

# 知識經濟與數學教育

臺北市立五常國中數學科教師：謝新傳

『知識就是力量』，這是十七世紀英國哲學家培根留給後世的名言，三百多年後，我們更是說：『有多少知識，就有多少力量』。二十一世紀是競爭國際化、社會變遷急遽的年代，國家要生存必須要有持續不斷的發展力量，力量是來自於行動與策略，而它的最高表現則是當它是由知識所引導的時候。在「數位神經系統」一書中，軟體巨人微軟總裁比爾蓋茲 (Bill Gates)提到：『如果 80 年代企業的主題是品質，90 年代是企業再造，那麼公元 2000 年之後的關鍵就是速度』。資訊網路能做到知識的超快速傳送已毋庸置疑，在追求速度的同時，學校教育策略、教育目標及教學內容勢必面臨教育本質性的挑戰。本文係依據全球教改思潮及教育主流，配合我國九年一貫新課程十大能力指標及數學領域的課程目標，探討在「知識經濟的時代」下的教育理念及數學教學方法。

## 壹、迎接知識經濟時代的來臨

### 以知識為重心的經濟型態

管理大師彼得·杜拉克遠在 1969 年就已經預言「知識社會」的時代即將來臨，在求新求變求快求效的社會裏，「知識創新」將成為決定企業消長成敗的主要因素。在未來的社會裏，知識的價值是在於能否啟動人的新觀念和新創意而轉為利潤；因此，它絕不會是傳統填鴨灌輸式的教育環境所能學習到的。在另一方面，特別要提及的是，知識創新所指的不一定是「科技」，也可以是社會學、人文藝術或其他方面的創作，甚至於一種創新的學習理論。以暢銷書籍「哈利波特」為例，它目前已成為全球的熱門商品，前不久又被製成電影。其產生的巨額利潤已遠超過台幣 20 億之上，究其內容，其創作既不須要雄厚的資財及寸金的土地或是工廠，而只是知識的創新而已。

依據經濟合作暨發展組織(OECD)於 1996 年出版的《以知識為本的經濟》(Knowledge-based Economy)一書中，將「知識經濟」界定為「以知識資源的擁有、分配、

使用和生產為重心的經濟型態」，並且明確地指出「知識」將是一種新的資產，是經濟活動的主體。美國前總統柯林頓更給知識經濟作了註解，他說新經濟應扎根在科技的進步之上，而它的驅動力就是冒險進取和創新的精神。

### 國民教育的走向

在未來資訊的社會裏，我們要面對的是一個變遷急遽、腦力密集、競爭無國界的時代場景，而教育的目的是在培育為未來作準備的社會人力。因此，創新的教學方式、教材及理念遂成為各階層教育的重點。

而國民教育的走向應該如何呢？我們知道「學習」其實就是知識內化的過程，學習者如能把知識吸收消化，就能轉換成能力。學生能把在學校所學的東西活用在生活上解決問題，就是有用的知識。因此，學校首先要改變教學目標，營建優質的學習環境及擬定人才培育計畫，才能培養能獨立思考及終身學習能力的學生，而取代傳統以知識傳授為導向的教學。為因應新經濟潮流，培育多元且能自我規劃的學生是我們教育的主要目標之一。

學校經營上，並不能只是要求嚴格的學生管教及教師的教學熱忱（當然這也都是很重要的），而更重要的是老師在教學上要有「創新的精神」及「研究的精神」。當我們在思考「如何教」及「怎麼學」的時候，必須思考我們編寫的教材及教法是否能趕得上社會的潮流嗎？因應學生的需求及心理的發展？但是在學生玩足食飽「網路咖啡」的「連線遊戲」官感刺激時，「新課程」能找到新出路嗎？

在未來「知識經濟」時代，我們所處的社會將會是一個完全學習的社會，每一個現代國民都要學會如何有效管理自己的知識及活用所學到的知識，使之成為自己個人或工作團隊精進的手段；畢竟教育的成敗關鍵是在學校教師，而學校也應轉型成為「學習型組織」，而所謂「學習型組織」就是一群：

1. 有共同的教育願景
2. 能有系統思考能力
3. 能自我超越
4. 有團隊學習的精神

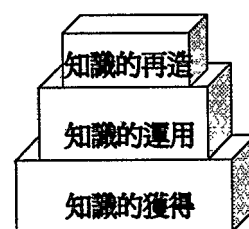
5. 能不斷改善心智模式

6. 善於自覺

等的教師所組成的學習團隊，這個團隊成員一方面不斷解放自己的心智，一方面也經由反思不斷以提升己身輔導管教與課程研發的專業能力。

**知識經濟下的教育重點 — 教學內容重啟發，教學要活化展現創意**

知識經濟的重點並不在於知識本身，而是在於如何能獲得知識並將知識轉變為利潤，前面我們已經述及「利潤」不單指科技所帶來的財富，也可以是「科技的新知」或是「人文藝術上的創作」等「知識再造」。因此，學校課程發展的方向及教學目標並不是要給學生累積多少知識，而是培育學生求知與活用知識的能力。



也就是說老師要培養學生的是1.如何獲得有用知識的能力 2.如何運用知識的能力 3.知識的再造能力(創新的能力) 等三個層次。

如果說 80 年代之前的教學主題是嚴格的要求，90 年代的教學是品質的提昇，那麼 20 年代的教學應就是創意的激發。九年一貫課程的推展不僅在執行上有賴教學創新，從而為創意教學形成一個急切的需求環境。新課程不僅企圖落實學校本位課程的發展，更賦予教師權力，可以對教學活動設計、評量及教學方式作更大的選擇。學習是一個可以重新理解、可以自由創作、自主建構的活動；也因此教育有嶄新的生命。教學不再是沿襲一成不變的技術，傳授書本既定的知識，而是在生活文化脈絡中藉由不斷反思與互動改造的過程。

底下我們舉出幾個教學創新的例子

**《生命脈絡式數學教學法教案實例：教學單元/面積》暴龍跑得快嗎？**

連小朋友都知道，暴龍是史前爬蟲類中最兇暴、體積很大的掠食動物。但是最近美國史丹福大學的哈欽森和加大柏克萊分校的賈西亞兩位生物力學家，在 2002 年 2 月 27 日出刊的「自然」雜誌中報告，他們用電腦模式計算一隻動物行進時須要多少肌肉、經量化行進時使用的物理力，以及支持各種姿勢和速度所須的肌肉量。以恐龍的遠親雞為例，雞腿的肌肉若能佔全身質量的 17%，那它就可以快跑。但對體重是 13000 磅的暴龍

而言，它的腿肌必須佔全體重的 80%至 99%才有可能快跑。他們發現動物跑步時所須要的大腿肌肉量增加得比其身體質量增加得快很多。由暴龍化石結構看，他們估計暴龍的腳程其實很慢，時速可能只有 18 最多到 40 公里而已，遠不及一些古生物學家原先認為的 72 公里時速。因為如此，於是有人認為暴龍可能是食腐動物而非掠食動物，大打原先大家對它的威風形象。

《活動》如果一頭體重是 13000 磅的恐龍，它跑起來能像土雞(它的遠親)這麼靈活，你想像它的長相是什麼？請彩繪下來：

### 《體驗式數學教學法教案實例：單元/體積》空間佔有量 — 物體的體積

一個物體它的空間佔有量稱作它的體積，但是體積是什麼呢？

《操作》1.試著將你的右手拳頭浸入裝滿水的容器中，請問你有沒有感覺到你的拳頭把水往上擠呢？你有沒有感覺到拳頭的空間佔有量呢？

2.請你計錄溢出容器的水之量。

3.再試著將你的左拳頭浸入裝滿水的容器中，也紀錄溢出容器水的量。

4.前兩次溢出容器水的量是否大約相同？

5.溢出容器水的量是不是就是拳頭的空間佔有量？

《問題》在操作 2.中，請問你是用什麼單位計錄溢出容器的水之量？為什麼呢？

《問題》想想看還有什麼方法，可以讓我們感覺到拳頭的空間佔有量呢？

《問題式教學法教案實例：單元/長度》有創意的距離測度單位 — 時間的單位也可以是距離的單位

世界無奇不有，距離的測量單位隨民族文化不同及用途而異，距離的單位並不一定非得用公尺公里不可的。例如在南太平洋巴布亞新幾內亞的地方，有個距離的單位叫作「一日之旅」(a day's travel)，就是一天所能走的距離。在此老師可拋出問題問同學：『為什麼一日之旅可以是有意義的距離單位？』，這個問題就是激發創造力最好的方法。

在巴布亞新幾內亞多山的地區，我們在旅行時，向村民問路程，他可能會說從這村莊到山上湖邊的距離是「3 個小時」，回程是同樣的距離，但山上的人家可能會說是「2

個小時」。(在此，小時是時間也是距離的單位)

老師可以拋出問題問同學：『為什麼同樣的距離，但卻有「3 個小時」及「2 個小時」不同的數量呢？』，學生在思考這樣問題的時候自然就會激發巧思。我們很難想像教學如不具有創意，何能培育有創造力的學生呢？

### 《數學生活化教案實例：單元/長度》

過去我們在作「數與量」單元的教學活動設計時，往往在把教學目標設定在長度、面積及重量「測量單位」的介紹，之後就是「單位換算」的練習，學生只知道如何將 1 英吋換算成 2.54 公分、1 公頃等於 10000 平方公尺的知識，而完全忽略了「度量」及「度量單位」數學概念的形或甚至發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力以及發展形成數學問題與解決數學問題的能力。人類會發明「測量」並且把身體部位的尺寸當作度量單位這就是創新，教師應當要學生瞭解為什麼人要去測量物體的大小，這應是教學的主要目標；當學生在思考「為什麼人要去測量物體的大小」及「如何去測量物體的大小」時，就會啓發他們的創造力。

### 創意教師

知識經濟時代企業的規劃與推展，最重要的乃是人才的培育與運用，而人才的培育則源自於優質學校教育尤其是基礎教育。然而，能掌握教育最關鍵性的人畢竟還是第一線的教師。因此學校內最重要的事就是教師本身先具備有足夠的「知識管理能力」及「創意教學的能力」，才能培養學生「學習如何學」及「持續學習」的能力。比爾蓋茲(Bill Gates)的微軟就是「持續的創新」和「持續的學習」最佳例子，他創造了 DOS 到 WINDOW 等一連串作業系統而成爲擁有 526 億美金的世界首富。企業家們都知道企業要在新經濟社會中處於不敗之地，就必須致力於研發和創新，讓「創意製造利潤，知識轉變爲財富」。美國著名的電影導演 史蒂芬史匹柏也是一個很好的例子，他的成就也是來自於他「持續的創新」和「持續的學習」；大家都知道，他是不久之前才拿到學士學位的，史蒂芬製作了無數的精彩電影(侏儸紀公園，搶救雷恩大兵... 等)，替美國及自己賺近了天文數字的錢，都是他在沒拿到大學學位之前。當人家家長的或是從事教育工作的人，最要緊的是

讓孩子發揮他的智能，每一個人都有他獨特的智慧，非得都要很高的學歷嗎？

就教學本質而言，知識是指教師對特定教學領域的專業化認知。其實，不論那一個行業，那些愈有真正知識的人，專業化程度愈高。而在現今以知識轉換為利潤作導向的社會中，領導者(教師是教育領導者)更須要具備此種專家知能。著名管理學者 L.C.Thurow) 在其著作《Building Wealth》中指出，無論先進或落後國家，掌握知識乃是企業決勝的關鍵所在。

