩步驟分解問題以及兩步驟合成分解混合問題,希望擴展學童加減問題的解題能力,但不要求任何算式記錄;在第三冊第二單元,本課程透過「先做什麼?再做什麼?」的溝通方式,幫助學童使用兩個獨立的算式(多步驟算式記錄格式),來記錄加、減兩步驟問題整個解題過程與結果。在第四冊第四單元,本課程將兩步驟問題的範圍擴展至先乘後加及先乘後減的問題。在第五冊第九單元,本課程引入加乘與減乘的兩步驟問題(加乘與減乘兩步驟問題的描述,是成人的觀點,學童對題意的理解方式,可能與成人不同,故本課程不預期學童只能使用兩個步驟來解題),要求學童用多個算式記錄解題活動,並要求在算幾倍的地方,要用有「 $\times$ 」號的算式來記。在第六冊第十單元,本課程開始引入先進行合成或分解活動後,再進行包含除或等分除活動的問題以及先乘後除的問題,在記錄方面,由於現階段本課程尚未介紹除法算式,學童可能透過多個運算步驟來解題,故而只要求學童使用算式記錄解題活動,並不限制算式紀錄的個數。在第八冊第八、十、十一三個單元,本課程先引入加減併式紀錄的格式,幫助學童使用併式填充題記錄兩步驟加減問題,並形成使用括號區分解題計畫中運算次序的共識;再透過比較活動,幫助學童經驗及察覺 $=$ 、 $<$ 與 $>$ 符號的遞移性;最後協助學童先用併式填充題記錄兩步驟加減問題,再用逐



次減項的記法，記錄解決兩步驟加減問題的解題過程。在第九冊第三及第五單元，本課程將兩步驟問題的範圍擴充至乘加或乘減問題。在第九冊第七單元，本課程開始引入三（多）步驟的加減問題，仿第八冊活動進行的方式，幫助學童先用併式填充題記錄三步驟加減問題（使用小、中括號區分運算次序），再用逐次減項的記法，記錄解決三步驟加減問題的解題過程。在第十冊第一、二單元，本課程再將兩步驟問題的範圍擴充至有除法的問題情境。在第十冊第十二單元，本課程也將三（多）步驟問題的範圍擴充至包含乘、除法的問題情境。在第十冊第十三單元，本課程在多步驟四則問題情境中，先幫助學童形成利用「由最左往右算」的運算規則，以省略在併式填充題中標示由最左往右計算步驟的括號的共識，接著幫助學童形成利用「乘、除先算，再由最左往右算」的運算規則，以省略在併式填充題中標示乘、除先算，再由最左往右計算步驟的括號的共識。

實驗課程在一、二年級教材的編寫進度與課程標準教材綱要一致，但是自三年級開始，實驗課程教材的進度則明顯的落後，主要的原因是考量學童數概念的認知發展。以兩數的和（例如： $8+5$ ）與定數（例如：13）的大小關係描述為例：「 $8+5$ 」稱之「8與5的和」，當13和「 $8+5$ 」等價時，13稱為和數。累進性合成運思的學童，可以理解「 $8+5$ 」為一個運算的描述，但必須執行運算後，才能掌握其意義；部分—全體運思的學童，掌握「 $8+5$ 」是8和5兩個集聚單位合成的全體，不必執行運算，亦能掌握其為一個新集聚單位（未定值的集聚單位），包含8與5兩個部分，可以以此新集聚單位為起點，繼續進行運算；換句話說，在概念上，部分—全體運思學童才可以掌握一個未定值的集聚單位，對它進行運算，將它具體地表徵出來，而形成併式。再以逐次減項的記法為例，學童必須先掌握等號的遞移性，才有能力使用逐次減項的記法，記錄解決兩（多）步驟問題的解題活動及結果，當學童無法掌握併式的意義，就無法透過和、差併式與和（差）以及和（差）與定數間的大小關係，決定其中和、差併或與定數間的大小關係，察覺「 $=$ 」的遞移性，換句話說，當學童無法掌握併式的意義，學童就無法理解為什麼可以使用逐次減項的記法，來摘要記錄解題活動與結果。基於上述理由，故而本課程延後至第八冊，等待學童部份—全體運思發展完成後才開始引入併式記錄以及逐次減項的記法。

## 二、兩步驟問題

（不使用併式記錄問題，也不使用逐次減項的記法記錄解題過程與結果）

十、算算看，選出對的答案，  
在□裏打√。(每題4分，  
8%)

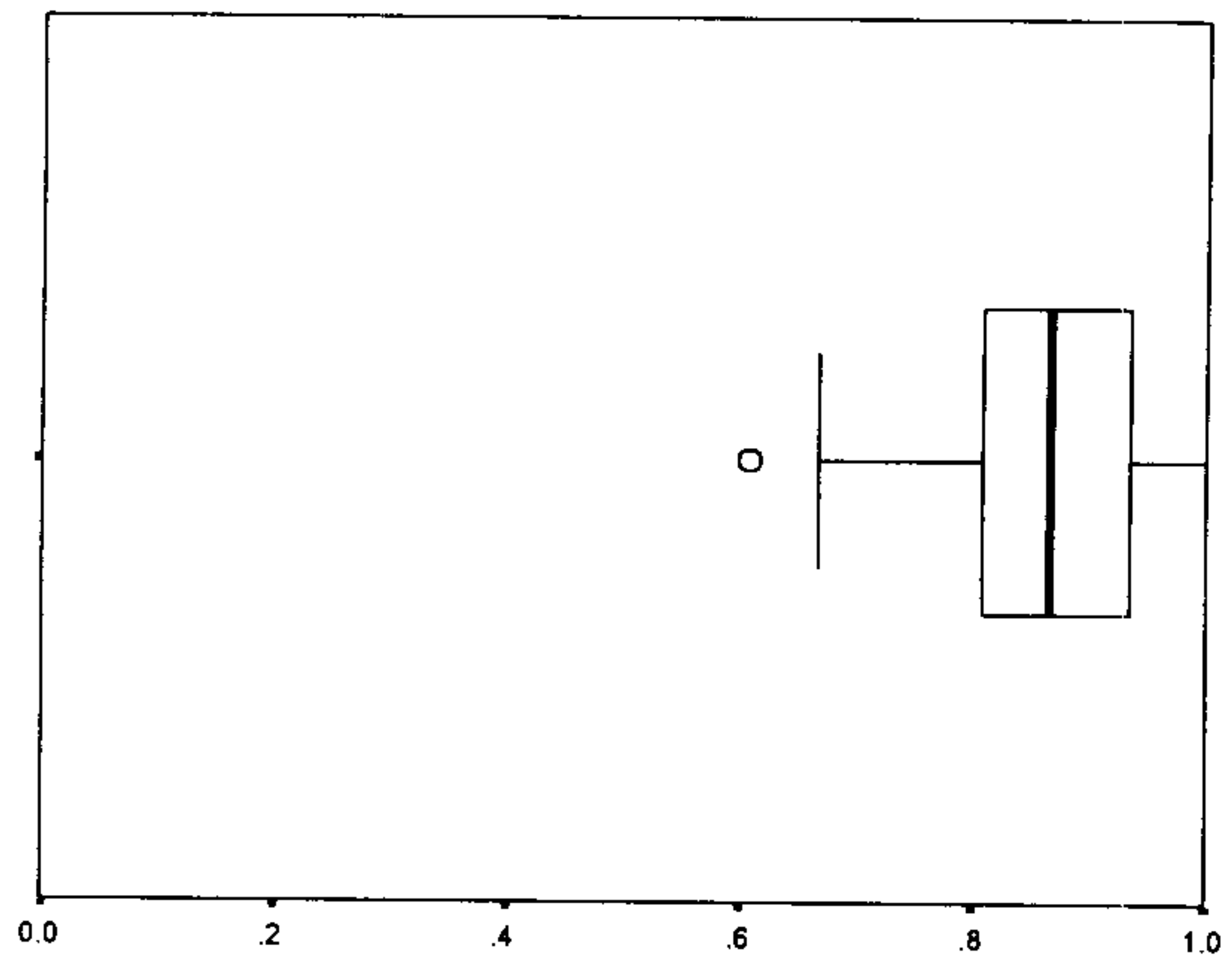
**2-18**

1. 小明左手有 8 個花片，右手  
有 7 個花片，他拿出 10 個花  
片給老師，小明還有多少個  
花片？

小明還有 25 個花片

小明還有 5 個花片

小明還有 15 個花片



十、算算看，選出對的答案，  
在□裏打√。(每題4分，  
8%)

