

# 整數的乘除運算

謝堅 蔣治邦

## 一、課程概要

依據民國八十二年國民小學數學課程標準（教育部，民 82）教材綱要，在整數乘法教材部份：二年級先進行二到九的基本乘法，從乘法的情境中，讓學生發表其解題的策略，並引導至乘法是連加、倍的意義；接著要求學生能查乘法表寫出計算結果。三年級進行 0 和 1 的乘法；以及三位數乘以一位數的乘法。四年級則進行三位數乘以二位數的乘法。在整數除法教材部份：二年級透過等分除、包含除的事實進行分的活動，建立除法的預備經驗。三年級先透過生活情境讓學生進行分的活動，讓學生發表分的方法，再由這些經驗引導至用形式化的除法算式表示之，讓學生瞭解除法的意義，在紀錄格式部份，只要求出現橫式；接著聯結分的經驗和對除法意義的理解，指導直式計算，並利用乘法求商；三年級階段的被除數可為二、三位數，除數及商為一位整數。四年級進行除數是一、二位數的除法，並讓學生有嘗試錯誤合成商的經驗。

實驗課程（以下簡稱本課程）是由單位量轉換的觀點，來處理乘除問題的教材，倍的問題是由數個相同的集聚單位合成一個新的集聚單位，例如 4 個 5 合成 20，其中 5 是由「1」合成的集聚單位，用 5 來描述此集聚單位的數量，稱之為單位量，4 則是描述集聚單位「5」的個數，稱之為單位數，倍的問題是已知單位量及單位數，雖然知道新集聚單位是由 4 個「5」合成的，但其數值（以「1」為單位的計數結果）尚為未知。以問題「5 個蘋果裝一盤，4 盤共有幾個蘋果？」為例，問題中蘋果的總量本來是以 1 盤為單位（不是以 1 個為單位）來描述，共有 4 個單位，而每個單位有 5 個蘋果（以 1 個為單位），現在要以 1 個蘋果為單位重新描述總量，問共有幾個蘋果，所以倍的問題是將原來以盤為單位的量，轉換為以個為單位的量的單位量轉換活。相對於乘法問題，包含除是解決單位數未知的問題，而等分除是解決單位量未知的問題。以包含除問題「小明有 12 顆糖，4 顆裝成一盒，可以裝成幾盒？」為例：小明的糖原來是用 1 顆為單位量來描述，共有 12 顆，而目前題目要求用 1 盒或 4 顆為單位，重新描述總量，回答這裡有幾盒糖。以等分除問題「小明有 12 顆糖，平分裝成 3 盒，一盒有幾顆糖？」為例：小明的糖原來是用 1 顆為單位量來描述，共有 12 顆，而

目前要求使用另一個新的單位量 1 盒來描述，而這個新的單位量尚未用 1 顆為單位量來描述，換言之，新單位量是未知，只知用此新單位量來描述時，是有 3 盒。所以包含除是新單位數未知的單位量轉換活動，而等分除是新單位量未知的單位量轉換活動。

學童整數概念的品質限制了他們整數乘除運算的方式與歷程，也限制了學童使用算式摘要記錄解題活動與結果的能力，實驗課程依據學童數概念的認知發展，以及對算式意義的掌握，彈性的調整及延後部份乘除運算的教材。

就整數乘法教材部份，本課程在低年級階段，只布積數未知的乘法問題，除了要求學童用有乘號的算式記錄解題活動與結果，也要求用有乘號的算式填充題記錄問題。在進行倍的活動時，本課程常要求倍的問題的單位量為 12 以內，單位數為 15 以內，並限制合成量（積數）在 100 以內。與課程標準比較，本課程為了幫助學童掌握乘法及乘法算式的意義，將二到九基本乘法的範圍，擴展至單位量為 12 以內，單位數為 15 以內的範圍，並將查乘法表的活動，延至第五冊再進行。

中年級階段，在整數乘以整數的問題中，本課程通常考量乘數範圍的限制。在解題活動部份，本課程希望學童先能透過合成活動的方式解決乘法問題，當學童掌握多單位加減策略的意義後，則希望學童能將被乘數視為多個單位的合成，透過各個單位分別進行合成活動的方式解決問題，本課程透過討論「（幾個百）幾個十幾個一的幾倍」運算策略下，協助學童使用此策略來解乘法問題，並引入乘法直式紀錄格式。在第五冊，為了幫助學童掌握又十倍的活動，要求學童自製「十十乘法表」；也引入單位數在 5 以內，而合成量（積數）在 1000 以內的倍的問題，希望學童透過合成活動來解決問題，因為部份學童可能尚須要使用多個算式記錄合成活動的解題過程，故而並不要求使用有乘號的算式摘要地記錄解題過程與結果。在第六冊，則將倍的問題的範圍擴充至單位數在 10 以內，而合成量（積數）在 2000 以內；在第七冊，本課程則先處理幾十幾倍的問題，再要求學童使用「幾個百幾個十幾個一的幾倍」的方法，解決被乘數為三位數，乘數為一位數的乘法問題，並用直式記錄解題過程；在第八冊，再將範圍擴充至乘數為兩位數。在這四冊中，本課程也進行了被乘數或乘數未知問題。與課程標準比較，本課程編寫教材的進度與課程標準綱要一致。

82 年課程標準教材綱要中整數乘法部份只安排至四年級，內容部份只安排至三位數乘以二位數，五年級並沒有要求安排整數乘法的活動。但是本課程認為，如果學童只進行乘數是兩位數的乘法活動，其經驗無法幫助學童透過類比的方式，自行發出乘數為三位數的乘法活動，因此本課程在

第九冊繼續進行乘數是三位數的乘法活動，期望學童在日常生活中遇到乘數是四位以上的問題時，也能進行解題活動。同時，本課程也安排了用「幾個十幾個一的幾倍」的方法，解決積數為三位數，（被）乘數為二位數的乘數（被乘數）未知的問題，做為討論乘除法互為逆運算活動的預備經驗。

在非負整數除法教材中，本課程通常考量商數範圍的限制，來配合學童目前的運思方式。由於包含除是單位數未知的單位量轉換問題，而等分除是新單位量未知的單位量轉換問題，當學童尚未能彈性地轉換單位數與單位量的角色以前，或尚未掌握乘法交換律以前，本課程將包含除與等分除視為兩類問題，逐漸地協助學童整合此兩類問題。

本課程在第四、五冊教材中，是以累進性合成運思為基礎，介紹包含除與等分除問題（第四冊第二單元）。在第六冊教材中，透過「一輪一次分一個」方法的限制，協助學童以包含除問題的觀點，來理解等分除問題，並限制使用連減的方法來解包含除或等分除問題，建立以部分—全體運思為基礎的除法活動（第六冊第二單元）。在第七冊教材中，以部分—全體運思為基礎，引入有除號的算式，來摘要記錄包含除或等分除問題的解題活動與結果（第七冊第一單元），並要求混合乘法與減法算式，重新描述解題過程，一方面簡化連減的過程紀錄，一方面累積乘、除法互為逆運算的經驗（第七冊第四單元），在累積使用除法算式的經驗後，本課程進一步要求使用有除號的算式填充題來記錄問題（第七冊第十單元）。在第八冊教材中，延伸學童使用乘法和減法算式記錄解題過程的經驗，協助學童解決商數為二位數的除法問題（第八冊第四單元），並首次引入除數未知與被除數未知的（整除）問題（第八冊第六單元），及形成使用直式格式記錄包含除與等分除解題活動的共識，但是此時進行的還不是成人的除法算則，只是幫助學童將自己的乘、減算式紀錄，轉換為直式格式（第八冊第十一單元）。與課程標準比較，本課程編寫教材的進度比課程標準綱要落後約一年的時間，主要的原因是考量學童數概念的發展。

82 年課程標準教材綱要中整數除法部份只安排至四年級，內容部份只安排至除數是二位數，五年級並沒有要求安排整數除法的活動。但是本課程認為成人常使用估商策略解決除法問題，而部份—全體運思的學童不易掌握使用估商策略解決除法問題，因此將使用估商策略解題的除法算則延至五年級引入。因為本課程通常考量商數範圍的限制，因此先引入用「先算商數最多有幾個十，再算剩下的可以有幾個一」的方法解決商數是二位數的等分除及包含除問題（第九冊第六單元），再引入使用先算商數最多有幾個百，再算剩下的最多有幾個十，最後算剩下的可以有幾個一的方式解決商數是三位數的等分除及包含除問題（第九冊第十二單元）。

### (一) 乘法問題的解題策略

部份—全體運思的學童可以明顯地區分「1」單位與集聚單位（例如5）的意義，也掌握了「又一（又一個「1」單位）」與「又一倍（又一個集聚單位）」間活動的差別，進而可以發展「又幾倍」或「又十倍」的活動，來簡化乘法問題的解題過程。同時，延伸多單位加減策略的概念，學童可以用多單位的觀點來理解被乘數，使用「（幾個百）幾個十幾個一的幾倍」的方法，先在各個被計數單位上進行倍的活動，再進行各單位間的化聚活動以及加法運算，最後再整合最終的結果得到答案。

以問題「 $25 \times 36 = ( )$ 」為例，部分—全體運思的學童可以透過「又幾倍」的方式，由25的10倍開始計算，得到250的結果，250加上250是500，即25的10倍又10倍的合成結果；掌握目前已完成的20倍，再加上250是750，即25的20倍又10倍的合成結果；完成了25的30倍是750（上述的過程簡稱為「又十倍」的活動），再加10倍就會越過問題的36倍，故而改採「又一倍」的活動，750加上25是775，完成31倍，775加上25是800，完成32倍，繼續「又一倍」的活動，得到25的36倍是900的答案（第七冊第十二單元）。

在上述的解題過程描述中，學童逐次的進行又幾倍的活動，當累積至36倍時，則得到答案並停止活動，部份—全體運思的學童並非在事前預測36倍是30倍與6倍的合成結果，此項預測能力的發展是測量運思的成就，因為測量運思的學童才能夠掌握乘法對加法的左分配性質。

當學童掌握多單位加減策略的意義後，亦可進一步地在各個被計數單位上進行倍的活動，例如進行「3個十的5倍是幾個十？」（第七冊第四單元）、「3個十的40倍是幾個十？」（第七冊第十單元）等活動，綜合上述活動經驗後，可以討論「（幾個百）幾個十幾個一的幾倍」解題策略，來解決乘數為兩位數的乘法問題。

再以問題「 $25 \times 36 = ( )$ 」為例，在「用幾個十幾個一的幾倍的方法算」要求下，學童先將被乘數25視為2個十5個一，接著在各個被計數單位上進行倍的活動，2個十的36倍是72個十，也就是7個百2個十，5個一的36倍是180個一，也就是1個百8個十，合起來是8個百10個十，也就是900（第八冊第二單元），學童在算「2個十的36倍是72個十」以及「5個一的36倍是180個一」部分時，可能透過使用「又幾倍」的方式來完成。

### (二) 乘法問題的紀錄格式

當學童使用「又幾倍」的策略解題時，本課程要求使用多步驟算式記錄格式，來記錄解題過程與結果，以問題「 $25 \times 36 = ( )$ 」為例，學童

可以使用「 $25 \times 10 = 250$ ， $25 \times 20 = 500$ ， $25 \times 30 = 750$ ， $25 \times 31 = 775$ ，……， $75 \times 36 = 900$ 」來進行記錄，這樣的紀錄可以幫助學童反省進行了幾次「又十倍」的活動以及幾次「又一倍」的活動，是下一階段學習成人乘法算則的預備經驗。

當學童發展多單位觀點，使用「（幾個百）幾個十幾個一的幾倍」的策略進行乘法問題的解題活動時，本課程引入直式紀錄格式。教師宜注意，「（幾個百）幾個十幾個一的幾倍」的策略，尚不是成人的乘法算則，成人算則是將被乘數及乘數均視為多個單位的合成，在討論「3 個十的 3 個十倍是 9 個百」時，將面臨單位乘以單位而獲得新單位的問題，例如：「拾」單位乘以「拾」單位得到「佰」單位、「佰」單位乘以「拾」單位獲得「仟」單位，要等到學童測量運思發展完成後才能理解其意義，當直式紀錄不易分辨學童實際的解題活動時，教師宜要求學童澄清直式紀錄的意義。

與引入加減文字題的問題記錄方式相同，當學童累積倍的文字題解題經驗，能夠預期倍的活動（形成解題活動類型），並且熟悉使用乘法算式紀錄代表倍的活動的經驗後，即可引入倍的問題記錄，要求使用有乘號算式填充題的格式記錄解題計畫（第四冊第四單元）。本課程亦引入乘數未知倍的問題的文字題（第五冊第九單元），以及被乘數未知倍的問題的文字題（第七冊第八單元），與加減文字題的問題紀錄相仿，當學童尚未掌握乘除互逆關係前，教師應接受學童使用乘數未知或被乘數未知的算式填充題，來記錄該類文字題，待五年級之後，再進一步地限制用標準算式填充題來記錄。

### （三）除法問題的解題策略

部分—全體運思的學童能夠區分「1」單位與其合成的集聚單位，在解上述包含除問題時，較小的集聚單位 4 明顯地包含於較大的集聚單位 12（但是 4 仍不是組成 12 的元素），可以由 12 中逐次地分離出 4 的部分，而不混淆 1 個「4」與 1 個「1」的意義，故而學童可採用累減策略解題，部分學童可能使用嘗試錯誤的方式，逐次地增加盒數，而形成累加策略。

相對的，在面臨上述等分除問題時，部分—全體運思的學童能掌握「每次一盒分 1 顆，會用去 3 顆」，進而使用包含除問題的觀點，解決「12 包含幾個 3」的問題，來掌握「須分配的次數」，由分配的次數來決定單位量的數值。部分學童亦可能使用嘗試錯誤的方式，逐次累加一盒裡糖果的顆數，而用乘法運算來檢查預測的顆數是否合理。

### （四）除法問題的紀錄格式

在解題活動記錄方面，本課程分成三個階段來進行：用多步驟減法算

式記錄解題過程；用有除號的算式摘要記錄整個解題活動與結果；用乘法及減法算式記錄解題過程。

在第一階段，首先引入多步驟減法算式來記錄包含除與等分除問題的解題過程，一方面反映學童目前可以進行的活動方式，一方面透過同為連減的活動，聯絡包含除與等分除兩類問題的關係，以作為介紹除法算式的基礎（第六冊第二單元）。

在第二階段，先引入除法算式格式的討論，由於目前是在非負整數範圍內進行除法活動，故依據除法原理，選擇「被除數 $\div$ 除數=商數……餘數」為一般格式，來摘要記錄除法問題的解題活動與結果，在格式討論時，強調如何將「13顆糖，4顆裝成一盒，一共裝成3盒，剩下1顆」這個解題活動與結果，用一個算式記錄下來（等分除問題亦同），而形成目前除法算式紀錄格式的共識（第七冊第二單元）。

當學童已能用除法算式填充題記錄問題後，開始進行第三階段，協助學童重整解題經驗，以上述包含除問題為例，學童已用連減的多步驟記錄格式完成解題活動的紀錄，「 $13-4=9$ ； $9-4=5$ ； $5-4=1$ 」，在完成解題過程的討論後，透過詢問「4顆裝成一盒，裝成2盒，是用掉多少顆糖，用算式要怎麼記？」、「裝成3盒，是用掉多少顆糖，用算式要怎麼記？」、「13顆糖，用掉12顆，剩下幾顆，用算式要怎麼記？」，協助學童改採多步驟乘法與減法算式紀錄來描述解題過程，「 $4\times 2=8$ ； $4\times 3=12$ ； $13-12=1$ 」。此種記錄格式上的轉變，重新組合解題活動的成分，一方面協助學童經驗加減互逆的現象，一方面做為除法算則發展的基礎（第七冊第四單元）。

由於學童在中年級階段，尚無法理解成人的除法算則，故而在商數為一位數問題中，引入除法直式記錄格式，協助學童認識成人在直式記錄中，如何呈現問題，如何將原來乘法算式及減法算式所代表的活動，記錄在直式紀錄的格式裡（第八冊第十一單元）。

當學童累積相當多包含除與等分除問題的解題經驗，在面臨包含除或等分除問題時，已能預期解題活動的方式，並且能用除法算式摘要記錄包含除與等分除解題活動，以這些經驗為基礎，學童可以仿照以往用算式填充題記錄問題的方式，將其預期解題活動的方式與內容，用算式填充題的格式記錄下來，由於尚未獲得解題的結果，用括號來表示商數與餘數的未知，而形成除法算式填充題，來記錄包含除或等分除問題（第七冊第十單元）。