## 貳、共創新世紀的教育願景

### 知識經濟體制下的全人教育

雖然未來要面對的是知識經濟的社會，但是目前我們已經看得到的是一個贏者吃的社會經濟型態。在西方國家，特別是在網路公司盛行期間，勝者通吃、貧富懸殊加深、環境污染及智慧型犯罪等等是很普遍的現象。為防犯於未然，未來教育的走向要特別將人文藝術、法制及環境等關懷注入孩童的心靈。如果不把這些關懷融入我們的人才的培育過程，將來這些人會傷害到社會。學校培育人才不只是傳授知識創造知識，更應該注重道德與價值觀的培養。畢竟，教育的終極目標，乃在於培養人的智慧及高尚人格，使人把每一樁困難都看成考驗，每一項危機視為轉機，每一種成就視為人類不屈不饒的創造性象徵。但長期以來，各中小學校因受入學考試的約制，莫不以高升學率作為教學績效的標準。但在這種升學壓力下的教育，學校只是藉由不斷的考試，灌輸學生碎裂的知識，何能轉為利潤呢？再加上社會功利主義的彌漫，考試分數的競逐便凌駕於一切教育理想之上，導致學習偏頗教育功能殆盡。然而，進入二十一世紀，我們要面對的卻是一個變遷急遽、價值多元與民主開放的社會，光是會念書的孩子並不代表他就會作事。為因應新世紀的潮流及能掌握生活的脈絡，我們要培養的是兼備人本情懷、民主素養、有鄉土意識與國際視野及有終身學習能力之健全國民，而不是一個只會考試在同儕中勝過別人的學生。

經濟的成長與國民所得的提高固然是國家發展的一個重要指標，但是科技的發展若不是以人的需要為依歸、以人性為本，那麼人生命的價值將會沉淪於產業競賽之中。因之，當前國民教育，除了要落實培育國民主動探究的科學態度及面對問題能獨立思考並

解決問題的能力之外，更要緊的是要塑造孩子能尊重生命關懷他人、能溝通思想表達意識、團隊合作及能欣賞創新的人文情懷。

爲了要奠定國民終身學習的根基，以適應變遷的社會，九年一貫新課程的總目標強調的是能力的開拓，而不是知識的傳授，此有別於過去傳統的教學—我講你聽，我說你作。因此，新課程不但沒有減少數學的重要性，反而是數學課程要在過去其唯獨論數與論理的層面外再連結其他領域，例如融入文學藝術、民主法治及生命教育等，使數學教育趨於更完整更合乎時代需求。

在一個民主、多元化發展的社會中，國民要有理性思辨與明確溝通的能力。而數學教育的目標就是要在教學活動中進行群體討論，激勵多樣性的思維式態及激發創造力，而在社會互動過程中建立數學知識。在此學習過程中，除了培養孩子解決問題的能力外，同時也培養了團隊合作、溝通協商的能力及尊重他人的人格。

二十一世紀將是資訊與科技的時代，爲了社會發展的需要也爲了提昇國家的競爭力，學校必需培養出能獨立思考、善於溝通協調、能解決問題、有民主素養及國際視野的國民。本質上，教育的功能是要激發學生的潛能及培養學生適應與改善生活環境的能力。然而，雖然國家的硬體建設可以速成，但是心理建設卻不是一蹴可幾的。因此，未來的九年一貫數學教育課程目標應該是要培養兼具人本情懷與科學素養、能調和理性與感性並能進行終身學習之健全國民。

近年來教育學者、專家、教育工作者及社會各界都已開始意識到數學教育不能再偏離生活，要讓學生知道數學和自然、社會及自己是息息相關的。數學教育要由傳統的知識傳授提昇到能力的培養乃至於生活體驗的感受學習，我們更要以「欣賞」的眼光去看待這個世界，而完整的教育應該要兼顧科學與人文，理性與感性。

十九世紀數學家 Sylvester 明確地指出：『置身於數學領域中，自應不斷地探究和追求，終將人類的思維活動提昇至純靜和和諧的境界』。爲了達到這些教育目標，我認爲數學領域的教學應以生活爲中心，配合該階段學生心理發展與經驗世界，提供適合他們的能力與能引起他們興趣的學習方式，以發展教學活動。

### 參、數學教育的宏觀目標

數學是基礎科學，也是我們生活必備的技能。作為一個數學教育工作者，最要緊的是先要確定數學教育的目標是什麼，也就是說孩子為何要學數學？教學者要怎麼教？以及教什麼？當國中小學的學生向老師問及為什麼要學習數學時，數學老師該怎麼回答？如果老師給學生的回答是「數學是基礎科學是要培育優秀的科技人材」、或是「培養日常生活所須的基本學力」所以要學數學。但是當學生如果反問老師『我以後又不當科學家』或者說『學了因式分解三角函數，一輩子也用不著啊！』，那麼老師豈不是掉入自己所挖的洞？為此，我認為若能以較為宏觀的視野來確定數學教育的目標，那麼，除了課程研發之路可以走得更寬廣之外，也能因應世界教育主流。

為了實現學校數學教育的新願景，教師必須嘗試回答下列問題，以作為教師未來教學之基礎：

#### (1) 數學是什麼？

##### (a) 數學的本質是什麼？

數學可說是一門探究規律及秩序的科學(a science of pattern and order)，基於邏輯思考，透過經驗、觀察及推論進而發現真理，它的領域則及於數與量、形狀、資料、算則及其相互間之變通轉換等等。

畢達哥拉斯-柏拉圖學派的基本信念是：世界是有規律的，而且這種規律是可以被人所認識的，這也是古希臘哲學的基礎。柏拉圖還說：「數學不僅具有它所醉心的美感與秩序，且是日常生活所缺乏的抽象與理想世界的象徵」。到了中世紀，「上帝按照樣(模)式創造了世界」此一說法更與宗教神學取得了調和。

那麼數學教育的本質是什麼？就是要教導學生如何察覺世界，找出規律性，然後對它作出合理的解釋。這裏所謂的「察覺」就是指對世界的觀察，經由直覺、直觀、臆測、猜想及反思而有的理解(檢驗、反駁、達到結論之歷程兼具認知、技能及情意)

##### (b) 「瞭解數學」的含義

當學習者面對瞭解到數學的本質之後，自然

- (2) 每一個學生都要學數學嗎？教育目標在哪裡？
- (3) 數學要教什麼？為什麼呢？
- (4) 怎麼教？為什麼要這樣子教呢？
- (5) 教學是科學還是藝術？亦為技藝？



## 數學教育的宏觀目標 — 發展智慧與形成智慧

### 智慧是什麼？

在牛頓之前的人未曾想過、不想知道也不知道怎麼去知道蘋果為何會落地？因為蘋果好吃就好了，蘋果落地視為理所當然。但是牛頓同其他傑出的科學家一樣由於具有深邃的好奇心，能跳脫常人直覺的思考模式，他用數學的手段描述萬有引力的存在(萬有引力  $F=G \times m_1 m_2 / d^2$ )。我們可以這樣簡單的說，牛頓把蘋果落地這個現象形成一個數學問題，然後以數學的方法解決它，這就是牛頓的智慧。牛頓是歷史上第一個用數學的手段描述萬有引力的存在的科學家，這是劃時代的見解，他用數量的關係把一件看起來很平凡的事物變得可以深入研究，這就是創造力。

科學家愛因斯坦在他小的時候性情相當孤僻，除了數學之外他只喜歡音樂。他出生的猶太人家家庭是很注重家庭教育的，他有個很有智慧的叔叔給了他許多教育，啓蒙了他早年的智慧。有次愛因斯坦問及叔叔什麼是「代數」？他說「代數」就像狩獵，掠食者必須要逮到一隻叫作 X 的獵物。愛因斯坦聽了叔叔這番啓示之後就終身尋尋覓覓不斷地尋找這個獵物，最後他終於抓到一頭叫作「相對論」的大野獸，成了歷史上最偉大的物理學家。這個故事聽起來像童話故事，事實上這個故事隱隱的告訴大家，「智慧」是在隱隱約約中被啓發的。

最早提出智慧的科學理論者為是英國的心理學家高爾頓(Galton)，它早在 1883 年就提出智力固定論，認為人的智能是天生的，他並以人感覺的靈敏度來測量智力，為粗略的智力測量。法國心理學家比奈(Alfred Binet)則在 1903 年發表了「智力實驗研究」，1905 年受法國巴黎教育局委託，與西蒙合作發明了一個測量智力的工具叫做比奈—西蒙量表。到了 1908 及 1911 年，他們對量表作了修正；至此，智力測驗就在世界各國盛行起來。

「智慧」是什麼？它與數學教育的關連性如何？一九二一年那年，美國有十數位來自各領域學者專家聚集一堂，展開為期三天的研討會，他們要討論出「智慧」是什麼，並且要給它下一個定義。一開始，他們對「智慧」一詞提出了五個界說：1. 智慧是抽象思考的能力 2. 智慧是學習知識的能力 3. 智慧是從既有的經驗中獲得教訓的能力 4. 智慧

是適應環境的能力 5. 智慧是適應生命新情境的能力。經過三天冗長的討論，最後得到一個大家都能接受的定義，那就是『智慧是一個基本的能夠適應生命中新問題和新情境的能力』。既然各領域專家學者對「智慧」一辭的看法是「適應生命中新問題和新情境的能力」，那也不就是「解決新問題」的能力嗎？這個「智慧的定義」正好也呼應了即將實施的「九年一貫新課程」的精神——培養作一個地球村新公民所應具備的十大基本能力，而我們學校要給予學生的即為能面對新情境能獨立思考能透過團隊合作解決問題的能力，所以數學教育的宏觀目標就是培養學習者探究問題、解決問題的智慧。

但是「智慧」或是「解決問題的能力」是天生的還是後天可以培養的，近代許多學者都已有文獻報告足以說明智慧是可以激發及創造的。不久前的一期「新聞週刊」報導，學生、新兵及申請工作者，因需要接受智力測驗，研究人類智力的科學家發現，人類的智商不停在提高，而且速度很快，像美國人從 1918 年以來，智商提高了 22 點，其他歐亞地區的人也相對提高。美國康乃爾大學心理學家烏立奇說『這打破過去我們對智商不變的看法，現在有了證據顯示，智商是可以改變的』。布魯金斯研究所專家狄肯思和在 1987 年發現智商提高的福森，合作進行一項研究發現，環境和遺傳基因對智商都有影響，但兩者需配合。

在 1904 年法國心理學家比奈(Alfred Binet)發展出能用一個對智慧作客觀的評價方式(智力測驗)之後，普遍受到全球教育界的認同。但歷經了 80 年之後，才由迦納(Gardner)向這個觀念提出挑戰。Gardner 認為把一個人放在非自然的學習天地中，讓他做幾道未曾經驗過的題目，然後來判讀他們的智慧指標，迦納對此深表質疑。他認為智慧是一種能在生活中以各種方式運作的能力，和問題解決及在多變的生活中調適能力有關連，實際上 Gardner 是對智慧一詞提出了更寬廣的解釋，易言之，智力測驗 100 分的人不能說是比智商 90 分的人“智慧”高。

#### 肆、新經濟時代的數學教育理念

##### 1. 教學多元化

Howard Gardner 在 1983 年提出「多元智慧理論」造成教育界的震撼，許多學習理論及策略因應而生。「多元智慧理論」是認知功能的理論，它強調人的智慧並非是一元化的，

也不是區分什麼人是屬於那一種智慧的人，而是認為每一個人同時擁有多種智慧。迦納在波士頓榮民醫院服務期間(Gardner)因長期研究腦部受傷的病患，他發現腦部受傷的部位和各種智慧有關，他提出每一個人天生都有數學邏輯、語言、空間、音樂、動覺、人際和內省等七種智慧的能力，可是在大腦裏面分布得並不均勻。孩子如果給予適性及適才的指導和適當的鼓勵，那麼他們的每一種智慧能力都能充分的發展，即使是弱勢的智慧也能發展的一定水平。多元智慧理論並且強調人類是以豐富多元的方式結合這些智慧而表現他們獨特的才能，所以如果仔細觀察班上這些學生，你會發現每個孩子都很特別。