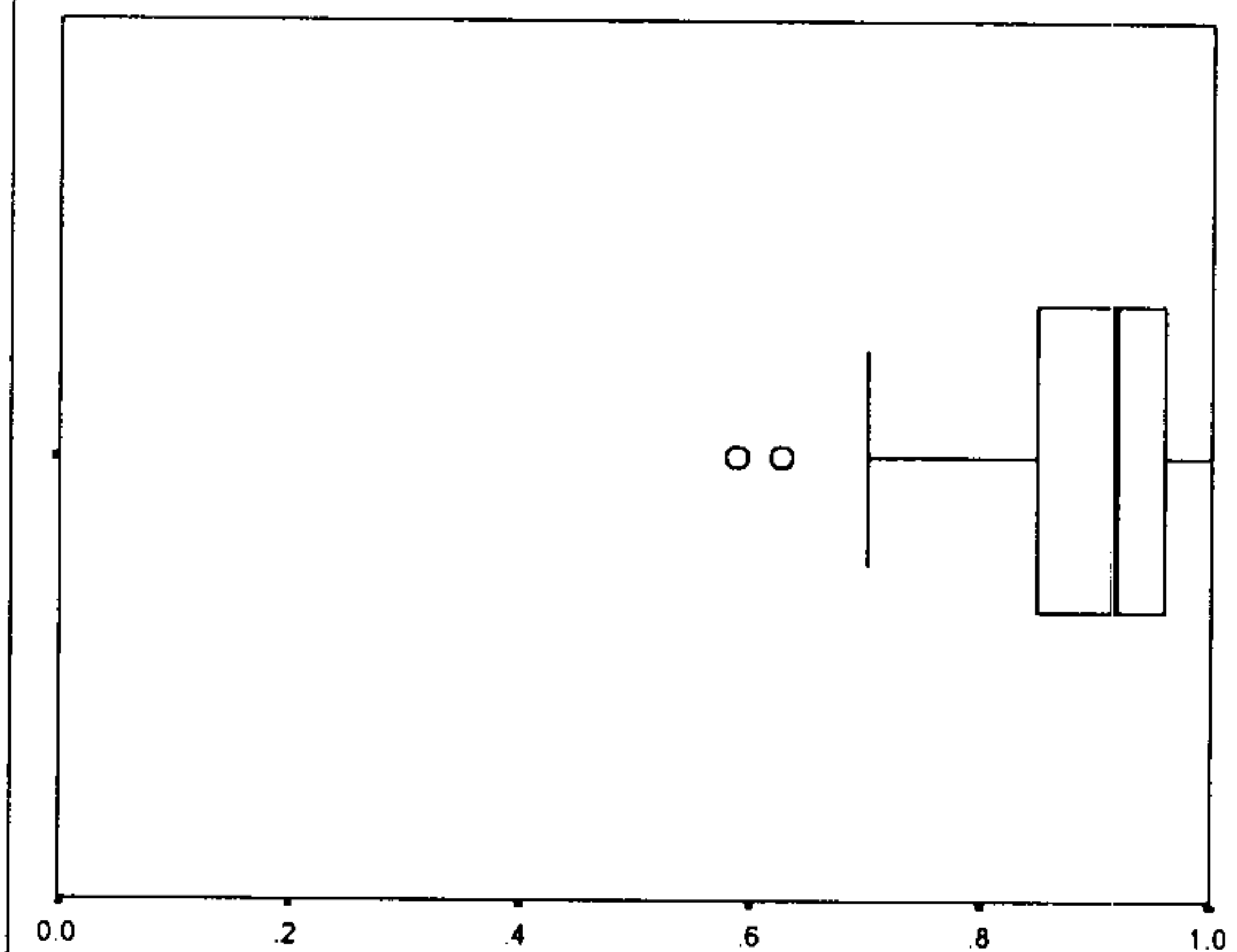
**2-19**

2. 小玲原來有 12 枝筆，送給弟  
弟 3 枝筆以後，媽媽又買了 5  
枝筆給小玲，小玲現在有幾  
枝筆？

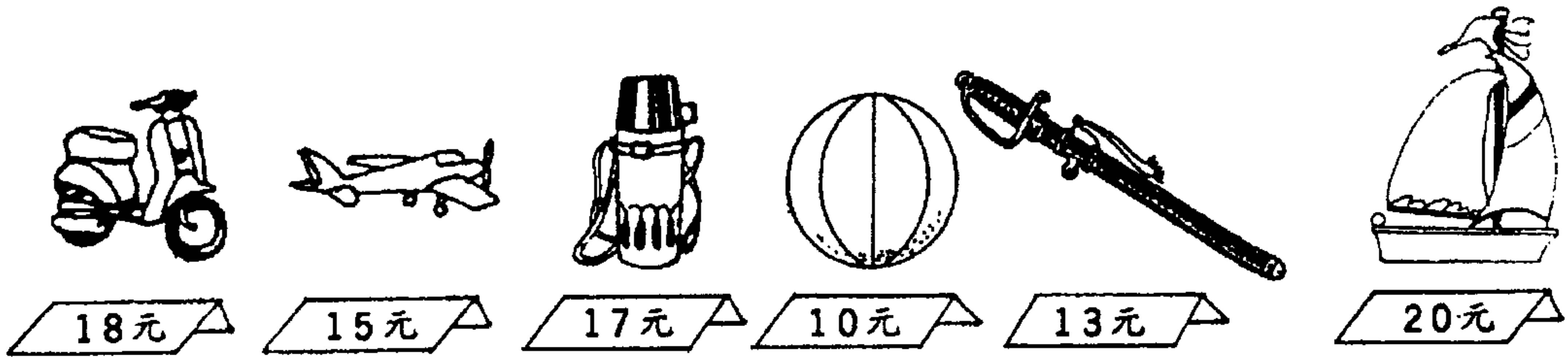
小玲現在有 4 枝筆

小玲現在有 20 枝筆

小玲現在有 14 枝筆

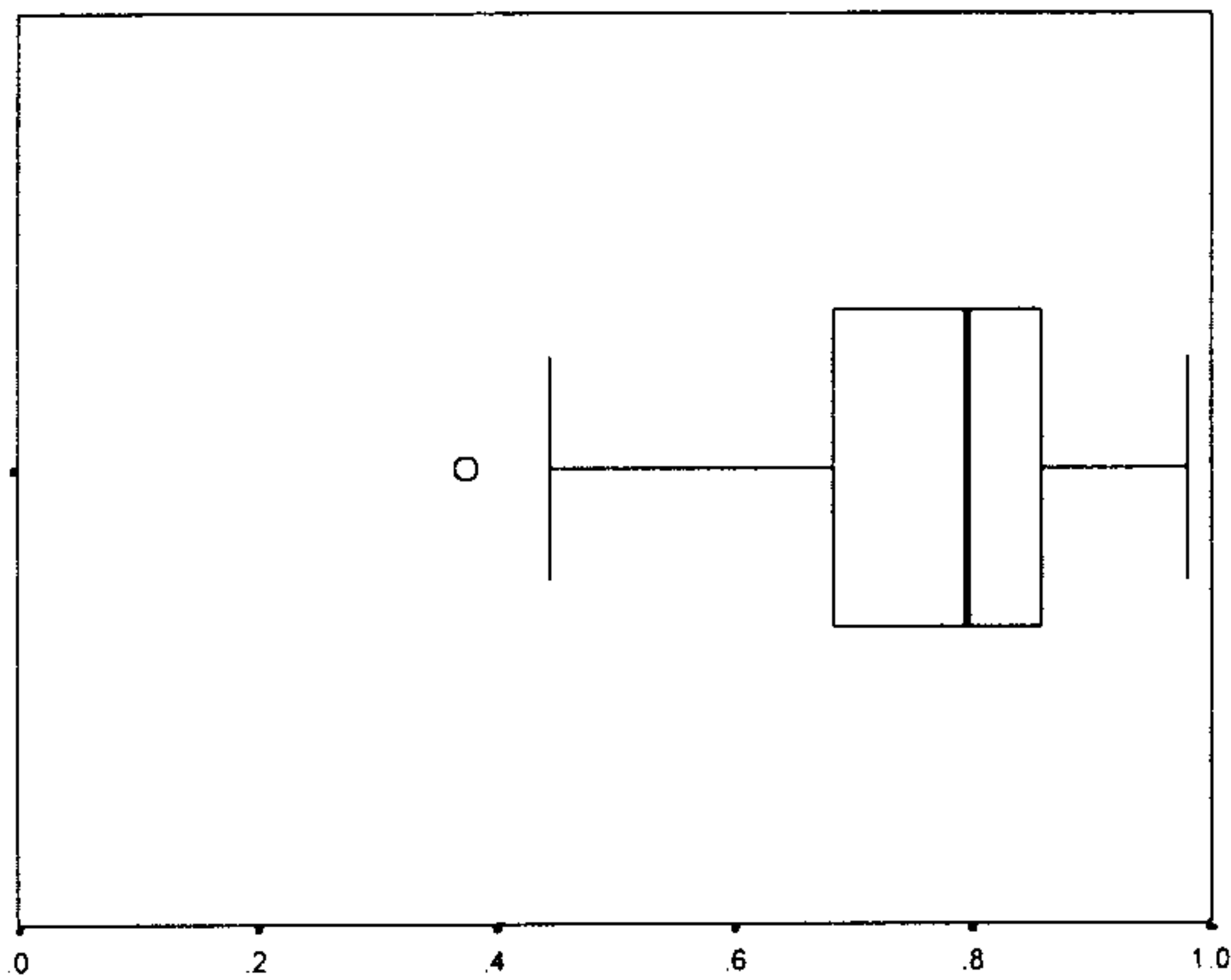


◎請你用算式把先算什麼和後算什麼寫下來，並寫出答案。