## 二、倍的活動

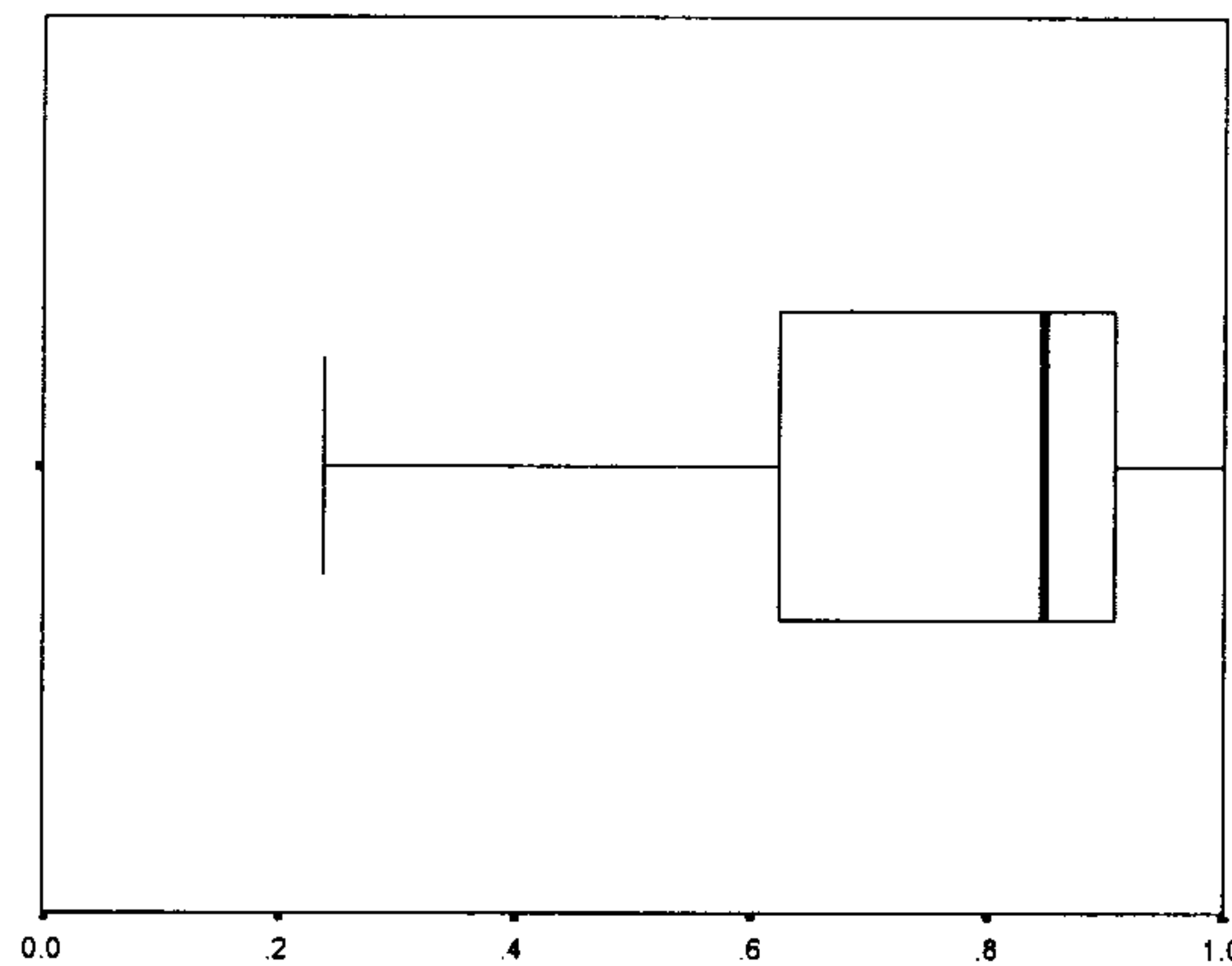
表 3-1：第三至六冊總結性評量中倍的問題與班級通過率的分佈

<p>◎把你的算法用直式記下來。</p> <p><b>3-22</b> (22) 1 個盒子裝 6 塊月餅，8 個盒子共裝幾塊月餅？</p>	
<p>◎把你的做法記下來，並寫出答案。</p> <p><b>3-23</b> (23) 棒球比賽一隊 9 人，4 隊有多少人？</p>	
<p>◎把你的做法用算式記下來：(在算「幾倍」的問題時，用有「<math>\times</math>」號的算式來記錄)</p> <p><b>4-8</b> (8) 一輛大卡車有 10 個輪子，9 輛大卡車有幾個輪子？</p> <p style="text-align: right;">(     )個</p>	

◎請用算式填充題來記問題。(不用算出答案)

**4-10**

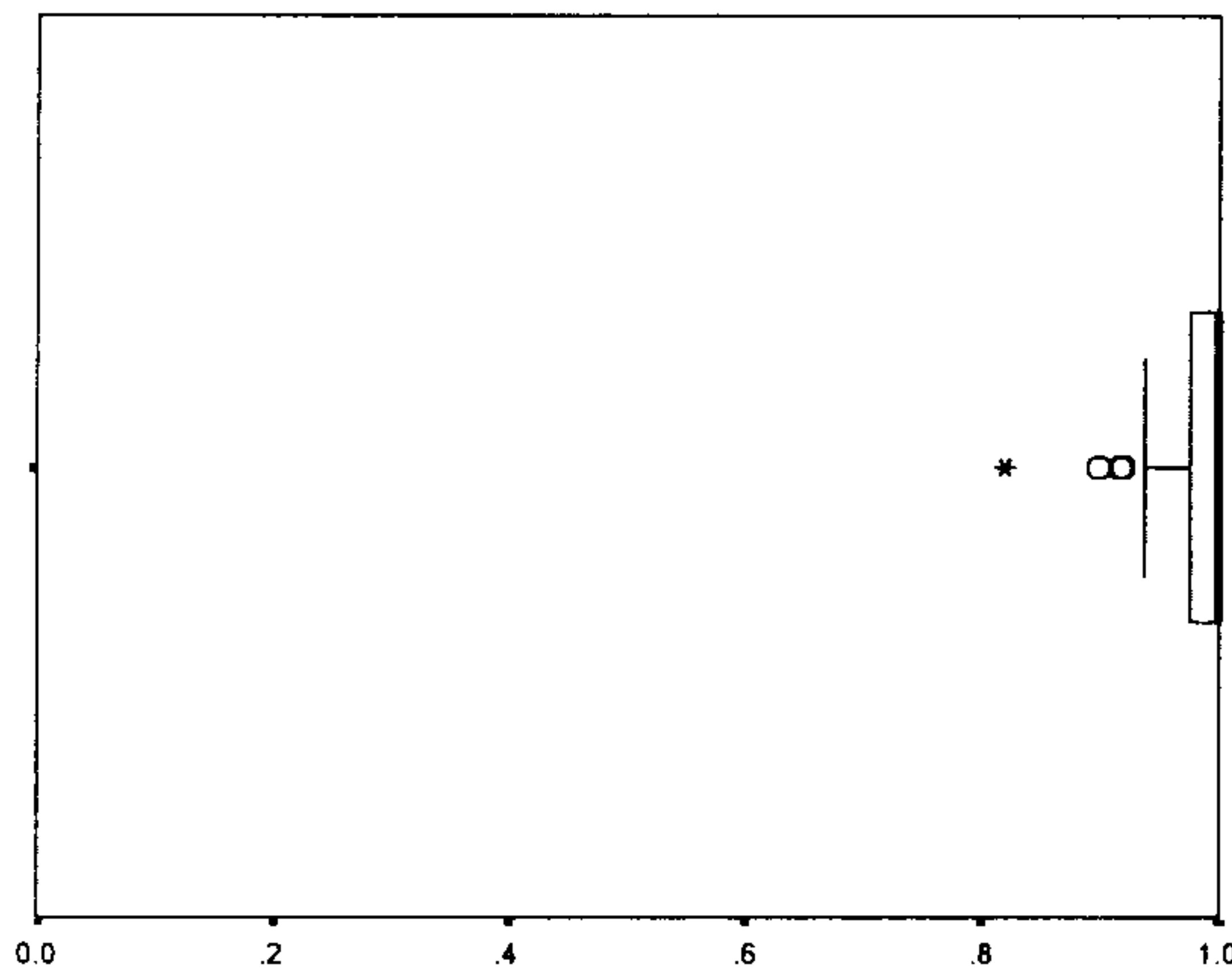
(10)一盒巧克力有 8 顆，11 盒巧克力有幾顆？



一、填填看：(一個括號 2 分，共 26 分。)

**5-1**

(1)  $1 \times 12 = ( \quad )$

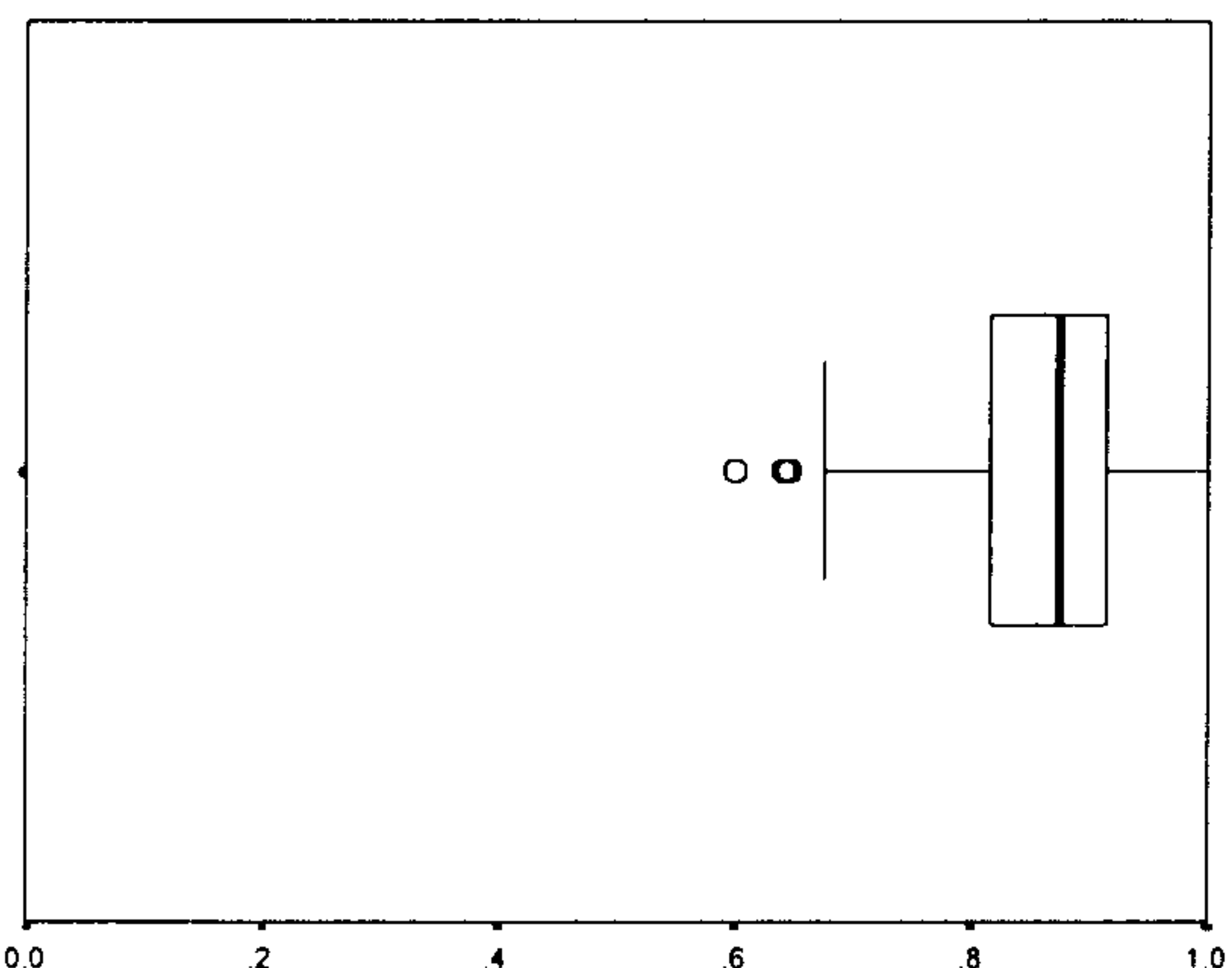


四、算算看，把你的做法用算式記下來：(1 題 6 分共 60 分)

**5-15**

(3)麵包一個 16 元，買 8 個要付多少元？

答：( )元



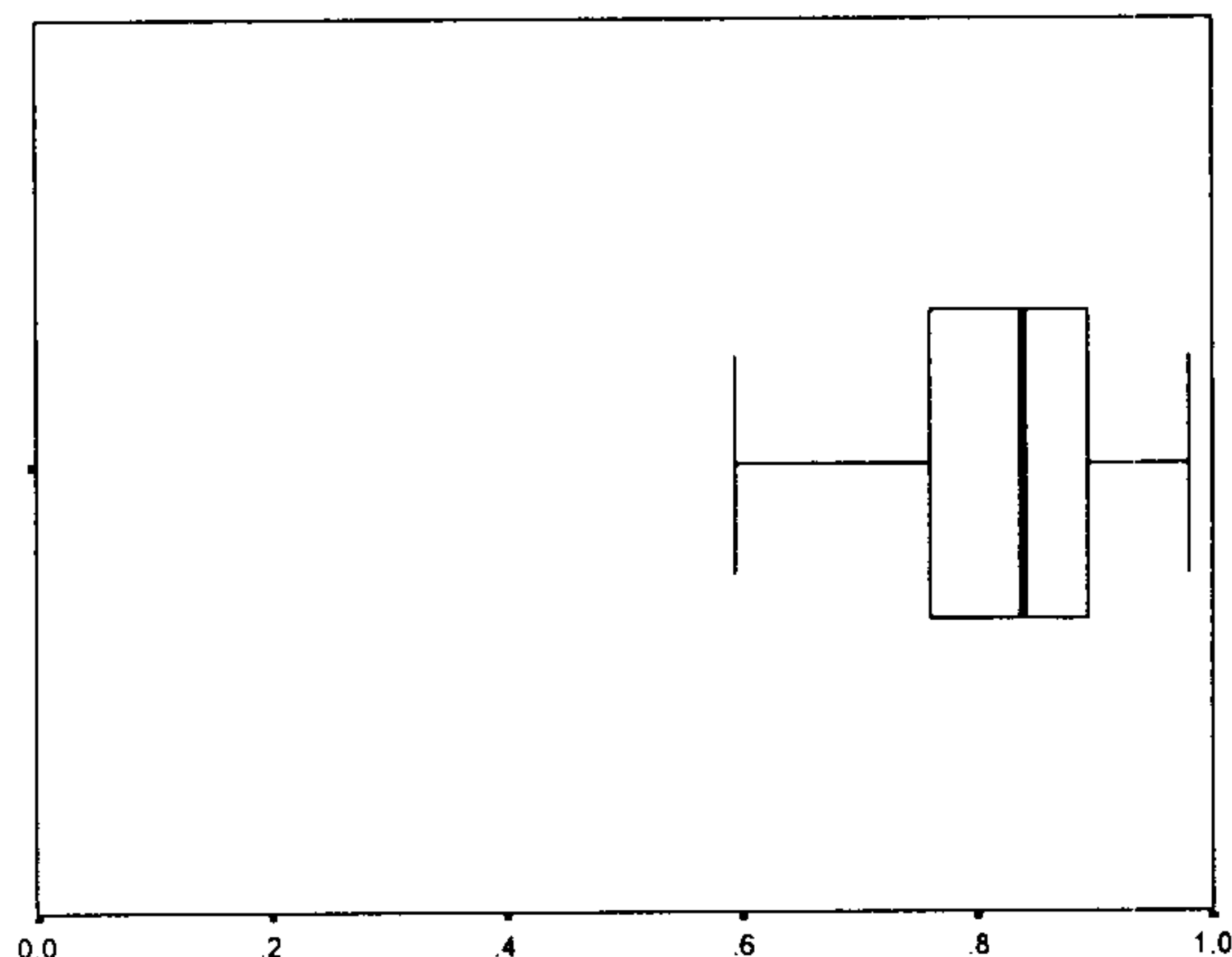


四、算算看，把你的做法用算式記下來：(1 題 6 分 共 60 分)