「多元智慧理論」是一個描述人類運用智慧解決問題的認知模式

- (1) 每個人都具備有七項智慧
- (2) 每一項智慧都有多種表現的方法
- (3) 在實際生活裏，七項智慧是以複雜的方式統合運作的，而且方式各有不同
- (4) Gardner 認為如果給予適當的鼓勵及充分的指導，每一個人都可以使所有智慧發展到一定水平

「多元智慧理論」理論其實並非創新觀念，卻是一個重要的教學理念，中國很早之前先賢教化百姓就有注意到「多元智慧」的，因此才會有禮、樂、射、御、書、數等六藝之說。但宋朝之後的人只講求讀[書]作士大夫，完全忽視了其它的才能。所以傳統的小學教學都只強調前面那兩項“主科”，以致於完全忽略了其它智慧的發展；不僅如此，各學科間還呈現出獨立的狀態與嚴重的切割，各腫智慧間似乎沒有交集，文科好的人都是文弱書生，參加田徑隊的同學都是四肢發達頭腦簡單的傢伙。教數學的老師不會去管國文，學音樂的也絕不會談到人際及內省，教體育的也不理數學。舉例說，體育(動覺)智慧和數學(邏輯)智慧真的沒有關連嗎？大部分的人都瞭解數學主要是在培養思考的能力，而思考能力的成份中有兩項是很重要的，那就是感覺的靈敏度和判別的平衡感。經常作運動的人他們生理機能會增強，所以神經原傳遞訊號的速度會更快更敏銳因而可增進思考力及精度；在另一方面，所有田徑及球類競賽特別是體操活動都要講求身心的平衡感，這種習慣性的平衡知覺會促使我們在面對問題解決問題時從各個角度及層面去思考精確且不偏激。所以作研究工作的人常常會現，慢跑回來後常常會有靈感解出難題或

下筆寫出好文章，那是因為運動使我們大腦血流量增加的緣故，使得我們思考更為敏銳。

反過來說，我們也相信數學(邏輯)智慧的增強也有助於(動覺)智慧的發展。受過數學訓練的人對事情比較會有理性的見解、較佳的組織能力及探究精神，所以一些須要靈巧技術的運動比賽像是網球、桌球、排球、游泳及滑雪等等其實也都在表現數學智慧。

多元智慧的一個重要內容是：人類的智慧是以統整的方式表現在活動上，各種智慧不能分割。易言之，每一種智慧並不是單獨運作的。比如說開車子就是多重智慧的結合，首先駕駛員要能理解高低檔、離合器、手煞車及油門...等等各部機組的功能並知道如何搭配使用，這就是「數學智慧」，其次是駕駛員在操作這些機組時，手足肢體要能協調操作正確使用，這就是運用「動覺智慧」。當汽車在行駛時必須維護行車安全，因此要保持速度與它車的安全距離時就要發揮「空間智慧」。一個優良的駕駛員懂得禮讓行人遵守交通規則，因此讓自己的工作很愉快這就是「人際及內省的智慧」。

教學多樣性較優越的想法是從大自然得到啟示，最近美國明尼蘇達大學學者雷克率領的一群生態研究小組發現並證實，物種的多樣性確實會增進生態系統的健全與生產力。雷克還以兩個籃球隊為例說，甲隊是標準球隊，乙隊卻清一色由各隊的中鋒組成，他的結論是，「擁有各種體型與各種球技的甲隊戰力自然要比只有中鋒人才的乙隊強」基於「多元智慧」理論，在教學上，教師在編寫教材設計及教學活動活動時就不應該老是以單一的教學式態來進行，教室如果只有一個學生，也要實施多元化教學活動。教師要能察覺學習者智慧的差異，從而提供多樣的學習活動來達成完整的教學目標—兼顧情意的、認知的及技能的。過去傳統的教學似乎都只是為升學考作準備(單一的教學目標，只求紙筆測驗的分數)，這種一元化的教學目標及一元化的教學方法導致 90%以上的學童數學學習上嚴重的挫折。新課程為了順應價值多元的社會潮流而有了多元化的教育指標，為了達到這些教育目標自然也要有「教學轉化策略」來實現這些理念。

基於「多元智慧」的論點，如果孩子在學習上顯得被動、不專心及無法充分施展他的才能，或者得不到成就，那是因為他們的天份功能受到阻礙。家長、學校行政人員及老師都要設法改進。在以資訊、速度與管理為主要訴求的新經濟時代中，學校老師要透過多元化的教學方法，嚐試開發孩子的多元智能，學習自我實現並與社群相互關懷以適

應百變的社會。

## 2. 教學生活化 — 強化數學與日常生活的關聯

台灣的老師經常強調數學是未來學術的基礎、升學考試的重要科目，常常給學生注入過多的練習和演算。又因為社會的需求也常常是影響教育環境的主要原因，而教學的目標往往又決定了課程的結構、教材內容、教學策略以及成就評量。在過去學歷掛帥、社會價值一元化時代，我們的數學教育為了迎合社會的需求，課程規劃竟然成了以學科為中心、以教師為主體的情況，完全忽略了孩子的主體性及人的需求。以學科為中心的教學就是說，老師教學及學生學習的目的是為下一個學習階段作準備；國中準備考高中，高中準備考大學，學了三角函數  $\sin, \cos$  一輩子也用不著。以教師為主體的教學就是「我講你聽，我說你寫」及「老師教多少，學生記多少」的教學模式。在這樣情況之下，學習便成只注重知識的獲得與熟練的紙筆演算技能。這種以「學科為中心」的教學，學校誠然培養了一些高級科學研究人才，但也使絕大多數的孩子充滿挫折感。

但隨著社會價值的轉變及知識經濟時代的來臨，課程勢必要逐漸走向生活化。生活化的學習內容是探究學生生活上所關心的問題及他們感興趣的社會議題，因此學習的知識及廣度完全視議題的內涵而定，可能跨領域越學科，所以教學活動會因協同教學及合作學習的教學方式而變得豐富且多樣性。「生活化教學」包括操作實驗、討論、觀察訪問及表演等等，學生的學習資源就不限於狹隘教科書及窄小的教室，而是無邊的網際網路、廣藏的圖書館、深邃的博物館及多樣性社區設備等等。

美國國家科學教師協會(National Science Teachers Association, 簡稱 NSTA)曾提出科學及科技必須在「人類經驗的脈絡」下才能被學習，而「人類經驗的脈絡」是主張教師要運用相關的議題於教學之中，這非但是 NSTA 所提出的「科學/科技/社會概念 (Science/Technology, STS)」，也是一個建構理論者所運用的教學策略。

## 3. 有意義的學習

「有意義的學習」包含兩個涵意：1.能獲得有用或能用的知識，聯結於生活脈絡 2. 可發展的知識，驅動終身學習

「生活化」的學習模式是以合作學習及經驗分享代替學業競爭及單獨學習，另一方

面而言，生活化教學是以學習者為本位的學習型態，學生是知識的主動建構者，教師則是教學活動的引導者。

在數學課堂上，要把數學與學童生活密切的聯繫起來，讓學生感到生活中處處有數學，數學是一門看得見、摸得著、用得上的學科，不再是枯燥無味的加減乘除。

《教學實例》自然測度單位

《課前活動》

同學在進行這個單元的學習之前，在家裏請先作兩件事情：

1. 站在大鏡子前，看看自己的外觀，活動你的筋骨。準備皮尺，測量你的身長、張開後的手掌寬度、大姆指寬、穿鞋子的腳長、向兩側伸直後的兩手中指指尖間的距離、走路腳步長、胸圍、腰圍及慢跑的腳步長。

我的身高是_____公分 我兩手向兩側伸直後的長度是_____公分
--------------------------------------

2. 詳細端詳自家住宅內各物品的形狀及大小，並且摸一摸它們。

《操作》請自由選擇一樣日用品(例如：嬰兒床、礦泉水瓶、衣架、安全帽、書桌...等等)，請把它畫在下面表格上，並且量取它每一部份的尺寸，並試著說說看，它們為什麼會被設計成這個樣子，還有為什麼要作成這般大小？

我的見解：
-------

畫圖：
-----

#### 4. 完整的數學教育

數學大師維爾斯特拉斯(karl Weierstrass 1815~1897) 曾說過這樣一句話：『一個沒有詩人才能的數學家決不會成爲一個完全的數學家』。我引述大師這一句名言的用意並非期待每一位數學學習者將來都能成爲數學家，也不敢期望他們會是作家及詩人，更不敢奢望他們成爲兼具文學素養的數學家，而只是觸醒各位教育工作者：探究數學所需要的理解力、解題的能力、證明的能力及變通的能力並不會被寫作所需的感性及浪漫所抵銷，甚至於是相輔相成的。

二十一世紀不但是資訊與科技的時代，也是知識創新的時代，爲了社會發展的需要也爲了提昇國家的競爭力，學校必需培養出能獨立思考、能溝通協調、能解決問題、有民主素養及國際視野的國民。本質上，教育的功能是要激發學生的潛能及培養學生適應

與改善生活環境的能力。然而，雖然國家的硬體建設可以速成，但是心理建設卻不是一蹴可幾的。因此，未來的九年一貫數學教育課程目標應該是要培養兼具人本情懷與科學素養、能調和理性與感性並能進行終身學習之健全國民。

近年來教育學者、專家、教育工作者及社會各界都已開始意識到數學教育不能再偏離生活，要讓學生知道數學和自然、社會及自己是息息相關的。數學教育要由傳統的知識傳授提昇到能力的培養乃至於生活體驗的感受學習，我們更要以「欣賞」的眼光去看待這個世界，而完整的教育應該要兼顧科學與人文，理性與感性。至於如何將人文教育融入科學教育，身為一位數學教育工作者，我對未來中小學數學教育的走向提出我的幾點看法：

#### 將文學融入數學教育

近代心理學家研究指出，人文藝術的感受及理性科學思維，分屬人類右腦及左腦之功能。大腦右半球控制想像力、色彩及圖形，左半球主要控制算術、邏輯及分析。每一個人天生都有這些潛力，只是因後天的環境因素使得部分功能未能發展出來，而我們教育的目標應以培養全腦思考的能力，以期學生兼顧科學涵養及人文關懷，讓他們的生活更豐富更完美。

『數學沒有一點文藝氣息』，『數學家沒有文學涵養』，『數學家的心靈沒有浪漫情懷』，『數學和文學是迥然不同的兩個領域』，這是一般人對數學的刻板印象。但十九世紀有位叫桑雅 (Sonya Kovalevsky, 1850-1891) 的俄羅斯女數學家，她不僅在數學領域裏有卓越的成就，而且在文學創作上也有極負盛名，同時她也是一位詩人(事實上，桑雅在小說、散文及詩歌的文字作品遠遠超過她的數學創作)。這可使我們相信一件事情，那就是：寫作所需的浪漫情懷並不會抵銷研究數學所需要的理解力，甚至於相輔相成。

桑雅曾自述『對我來說，詩人是能比一般人更能「感受」，其實，數學也不是這樣嗎？』憑這一句話，足可瞭解桑雅已把數學的玄思融入對人生的反思。

義大利詩人但丁(Dante, 1265~1321)也常在他的文學創作中引進數學觀念，將他的詩融入數學之中，比如在他的大作《神曲》(Divina Commedia)中就提到許多幾何概念。事實上，那個時代許多精湛的詩篇，其藝術呈現出比數學更嚴謹的結構。

但文學教育真能融入數學嗎？我介紹各位欣賞下面幾首詩詞，讓大家感受數學的「力」與「美」：

這是一首很[數學]的詩詞：

唐朝詩人張祜，他爲了舒發心中的情感而寫了一首五言絕句：

「故國三千里，深宮二十年，一聲何滿子，雙淚落君前」

在此詩詞中，張祜使用了 3000,20,1,2 等數字而使字句顯得很有節奏感。「故」字對「三千里」，「深」字對「二十」年，強而有力展現十足美感。如果把「雙淚落君前」的「雙」字改爲「眼淚落君前」的話，讀者的感受就差很多了。誠然，前面這四個「數字」在這裏已表現出「意境」了。