3-18


(18) 小玉帶了 36 元，買  和 ，剩下多少錢？

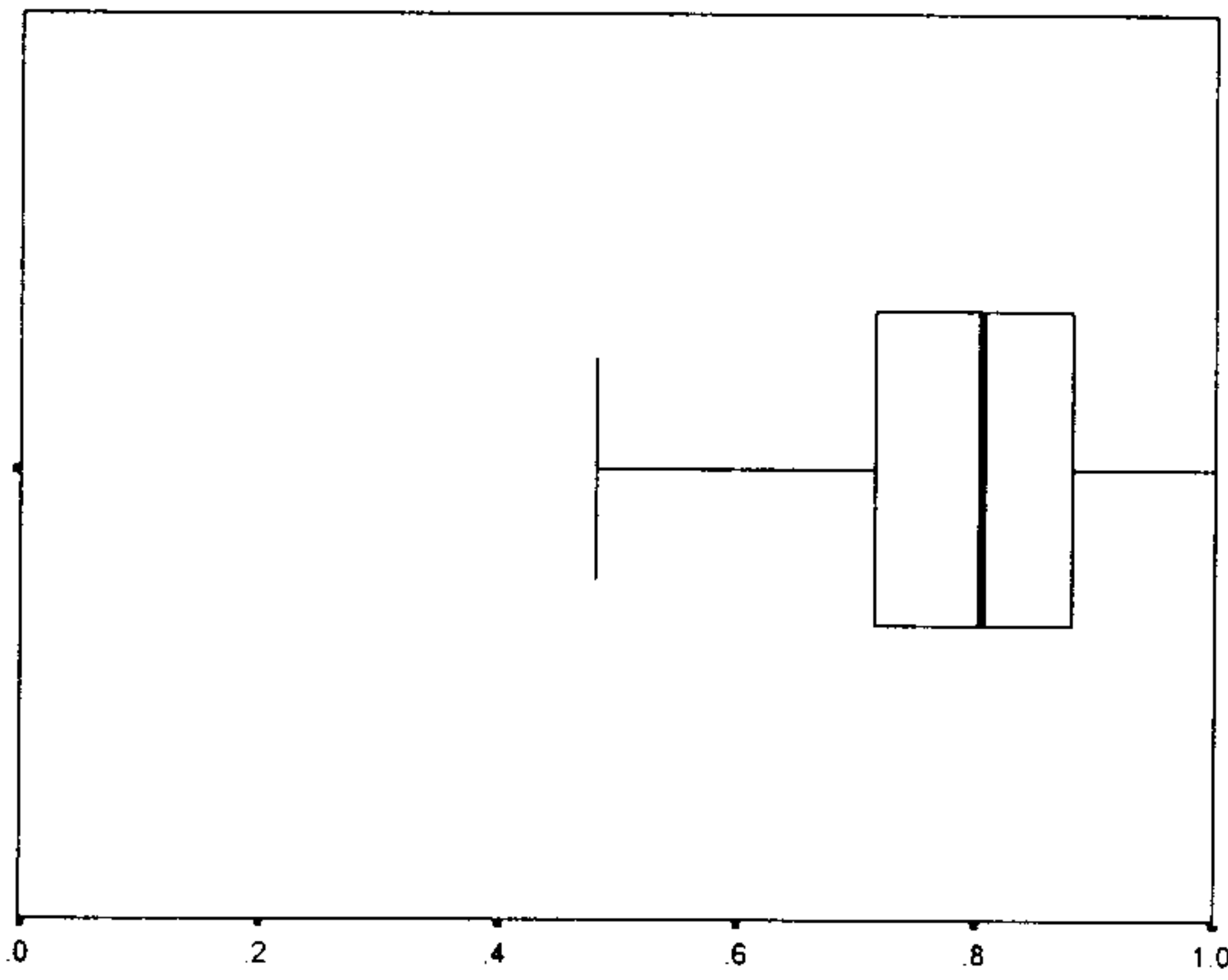


◎請你用算式把先算什麼和後算什麼寫下來，並寫出答案。

**3-19**



(19) 小強有 20 元，買了  後，媽媽再給他 5 元，現在他有幾元？

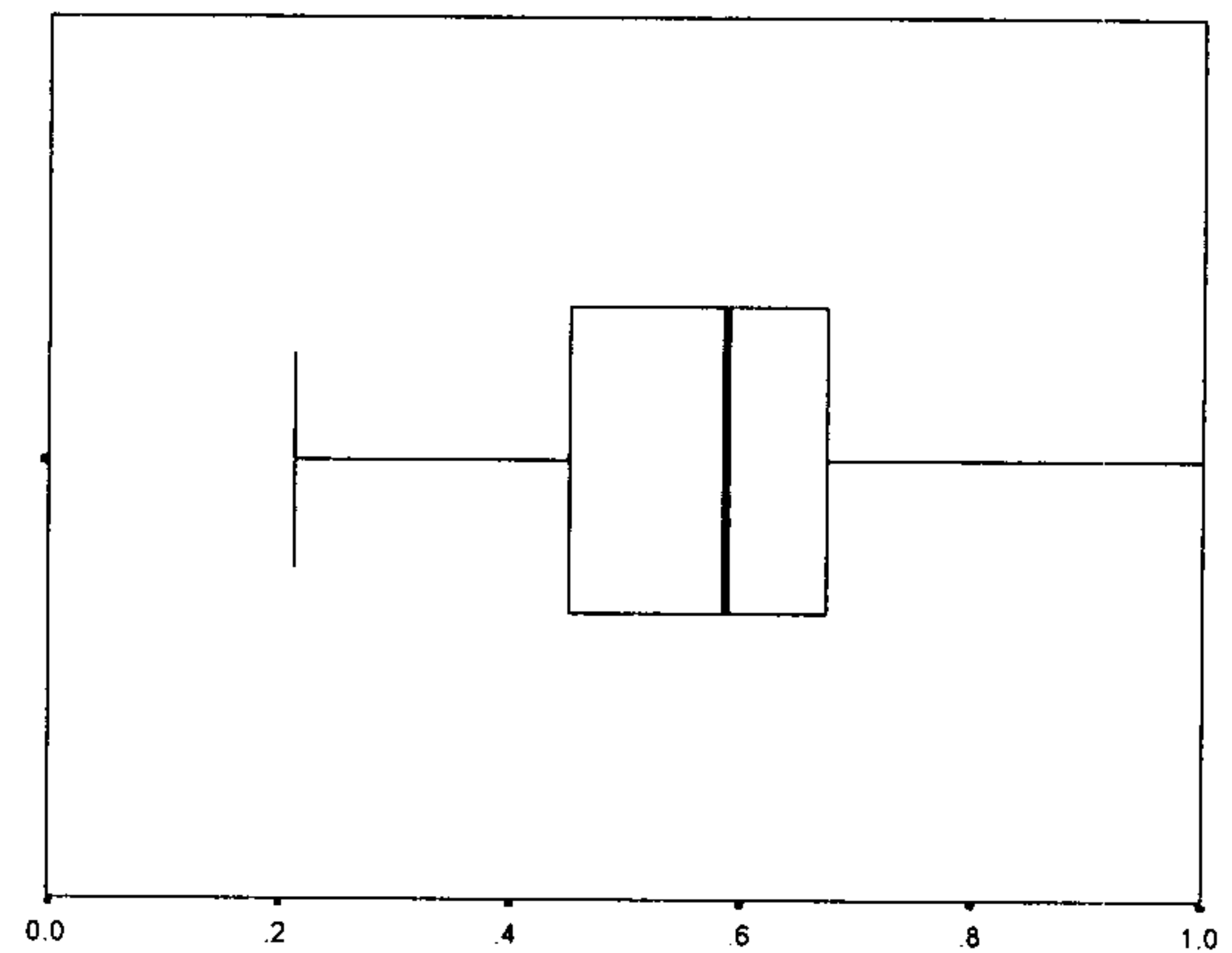


◎把你的做法用算式記下來：(在算「幾倍」的問題時，用有「 $\times$ 」號的算式來記錄)