5-16

(4) 蛋糕一盒賣 280 元，買 3 盒要付多少元？

答：( )元

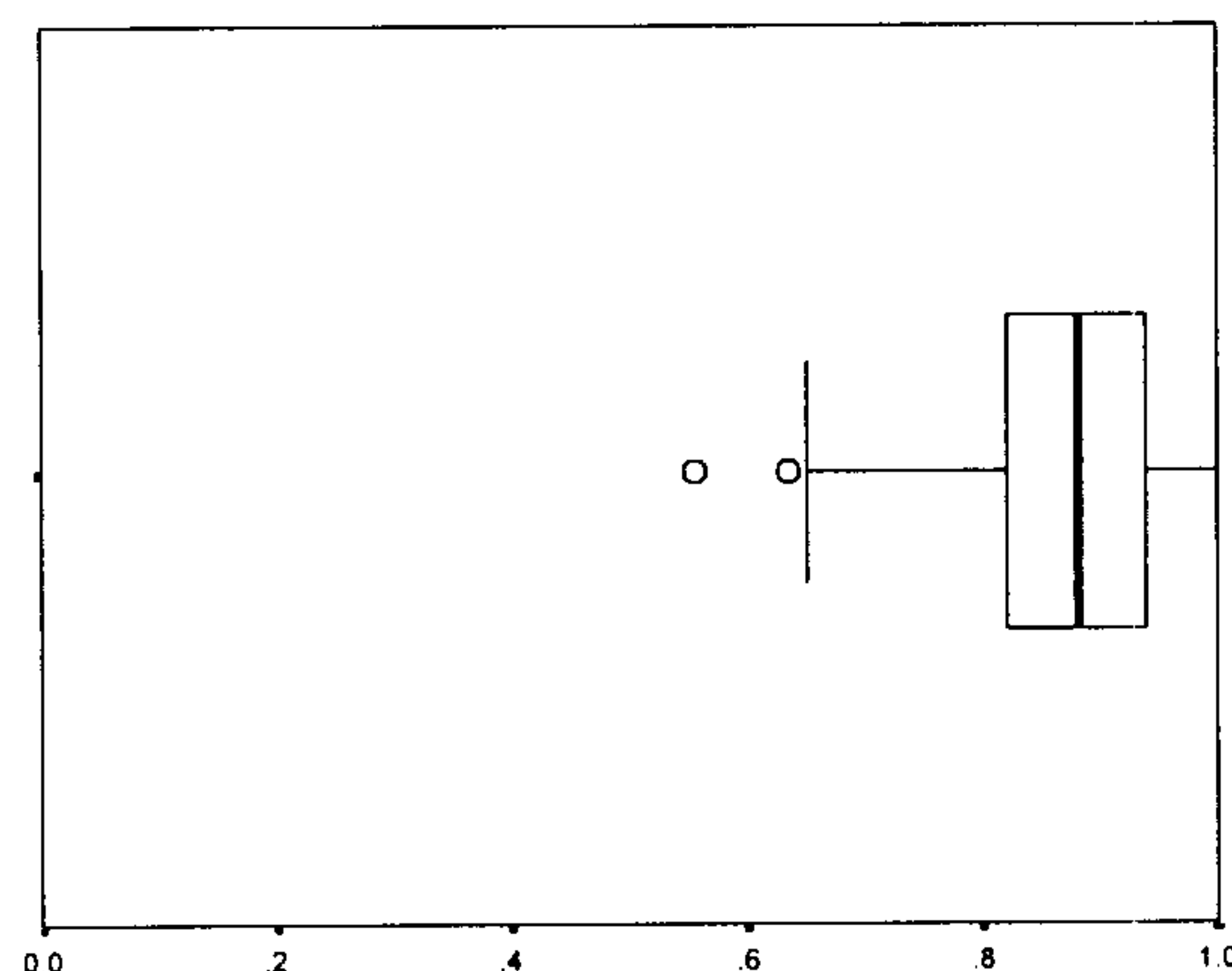


四、算算看，把你的做法用算式記下來：(1 題 6 分 共 60 分)

5-18

(6) 吸管 8 枝 1 捆，要多少捆，才有 56 枝吸管？

答：( )捆



三、算算看，把你的做法用算式記下來：(每題 6 分 共 48 分)

6-11

(11)  $10 \times ( ) = 180$

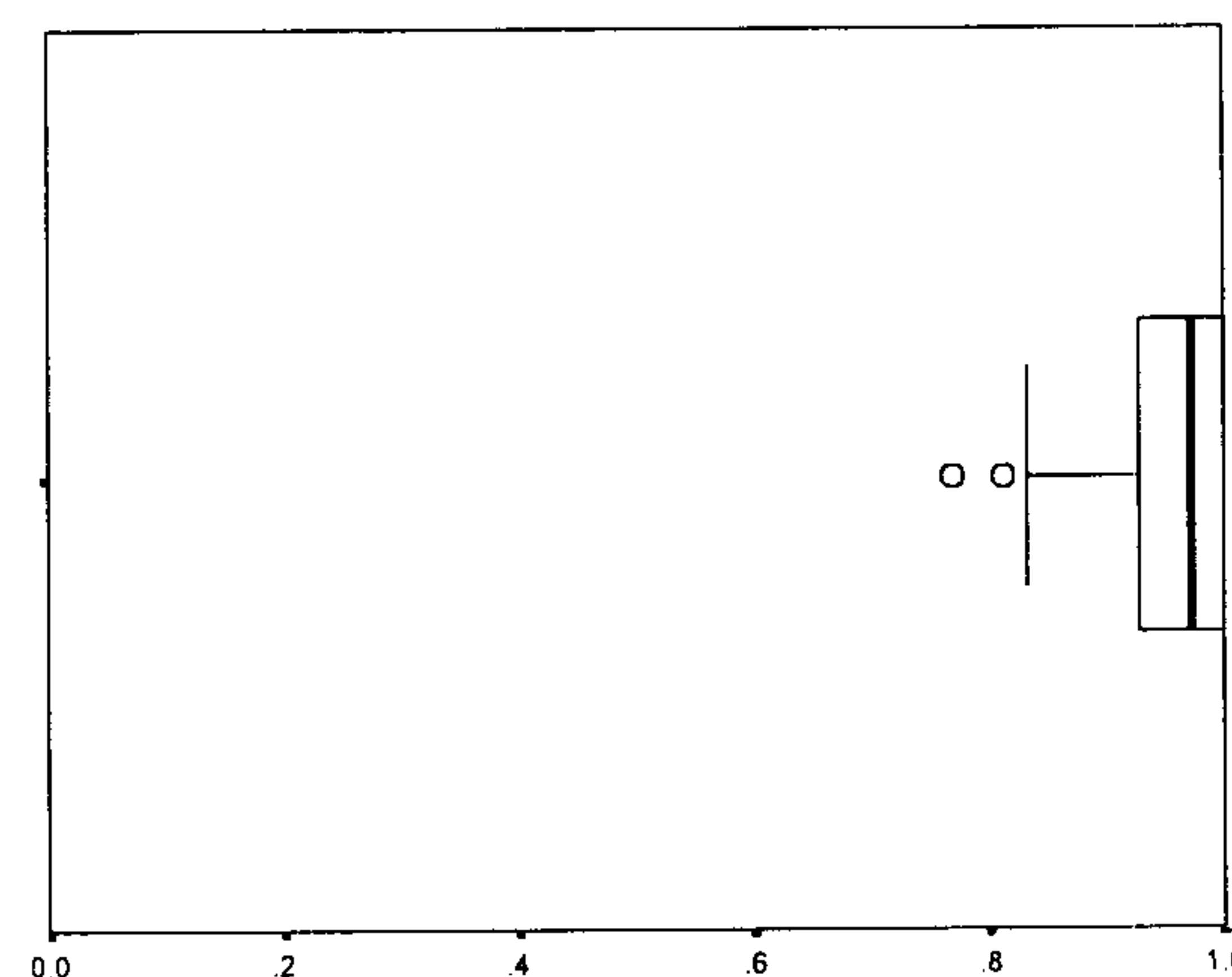


表 3-1 呈現第三至六冊總結性評量中倍的問題與班級通過率的分佈。在單位量不大於 12，單位數不超過 15 的範圍中，二年級上學期學童，在

量的情境下，開始接觸倍的問題。試題 3-22、3-23 都是基本乘法範圍內總量（積數）未知的倍的問題，並要求將做法記下來（圖像或算式），答對率是 83%、87%。初學乘法問題的學童而言，需透過題意的理解，進行多次合成的活動來解題，參考二上學童在加法問題上的表現（答對率約為 90%），顯示題意的理解並非主要困難；當要透過多次的合成活動來解倍的問題時，合成活動的次數越多，越易發生計數的錯誤，或因監控能力的不足，越易混淆了累加次數，3-22 要做 8 次的累加（6 累加 8 次）活動，而 3-23 只要做 4 次的累加活動（9 累加 4 次），而導至前者發生計數錯誤的可能性較高。

試題 4-8 是單位量（被乘數）為 10，單位數（乘數）為 9 的總量（積數）未知問題，並要求用乘法算式記錄解題活動，答對率是 88%，略高於 3-22、3-23 的表現。因為 4-8 的單位量恰好為 10，而學童已累積相當豐富「又十」累進合成活動的經驗，使得 4-8 的計數較不易出錯。

試題 4-10 評量學童問題記錄的能力，要求使用乘法算式填充題，來記錄總量未知的倍的問題，不用算出答案，其答對率是 78%。本課程預期二下學童已有半年以上倍的問題的解題活動經驗，應該已經形成倍的問題的解題活動類型，並能掌握乘法算式的意義，因此在解題前已能預期解題活動，用有乘號的算式填充題將解題計劃記錄下來。本題答對率偏低，提醒：部份學童可能尚未掌握倍的問題的解題活動類型，或尚未掌握乘法算式的符號意義，對問題記錄活動的討論，仍須持續加強。

試題 5-1 是被乘數為 1，乘數為二位數的乘法算式填充題，要求學童將答案填入（ ）中，而不要求任何紀錄，答對率是 98%。本題的高答對率，顯示：學童可能已經掌握乘法算式填充題的意義。

試題 5-15、5-16 都是總量（積數）未知的乘法問題，5-15 的單位量為兩位數；5-16 的單位量為三位數，而兩題的單位數皆為一位數，除了要求學童解題外，還要求學童把做法用算式記下來，答對率是 79%、83%。參考三上學童在三位數加法問題上的表現（答對率約為 85%），監控與進行合成計數的能力，可能仍為主要困難，與二上總結性評量時的狀況相仿（3-22 與 3-23），5-15 要做 8 次的累加活動，而 5-16 只要做 3 次的累加活動，5-16 的單位量雖然是三位數，但是累加次數較少，反而答對率較高。

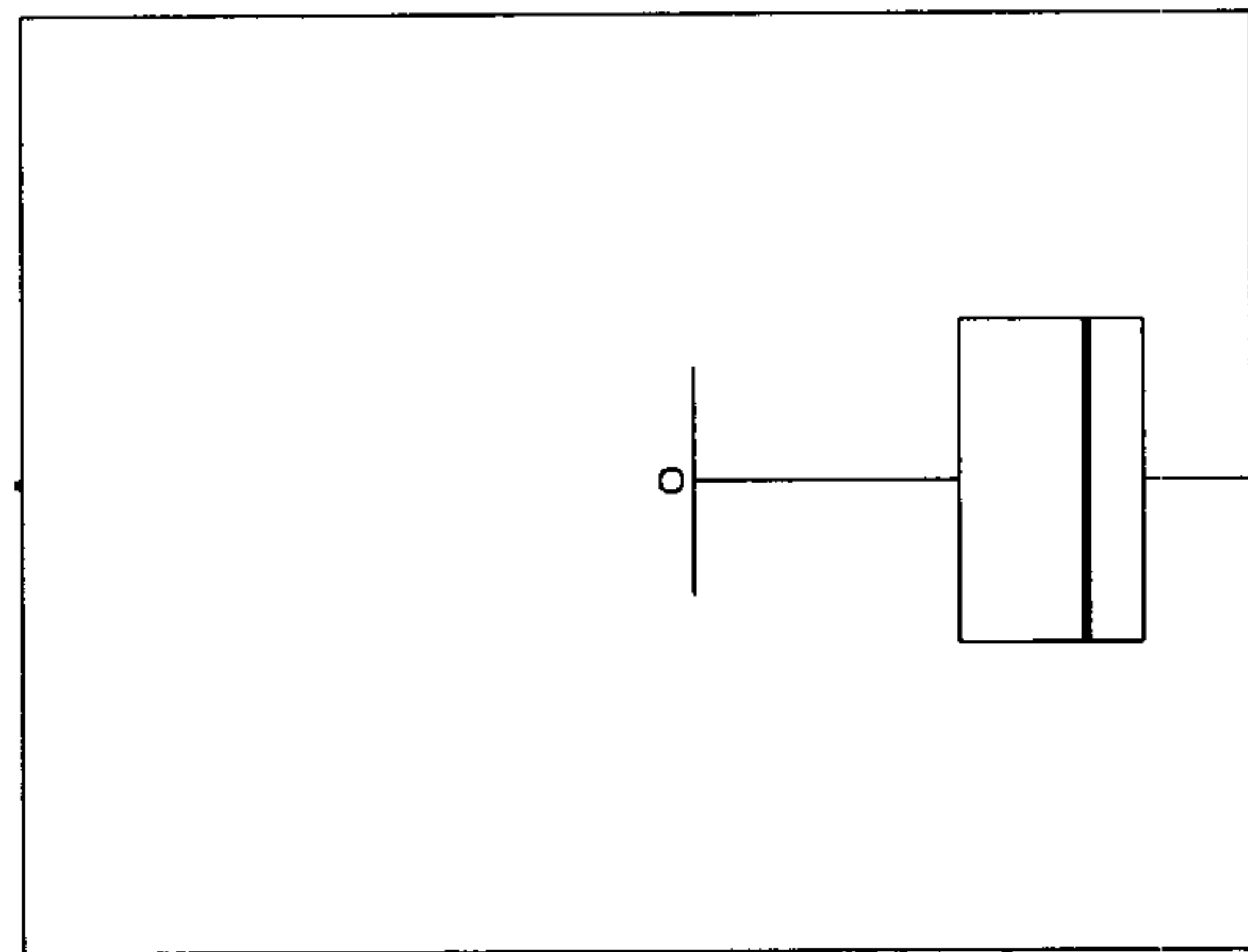
試題 5-18 是單位數（乘數）未知的倍的問題，被乘數與乘數的範圍都是一位數，除了要求學童解題外，還要求學童把做法用算式記下來，答對率是 86%，顯示學童多能理解單位數未知問題的題意，並進行解題。

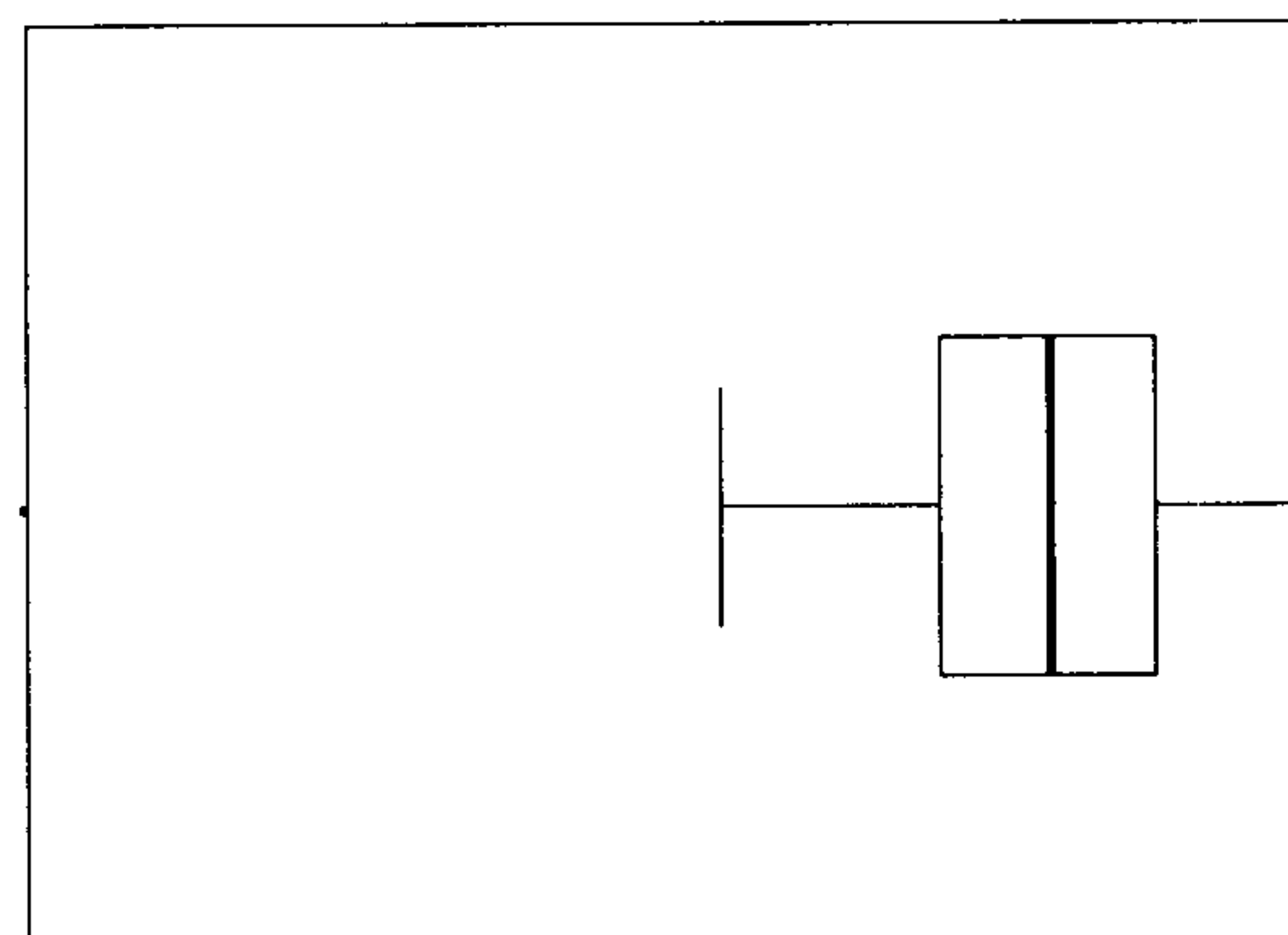
試題 6-11 是被乘數為 10 的乘數未知的算式填充題，除了要求學童填入答案外，還要求學童把做法用算式記下來，答對率是 96%，顯示學童能