另外再介紹了一首很[幾何]的五言絕句：

「大漠孤煙直，長河落日圓」

這首詩是唐朝大詩人王維作作的五言絕句，不知道是否曾受過數學的薰陶，他只用了兩個簡單的幾何圖形(直線和圓)、面積量的[大]及長度量的[長]，就把塞外風光描寫得淋漓盡致。

請讀者再欣賞下一篇『七言律詩』：

娉娉嫋嫋十三餘 荳蔻梢頭二月出

春風十里楊州路 捲上珠簾總不如

這一篇『七言律詩』是唐朝詩人杜牧寫的『贈別』

本篇詩詞就美在這三個數字：13, 2, 及 10，如果把這三個數字換調其他非數量的字，我想效果就不好了。

## 5. 將數學史、數學家的故事融入教材中

我覺得作爲一個中小學數學教師，除了傳授「數學知識」及訓練學生「數學技能」之外，更要緊的事是還要有責任去培養學生的「科學素養」及「數學品味」。而數學史、數學家軼聞故事及其成長的心路歷程是數學教材中最具「人性化」的一面。在教學進行中，教師如果能適時切入「數學史」及「數學家軼聞故事」，相信一定會讓青少年更容易親近數學。學校教育原本就應該有多元文化的發展，課程也應該有多樣化的風貌，青少年不也應該對本國及外國歷史文化有更完整的瞭解嗎(數學與經濟、社會有密切關係，提供數學史教材也就是提供通識教育)?在延用多年的國編版國中數學教科書內，唯一有安排數學家故事的是在第四冊第 74 頁:『德國數學家 高斯在幼年的時候，就曾因計算等差級數而顯露他的才華.....』我想教師在此處補充史料並切入主題，不是很引人入勝嗎？數學



的起源是在遙遠的地中海沿岸還是中國？數學概念是起自天文的觀察還是土地的丈量？我想這些東西，數學老師都必需要向學生交代的。我為甚麼會喜歡數學史教材的另一個原因是，它可以在人的本位上製造良好的師生互動，比如上述的高斯野史、軼事、生平，課堂上被老師講述之後，感覺上學生是被老師尊重的，師生是一體的，而師生關係如果是這樣建立起來的，我相信教與學之間會因為「人」的關係，而會有很好的發展。

## 6. 將藝術融入數學教育

達文西是歐洲文藝復興時期最重要的人物之一，他的才幹跨越人文藝術與自然科學。他不但是位偉大的藝術家，同時也是工程機械師、兵器專家、幾何學家甚至於是解剖學之父。達文西不但對於自然科學的探索展現天賦之外，同時也展露了他的文藝智慧。除了「蒙那麗莎的微笑」這幅極負盛名的畫作之外，達文西還有無數的藝術創作，他同桑雅一樣，他認為作為藝術家所需的感性及想像力並不妨礙他在科學研究所需的精算及理性，達文西甚至於還說『藝術家必需是大自然的敏銳觀察者與卓越的數學家』。

古希臘人使用埃及匠師從事建築工程，但在建築風格上卻獨出一幟，因為受到當時數學及哲學的影響，他們相信人體可作為萬物的度量，於是將人體及自然和諧的美反映在建築上，例如希臘神廟的建築設計都表現在優美的數字的比例中。兩千年前，數學對於藝術的表現已發揮得如此淋漓盡致，現今數學教育能不融入藝術嗎？

數學教育應以人為中心作課程發展

國民中小學的數學教育除了知識的傳授及技能的培養之外，尤其重要的是應該重視生活的態度及價值觀的薰陶。教師在教學時應把握教育的本質，建立一個以人為中心的教學環境，讓課程中處處出現生機，每一個數學教材都儘量能和生命連結。而要能和生命連結，必然地，我們就要探討數學和自然、社會及心靈的關係。

徐志摩先生嘗謂：『大自然是一本最偉大的教科書』，不知道徐志摩先生是否因熱衷於大自然現象的思考而有感而發，還是對生活教育的深切體認，但一滴水珠兒落在湖面上掀起的一片漣漪、蝴蝶兒振翅展現的對稱幾何圖形、鳳梨果皮上鱗片的數學排列以及弦長成簡單整數比時會產生調合的音，就詮釋著大自然是深層隱含著「數學機制」。既然杜威先生認為「教育即生活」，那我想『大自然就是一本最偉大的數學教科書』。

『教育並非只是在作教學工作』，杜威說：『教育成敗的關鍵是在於是否能營造良好的學習環境』。「數學探奇」、「數學解題」、「數學發現」、「數學欣賞」、「觀察理解」及「批

判回顧」這就是內在(心理)的學習環境，而外在的學習環境則是要教學者能讓學習者從自然的生活中體驗，而刻骨銘心地感受到數學在實際生活的應用價值。

## 7. 將資訊科技融入教學

現代科技日新月異突飛猛進的發展，無疑也刺激我們課程的改進。本次課程改革把「運用資訊與科技的能力」列為十大能力指標，就是要把科技作為學習和解決問題的有力工具，讓學生從繁雜的運算和無謂的操作中解放出來，而讓更多的精神投入探索性的數學活動中，提高學習效能。

但就以數學領域而言，以目前情形來看，雖然引入科技到數學教學中，可能會造成教師某種程度的壓力及焦慮感。因為學校老師長久以來，甚少被引導去整合科技在教學上，而對許多長久以來，依賴課程標準及教科書教學的老師來說，使用科技教學意味著需要一種新能力的培養，也是一種實驗嘗試，特別是在我們的教學文化，尚未能提供給我們足夠的高科技的空間之時。但是國內外許多研究報告顯示出，在電腦學習環境下，教師對於學生要學到什麼？他們又要如何學？教師又要如何引導學生？以及數學活動的本質，產生了一些教學新觀念而有了新的信念。

九年一貫數學領域的課程目標除了要(a)能掌握數、量、形的基本概念 (b)培養日常所需的數學素養及 (c) 發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力之外，更進一步要(d)發展形成數學問題與解決數學問題的能力 (e)培養欣賞數學的能力及 (f)培養數學的批判分析的能力。就以幾何教材來說，過去的教科書，幾何教材比較偏重定理的證明和應用，似乎忽略了「觀察」、「發現」、「猜想」及「歸納」的階段。而軟體操作幾何恰可提供學生這方面的情境，關於軟體操作在幾何教學上的價值，分述於下：

### 幾何軟體的教學功能

幾何軟體發展至今已有多多年，在數學課程中有些時候，會在電腦教室使用它作學習活動。其最大的功能乃是在展示它強大的科技之視覺力量，除了能引起學習興趣外，對數學概念也有增強的效果。尤其是在不能使用紙筆的環境中，動態地勾勒出圖形某些元素運動的軌跡，讓學生能憶測圖形的變化，而更能清楚知道學習的目標。

由於這些活動並無法使它們能在傳統紙筆環境中有效率的進行，因此也就賦予科技在學習上的積極角色。具體的說，甚至於有些活動只能在電腦的情境中完成的。例如：任意三角形 ABC 的三中線必相交於同一點的「任意」這個觀念就必須由滑鼠「任意」將 A,B,C 三點拖動後，察覺三中線必相交於同一點的特徵，否則怎能叫作「任意」呢？

### 在實驗操作中培養數學能力

所謂「數學能力」，簡單的說就是不但能解讀別人的數學知識(內化的能力)，也有數學知識再造的能力(外化的能力)。具體的說，發現、察覺、猜測、歸納、證明、邏輯推理、解題、轉化、類化、運用及批判評析等這些能力就是「數學能力」。更具體的說，能從情境中察覺事物的規律性(例如三角形三條中線會相交於同一點)，然後再把這些規律性轉換成數學形式，變成數學問題，然後藉由與別人的溝通解決這個問題，最後評析解題的成效再形成新的知識的能力。但是這些思考能力無法直接由老師口授或是從教科書上讀來的，而是學習者經由自己與同儕在「操作中」漸漸發展出來的。

就以駕駛汽車來說，這是一個技能，僅熟記開車的知識，充其量只能認識一些膚淺的機械常識及交通標誌而已，並不能操控車子。要作一個良好的駕駛員，就得從開車中學習。爲了落實新課程以能力取代知識的目的，教師對於教法自應有不同的主張。

#### 操做中學習乃新課程精神

九年一貫新課程所強調的是，學生在學習過程中能積極的參與而不是消極的受教，主動的參與，而非被動的告之。在參與過程中發展認知及觀察理解，重組學習經驗，因此學生能獲得有用的知識容易發現真理，進而培養創造的能力。就數學教育上來說，「發展形成數學問題的能力」與「解決數學問題的能力」是同樣重要的。例如就「任意三角形三條中線會相交於同一點」這個性質「學生怎會發現的？」和「如何證明？」是同樣重要的。過去傳統教科書較著重於已知性質的「證明」及「邏輯推論」而忽略了「發現」與「猜測」的探究精神。

#### 使學生成爲健全的網路公民

知識的擷取與傳播，如果透過網路傳訊，可發揮得淋漓盡緻。1990年全球網際網路開跑以來，知識來源變成無遠弗屆，個人所需要的最新資訊都可能在極短的時間內得到，「遠距離教學」及「互動式教學環境」觀念因應而來。要學生成爲健全的網路公民，就必須培養他們以下三項基本資訊能力：1.電腦相關知能：包括系統與硬體操作相關知能、應用軟體使用能力及網路應用知能 2.能瞭解電腦科技的發展及使用教學軟體 3.能了解使用電腦科技所涉及的法律及網路禮節。

人的能力大致可區分爲認知、技能及情意三大領域。就培養資訊科技的認知能力而言，要讓學習者瞭解科技如何讓電腦軟體落實在學習上；就資訊科技之技能而言，要讓學習者會活用硬體及設計使用軟體之技能以解決新的問題和情境；就資訊科技之情意能力而言，則是在強調個人面對科技資訊在學習上所造成的影響時應採取的態度，進而形成個人對它的價值觀。

在國民教育階段，所謂「運用資訊的基本能力」，不僅僅是要懂得如何蒐集及運用

資訊，更應對資訊科技內涵和發展具有相當的認識，而最重要的是要學生能有效地使用電腦的軟體，將其應用於學習上。

網路科技的進步已開拓了新的教育環境，它非但促進遠距離教學、教學活動的活絡成長，也提供無遠弗屆的教學資源，比如，多媒體的使用就能提供了傳統教室內不易達到的情境，除此之外，網路學習也能讓各地的不分年齡身分的人同時參與創作過程的互動，對學習者理解數學有很大的幫助。

## 8. 促進文化學習與國際瞭解

九年一貫教育所要培養現代國民的一個重要基本涵養就是「促進文化學習與國際瞭解」，也就是數學教育要從狹隘的教室及試場大步地走出去，讓我們的數學教育和社會及各層面文化的發展有更密切的互動，並且與其他生活領域(如藝術、環保、生態、語言、社會及自然科技..等等)大手拉小手地結合。

從八〇年代起，「多元文化的教育觀念」開始逐漸在世界各地普遍的受到重視，一直到最近幾年來數學教育學者已將「多元文化教學」的理念融入數學教育中，期待教學者能以更寬廣的「族群觀」看待數學教育，也就是說數學教育應摒除「一元心態」的「霸權主義」以及「意識型態」的對立，教師在課堂中除了要扮演族群融合者的角色之外，還要肩負起保護及發揚弱勢民族文化的責任，否則一味單向的強行要人接受某強勢文化，最後不是導致弱勢民族學生(例如原住民學生)學習意願低落，就是弱勢文化的消失。學校教師應該教導學生尊重本土及弱勢民族原有的數學理念與欣賞他國不同的數學文化，這是「人本教育」精神，也是中小學數學教育的內涵。

「九年一貫教育」的精神除了在直的方向要「一貫」外，更重要的是在橫的方向要「結合」各領域，其中最重要的是數學教育的內涵絕不能欠缺「人本情懷」，惟有如此數學教育才算是「完整的教育」。

### 《教案實例》台灣傳統菜市場的數學機智

台灣傳統市場也可以看到先民的數學機智，到過傳統市場買魚買菜的人都知道菜販肉販用的秤仔單位是台斤(=16兩=600公克，即1兩=37.5公克)，這種非公制單位的換算，常會癱瘓顧客的心算，但老闆把東西往秤子一擺，立刻就可以把菜錢算好，著實另人佩服。其實這些肉販他們用的是務實的「2進位值制」(任何一個整數皆可寫成數個2乘方之和)。現舉例說明：牛肉1斤190元，13兩多少元？如果您是這樣心算的話會很辛苦的：190除以16再乘以13=.....