**4-9**

(9) 1 組電池有 4 個，哥哥買了 13 組回家，弟弟用了 14 個，還有多少個電池？

( ) 個



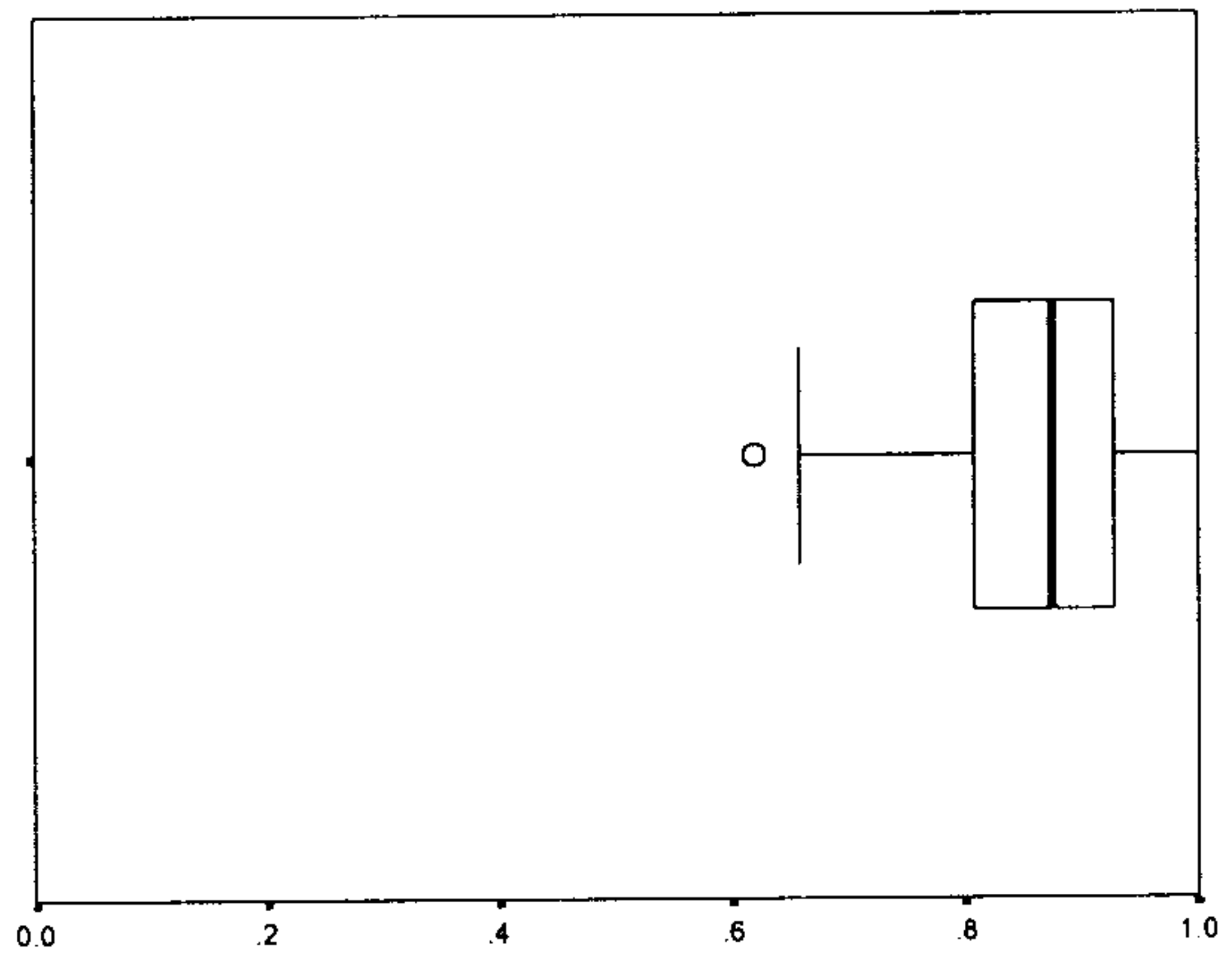


四、算算看，把你的做法用算式記下來：(1 題 6 分 共 60 分)

**5-19**

(7) 7 片口香糖裝成一包，媽媽買了 11 包，送給弟弟 5 包，媽媽還剩幾片口香糖？

答：( ) 片

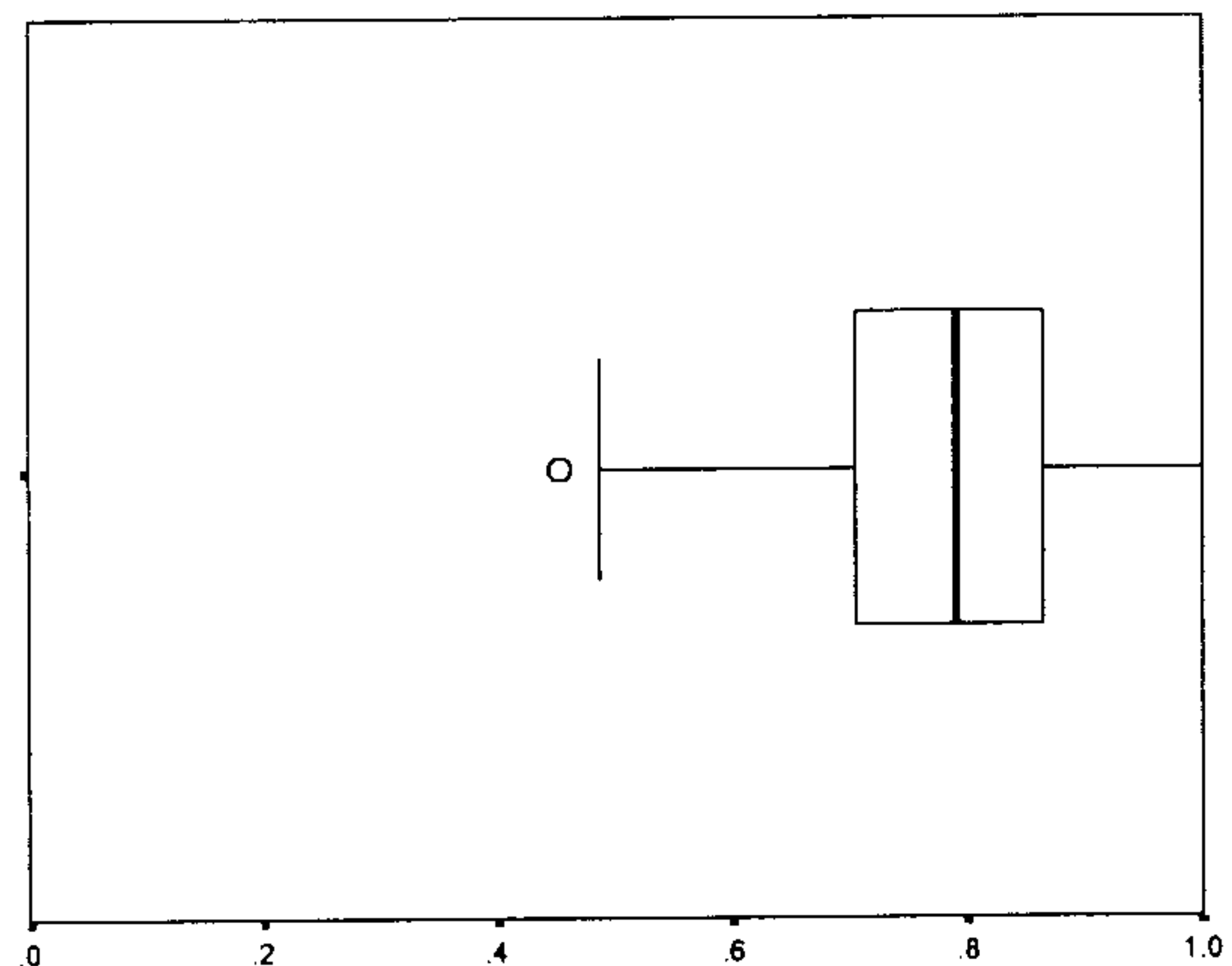


四、算算看，把你的做法用算式記下來：(1 題 6 分 共 60 分)