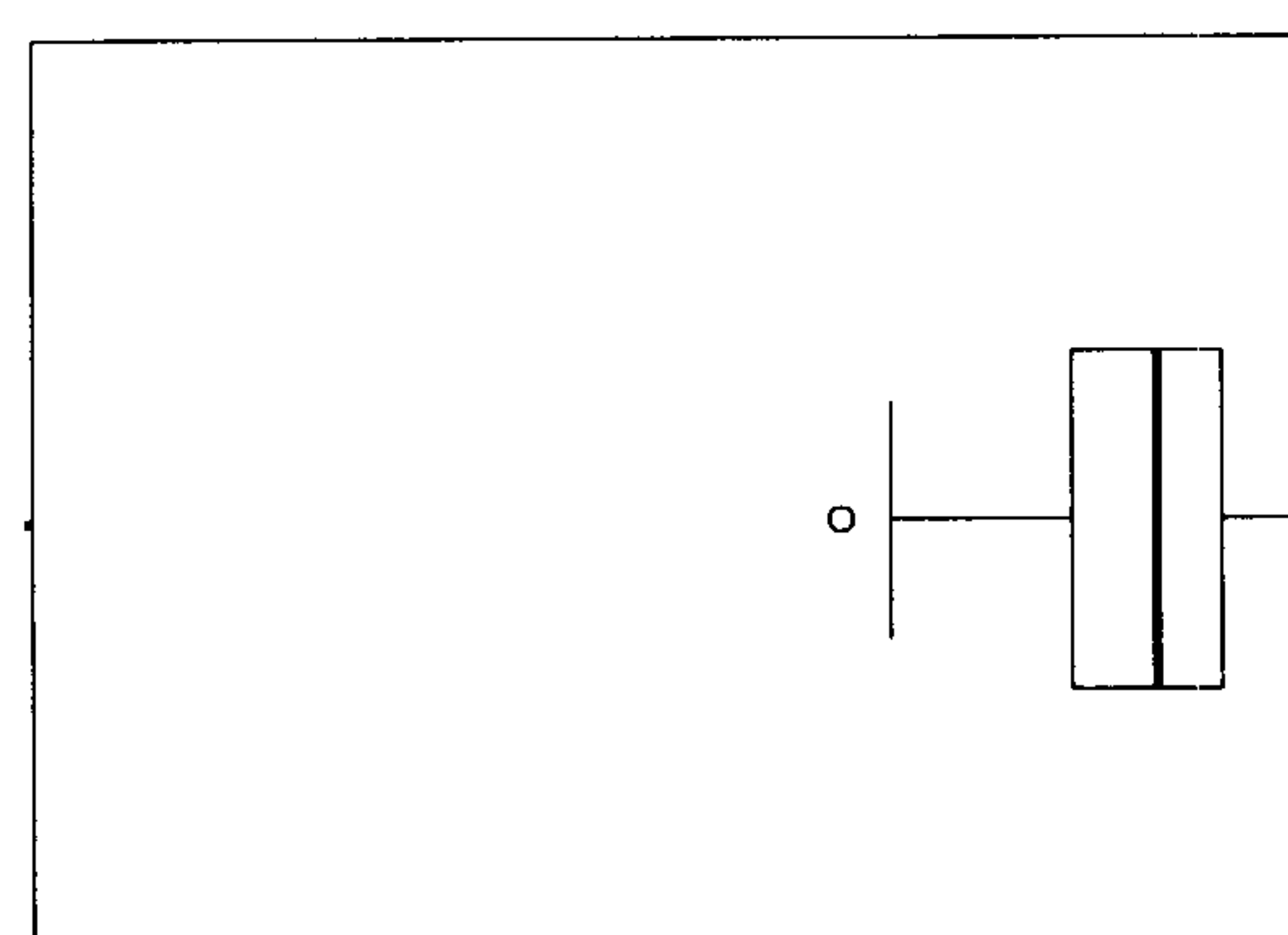
理解乘數未知算式填充題所描述的題意，而且熟悉單位量為 10 的運算。

### 三、多單位乘法運算表

3-2：第七至九冊總結性評量中倍的問題與班級通過率的分佈

<p>一、用直式把做法記下來。(每題 6 分，共 24 分)</p> <p><b>7-1</b></p> <p>(1) 一盒草莓有 48 個，9 盒草莓有多少個？</p>	
---	--

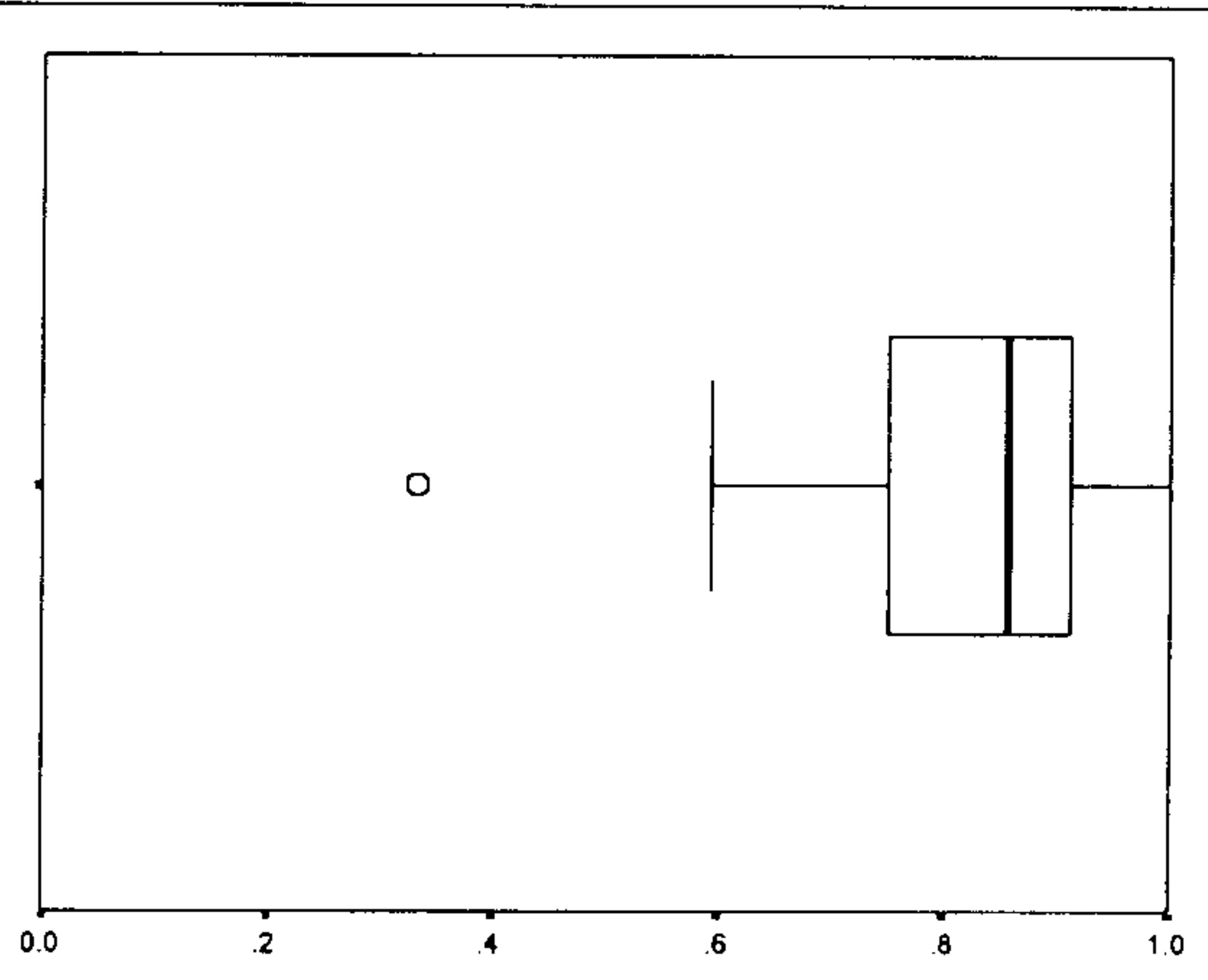
<p>一、用直式把做法記下來。(每題 6 分，共 24 分)</p> <p><b>7-2</b></p> <p>(2) 一箱梨子有 144 個，7 箱梨子有多少個？</p>	
--	---

<p>二、用算式把做法記下來。(每題 6 分，共 24 分)</p> <p><b>7-5</b></p> <p>(5) 一枝鋼筆賣 8 個十元。賣掉幾枝鋼筆，合起來可以收到 72 個十元？</p>	
--	---

一、用直式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

**8-1**

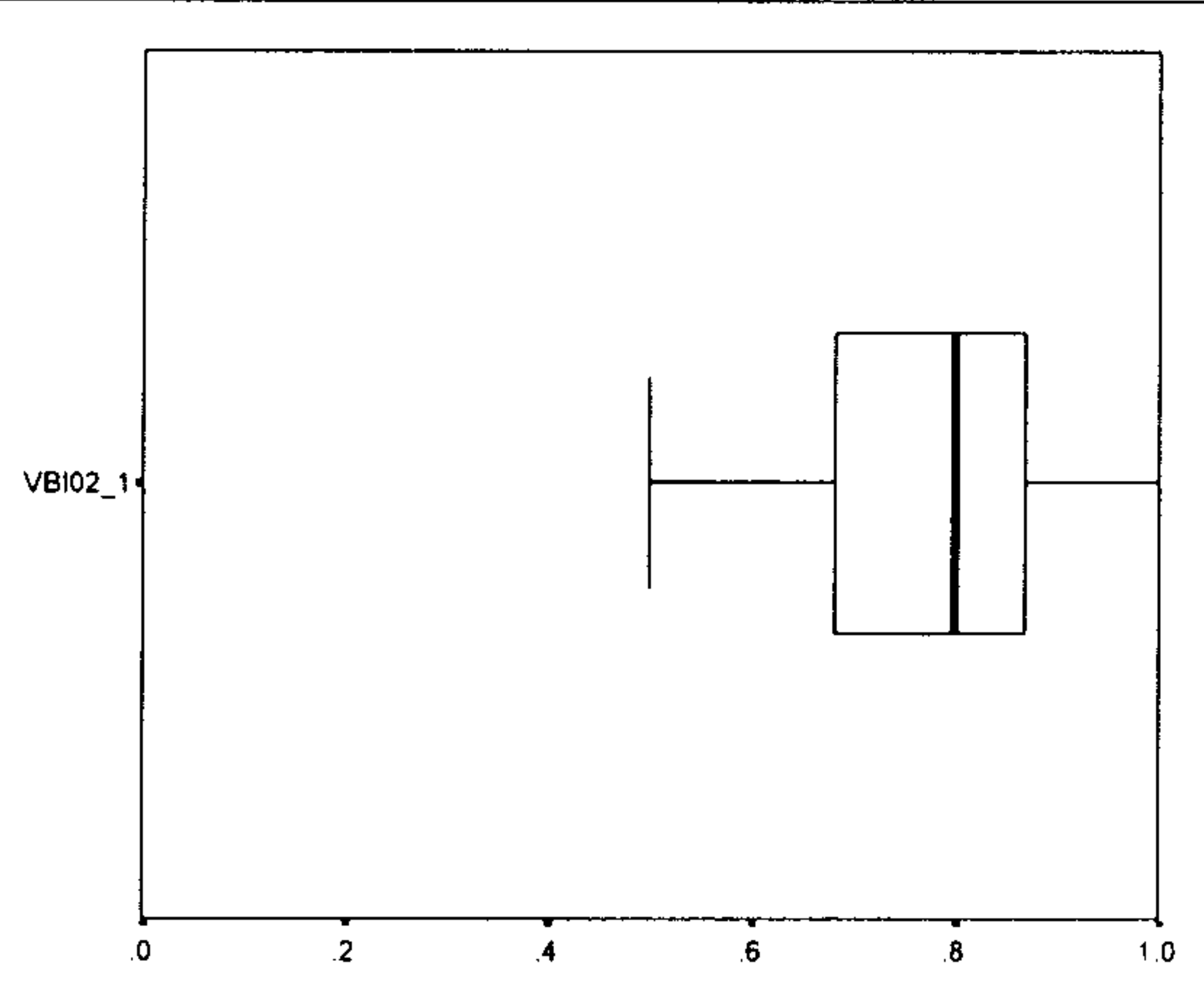
(1) 一盒枇杷有 36 個，27 盒枇杷有多少個？



一、用直式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

**8-2**

(2) 一盒李子有 288 個，19 箱李子有多少個？



一、用直式把做法記下來。(每題 4 分，共 16 分)

**9-4**

(4) 一桶糖果有 185 顆，237 桶糖果有多少顆？

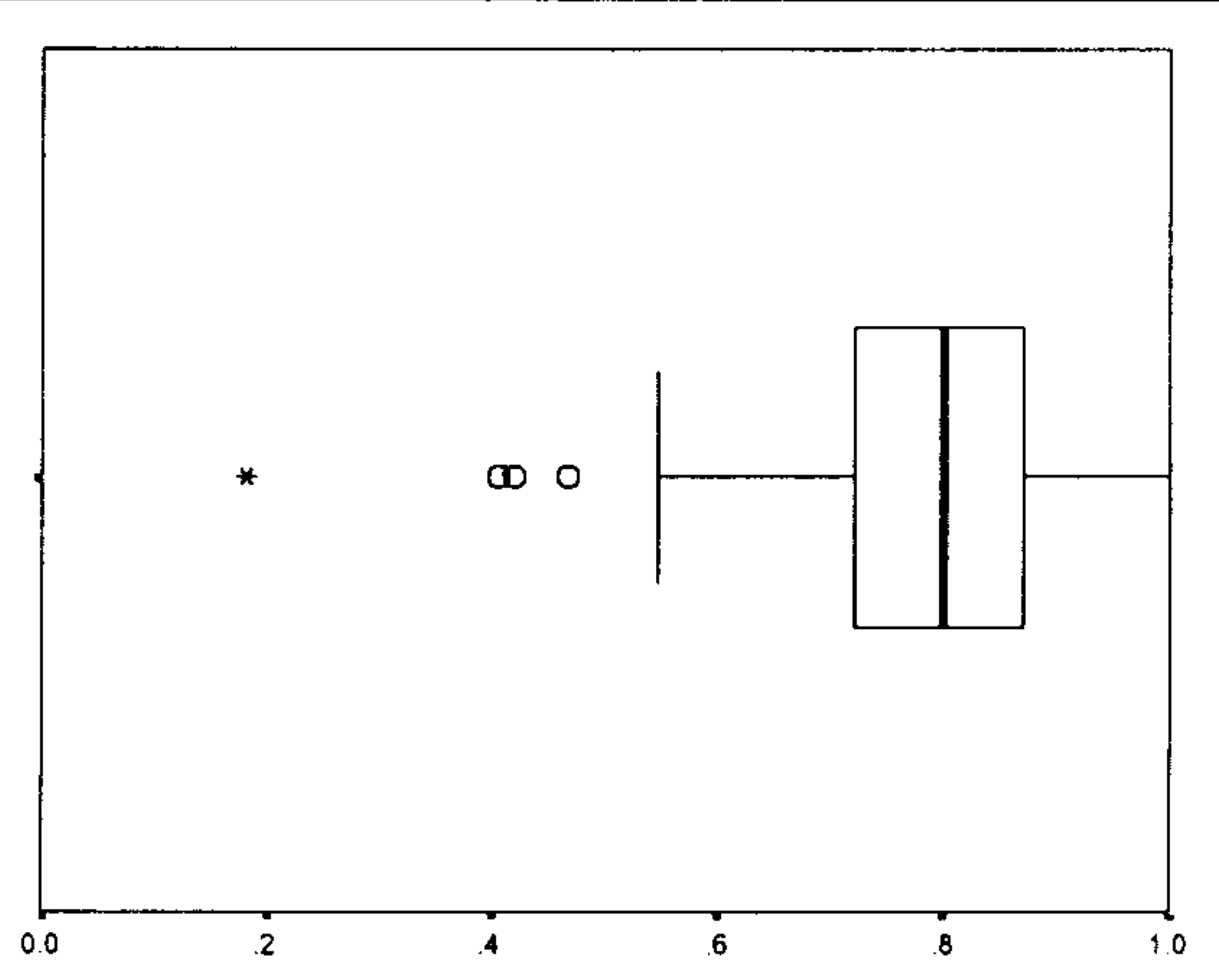


表 3-2 呈現第七至九冊總結性評量中倍的問題與班級通過率的分佈。試題 7-5 以「十」為被計數單位，被乘數是一位數，單位數未知，積數是兩位數的倍的問題，數量在基本乘法範圍內，除了要求學童解題外，還要求用算式把做法記下來。全體學童的答對率是 88%，顯示大多數學童能理解此類問題的要求。

第七冊整數乘法運算教材，延伸多單位加法運算經驗，討論「幾個百幾個十幾個一的幾倍」多單位乘法運算策略的運用，試題 7-1 是兩位數乘以一位數的總量未知倍的問題，7-2 是三位數乘以一位數的總量未知倍的問題，並限制學童使用直式格式，把做法記下來。答對率分別是 84%、81%。雖然這兩題沒有限制學童必須使用何種策略解題，但是在要求使用直式紀錄格式記錄解題活動的限制下，學童較可能使用「(幾個百)幾個十幾個一的幾倍」的策略解題。7-1、7-2 與第七冊整數多單位加減運算的表現相當一致，顯示約有兩成的學童，尚不能適應多單位運算策略。