但肉販卻可以把13想成 $8+4+1$

折半是很容易估算的：

95 元+47 元+12 元=154..... 這和精確值 154,375 元一樣

其次 5 兩牛肉又是多少元？

5 可以寫為 4+1

所以 47 元+12 元=59 元...與精確值 59.375 元一樣

我舉這些例子的用意是說數學教育應該融入社會與自然並有某種程度的人文關懷，而讓我們的孩子能以更寬廣的視野看待世界學習數學。

### 9. 新課程在培養「能力」而不是傳授「知識」

「能力」和「知識」的區隔在哪裏？簡單的說就是學習者只需少許記憶性的東西但卻能廣泛的將知識應用在生活上。新課程所要培養的「數學能力」又是什麼？

新課程目標和過去最不同之處乃在於它在培養「能力」而非「知識」，但「能力」和「知識」的區隔究境在哪裏？簡單的說就是學習者只需少許記憶性的東西但卻能廣泛的將知識應用在生活上。而新課程所要培養的「數學能力」又是什麼呢？

#### 1. 察覺與辨識樣式(pattern)的能力

所謂察覺就是對世界的觀察，經由直覺、直觀、臆測、猜想及反思而有的理解。而所謂樣式(pattern,型,模式)是指有規律有秩序的物件，自然界明現或隱含著規律關係，這些規律關係可能是數字、圖形、抽象關係或是思考的方式。察覺樣式的意思就是：觀察世界，找出規律性，然後對它作出合理的解釋。訓練這種察覺與辨識樣式的能力，可以培養學生敏銳的觀察與創造力。

#### 2. 辨識的能力—能辨識樣式與樣式間的關係

#### 3. 兼具形式化與非形式化演繹能力

在明確定義的數學對象裏，數學結論是按照相應的定義及給定的法則進行嚴謹邏輯推理的結果。所謂形式化演繹是指

(1) 明確列舉理論中所使用的符號，包括數形、及邏輯符號

(2) 由公理及定義出發逐步引出其他定理

例如在歐氏幾何學就是一個公理化的系統，我們藉由形式化的思考演練，可培養學童嚴謹的辨證能力。但有許多數學的創造，其實並非按照嚴格的演繹方式進行，在很多程度上是依賴直覺及想像力。

所謂非形式化演繹泛指摺紙、操弄、筆畫、電腦繪圖...等等一切有意義的組合認知歷程，就是以兒童他自己熟悉的、直觀的、自然的方式進行學習和認識。

#### 4. 把生活問題轉化(換)成數學問題的能力

就是能從生活情境中析出數學部分，然後以我們所熟悉的數學方式去解決它。比如數學家觀察到野雁飛行必成「人」字行

→臆測到是氣流的緣故使然

→蒐集驗證→說出合理性

•數學家察覺野雁飛行必為奇數

#### 5. 問題解決的能力

「問題」就是一個需要分析和推理才能獲得目標(解答)的作業，而「解題」就是解決經轉化後的數學問題，屬於數學內部的連結。就教育層面而言，解題非但能檢驗學習成果，更是提供學生作為其重建與連結知識內容的方法。

由於解題者必須兼具敘述性與程序性的知識才能解題，所以，解題其實就是學習者主動建構知識的學習歷程。

就是簡化、推論、類比、歸納、演繹、分析、證明、一般化的歷程

#### 6. 溝通的能力

除了能瞭解數學語言與一般語言的異同更能用數學語言與一般語言說明情境與問題以及用數學的觀點推測及說明解答的屬性

#### 7. 評析的能力

### 伍、教師在知識經濟時代中的角色

#### 行動研究者

教師既然是知識的創造生產者，置身於教學領域中自應不斷探索與追求，而能讓教學技能昇華到美與和諧的境界，所以教師要把教學的研究工作付之於實際行動。所謂行動研究(action research)指的是在自己專業領域上老師自主作研究、以所教導的相關學習活動為研究題材、以日常的教學情境為研究情境、以教學效能的改進為研究目的之研究

式態。行動研究源自於 1930 年代末期，當時美國的教育學界就已經對行動研究產生濃厚的興趣。一直到了 1946 年，美國社會心理學家勒溫(Kurt Lewin)開始提出了「行動研究」一詞，並強調其重要性。一直至今，行動研究有繼續增加之趨勢，作為提昇整體教育效能與改良教學品質有極大的幫助。須知在現今知識經濟的社會裏，教師面對教學上的問題比過去更複雜而且更多樣。有許多教學上的問題並非我們憑直觀或過去累積的經驗就能有效解決，例如數學史及資訊教育該如何融入數學教育？它必須經由深入的實驗探索及客觀的分析，才能找到合理可行之道。這種行動研究並不是在建構某種新的學習理論，雖也不必要求嚴謹的研究設計，但是找尋相當文獻作客觀分析是很必要的。

### 學習激發者

身處知識經濟世紀，教師不能還只停留在「師者所以傳道、授業及解惑」這種單向的、學習被動的角色。為什麼呢？今日的科技進步神速，我們今天才剛學到的知識內容，極可能明天就宣告落伍了，這件事在資訊工業界尤其明顯。對於不斷翻新的科技及急速膨脹的知識，惟有自己懂得「如何獲得」、「如何運用知識」及「持續不停學習」的態度，才不會喪失先機。因此，身為教師最重要的工作，就是培養學生「如何學」、「學怎麼用」及「持續學」的能力。所以，以師生關係而言，教師必須扮演學習激發者的角色，而不是知識的傳授者。

### 教師也是終身學習者

知識經濟社會是一個學習社會，學習將會是每位國民生活的重心，教師自應不能置之度外。聯合國教科文組織(UNESCO)於 1996 年出版了(Learning:The Treasure Within)一書，其中明確指出適應未來社會變遷的四種學習(4L)：學習認知(Learning to know)、學習做事(Learning to do)、學習做人(Learning to live together)及學習發展(Learning to be)等四種基本學習，教師置身於教學領域之中自應不斷地探索與追求，才能將學習活動昇華到純淨而和諧的境界。

### 每一位教師都是課程設計者

課程(curriculum)這個概念詞的字源(currere)的原意是「在跑道上奔跑」的意思，它是一個動詞，一種要發展出來的活動。課程並不是一組大家共同要遵守的既定之物，而是

教室內師生共同發展出來的活動，是師生一起來決定學習內容和學習方式之教室內的真實經驗。社區及家長人士的角色是提供資源者，協助學生學習，學習成效再分享給其他學校。談到課程的發展，教師是要扮演積極的角色，而且每一位教師應享有課程的決策權，老師如果未能發展出自己的教學理論，就不可能有真正的教育改革。

在九年一貫的學校本位課程及統整課程設計，就提供教師從事課程研發的最好機會，是展現教師專業知能的最佳舞台。

### 價值觀的培養者

產業的成長與國民所得的提高固然是國家發展的一個重要指標，但是科技的拓展若不是以群己及人與自然環境的和諧為依歸、以人性為本，那麼人生命的價值將會沉淪於物慾追逐之中。因此，教師自應不斷引導學生思考人生的問題，釐清自己人生的方向，訂定自己的終極關懷，以宏觀的視野審視人存再的意義與價值，認識國家瞭解世界，關心人類的危機，建立地球村的觀念，活出全方位的生命。

傳統教育中，價值是由學校及老師決定的，課程及教材的安排則是由行政體制選擇的。但在未來開放及自然的學習環境中，學習的主動權則是屬於學生的。倘若如此，那麼學校教師的角色又當如何？教育的一件重要事情是：老師應教導學生當社會的價值標準與學校的價值及自己的價值標準衝突時有選擇的能力。

### 建立自己的教育哲學

舊課程是 80% 的學生陪 20% 的學生讀書，新課程要帶動 80% 的學生  
數學教育的道德層面

『在教學上，智識層面往往與道德層面不可分割』這是杜威的教育觀點。高尚的品德是人性的最高表現，它是在實際生活中孕育出來及發展出來的。在數學教育過程中，我們要重視孩子的直覺，從他們自然的感受出發，以他們熟稔的思維方式學習如何透過溝通、表達與審思明辨，重新建構學習經驗以便強化後續的學習主導能力，教師在此一學習歷程中則是指導學生如何掌握需要論證的概念。那麼何以說數學教育就是品德教育呢？因為「數學學習」不僅是要學到數學知識內容本身，更與學習者在群己和諧的關係中如何獲得這些知識內容以及他(她)們的學習態度有所關連。易言之，正確的數學教育方式實已有了道德蘊涵。

如果孩子在學習歷程中一直感受不到自發性的學習動機、得不到學習成就，而學校



及家長硬只是強迫他(她)們讀書及接受無數回的紙筆測驗，爲了只是虛幻的分數勝過同學考上明星學校。這樣的功利主義不但過度窄化了教育價值，同時孩子表面上雖是順從的，但是心理卻是反抗的，這會影響到學生往後的道德自我觀念。如果小孩經常被強迫他(她)們不喜歡的學習方式，等他(她)們長大之後，常會選擇反對自己反叛社會，更可怕的是他們變壞了還會試著將事情合理化。

要培育孩子的品德，就必須讓孩子的道德情意有發展的空間，讓他們在與師生的互動中學會信任別人，使他們在關懷中學會表現自己尊重別人。因此，在教學中老師要製造學生學習自由發揮的機會讓學生勇敢追求面對挑戰。

## 陸、知識創新教學創新

### 讓孩子學好數學最佳的方法

近數十年來，我們見到的數學教育是有增無減的失敗，教改早已淪爲高唱的口號而已。雖然專家學者多方密集的研討，但似乎沒有一點點起色，甚至於更糟糕。究其原因乃是因爲家長及老師都喜歡將注意力集中在評量前後的對照以及分數的得失，而非考量是否達成有意義的學習目標。我們不僅沒教好孩子喜歡數學，甚至於還逼得孩子討厭數學。這裏所謂的「有意義學習」乃指「數學是好玩而且是有用」、「數學有可以討論研究的題材」及「數學發現是可以和別人分享的經驗」。

學習是一條漫長的道路，若能讓孩子去感受學習所帶來的樂趣，自然是他們能持續終身學習的動力，而讓孩子學好數學的最佳方法，就是讓他們在「不知不覺中」去喜歡數學，而不是用壓力、手段或是物質刺激的方式處理筆試的結果。最高明的方法當然是老師能設計各種有趣的活動和生動的問題，從遊戲中出發讓他們在快樂中學習。「讓學生在不知不覺中去學習」的用意是在減低孩子的壓力及抗拒的心理，從心理學想，有誰喜歡做事的時候受人監督。

### 數學要用心去體驗

繼推動「心教育」及「生命教育」之後，針對防震、防災、防盜及其他人身安全的教育需要，台北市教育局最近又推動一項頗具創意教育活動——「體驗教學」。

我們知道「學習」乃是知識內化的過程，但是像防震、防災這一類的知識非但要認識，

而且必須「深切體認，親身經歷」，讓學童在煙囪中學會臨危冷靜及機智逃生的技能，而不是熟讀「課本的知識」或作「測驗卷上的選擇題」就能體會的。

今天我談的是「體驗數學」，很多數學上的概念不光只有到「認識」(一個形體它表面之量的大小，稱做表面積)的層面就足夠的，而是必須在「情意」上有所「體驗」及「感受」。底下我以「長度」的觀念為主題作一個教學活動設計