**5-22**

(10) 一本簿子 12 元，哥哥買 4 本，姊姊買 5 本，一共需要多少元？

答：( ) 元

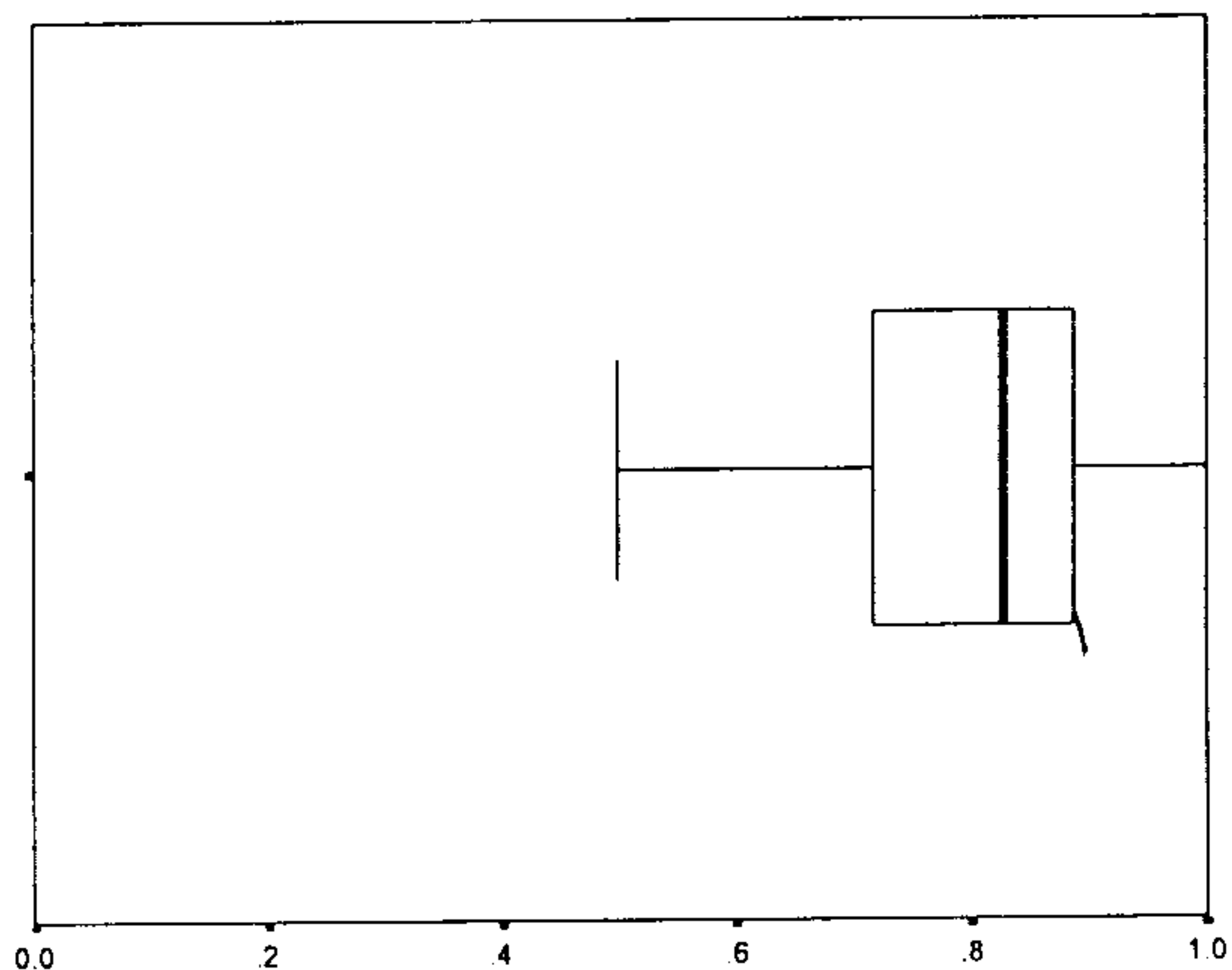


三、算算看，把你的做法用算式記下來：(每題 6 分 共 48 分)

**6-15**

(15) 學校買了 5 箱故事書，一箱有 24 本。想分到班級去，1 個班級 20 本。可以分給幾個班級？

( ) 個班級



一年級下學期，學童已有相當多 100 以內數量的合成、分解與比較問題的解題經驗，本課程相信學童在此時已有足夠的能力，透過活動，來嘗試解決兩步驟合成問題、兩步驟分解問題、以及兩步驟合成分解混合問題，但是考慮部份的學童可能仍採用序列性合成運思活動來解題，無法將整個解題過程區分為兩個獨立的運算活動，因此本課程雖然在第二冊第九單元首次引入兩步驟的加減問題，以擴展學童的解題能力，但是並不要求任何的算式記錄。試題 2-18、2-19 都是兩步驟合成分解混合問題，數量範圍都在 30 以內，只要求學童勾出答案，並不要求算式記錄。2-18 的通過率是 87%、2-19 的通過率是 89%，顯示多數學童都能夠瞭解兩步驟問題的題意並解決兩步驟加減問題。不知道兩步驟合成問題或兩步驟分解問題的通過率是否會更高？

由於序列性合成運思的活動方式，無法進行活動的區隔，而且自二年級開始，多數學童已進入累進性合成運思期，因此本課程在第三冊第二單元透過限制具體物使用的方式，促使學童進行累進性合成運思的活動，並在要求學童將「先做什麼」的活動，用算式記錄下來，然後將「再做什麼」的活動，亦用算式記錄下來的方式，協助學童使用兩個算式記錄整個兩步驟問題的解題過程。試題 3-18、3-19 都是兩步驟的加減問題，除了要求解題外，還要求學童用算式把先算什麼和後算什麼寫下來，並寫出答案。3-18 的通過率是 76.94%、3-19 的通過率是 80.02%，與第二冊的試題比較，顯示學童在解題活動與記錄活動可能有落差。

本課程在第四冊第四單元，開始將兩步驟問題的範圍延伸至先乘後加或先乘後減的問題情境，但是現階段的學童可能尚需透過累加的方式解決倍的問題，因此在進行解題時，可能採用更多的步驟，因此，本課程並不期望學童僅寫出兩個算式來表徵整個解題過程，希望學童能將各個步驟都用算式記錄下來；為了幫助學童更能掌握乘法算式的意義，本課程同時要求學童在算幾倍的問題時，要用有「 $\times$ 」號的算式記錄，希望透過限制記錄的方式，幫助學童逐漸地區辨加減法與乘法的運算。試題 4-9 是先乘後減的兩步驟問題，除了要求學童把做法用算式記下來，還要求學童在算幾倍的問題時，要用有「 $\times$ 」號的算式記錄。4-9 的通過率只有 57.13%，相當的低，通過率偏低的原因可能是：第一，受到試題中乘數是兩位數（13）的影響，背九九乘法表的學童無法透過記憶直接提取答案，而導至解題失敗；第二，部份學童可能不習慣使用有「 $\times$ 」號的算式逐次記錄又一（幾）倍的解題活動，雖然算出答案，但是因為記錄格式不滿足試題的要求而沒有得到分數；第三，部份學童可能使用加法算式記錄倍的活動，但是最後



並沒有使用乘法算式摘要記錄解題過程與結果，因為記錄格式不滿足試題的要求而沒有得到分數；第四，部份學童可能使用加法算式記錄倍的活動，最後也使用乘法算式摘要記錄解題過程與結果，但是因為不滿足題意要求在算幾倍的問題時，都要用有「 $\times$ 」號的算式記錄而沒有得到分數。不知道如果乘數是一位數時（試題的被乘數是一位數）的答對率是否會明顯地提高？

本課程在第五冊第九單元，開始引入先加後乘或先減後乘的兩步驟問題，但是加乘（減乘）兩步驟問題的描述，是成人的觀點，而學童對題意的理解方式，可能與成人不同，也就是說，學童可能將成人觀點的兩步驟問題解讀為三步驟問題，故而本課程並不限制學童只能使用兩個步驟來解題。試題 5-19 是先減後乘的兩步驟問題，試題 5-22 是先加後乘的兩步驟問題，除了要求解題外，都要求學童把做法用算式記下來。5-19 的通過率是 67.95%、5-22 的通過率是 78.44%，都不是很好，通過率偏低的原因可能與部份學童將其視為三步驟問題有關，當學童將 5-19 視為三步驟問題時，學童必須先解決「 $7 \times 11$ 」的問題，再解決「 $7 \times 5$ 」的問題，最後再解決「 $77 - 35$ 」的問題；當學童將 5-22 視為三步驟問題時，學童必須先解決「 $12 \times 4$ 」的問題，再解決「 $12 \times 5$ 」的問題，最後再解決「 $48 + 60$ 」的問題；學童可能因為計算過程繁瑣而導致錯誤。而 5-19 通過率低於 5-22，可能的原因是乘數是二位數（被乘數是一位數）的問題比被乘數是二位數（乘數是一位數）的問題困難。如果學童將這兩個試題視為兩步驟問題。則 5-19 是先解決「 $11 - 5$ 」的問題，再解決「 $7 \times 6$ 」的問題；而 5-22 是先解決「 $4 + 5$ 」的問題，再解決「 $12 \times 9$ 」的問題，5-22 的計算過程應該比 5-19 的計算過程複雜，故而 5-22 的通過率應該比 5-19 低，換句話說，兩題都答對的學童較可能將這兩個試題都視為兩步驟的問題。

本課程在第六冊第十單元，開始引入先進行合成或分解活動後，再進行包含除或等分除活動以及先乘後除的兩步驟問題，但是這些描述是成人的觀點，學童可能採用兩個以上的運算來解決問題，再加上學童在解包含除或等分除問題時，尚未發展除法算則，須使用累減的方式解題，因此本課程並不限制學童只能使用兩個步驟來解題。試題 6-15 是先乘後除的兩步驟問題，除了要求解題外，還要求學童把做法用算式記下來。6-15 的通過率是 80.46%，與第四、五冊的兩步驟問題比較，算是相當的不錯，可能的原因是學童逐漸地掌握兩步驟問題算式紀錄的意義。