5-15 與 7-1 都是二位數乘以一位數的乘法問題，5-16 與 7-2 都是三位數乘以一位數的乘法問題，除了第七冊試題的被乘數與乘數的數量較大或較複雜外，第七冊試題要求直式格式的紀錄，這四題的答對率差異不大，顯示直式格式的紀錄並未造成明顯的困難。

試題 8-1 是兩位數乘以兩位數；8-2 是三位數乘以二位數，試題 9-4 是三位數乘以三位數的乘法問題，並要求用直式把做法記下來，答對率分別是 83%、78%、79%。這些問題上的表現，顯示大多數的學童能適應多單位的乘法運算策略，來簡化計算的過程，並能將此策略延伸至乘數為二、三位數的範圍，但是，由四上至五上三個學期，始終有近兩成的學童，對多單位乘法運算有適應的困難，沒有進步的傾向，值得額外的注意。

#### 四、包含與等分活動

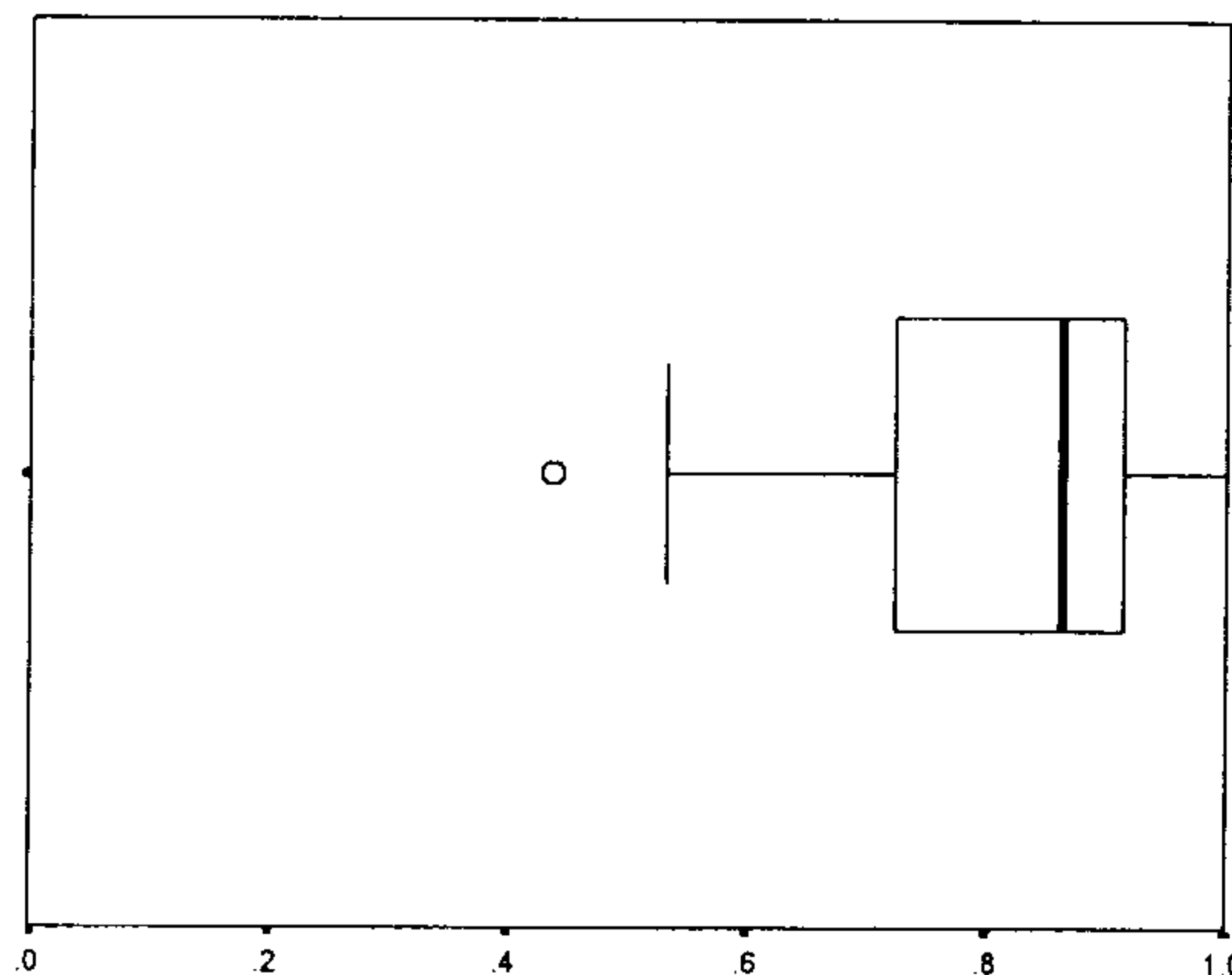
表 3-3：第四至八冊總結性評量中包含與等分的問題與班級通過率的分佈

<p>◎把你的做法用算式記下來：(在算「幾倍」的問題時，用有「×」號的算式來記錄)</p> <p><b>4-7</b></p> <p>(7)明芬有 21 元，買一枝自動鉛筆要 7 元，她可以買幾枝自動鉛筆？</p> <p>( )枝</p>	
---	--

一、填填看：(一個括號 2 分，共 26 分。)

5-7

(7) 48 元平分給 4 個人，1 人分到 ( ) 元。

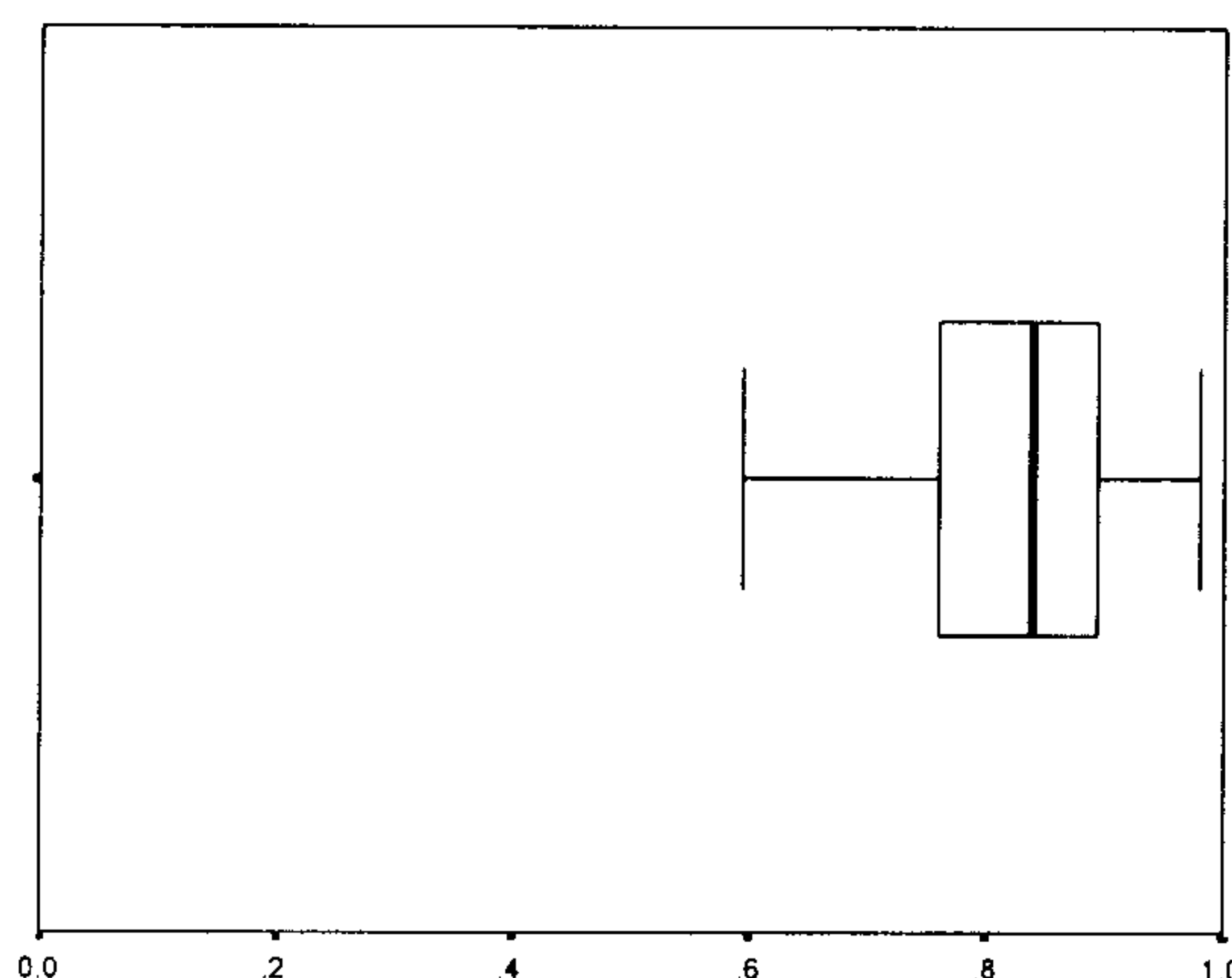


四、算算看，把你的做法用算式記下來：(1 題 6 分共 60 分)

5-17

(5) 10 個人一組，180 個人全部分完可以分幾組？

答：( ) 組

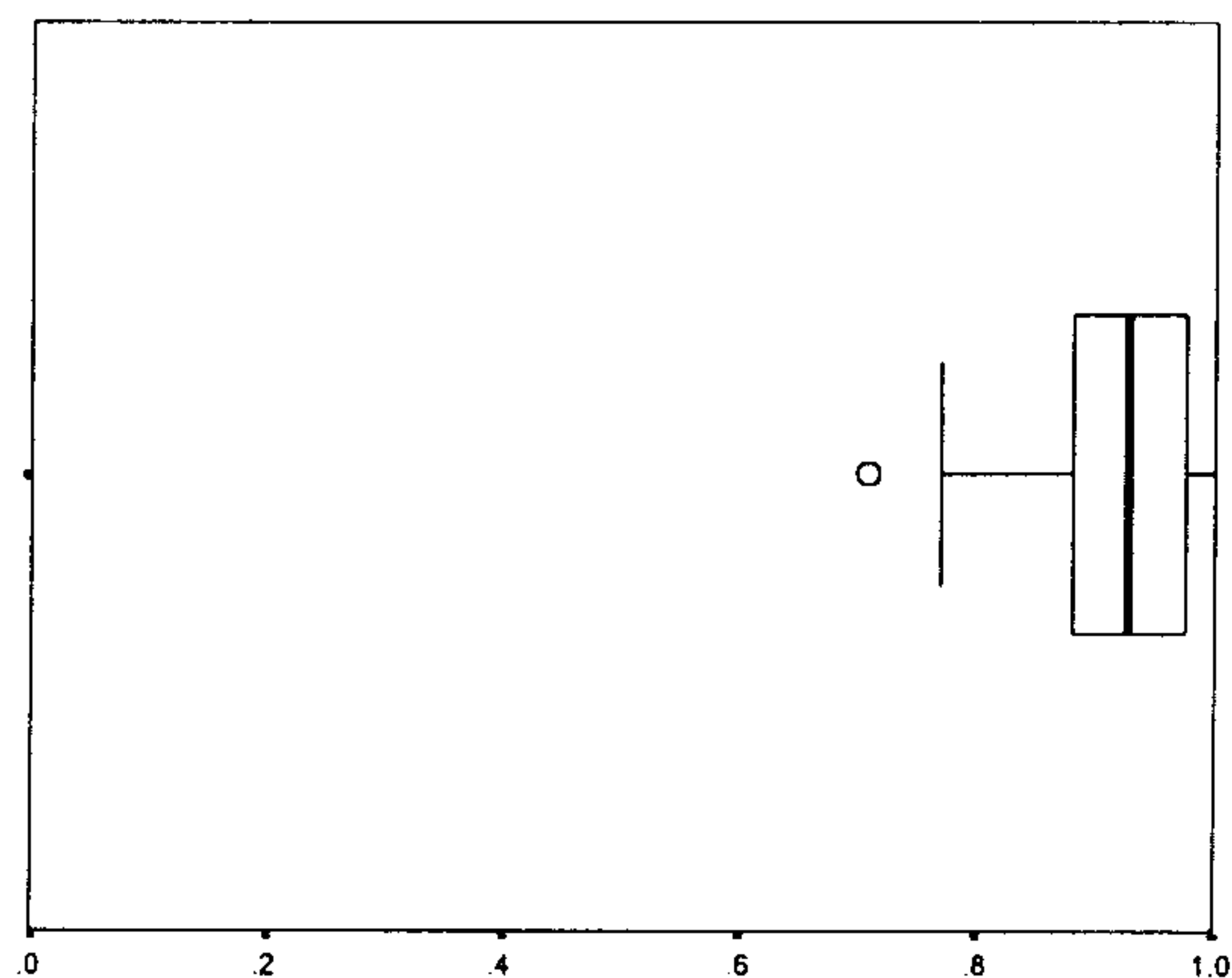


三、算算看，把你的做法用算式記下來：(每題 6 分共 48 分)

6-16

(16) 小方有 99 條橡皮筋，11 條橡皮筋綁成一捆，可以綁成多少捆？

( ) 捆

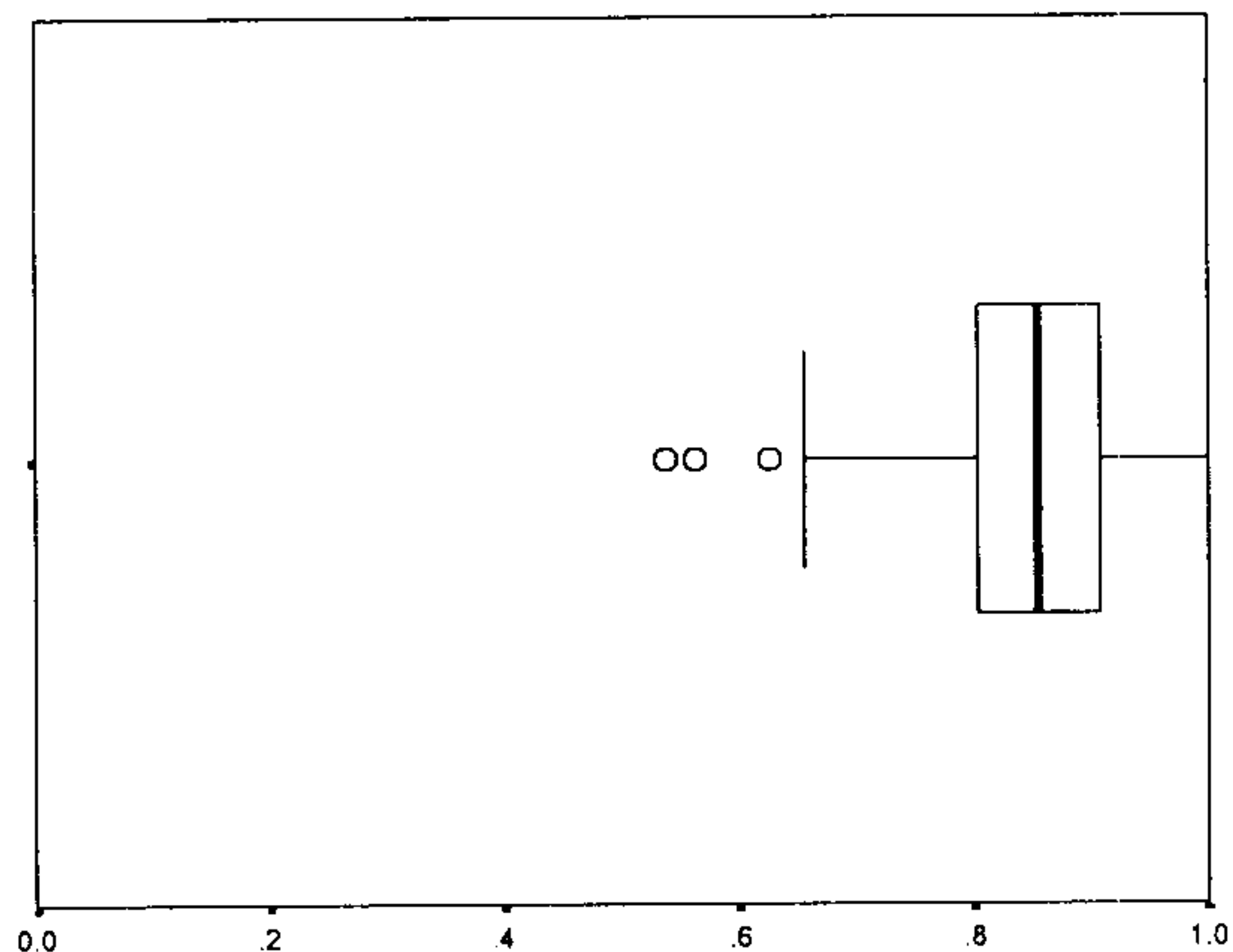


三、算算看，把你的做法用算式記下來：(每題 6 分共 48 分)