### 《教學活動實例》

#### 〈課前活動〉

同學在進行這個單元的學習之前，在家裏請先作兩件事情：

1.站在大鏡子前，看看自己的外觀，活動你的筋骨。準備皮尺，測量你的身長、張開後的手掌寬度、大姆指寬、穿鞋子的腳長、向兩側伸直後的兩手中指指尖間的距離、走路腳步長、胸圍、腰圍及慢跑的腳步長。

2.詳細端詳自家住宅內各物品的形狀及大小，並且用一用它們。

〈操作〉請自由選擇一樣日用品(例如：嬰兒床、礦泉水瓶、衣架、安全帽、...等等)，請把它畫在下面表格上，並且量取它每一部份的尺寸，並試著說說看，它們為什麼會被設計成這個樣子，還有為什麼要作成這般大小？

#### 人體的尺寸

你去過北橫達觀山嗎(又叫作拉拉山)？去過回來的人，他們常常會跟別人講說：

『哇！那邊有好多巨大的樹木，其中有棵神木，足足要有 20 個人合抱那麼粗』，當他們在講這些話的時候，通常還會帶有動作。

《問題》1.請問同學，他們為什麼不直接講說神木直徑有幾公尺，或它的周長幾公尺？或是它有多高？請寫出你的想法。

2.如果是你，你會如何描述這些神木的巨大？為什麼？

3.如果你看過一條大蟒蛇，當你告訴別人時，你會如何描述它的大小？為什麼？

《操作》請同學站直，然後用皮尺量一量(1)膝蓋的高度(2)腰帶的高度(3)胸部的高度(4)下巴(5)頭頂以及(6)及手往上伸值的高度分別是幾公分。請記得這些數字對你的生活將有很多幫助。

#### 《活動》坐公車或進入其它公設場所

民國 90 年 9 月輕度颱風納莉過境，卻造成台灣地區嚴重水災。我們在電視上看到受災最嚴重的汐止居民受記者訪問時，會常指著他們的身體的某個地方，像是膝蓋、腰部、胸部或著下巴講說：『我們家淹水就淹到這裏！』。也有山區災民心有餘悸地說：『山間土石流帶來的滾石有的已超過兩個人高』

《問題》請問同學，他們為什麼不直接講說淹水有幾公尺？滾石高有幾公尺？請寫出你的想法。

《活動》請班上每一個同學回答，他們家的電冰箱有多大？找一個同學統計他們回答的方式。

方式	說出幾公尺幾公分	用肢體語言的	其他：(請說明)
人數			

早晨作體操之前，司令臺上體育老師在整理隊伍時，也常會喊說：『手臂伸直，間隔距離取好！』，跆拳道教練在有幾個動作中，也常要求學員兩腳打開與肩同寬。

《問題》工匠在設計家用及其它物品時，可能會考慮物品的質材、紋飾顏色，尺寸或造型等等.....。不過一定會考慮到它的是它的尺寸大小，各位同學你們說是不是？說說你的想法。

### 人體與物品的尺寸

《問題》1.各位同學，請問你現在坐的椅子，為什麼會作這麼寬？說說看你的想法。

2.滑鼠為什麼會設計這樣子？說說看你的想法。

3.為什麼所有公園的搖籃尺寸都幾乎都一樣？盪鞦韆座位尺寸也都幾乎都一樣？為什麼？說說看你的想法。

我再以幾何學上的「表面積」作例子：

在國小的時候，我們在求平面圖形的面積，例如長方形、平行四邊形及三角形等等這些圖形的面積很容易瞭解，也很容易算出它的面積的。但是對於曲面的形體如雞蛋，我們又該如何測度它的面積呢？底下我們提供一個方法，供你作參考：

就是把熟雞蛋的殼小心地全部剝下來，先用微量天秤稱出一平方公分的蛋殼是幾公克重，再稱出全部蛋殼的總重量就可知道雞蛋的表面積是多少平方公分。學生一片一片剝下蛋殼時就能「體驗」到表面積的概念。

### 數學教育應以思考為導向以學習為中心

前文我已述及培養智慧是數學教育的首要目標，所以「教學生懂得如何思考」就成為我們教學的主要目的。而「教學生如何思考」即指數學教學者並非只傳授知識而已，應該努力發展學習者運用知識的能力。

教育的最根本的目的就是在培養孩子未來適應生活的能力，因此學習的成效並不是查看學習者累積了多少知識，而是檢視學生是否具備運用知識的能力。實在講起來，我們一生所累積這樣龐大的數學知識，如果不會活用，這些知識裝在大腦裏只是徒增記憶的負擔而已。所以我們要培養孩子最重要的是「終身學習的能力」、「能獨立思考的能力」及「創造力」，有了這些能力終生受用不盡。目前台灣的教育，可以感受得到的是，教學活動大都以教師及教科書為中心，就是老師有什麼知識、教科書寫什麼就教給學生的教學模式。未來教育改革的重點即是在改變教學模式，讓數學教育變成是以思考為導向、學習為中心的教學模式，此教學方式將引導學生如何獲得有用的知識及如何運用知識。

## 寫一本孩子喜歡閱讀的數學書 — 讓兒童文學進入數學教育

孩子心智的成長是伴隨者身體成長的，身體的成長是需要健康的食品與體能的訓練，而心智的成長則是需要多元文化的刺激。由於兒童的經驗世界是受限的，所以能讓兒童在求知中健康成長、學習中得到快樂的最好方法就是「閱讀」。閱讀一本良好的書，不但可擴大自己的生命經驗，更可提昇自我多元價值。

美國大發明家愛迪生愛好科學，他的知識及其發明靈感實在也是得助於他對於閱讀的喜好及良好的閱讀習慣。愛迪生他對書有這樣的描述：『書是天才們留給人類的遺產，世代相傳，更給予那些尚未出生的人的禮物』

孩子會排斥學習數學的一個重要原因是數學書在傳達訊息時，文字太過生澀而且脫離口語，其表達的方式往往會讓兒童覺得讀數學書是痛苦的負擔。如是，我們又如何能期待孩子能藉由閱讀來學習智慧與探究生命意義呢？雖然數學教育是要訓練嚴密的邏輯思維，但是我們也不至於要在教科書上擺滿「已知求解」及「同理可證」之類的字眼，這種除了計算還還是計算的書本，很容易讓孩子起反感。我們很期待數學書內會有散文、童詩、及神話故事的情節，書中出現像「森林」、「小仙女」及「大野狼」等字眼讓小朋友念數學就像在看童話故事一樣的輕鬆愉快。大部分的學生都喜歡看漫畫書連環圖畫，什麼灌籃高手、蠟筆小新、一休和尚的...，上課因偷看漫畫書被老師責備的同學不在少數。深知漫畫書是禁不了的，嚴禁不如開放，責備不如鼓勵，所以我乃毅然決定挑戰漫畫書。不久之前我叫學生[畫漫畫]，就是作「漫畫數學」。學生自己選一個單元(正負數、公約數、一元一次方程式.....)當主題，依自己對此單元的認知作連環圖畫以短篇故事表達，我乃赫然發現不少的同學除了有繪畫的才藝外，也對數學概念有了另類生動的理解方式，這又一次驗證「多元智慧理論」的真實性。

正如前文所述狄肯思的研究，它直接說明了越多樣的文化刺激，越有助於智能的提昇，而此更增強了教育工作者的信念：那就是要提昇我們的教育品質，良好的閱讀習慣必須提早協助孩童建立。

閱讀是一切學習的基礎，雖然成長在經驗世界中，但我們大部份知識的獲得是源自於閱讀。孩子若不喜歡或不善於閱讀，我們就難以期待孩子會有好的學習成效。因此我

認為應將閱讀融入數學課程中，使其成為學習的一部份，以培養其終身學習能力。

### 建構式教學法

皮亞傑(Piaget)在 50 年代就提出了關於認知學習的建構主義之觀點，由於傳統教育的束綁，在那年代並沒有普遍受到數學教育界的重視，直到 80 年代之後，隨著認知心理學學者不斷的深入探討才受到普遍的支持。建構式教學法是革命性的教學理念，它把教學活動的重心由傳統的施教者身上移到受教者。建構式教學的內涵主要包含有三個：

(1) 學習的行為是學習者主動地一點一滴將認知的體系架構起來，而不是被動接受老師知識的灌輸。學習的過程(尤其是數學科)是一種心智的活動，心靈圖像的重畫，教與學並不是買賣商品，更不屬於速食文化。

(2) 認知的建構過程是建立在既有的知識和經驗的基礎上，並從多次經驗中求取共通性，並不只是對外在刺激作簡單的反應。如果學習只是簡單的刺激—反應，那麼學校的教學和馬戲團馴獸師訓練動物有何不同？

(3) 建構主義數學學習觀，就是要把新的認知整合到已有的知識中。

所謂「整合」就是將新舊之間的經驗、概念、認知作合理的、邏輯的連結。

一般來講，建構主義是一種認知學習的理論，探討如何獲得知識。因此建構式教學特別強調學習的過程，在學習過程中激勵學生主動求知的欲望，在另一方面，教學上儘量採取具體操作或實驗的方式取代演算或抽象的說理，不同於傳統教學只注重結果。

支持建構式的學者認為建構式的學習過程可以培養學生的學習能力與解決問題的能力，「能力」是比「知識」重要的。現代科技發展很快，使得知識的生產更快，知識更新的速度遠超過我們獲得知識的速度，所以具備「取得知識」與「應用知識」的能力比記一大堆之公式有用。基於這樣的理念，我們相信引導學生如何學習就比課本上要學的知識重要的多了。

建構式教學是諸多學習理論之一，在許多學童新接觸的數學概念上，我們應該選擇這樣的教學法。建構式教學雖然在短期內學業成績並不彰顯，但由於它在學習上重視過程及知識架構，因此學習者和社會、學習資源有較佳的互動，無形中就培養了「終身學習的能力」。

舉個例子來說：公式 $(A+B)^2$ 爲什麼會等於 $A^2+2AB+B^2$ ，其實很多學童並不知道，他們只是背下來應付測驗而已。如果是建構式學習的學生，他們要去瞭解公式 $(A+B)^3$ 爲什麼會等於 $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ 就讀傳統的學生更容易了。

我們可以這麼說，建構式學習除了有較佳的學習品質外，同時學習者也學到了學習方法與求學態度，這一點比數學知識本身更重要。

### 建構式教育仍是侷限的 — 「濃縮歷史」的數學課程

在數學史上，數學家花了好幾千年的時間，才把實數體系建築完成(連畢達哥拉斯這樣的數學先知尤未能知道世界上還有「不可公度量」(例如根號2)的數，然而，我們國編版的國中數學教科書(註一)卻已在第二冊發展到了「根號數」，這樣的教材是「建構」(construction)還是「灌輸」(inculcation)？

在數學發展史上，有些概念在我們現在看起來都是理所當然的，可是在過去，因爲觀念太過抽象而受到無理排斥的例子很多，比如說「負數」，有好幾百年，人類認爲它是荒謬的，並稱它爲「荒謬數」，爲什麼呢？理由是人類直觀的認爲數是用來數(尸×√)東西的，怎麼會有負的？物體的長度、重量、體積有負的嗎？(順便一提：歷史上有一段很長時間，甚至於「0」也不被看成是一個數)，有很多「數學家」在計算時都儘量避免碰到負數，經過了好幾個世紀，它才「慢慢地」被「數學家」接受。

無理數也是如此，即使是古希臘偉大數學家畢達哥拉斯(B.C560~480)對於「不可公度量的數」的發現，也極力封殺，畢達哥拉斯甚至於對於其學派成員希伯斯(Hippasus,BC470)進行迫害，理由是他的發現動搖了畢氏的數學哲學—凡任意兩量都可公度。