### 三、兩(三)步驟問題

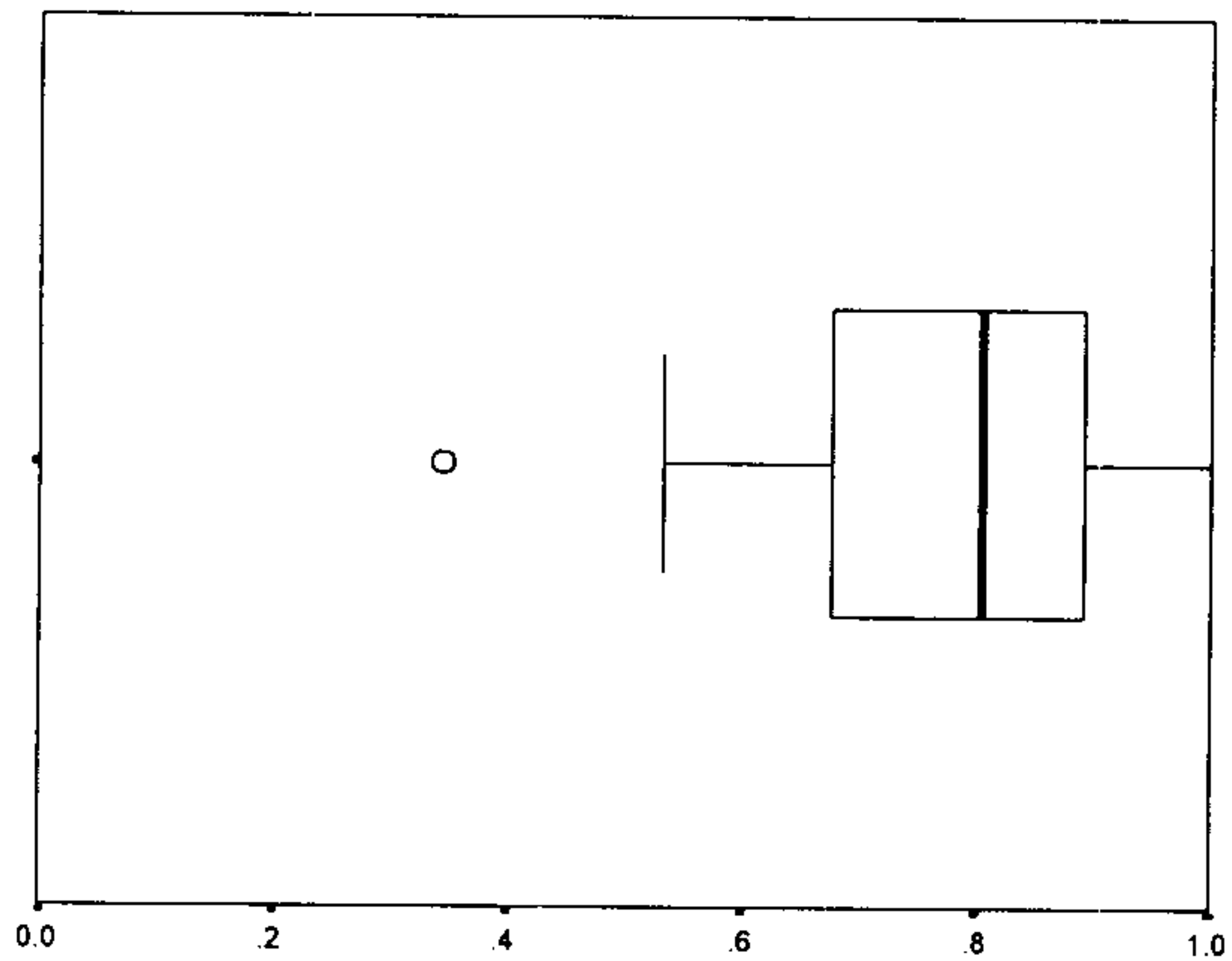
(使用併式記錄問題，並用逐次減項的記法記錄解題過程與結果)

三、先用算式填充題記錄問題，再用「逐次減項」的方法把做法記下來。  
(每題 5 分，共 10 分)

#### 8-13

(13) 姊姊有 31 張貼紙，妹妹的貼紙比她的貼紙少 19 張，兩人的貼紙合起來有多少張？

算式填充題：\_\_\_\_\_

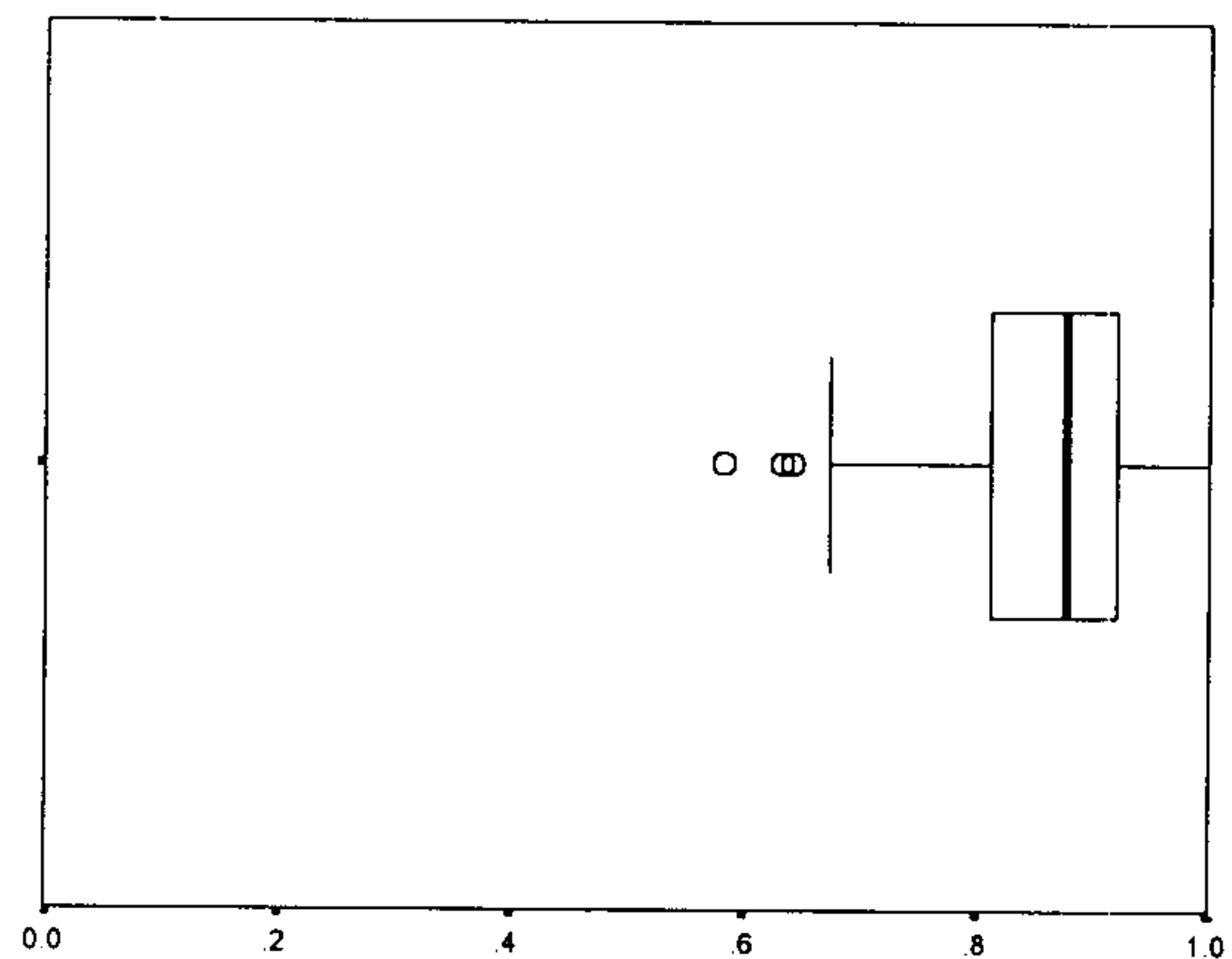


三、先用算式填充題記錄問題，再用「逐次減項」的方法把做法記下來。  
(每題 5 分，共 10 分)