6-17

(17) 105 人平分成 15 組，一組有幾人？

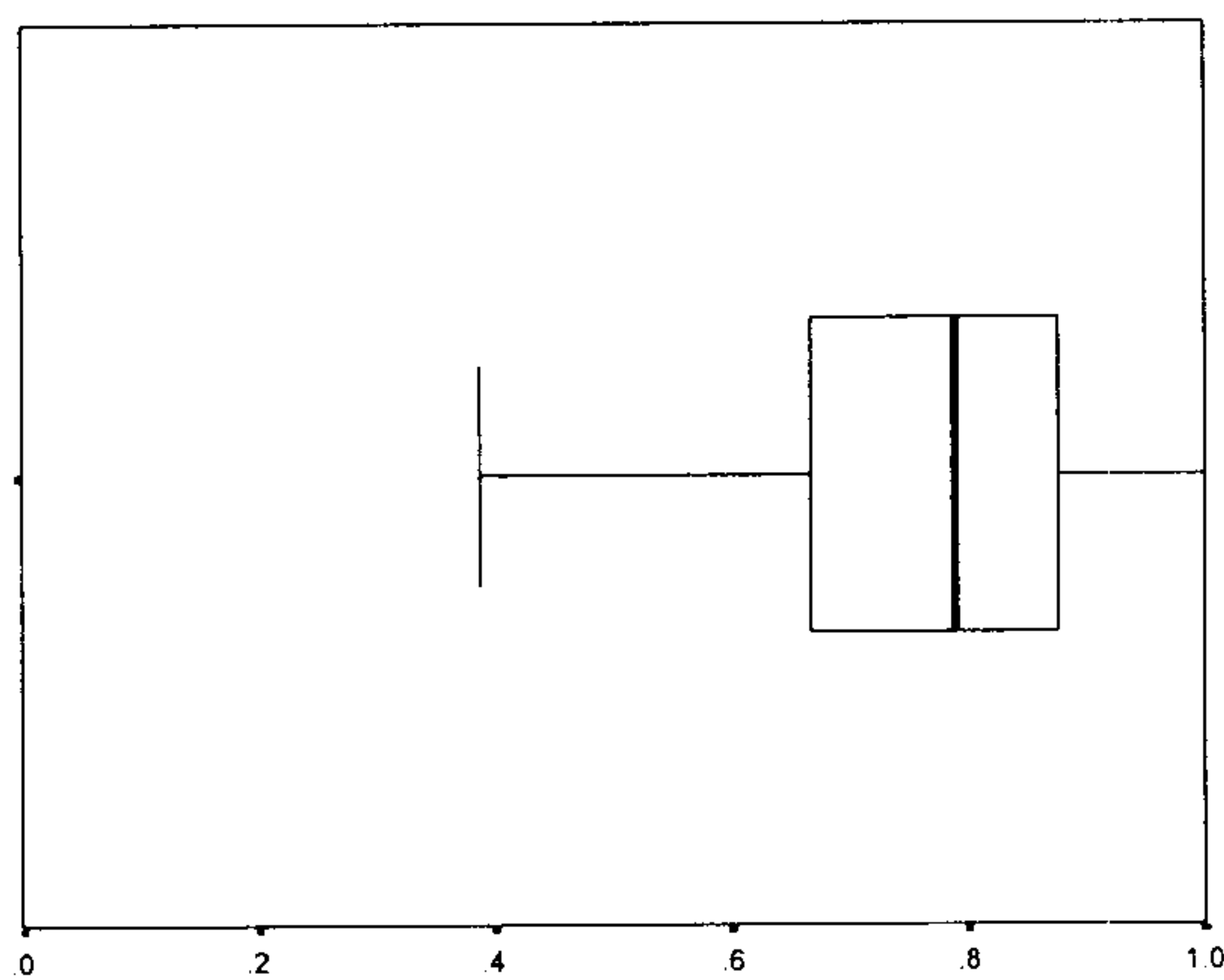
( ) 人



二、用算式把做法記下來。(每題 6 分，共 24 分)

7-7

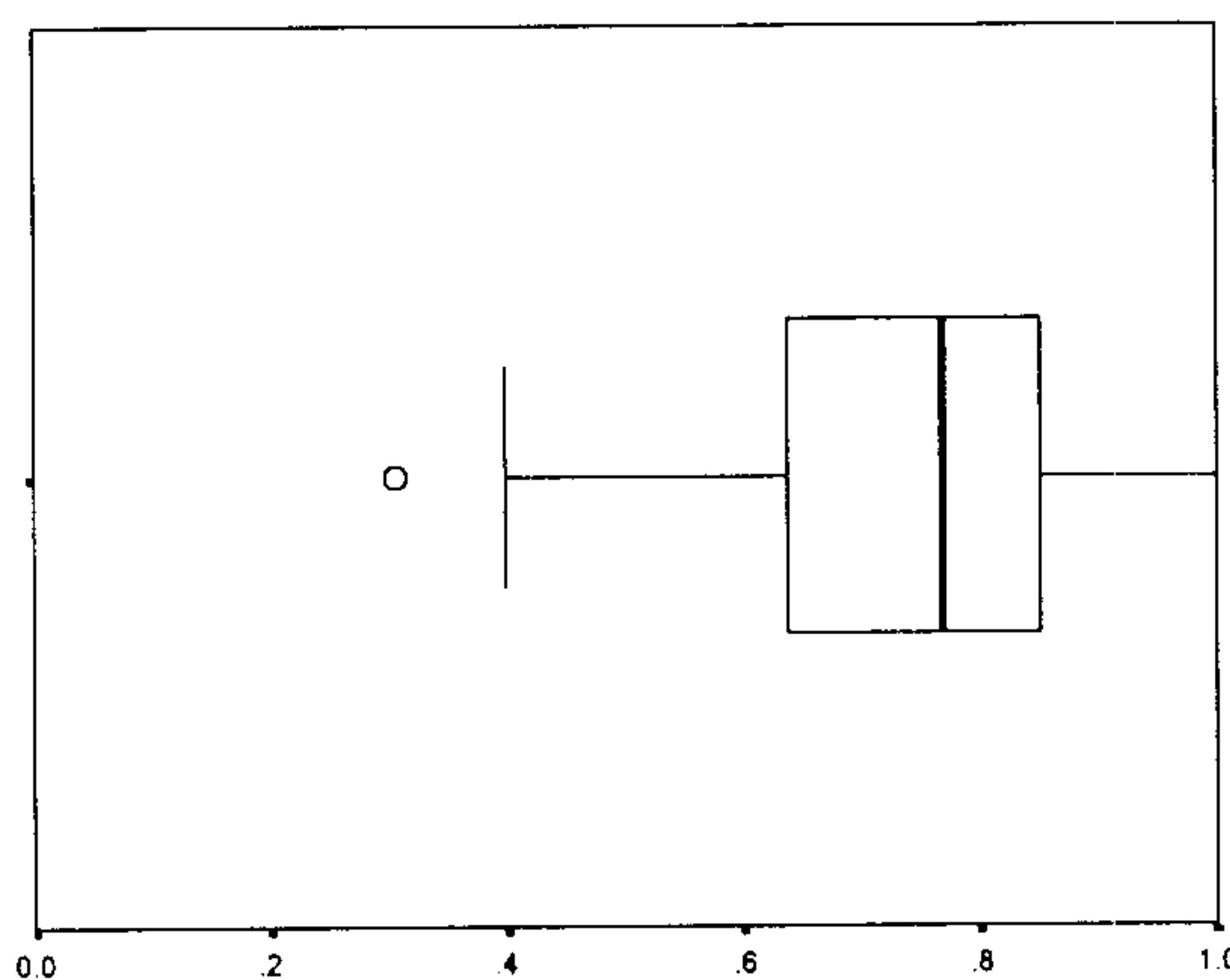
(7) 有 124 個桃子，16 個裝成一盒，儘量分裝完，可以分裝成多少盒？剩下多少個？



二、用算式把做法記下來。(每題 6 分，共 24 分)

7-8

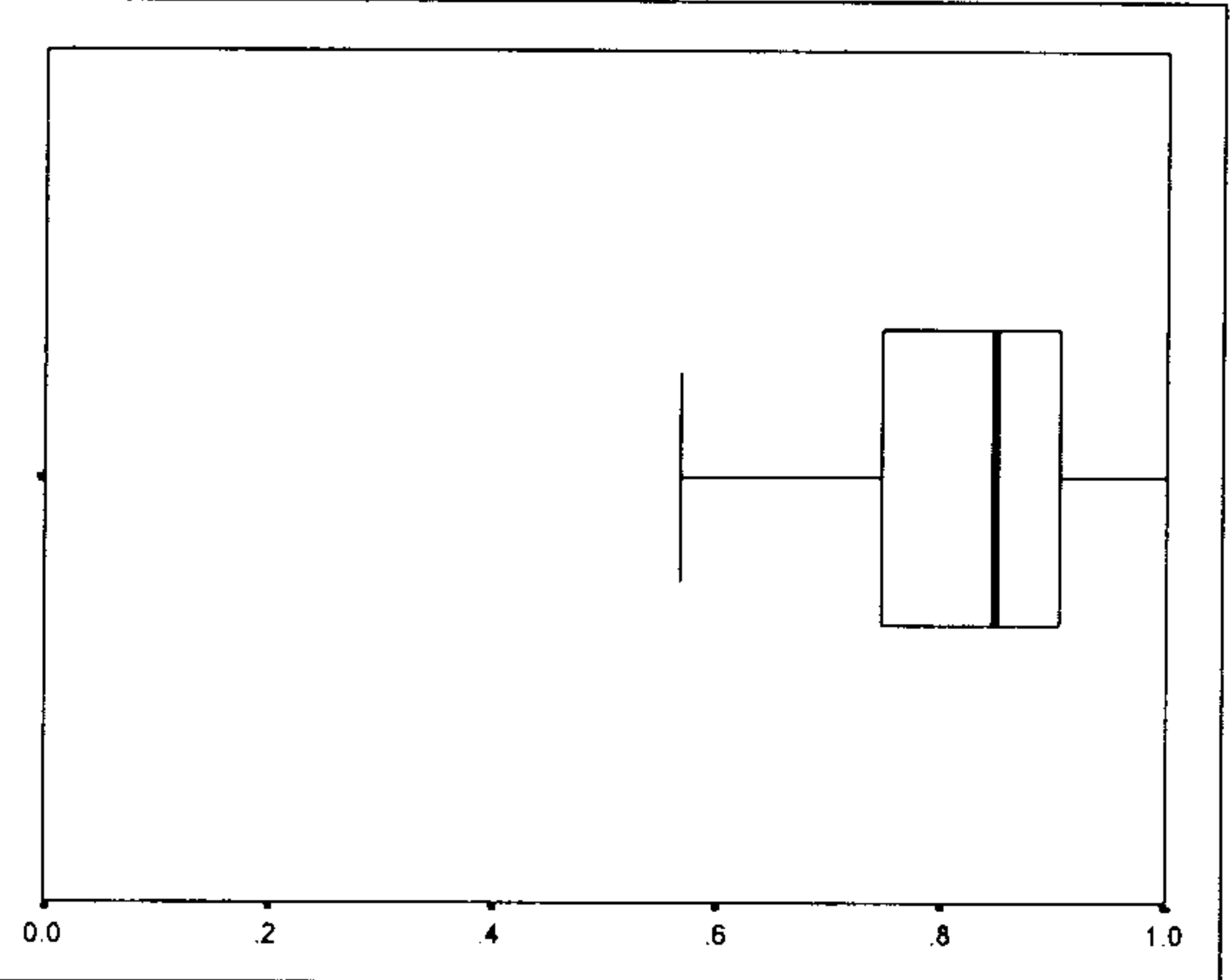
(8) 把 978 個花片，平分給 113 人，儘量分完，一人可分得多少個？還剩下多少個？



一、用直式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

8-3

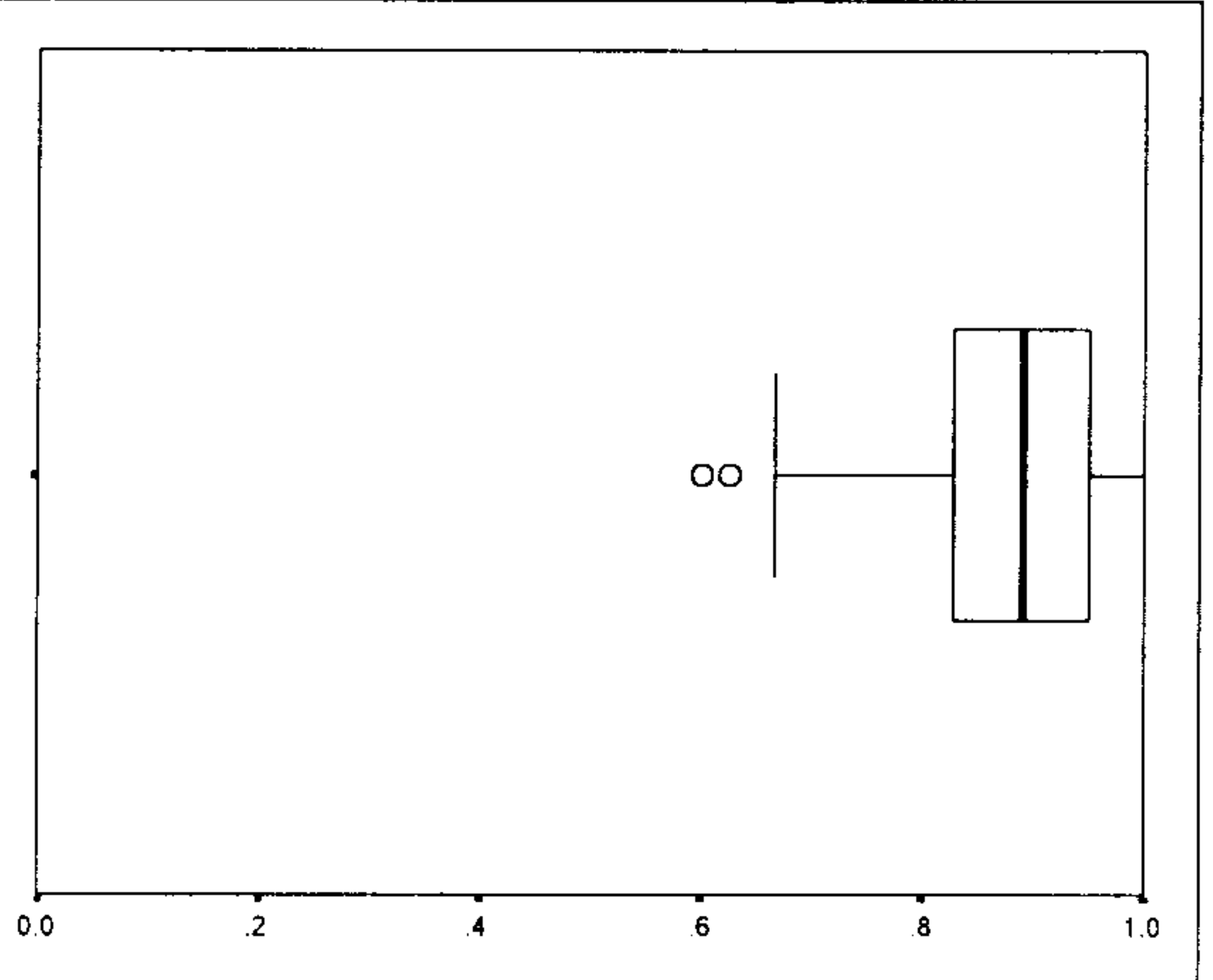
(3) 把 952 個積木，平分給 136 人，儘量分完，一人可分得多少個？還剩下多少個？