國中的數學課程發展是起始於自然數，沒錯，數(尸×√)的開始是數(尸×√)東西的，人有十根手指頭，數學採用十進位制，也很容易接受。問題是要國一的學生理解「負數」，有那麼容易嗎？

底下簡單敘述「負數」在歷史上的建構過程：依據《九章算術》(註二)記載，在解線性方程組時，常會碰到小的數減去大的數時候，當時爲了運算能繼續進行下去，就在數字上作記號，這就是負數的開始。在國外，印度數學家婆羅門笈多(Brahmagupta)，(公元七世紀)對「負數」的解釋是負債或損失，而在歐洲一直到16世紀之前，數學家對於負數都還爭論不休。

我們現在來看國中一年級的數學教科書(註三)，它是如何說明負數的概念：它把負數解釋為數線上原點左邊的點所代表的數。如果老師也和教科書一般說法，我認為也只能說是在給學習者「灌輸」知識而已，為什麼呢？因為「負數」的存在性還沒感覺出來，「負數」最重要的概念是那個抽象的「存在」，為什麼數線要有兩個方向？這等於是先預設負數的存在及負向的數線，我的意思是，這樣的學習不是建構教學。

「負數概念」的教學，我認為應該是要從實體出發建構抽象的過程：財務有「負債」的時候，在帳簿裏要怎麼記？用顏色區分？還是用附加記號來區分？例如負債 70 元，可記為[70]或〈70〉；教學者不必急於告訴學習者這就是「負數」，又例如零下 200 度，也可記為#200 或\*200；找出這些符號的共通性，然後類化到原有的舊經驗中(正數的性質)，這是建構的第一步。簡單的說，要建構「負數」概念，關鍵就在於能不能把「負數」看成如同正數一般自在。「負數」既然也能說是「數」，那麼它也一樣能作加減法運算。

「負數」的加減法運算或許容易在舊經驗中整合，但是乘法運算呢？

負數×負數何以會等於正數？教科書(註四)是利用《水庫水位下降》的例子來說明：

某水庫的水位每日下降 5 公分，3 天前水位與現在相比了高 15 公分。

所以 $(-5) \times (-3) = +15$

我覺得教科書再次「灌輸」現成知識，為什麼 $(-5)$ 可以乘以 $(-3)$ ？乘法在國小學生的認知裏只是被乘數的倍數關係，國中學生很難感覺出「負數可以乘以負數」的「合理性」，即使是數學專家也不容易拿它和正數作邏輯的結合。

在畢達哥拉斯之前，古希臘人不認為會有一個數無法寫成兩個整數的比，可是畢達哥拉斯學派卻發現：『邊長為一的正方形，可以證明其對角線的長無法寫成兩個整數的比(不能公度)』，無理數是如此的「真實」又如此的難以理解，兩個有理數之間有無限多個無理數，而兩個無理數之間也有無限多個有理數，這樣抽象的數字，國中學生能在這麼短時間之內建構「心靈圖象」嗎？

其次我們再看「根號數」的國中教學課程，教科書先是介紹近似值的概念，再說明：面積是 2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{2}$ 這樣的課程發展程序基本上是沒錯，但是犯了兩個錯誤：一、速度太快了，連畢達哥拉斯都會惱羞成怒。二、我敢保證，用功的學生上完課之後，他對根號數的認知就只是「正方形的邊長」。

教科書可以引導學習者建構數學概念，但是我們發現教學者往往是大大地縮短了歷

史、縮短了形成概念的時間、空間和過程，尤其是像一些建構發展的終端產物如「負數」、「無理數」、「函數」等等，教學者常常先下定義(名詞)，大大的折損學習旅程的內化手續；往往老師一上課就說『今天我為各位同學講解「無理數」，無理數就是.....』，這樣的教學方式，打個比喻，就好像是對一個天生就失聰的人講說「鋼琴」的音色有多美妙，有一天醫學讓他的聽力恢復重生，他開始去接觸音樂，當他真的聽到鋼琴的聲音時，他可就不一定就知道那個樂器叫鋼琴。

### 最高明的教學—能引起學習動機

從長遠來看，教育的最終目的是要學習者能由內在的自覺，而為學習而學習，也就是說學習應該是主動的，正如出生於匈牙利教育學者 George Polya 說的『最佳的學習動機是對所學知識的興趣，而最佳的報償應該是聚精會神的腦力活動所帶來的快樂，為了讓學習更有成效，應讓孩子在活動中學習尋找快樂。』Polya 這裡所謂的動機，乃指「內在的動機」，而非外在的物質獎勵或功利誘因。因此，我認為最高明的教學法是協助孩子建立數學學習動機，大家仔細想一想：男孩子為什麼那麼喜歡打電玩、籃球？女孩子為什麼會為漫畫書瘋狂？為什麼大部分的孩子都討厭數學？就不難瞭解『協助孩子建立(數學)學習動機的效果遠遠超過「物質獎勵」，而體罰是最最下策』，至於如何能引起學習動機，在我教學的經驗有下面幾個心得：

#### 好玩的教學活動

孩子大都喜歡游泳，但是我得告訴各位他們喜歡游泳的原因絕對不是為了鍛鍊體魄，而只是因為玩水玩得很高興而已，但是當他們他很高興去游泳時，對健康確實有幫助。學幾何及代數將來有何用處，連大人恐怕都不很瞭解，那麼對小孩子講說『學數學是為以後的用途』，這不是太遙遠了嗎？所以家長及老師不必一直告誡學生『要好好用功讀書，以後作一個有用的人』，而是要用心去設計好玩的課程活動來引導學生學習，而讓他們在學習過程中慢慢體會學習的樂趣。

#### 有情節的教材才能讓孩子發揮想像力

想像力之於孩子的心靈猶如太空望眼鏡之於天文台一樣，現實的世界是很侷限的也許並不快樂，但想像的天地卻很寬廣，我們可編織動人的故事也可以創造出美和喜悅。讓孩子持續發揮他們豐富的想像力而建立牢固的學習興味。漫畫書和武俠小說就足以說



明爲什麼孩童會如此沉迷(一集一集的讀下去)，因爲它滿足了少年的想像需求，孩子的幻想需求就是如雪般晶瑩的亮麗世界、翩翩的音詩及銀河戰艦。所以我認爲部分數學教材的編寫可以童話故事或漫畫的方式呈現，讓數學進入孩子的內心世界。甚至於嘗試讓他們畫「數學漫畫」，盡情地揮灑生命的色彩，投入情意的激流，和數學建立感情。

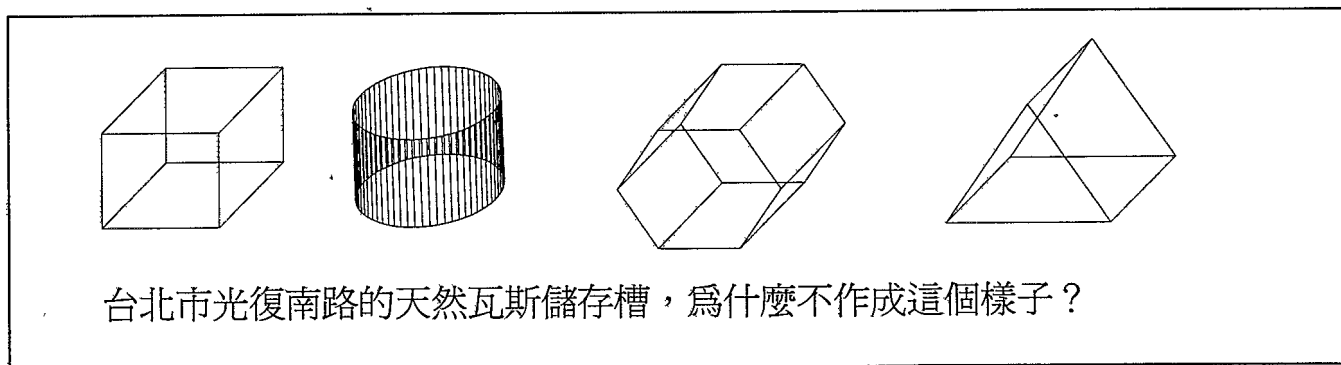
#### (1) 好奇心和大膽放肆猜測的情操

偉大的數學家高斯(Gauss 1777~1855)曾說：『若沒有膽大放肆的猜想，一般是不可能知識進展的』。出生於匈牙利 Stanford 大學的波利亞(Polya)也說：『數學是要用猜想造成的』。學習科學及研究數學最迷人的地方，就是高興去發現及發展一個問題並且興高采烈地去瞭解它解決它。而這探究精神的基本原動力就是人與生俱來的好奇心和大膽放肆猜測的情操。在精神領域裏，這探索慾的好奇心和放肆的猜想是創造力的豐富泉源也是科技文明的脈絡。

「體罰」一直存在於校園中，而且也一直是熱門的話題。有人主張「適度的疼痛」有助於糾正孩子的學習行爲，但是我認爲教學如果要用到體罰或物質獎賞，那麼數學教學和馬戲團訓練野獸有何不同？爲此，我堅信最高明的教學乃是能引起學習動機。

#### 《教案實例》

《問題》1.位於台北市光復南路，有座巨型的天然瓦斯儲存槽，它是被設計成球體狀。請問同學它爲什麼不作成正方體、圓柱體、長方體、角柱體或其它形體，而設計成球體是作藝術的考量嗎？還是另有原因？請說說看。



2. 蒙古包也被設計成球體狀，請問同學，設計成球體是藝術的表現嗎？還是另有原因？請說說你的看法。

3. 生活在酷寒北極圈的愛斯基摩人，身材稍成圓滾狀而且結實，你覺得有助於他們在惡劣

的環境下生存嗎？

4.常見的燈泡是球狀的，日光燈的燈管也成圓柱體，請問為什麼？

5.請你說說看，有那些物品被設計成圓形是因為表面積的考量？

### 解題教學(以問題為中心的教學法)

民國八十七年教育部公布了「九年一貫課程綱要」將「探索與研究」、「獨立思考與解決問題」列為國民教育所要求的基本能力，然則「探索」、「研究」、「思考」與「解題」不也就是數學的本質？數學教育追求的目標嗎？

在過去，一個人的創造力被認為是天賦的，並非後天的教育可以培養出來的，尤其是對於像歐幾理德 Euclid 這位「數學先知」，(他寫了一本像聖經一樣的書—幾何原本 elements)，人們很難相信創造力不是天生的。但在 1926 年教育學者華勒氏(Wallas,1926)提出了「四階段創造歷程」(預備期、醞釀期、豁然開朗期及確認期)理論，他述及「創造」也是一種心理歷程，創造力居然是「蘊釀」出來的，而後認知心理學因而為此做開研究大門，於是陸續有學者著手於研究「創造力是否可由教育的訓練培養出來的嗎？」。其間歷經了多位著名學者的研究，一直到現在，「創造力是可以培養出來的」這個看法是很少人會再去懷疑的，從歷史上至少我們可以從柏拉圖(Plato,BC427~347)及歐都克斯(Eudoxus)這些人身上得到證實：柏拉圖，這個雅典人，年輕時因師法於蘇格拉底(Socrates),得到他的真傳而成為哲學家。公元前 387 年，他在雅典建立了學院吸引了不少人才，雖然他本人對數學沒多大貢獻，但他卻能培養出傑出的數學家—歐都克斯。

而在提昇創造力的許多方法之中，「解題」的訓練被認為是最有效的策略(至少數學是如此)。而關於解題模式，較廣為學者所接受的是伯尼斯(Parnes,1967)所提的「五階段論」，即解題包括五個過程：(1)發現事實(2)找出問題(3)想出計策(4)提出解決之道(5)尋求能被接受的解答。