#### 8-14

(14) 罐子裡原有 86 顆糖，哥哥吃掉了 29 顆，弟弟吃掉了 37 顆後，剩下多少顆？

算式填充題：\_\_\_\_\_

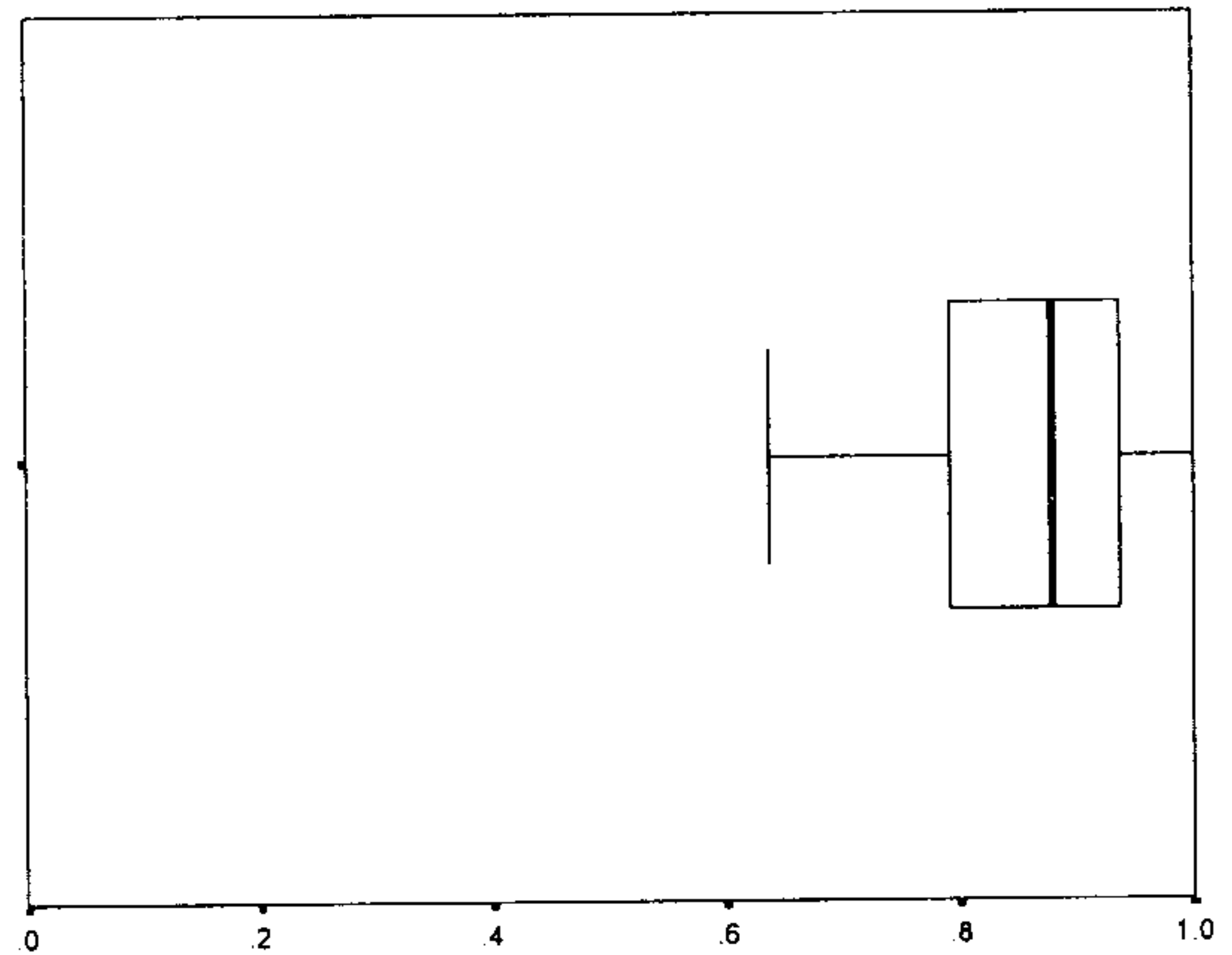


四、先用算式填充題記錄問題，再用「逐次減項」的方法把做法記下來。  
(每題3分，共6分)

**9-17**

(17) 8 枝冰棒裝成一盒。冰箱裡有紅豆冰棒 31 枝，花生冰棒 3 盒，花生冰棒比紅豆冰棒少幾枝？

算式填充題：\_\_\_\_\_

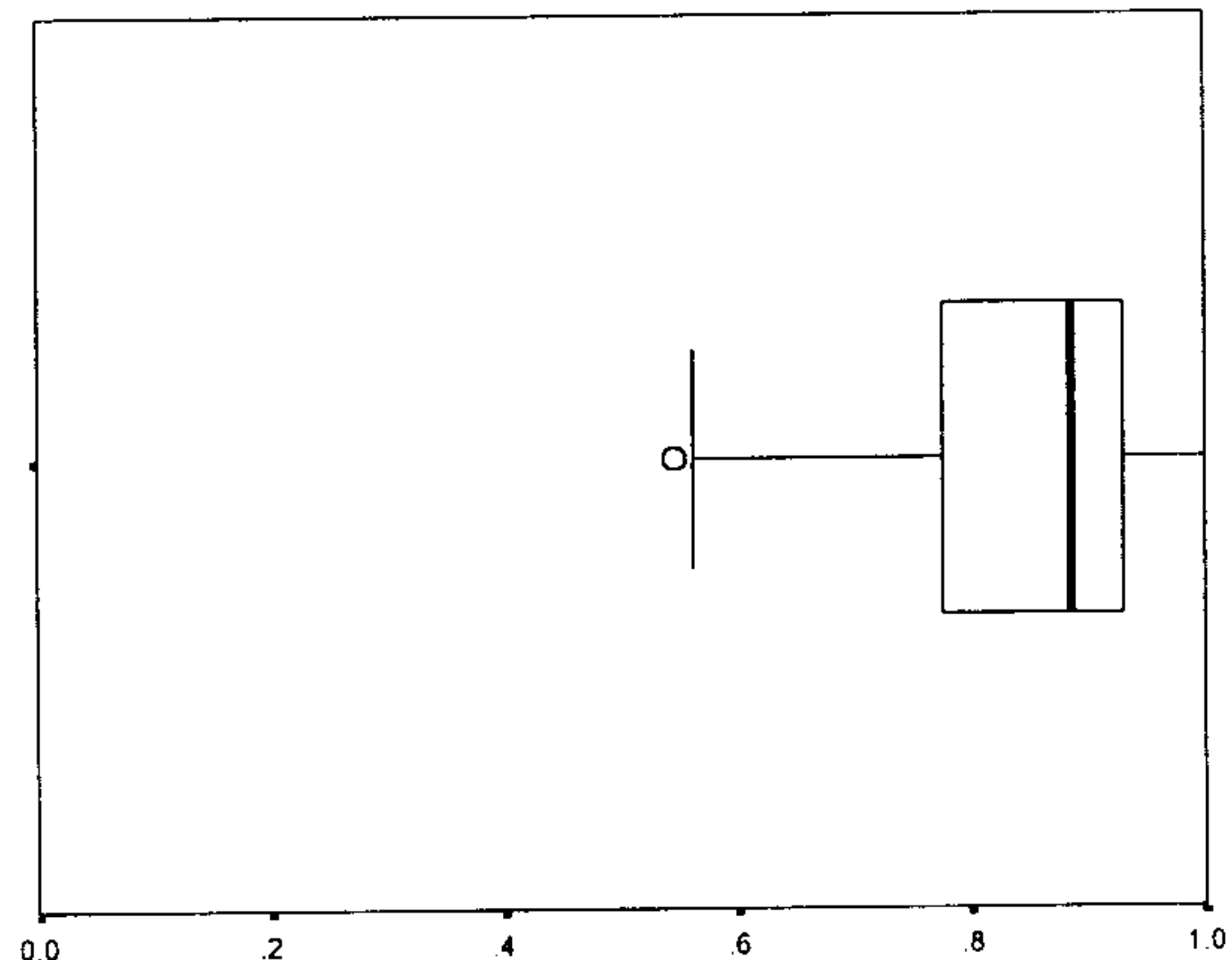


四、先用算式填充題記錄問題，再用「逐次減項」的方法把做法記下來。  
(每題3分，共6分)