二、用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

8-7

(7) 把 91 枚五元硬幣，平分給一些人，全部分完後，一人可分得 7 枚五元硬幣。問平分給多少人？



二、用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

8-9

(9) 有 975 顆酸梅，48 顆裝成一包，儘量分裝完，可以分裝成多少包？剩下多少顆？

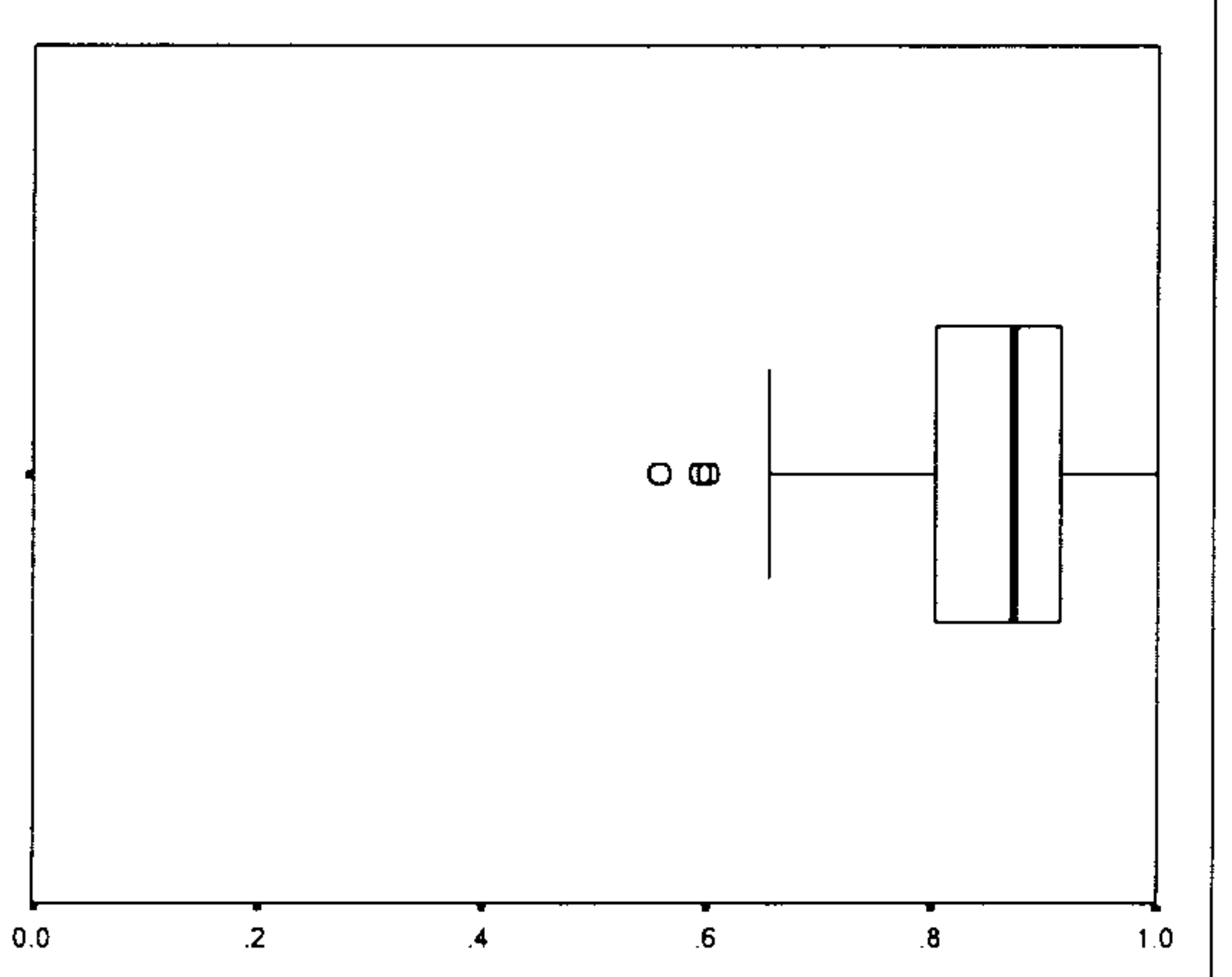


表 3-3 呈現第四至八冊總結性評量中包含與等分的問題與班級通過率的分佈。試題 4-7 是在基本乘法範圍內的單位數未知包含除問題，並要求將做法用算式記下來，全體學童答對率是 83%。在尚未進一步討論除法運算之前，學童可以用圖像（例如：畫圈）來模擬問題情境，在具體活動下



決定分的結果；或已知一枝鉛筆 7 元，透過累加的方式，決定買 3 枝時，正好把 21 元用完；或用多次分解活動來模擬問題情境，再計數分解的次數來回答問題，參考二下兩位數減法運算的表現（答對率接近 90%），此題的總量為 21，進行具體活動尚不算繁雜，進行兩次累加或分解運算，亦不致於引起太嚴重的監控負擔，懷疑部份學童尚未能掌握包含除問題的活動要求，值得進一步的注意。

試題 5-7 是總量（被除數）為 48，單位數（除數）為 4，而單位量（商數；二位數）未知的等分除問題，只要求學童解題後將答案填入（ ）中，並沒有要求作法的記錄，答對率是 85%。此題在錢幣的情境下進行等分活動，此情境較易引發用四個十元與八個一元來表現總量，而在四等分的要求下，沒有十元與一元的轉換問題，是較易執行的等分活動，學童的表現仍顯示：部份三上的學童尚未能掌握等分除問題的要求。

試題 5-17 是總量（被除數）為 180，單位量（除數）為 10，而單位數（商數；二位數）未知的包含除問題，並要求將做法用算式記下來，答對率是 88%。由運算的觀點，學童已累積相當多「一」與「十」單位間的化聚活動經驗，使得此單位量恰好為「十」的問題，較其他數量範圍內的單位數未知包含除問題，來得容易處理，仍有約 12%的學童答錯，值得注意他（她）們對包含除活動要求的理解。

試題 6-16 是總量（被除數）與單位量（除數）皆是兩位數、且餘數為 0 的包含除問題；6-17 是總量（被除數）為三位數、單位數（除數）為兩位數且餘數為 0 的等分除問題，除了要求學童解題外，還要求將做法用算式記下來，答對率是 92%、84%。實驗教材在第六冊第二單元透過使用減法算式記錄解題活動的限制，要求學童使用分解活動來解包含除問題，並透過「一組一輪分一人，分一輪分掉多少人？」的方法，來討論整合等分除與包含除活動的可能性，將等分除問題轉化為包含除問題，再經由分解活動來解題，藉著此種關係的聯絡，以及使用減法算式記錄解題活動的限制，協助學童脫離具體包含或等分活動的限制。如果學童能適應此種概念上的調適，6-16、6-17 兩個問題的商數都是一位數，它們的困難度應該是差不多，兩者答對率的差異，顯示：學童較能掌握包含除問題，而較無法掌握等分除問題，部份學童可能尚無法適應概念上的改變。

包含除問題較易被「視」為多次分解活動，目前的減法運算能力，簡化了解題過程（相對於用圖像表現總量，再進行具體切割活動），或減少錯誤的發生；而 6-16 所採用的數量，在採用具體切割活動時，亦恰好無單位轉換的問題，較易執行。相對地，要具體地進行 6-17 等分除活動時，總量與單位數都很大，執行相當不易，上述的討論亦可能是兩題答對率差異

的原因。

試題 7-7 是三位數（總量）除以兩位數（單位量）且有餘數的單位數（一位數）未知包含除問題；7-8 是三位數除以三位數且有餘數的單位量（一位數）未知等分除問題，並要求將做法用算式記下來，答對率分別是 77%、74%。相對於三下同類型問題是 6-16、6-17，答對率皆下降 10%，第七冊試題的被除數與除數的數量較大外，另一個不同處是三下所布問題的餘數是 0，而四上所布問題的餘數不是 0。

除了部份四上學童可能不適應有餘數除法問題的要求外，6-16 與 7-7 都是商數為一位數的包含除問題，如果用表徵「十」、「一」的圖像來表現總量，再進行具體切割活動，7-7 會遭遇單位轉換的問題，執行具體活動較 6-16 困難；如果用多次分解運算來解題，雖然 6-16 需進行九次分解運算，而 7-7 需進行七次分解運算，但是，6-16 的減法運算皆無退位問題，較不易出錯。6-17 與 7-8 都是商數為一位數的等分除問題，單位數分別為 15 與 113，進行具體分配活動，皆相當繁雜而不易執行；如果能整合等分除與包含除問題，將等分除問題轉化為包含除問題，再經由分解活動來解題，7-8 需進行八次三位數減三位數的計算，較 6-17 複雜，可能增加出錯的機會。

在第七冊第四單元中，當學童可以運用多次分解運算來解決除問題時，教材建議透過紀錄格式的限制，幫助學童用多步驟乘法與減法算式紀錄，來重整解題過程（參見課程概要中的說明），經驗用乘、減運算來解題的可能性，作為以後學習成人的除法運算策略的基礎，當參考三下與四上加減運算能力，上段所述計算困難，不足以解釋 10% 答對率的下降時，亦宜考慮在引入紀錄格式限制時，不充足或不適當的討論，可能引起學童對除法問題的混淆或困惑，在學習除法運算過程中，需由多個觀點來理解除法問題，才能逐步簡化計算的過程，來因應數量逐漸增大的困難，如何順暢地協助學童適應這些觀點，仍值得更進一步的思考與改進。

試題 8-9 是被除數是三位數、除數是兩位數且餘數不為 0 的商數（二位數）未知的包含除問題，要求將做法用算式（未要求直式格式）記下來，8-3 是被除數是三位數、除數是三位數、且餘數不為 0 的商數（一位數）未知的等分除問題，並要求將做法用直式記下來，答對率分別是 85%、82%。相對於第七冊試題 7-7、7-8 同類型問題上的表現，稍有進步，顯示四下學童逐漸適應有餘數的除法問題。

自第七冊起，教材透過解題紀錄格式的限制，幫助學童用多步驟乘法與減法算式紀錄，來重整除法問題的解題過程，經驗用乘、減運算來解題的可能性；當商數範圍增大時，例如試題 8-9，要用「減的方法」來解題時，需進行二十次分解運算，執行變得繁雜與監控不易，若能適應先乘後減的

策略來解題（配合目前已發展的多單位乘法、減法運算能力），才能有效地簡化解題過程，減少出錯的機會；而本課程引入除法直式紀錄時，亦是用來描述先乘後減的過程，比較 8-9、8-3 與 7-7、7-8 的表現，亦顯示四下學童漸能運用先乘後減的策略來解除法問題。

試題 8-7 是以五元硬幣為被計數單位，被除數為兩位數，商數是一位數且餘數是 0 的除數未知的等分除問題，並要求將做法用算式記下來。學童可以在「以五為被計數單位」情況下進行除法活動，或先以「一」為被計數單位重述問題情境，如先算出 91 枚五元硬幣合起來是 455 元，一人分得 7 枚五元硬幣合起來是 35 元，再求出 455 元平分給多少人時，一個人可以分到 35 元。此題的答對率為 88%，顯示：大多數學童已能整合等分除與包含除情境，用包含除的觀點來解讀此除數未知的等分除問題，若非如此，因為等分份數未知，需透過嘗試錯誤的方式，來尋找等分成多少份時，一份才恰好是 7 枚五元硬幣，此種嘗試錯誤的過程相當繁雜，不易解釋觀察到的答對率。

## 五、多單位除法運算與乘除互逆的運用

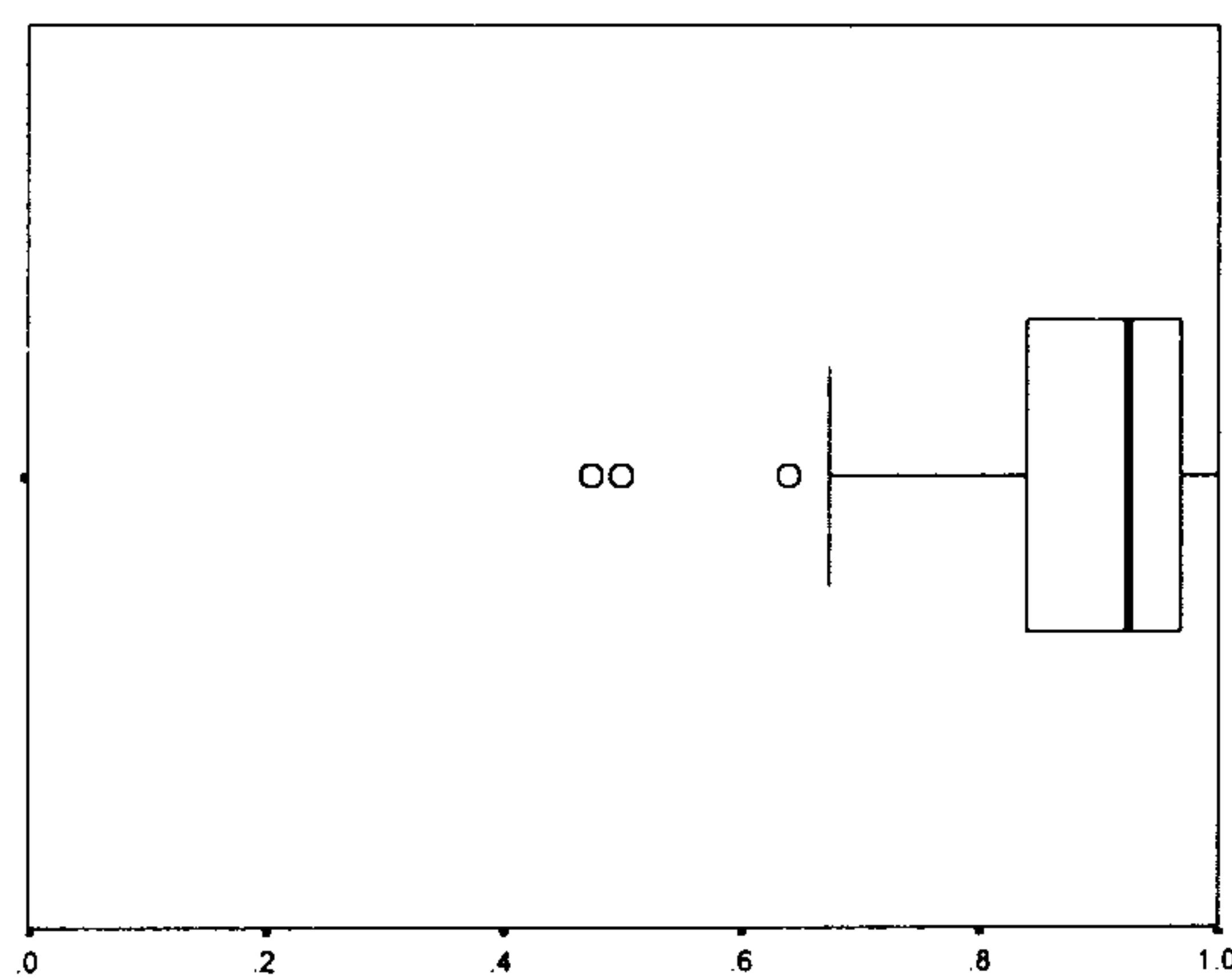
表 3-4：多單位除法運算與乘除互逆的運用相關問題與班級通過率的分佈

<p>二、用算式把做法記下來。（每題 6 分，共 24 分）</p> <p><b>7-6</b></p> <p>(6) 買 6 包餅乾合起來要付 96 元，只買一包餅乾要付多少元？</p>	
--	--

二、用算式把做法記下來。(每題 4 分，共 24 分)

8-8

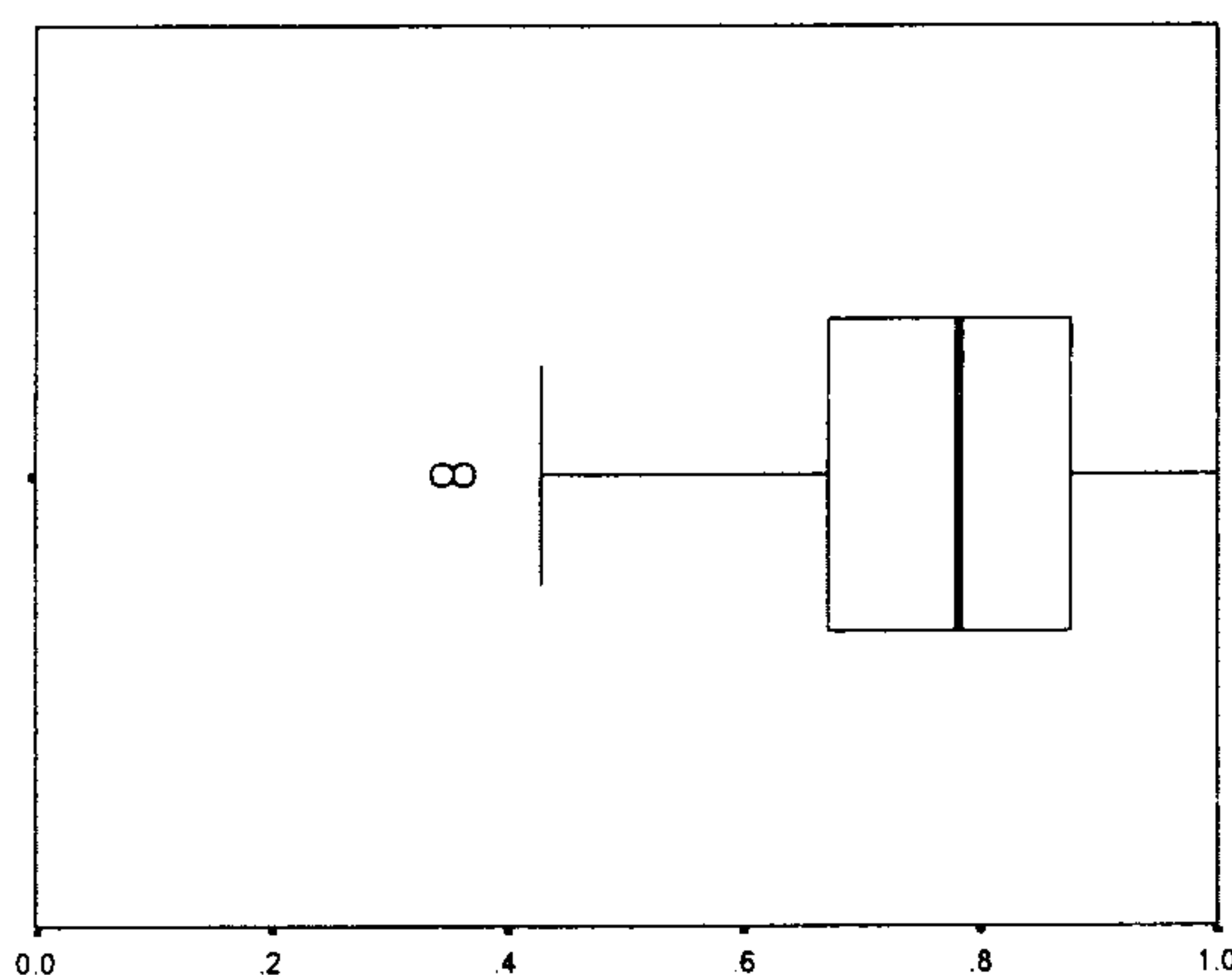
(8) 超市原有一堆碟子，12 個裝成一盒，全部分裝完後，一共分裝成 8 盒。問超市原有多少個碟子？



一、用直式把做法記下來。(每題 4 分，共 16 分)

9-3

(3) 把 3952 枝吸管，平分給 36 人，儘量分完，一人可分得多少枝？還剩下多少枝？

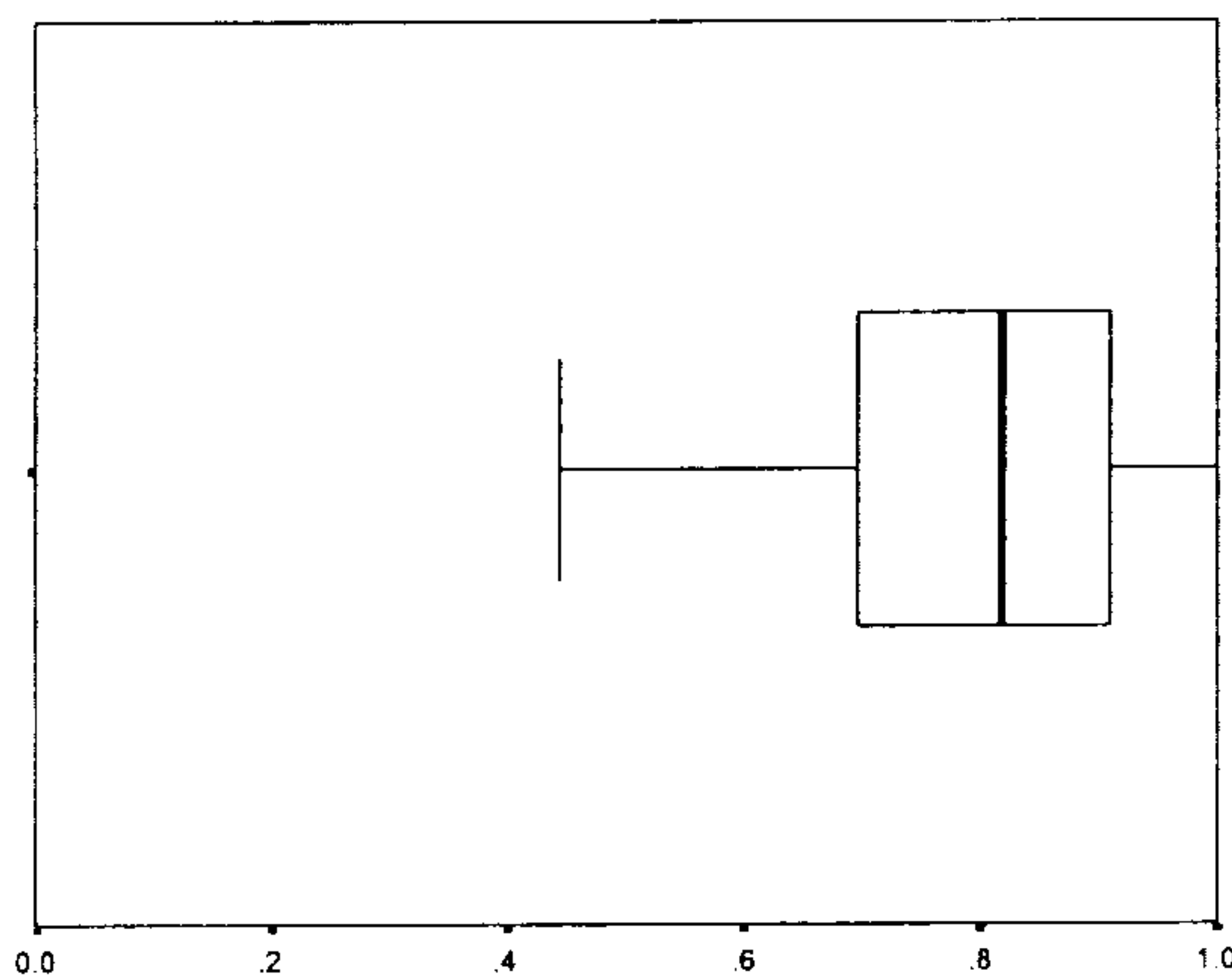


二、先用算式填充題記錄問題，再用算式把做法記下來。(每題 4 分共 16 分)

9-5

(5) 有 174 個衣夾，幾個裝成一包，一包一包都要裝得一樣多，儘量分裝完，一共分裝成 9 包，剩下 12 個。問幾個衣夾裝成一包？

有「 $\div$ 」號的算式填充題：



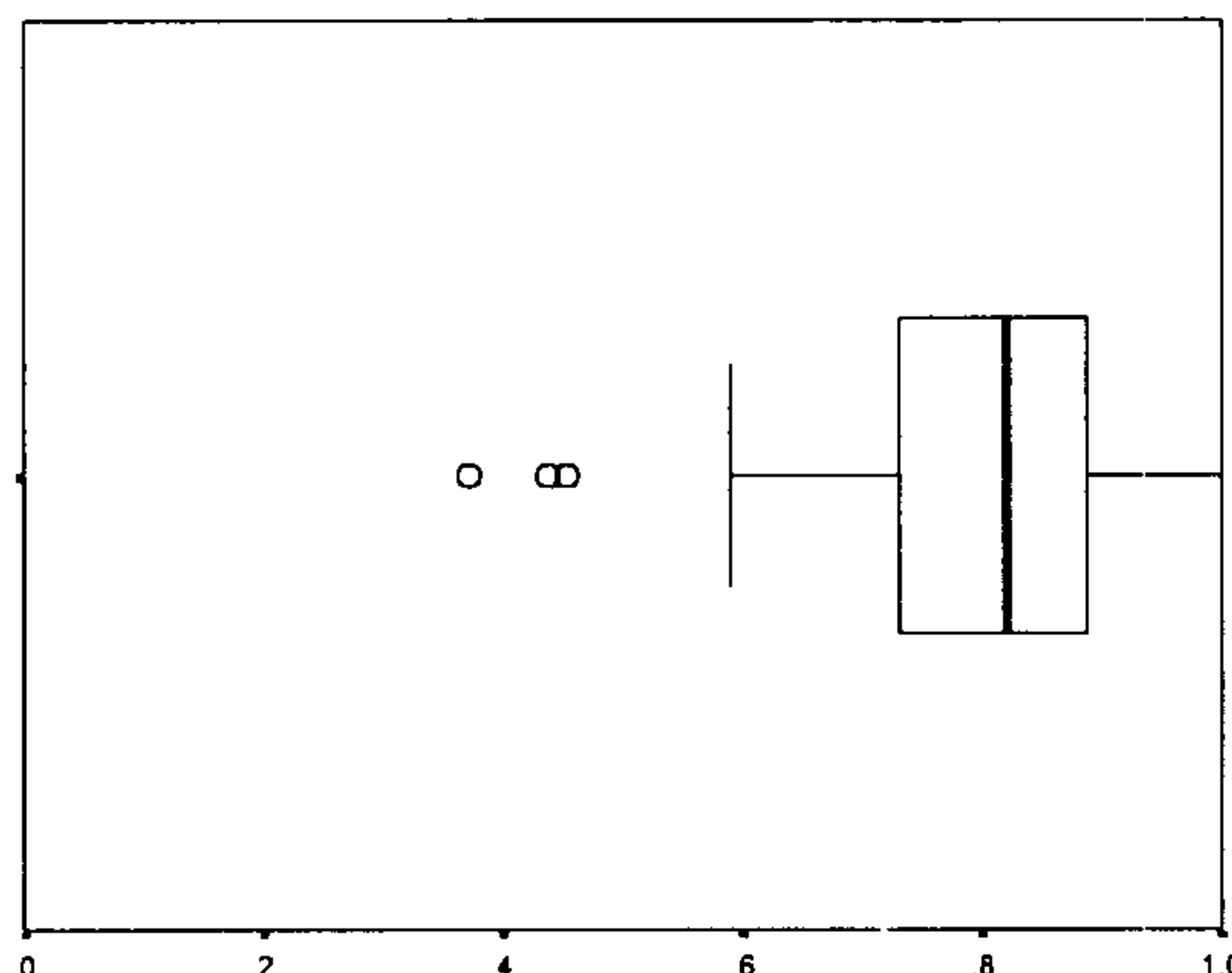
二、先用算式填充題記錄問題，再用算式把做法記下來。(每題 4 分共 16 分)

**9-6**

(6) 有 76 卷錄音帶，幾卷裝成一包，一包一包都裝得一樣多，一共裝成 19 包，沒有剩下。問幾卷錄音帶裝成一包？

等號右邊只有( )的算式填充題：

\_\_\_\_\_



三、先用算式填充題記錄問題，再用算式把你的做法記下來。(每題 4 分，共 28 分)

**10-11**

(11) 一瓶葵花油有 26 分升，多少瓶葵花油合起來會有 364 分升？

等號右邊只有( )的算式填充題：\_\_\_\_\_

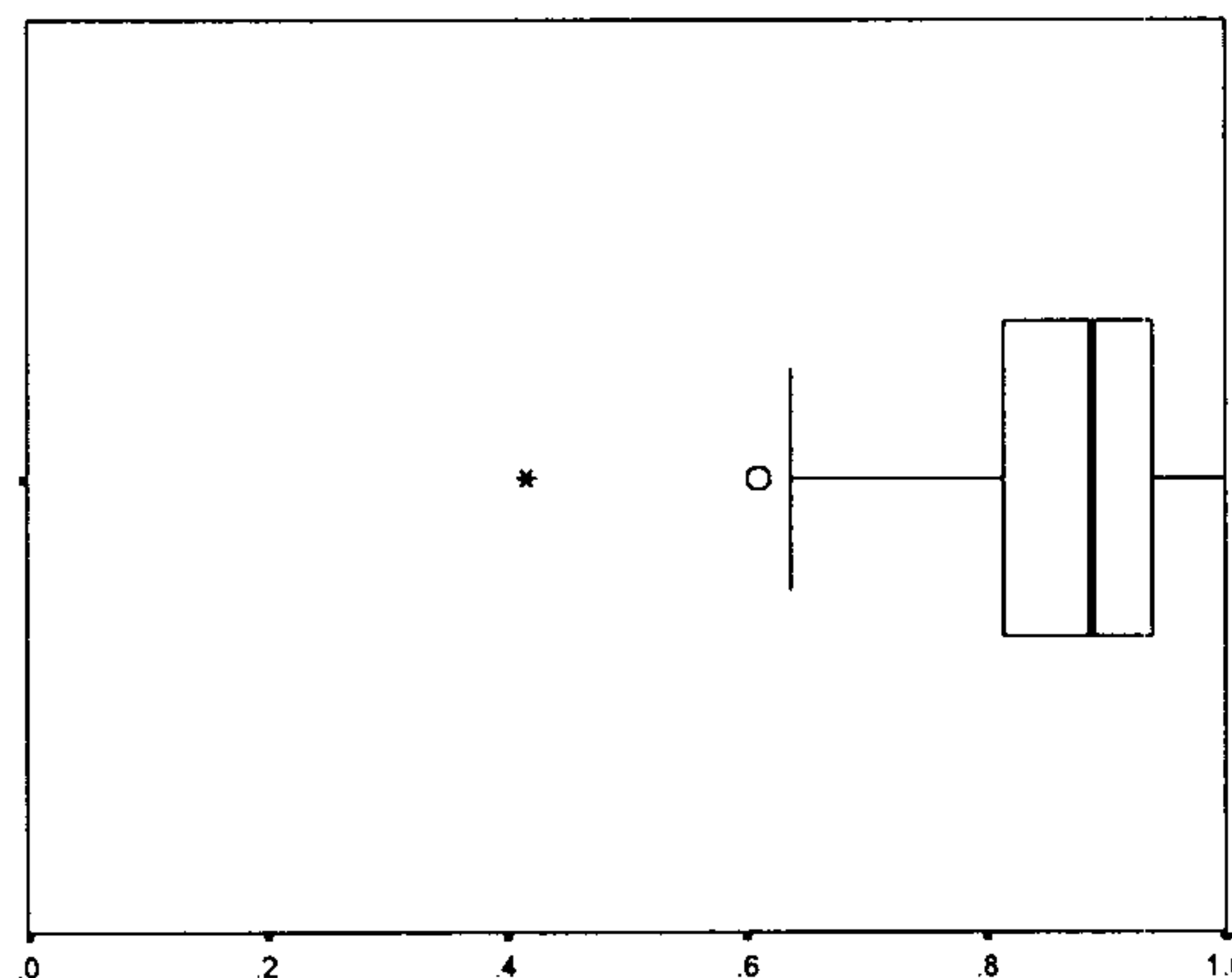


表 3-4 呈現乘除互逆與多單位除法運算相關問題與班級通過率的分

佈。試題 7-6 的語意是單位數（乘數）為一位數、單位量（被乘數）未知的倍的問題，並要求用算式把做法記下來。全體學童答對率是 79%。在尚未發展測量運思前，較不易用等分除的觀點來理解倍的問題（乘除互逆），運用倍的活動來理解問題描述時，又缺少單位量可供運作，只能用嘗試錯誤的方式，看用什麼為單位量時，能滿足問題情境的描述，假設用嘗試錯誤的方式解題，答對本題需依賴乘法運算的能力，參考同冊 7-1、7-2 乘法問題（乘數皆為一位數）的表現（84%與 81%），本題的答對率雖然稍差但差異不大，顯示單位量（被乘數）未知的倍的問題，在題意的理解上，未造成特殊的困難。

試題 8-8 的語意是除數為兩位數，商數為一位數且餘數是 0 的被除數未知的包含除問題，並要求將做法用算式記下來，答對率是 89%。雖然學童在此階段未必能掌握乘除互逆的關係，但由於 8-8 問題情境的支持，想像分裝的結果，可以「看到」8 盒 12 個裝的盤子，這是所有被分裝的盤子，透過倍的活動觀點來計數所有盤子的個數，以四下學童的乘法運算能力而言，兩位數乘以一位數並非困難之事，本題的答對率，顯示部份學童已進行上述觀點的解題方式，若學童仍是透過嘗試錯誤來進行包含除活動，繁雜的嘗試錯誤過程，不易解釋觀察到的答對率。

第九冊教材，在學童能用乘、減運算來解除法問題的基礎上，透過「先算商數最多有幾個百，再算剩下的最多有幾個十，最後算剩下的可以有幾個一」多單位除法運算策略的討論，來簡化除法運算的過程，並使用直式格式來記錄此種策略的解題過程（參見課程概要的說明），試題 9-3 是被除數為四位數、除數是兩位數且餘數不為 0 的商數（三位數）未知的等分除問題，並要求將做法用直式記下來，答對率是 77%。

比較同類型問題 8-3 與 9-3，8-3 的除數比 9-3 多了一位，但是商數卻少了二位，8-3 的答對率比 9-3 高了 5 個百分點，顯示：本教材以商數的位數（而非除數範圍），來安排除法教材順序，是合理的考量。試題 9-3 偏低的答對率，一方面提醒部份學童可能尚未適應多單位除法運算策略，一方面參考試題 9-4 三位數乘以三位數乘法問題上的表現（答對率為 79%），乘數為三位數的乘法計算能力，亦可能是答對率偏低的主因。

試題 9-5 是被除數為三位數、商數是一位數且餘數不為 0 的除數（二位數）未知的包含除問題，先要求學童用有「 $\div$ 」號算式填充題記錄問題，再要求用算式把做法記下來，答對率是 81%；試題 9-6 是被除數是二位數、商數是二位數且餘數為 0 的除數（一位數）未知的包含除問題，要求學童先用等號右邊只有（）的算式填充題記錄問題（列式），再用算式把做法記下來，答對率是 80%。與試題 8-7 上的表現（88%）比較，試題 8-7

是被除數為兩位數，商數是一位數且餘數是 0 的除數未知的等分除問題，同為除數未知問題，9-5 與 9-6 的答對率稍差，包含除與等分除的整合是不對稱歷程？學童較易用包含除的觀點來解讀除數未知的等分除問題，而較難用等分除的觀點來解讀除數未知的等分除問題？亦或是 9-5、9-6 的問題記錄要求造成額外的困難？目前尚無足夠的資料作進一步的澄清。

試題 10-11 是單位數（乘數）未知的倍的問題，要求學童先用等號右邊只有（ ）的算式填充題記錄問題（列式），再用算式把做法記下來。答對率是 87%。本課程延後出現乘數或被乘數未知的列式問題，因為在這些問題中，學童須發展測量運思，預期積數具有乘法性結構，而被乘數或乘數為積數的元素，掌握乘除互逆的關係，才能用除法問題的觀點，來理解乘數或被乘數未知問題，進行列式活動，本題的答對率顯示：多數五下的學童尚能適應此項要求。