**9-18**

(18) 姊姊原有 24 元，媽媽給她 16 元，她用了 13 元買鉛筆，又用了 12 元買橡皮擦後，還剩多少元？

算式填充題：\_\_\_\_\_



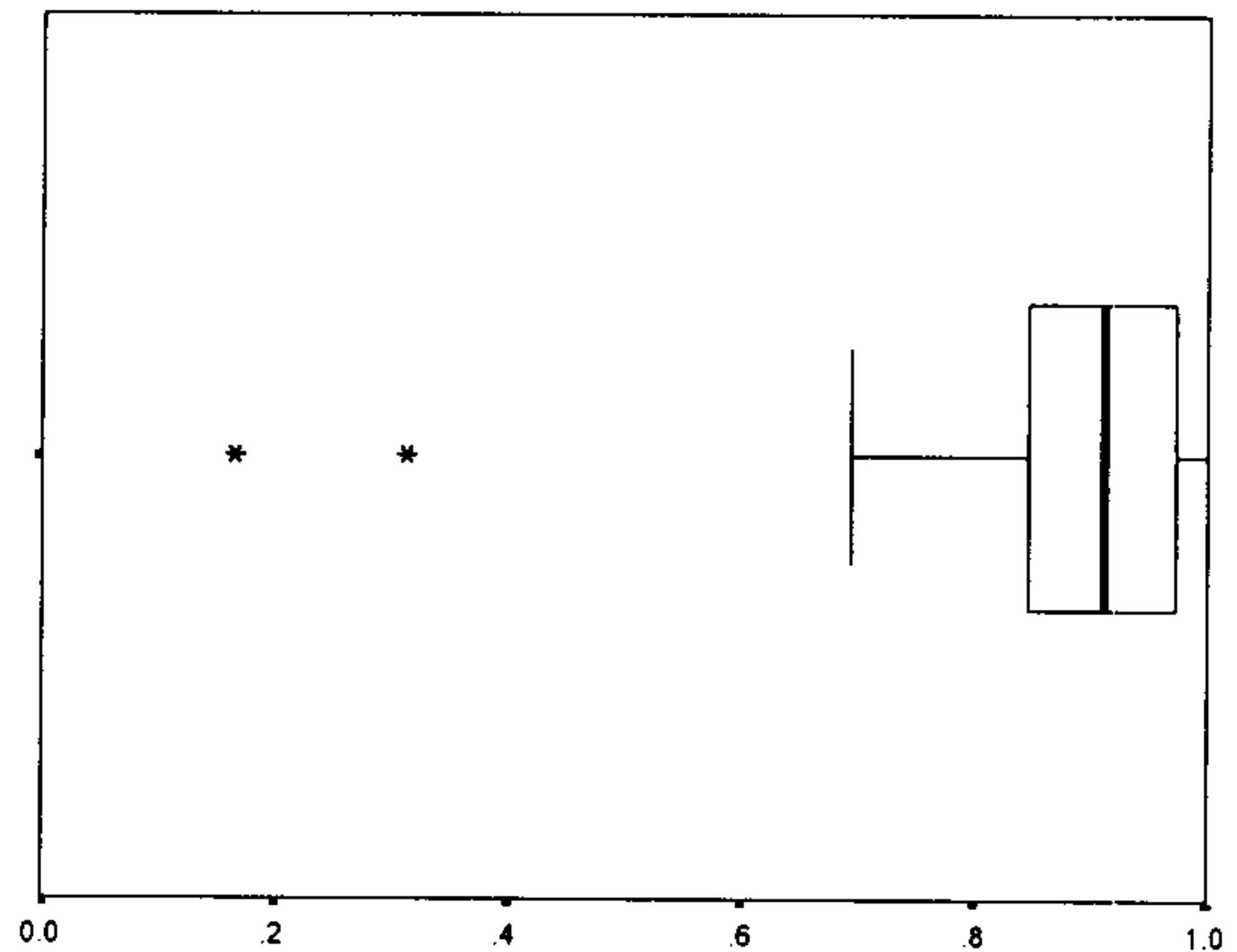


五、先用算式填充題記錄問題，再用「逐次減項」的記法把做法記下來。  
(每題 3 分，共 9 分)

**10-20**

(20) 家裡原有奇異果 12 個，媽媽又買了 17 個，姑姑拿走 8 個後，把剩下的奇異果全部平分給 3 人。算算看，一人可以分到多少個奇異果？

算式填充題：\_\_\_\_\_

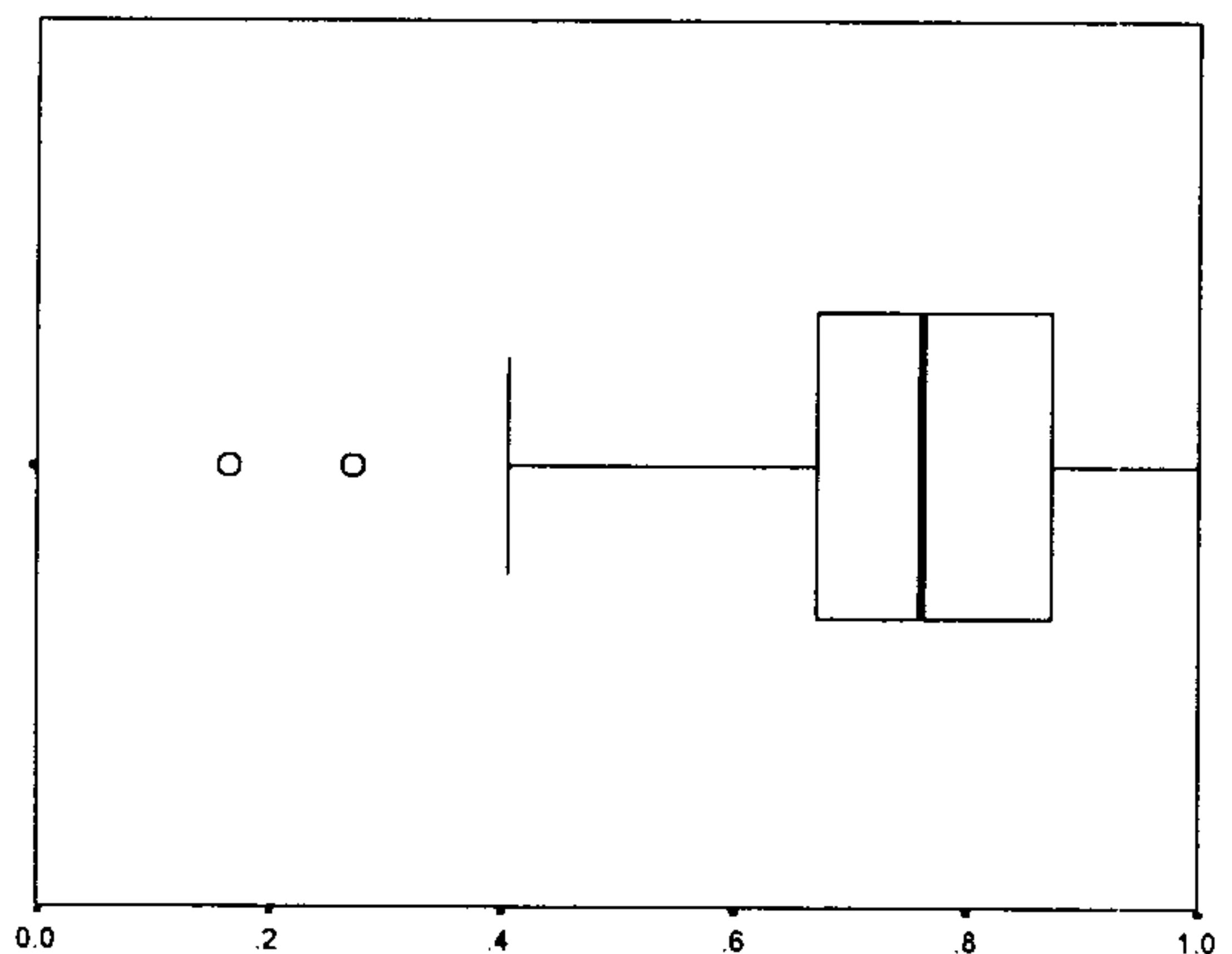


五、先用算式填充題記錄問題，再用「逐次減項」的記法把做法記下來。  
(每題 3 分，共 9 分)

**10-21**

(21) 小玫有 72 張貼紙，分給小詩 48 張；小萍把 16 張貼紙全部平分給小雯等 8 人。算算看，小玫剩下的貼紙比小雯分到的貼紙多多少張？

算式填充題：\_\_\_\_\_



本課程在第八冊第八、十及十一三個單元中，先引入兩數的和（差）與第三數的和（差）的併式紀錄（例如： $(8+5)-6=7$ ）、形成在併式（例如： $(8+5)-6$ ）中使用小括號區辨運算次序的共識；接著在加減兩步驟的問題情境下，幫助學童使用併式填充題（例如： $(8+5)-6=(\quad)$ ）記錄問題；接著再幫助學童經驗並察覺等號的遞移性，引入使用逐次減項（例如： $(8+5)-6=13-6=7$ ）的記法記錄解題過程與結果；最後則要求學童先用併式填充題記錄問題，再用逐次減項的記法，記錄兩步驟加減問題的解題過程與結果。試題 8-13、8-14 都是兩步驟加減問題，要求學童先用算式填充題記錄問題，解題成功後，再使用逐次減項的記法把做法記下來。8-13 的通過率是 78.17%、8-14 的通過率是 85.96%。8-14 的通過率相當不錯，雖然 8-13 的通過率稍低，但是通過率偏低的原因可能與學童誤解題意有關，顯示學童可能已經掌握併式的意義，也能夠使用逐次減項的記法，記錄兩步驟加減問題的解題過程與結果。

本課程在第九冊第三及第五單元，將兩步驟問題的範圍擴充至乘加或乘減問題；在第九冊第七單元，開始引入三（多）步驟加減問題，透過與第八冊相同的布題方式，幫助學童先用併式填充題記錄多步驟加減問題（使用小、中括號區分運算次序），再使用逐次減項的記法，記錄解決三（多）步驟加減問題的解題過程。試題 9-17 是先乘後減的兩步驟問題，試題 9-18 是三步驟的加減問題，要求學童先用算式填充題記錄問題，解題成功後，再用逐次減項的記法把做法記下來。9-17 的通過率是 86.24%，9-18 的通過率是 85.91%，顯示學童已能掌握加、減及乘法兩步驟問題，也能夠將解題能力延伸至三（多）步驟加減問題。

本課程在第十冊第一單元，將兩步驟問題的範圍擴充至加除或減除、除加或除減問題，在第十冊第二單元，將兩步驟問題的範圍擴充至乘除問題。在第十冊第十二單元，再將三（多）步驟問題的範圍擴充至包含乘、除的情境。試題 10-20、10-21 都是三步驟的問題，且其中都包含除法運算，要求學童先用算式填充題記錄問題，解題成功後，再用逐次減項的記法把做法記下來。10-20 的通過率是 88.61%，10-21 的通過率是 75.27%。10-20 的通過率相當不錯，10-21 的通過率稍低，通過率偏低的可能原因是：第一，學童可能不理解或誤解題意；第二，學童必須先分別算出兩個人的貼紙數並比較大小後，才能使用併式填充題將問題記下來，無法直接寫出解題計劃；第三，學童利用「由最左往右算」的運算規則，使用兩個小括號記錄問題而沒有得到分數。整體來說，多數學童都能夠先用算式填充題記錄問題，解題成功後，再用逐次減項的記法把做法記下來。