迦納(Gardner,1983)在《心智的架構》(Frames of Mind)一書中也提出他對於人類智能的獨到的見解：Gardner 認為相對於其他動物，人類智能最重要的一個特質就是有[解決問題]的能力，動物雖然有生存的基本「能力」，但遇著問題困擾它時，它們並不會去思考解決問題的方法。白老鼠走迷宮的試驗，僅僅只是白老鼠的「嘗試錯誤」，它並沒有經歷像 Parnes 的「五階段」解題法，白老鼠在找出路時並沒有提出「解題策略」，走迷宮至多也只能說是「練習」(exercise)而已。而 Gardner 所述及之智能包含語文的理解、運算能力、空間關係、推理、流暢、記憶等基本能力，而是實上這也不就是「數學解題」之能力嗎？

「解題」在教育上的價值早年也已獲得杜威(John Dewey,1859~1952)的注意，後來歷經行為學派、認知學派直至近代資訊處理心理學派的跟進已有相當的研究。下面是我對「解題」在教育上的價值的一些見解：

#### 第一、重新建築學習者的學習經驗

有意義的數學學習是要能把所學到的數學能力及數學知識活用在實際的生活問題上並提出最佳的解法，試想一個人受了十幾年的數學教育卻不能獨立思考表現與創新、看不懂汽車使用說明書或是不會使用應用軟體、不能善用各種符號和工具(如網際網路)來與別人溝通分享、不能主動探索與研究等等，那麼，我想過去的學習方式與心態學習者就必須重新檢討。而學習成就評量既然是整體教學活動的一部分，那麼，解題的過程恰好可以提供學習者學習經驗的反省機會。

#### 第二、「解題」教學就是創造思考教學

由於人是善於學習模仿且富於創造的動物，所以從舊石器時代發明石具及鑽木取火開始一路走來始終如一。人類因不斷的創造發明乃有今日的科技及人文藝術成就。而「創造教學」的主要目的，就是在學習過程中去激發學習者的創造潛能，人之異於禽獸者，乃在於遇到「問題」時會設法解決。當動物遇到急難時只會有不安的反應並不會思考解決，有創造力的人在遭遇「問題」時，則會去觀察理解、探索、思考及查考有關的文獻資料，並且提出各種「解題方案」，最後選擇最可行的方法解決。由於解題者會不斷的改變思路反覆思索，靈感及頓悟油然而生焉，於是「創造力」就被激發出來了。

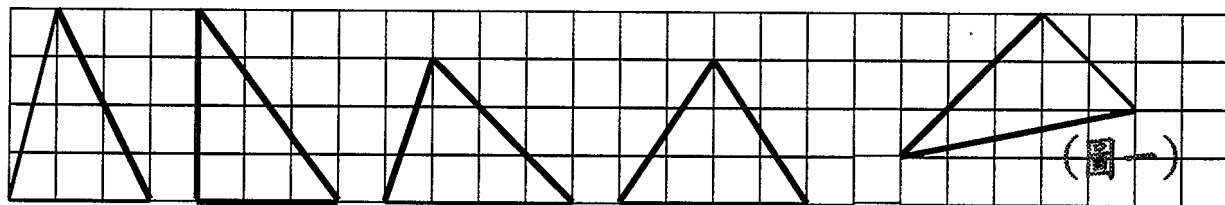
既然說「學習評量」是屬於整體教學的活動的一部分，那麼「解題」則屬於更高層次的創造性活動。「學習評量」只是為了檢驗單元教材或「連結」的教學目標所作的教育測驗，但是「解題」不只是運用既有的認知對「問題」本身的思考，甚至於對各種解法加以「批判」。簡單的說，「學習評量」就是在檢驗老師教的東西，學生懂了沒有？而「解題」是要學生主動發現問題之所在，提出「解決之道」。我舉個簡單實例說明「學習評量」和「解題」的不同：

《學習評量》請問底邊長 4 公分，高 3 公分的三角形面積是幾公分？

《問題求解》在方格紙上，請你畫出一個面積為 6 平方單位的三角形。

在第一題中學生只要能寫上  $3\text{cm} \times 4\text{cm} = 12\text{cm}^2$  老師就算達到教學目標了，但是在這個評量的過程中學習者沒有機會表現創意。

但是在第二題中，學生可以因有不同的解法，而有極大的揮灑空間。



如圖一，我教到的一位學生在方格紙上作出的這個三角形，三個邊和其對應的高都不是整數，但是它的面積是 12 平方單位。這位同學是瞭解三角形的底 $\times$ 高 $\div 2$ 的面積公式，但是它在求這個三角形的面積並不是由這個三角形的底 $\times$ 高 $\div 2$ 算出來的，所以，「解題」其實就是建構新知識的過程。這種建構新知識的過程，其實就是「創造」的歷程。

### 第三、對自己的學習負責

學生在探索、思考與解決這些問題(如果是優質問題)之後，應就會有學習行為的產生。所謂「優質問題」是除了要對解題者有適性的挑戰和保證有成功的機會之外，還能引導受教者主動追求知識並對自己的學習負責，所謂「對自己的學習負責」就是說學習者在屢次的解題後(不論是成或敗)，會再去反思「學習」要學習什麼？要如何學習？這同時也呼應了在近代科學教育所支持的建構主義教育觀點中，學者都一致認同「科學知識是學習者主動建構」的論調。

### 第四、訓練學生能勇敢地面對全然陌生的環境—面對問題，解決問題

孟岱爾(Mendel, 1822~1884)出生於奧地利一個貧窮的農家，從小就在自然的環境裏成長，除了愛好自然外對生命的探究特別有興趣，長大後因家境貧寒故而當了修道院的神父，而這修道院的院子後來竟成了他的(數學)研究室。孟岱爾依據他對植物繁殖的長期觀察，發現植物的表徵子代和親代間絕對是有遺傳機制的，他想去瞭解這個「數學機制」，於是，他選擇易於栽培和觀察的豌豆作實驗。他將具有對偶性狀的親代交配(如黃色種子 $\times$ 綠色種子，高莖 $\times$ 矮莖等等)(至此乃切入數學思考)，發現第一子代中竟然清一色只有一種性狀，孟岱爾覺得驚訝，於是大膽提出「顯性」及「隱性」的「假說」，而後的實驗證實了著名的 Mendel 分離率及獨立分配率而奠定了現代遺傳學之基。由此可見，我們不難瞭解 Mendel 除了具備有深厚的數學根基外，最重要的是他有冒險患難的「解題」精神才能有最後「創造性」的論作。

在以問題為中心的教學法之理念裏，我們同樣倡導和生活的連結，這樣才能達到深度學習的目的，同時也可以驗證學習者他們的理念與個人的知識。

### 提供有廣度的教材 — 帶孩子看世界

在學校我們所教授的數學，除了要讓學習者知道它與日常生活有關連之外，更重要的是它還必需與各知識領域作有意義的結合，就以「語文」來說，傳統的觀念會認為數理與語文是迥然不同的領域。但是大家別忘了，孩子的教育並非只到國中或大學就完了。學校老師要給他(她)們的基本能力是「能終身學習的能力」，易言之，數學教育除了要培養能思維能解決問題的能力之外，還必須培養他們學習數學的語文能力，以便進一步的探索。離開校門後才不會淹沒於社會急遽變遷的洪流中。惟有如此，數學教育才能符合時代的要求，這就是我所謂的「有廣度的數學教育」。過去台灣的數學教育因深受入學方式的影響以及數學老師都認為數學是為未來學術研究的基礎及考試科目，因此造成過多的作業與練習，常常給予學生過多的考試及壓力。所以學生只知為了準備考試而學習，在這種學習環境下，數學教學似乎只是在為紙筆測驗作準備，因而形成一元化的「計算型教材」及教學方式。

在心態上，數學教師不能只是把數學當作是學生未來學術研究的基礎，因為並不是每一個孩子都要念研究所，所以國中小學數學教育不應淪為高中或大學之前置作業，而喪失教育本質。世界各先進國家，無不以「全人教育」作為它們的教育宗旨。九年一貫新課程儘管把知識分為語文、數學、自然、藝術、社會...等七大領域，但對於「學習」這件事，知識是不容許分割的。具體的說，數學應融入語文、自然、藝術、社會之中，也惟有「知識為整體」的理念，才能達到「全人的教育」的境界。

因此九年一貫新課程的精神之一就是課程不再「標準化」，取而代之的是「課程綱要」。也就是在能達到「十大基本能力」及「各學年學力指標」之大原則下，數學老師依自己專業能力及教學自主自由發揮，而達到教育鬆綁的目的。

### 數學教材應由學習者的經驗世界出發

舊課程是 80%的學生陪 20%的學生讀書，新課程要帶動 80%的學生，因此各校要為自己的學校量身定作教材，發展出最適合自己學生的課程。雖然課程要引導孩子進入新的知識領域，然而數學科教學活動設計時應以生活為中心，由學習者的經驗世界(真實的

世界)出發，配合青少年的認知發展，所有的教學方法也不是固定的一套模式。順便一提的是「從經驗世界出發」意思並不是指數學世界都是具體物，它只是從真實世界[出發]，它意味者數學的世界也將會是抽象及想像的世界。我們的數學教育並非只是在教孩子用手指頭作加、減、乘、除數數而已，我們更要教他們如何思考及如何想像，這才是我們的目的地。

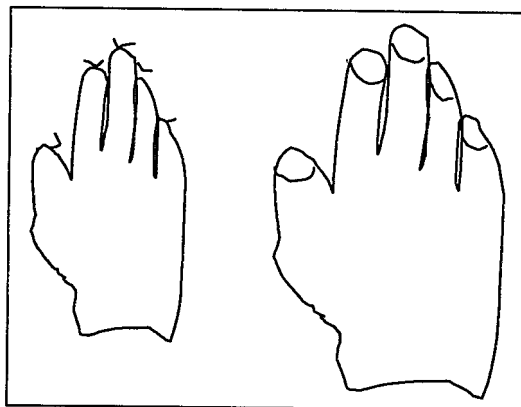
### 數學教育的目的應為教人如何思考

杜威(Dewey)認為只有在直接經驗的情境中才會發生「思考」，換言之漫無邊際或憑空想像的都稱不上是思考。思考是一種心智的活動，起於懷疑、好奇的情境，而終於確認的情境。Dewey 也認為思考是一個過程，在學習者經歷一個真實的情境才可能發生，當個體面對衝突情境時，就會去思考並且提出各種解決的方法。但是傳統的學校教育卻將現實生活中，不可避免的衝突情境隔離於教育現場之外，這樣的教學結果是教出順從呆板的學生，導致缺乏解決問題的能力。

在考試領導教學的學習環境裏，台灣的「國中基本學力測驗」能篩選出具備獨立思考能力的學生嗎？它能營建有力的學習架構嗎？

《教案實例》有一天上體育課的時候，大雄和小惠兩人打籃球玩投籃比賽。袖珍型的小惠兩手纖細，她站在籃框底下還需要用到兩隻手掌才能勉強地把球擲入籃框。小惠意外地發現高個子的大雄用一隻手掌就可以把碩大的籃球吸起來，還可以左右擺動不會掉下。小惠把她的手掌和大雄的手掌比比看，就說『哇塞！大雄你的手掌有我的兩倍大。』

《問題》從上述故事中，有提到大雄的手掌是小惠手掌的兩倍大，你認為小惠的意思指的是手掌寬的兩倍大、長的兩倍大、厚的兩倍大還是什麼的兩倍大呢？為什麼呢？



教育的目的是先要讓孩子從能瞭解自我開始、而後藉由課程的接觸以增強他們的心

智、發展他們的潛能、最後能獨立思考解決問題，而不是強把別人的知識灌輸給他們，徒然增加孩子記憶的負擔。數學教育的目的應為教人如何思考，否則孩子豈不是變成一頭背著教科書的驢子？

而當我們期待孩子能以不同方式來思考問題解決問題，甚至於展現創造力的同時，我們在教學策略上，應注意下列幾點：

- (1) 營造良好的學習環境
- (2) 教師是知識的引導者
- (3) 批判反思回顧

#### 《教案實例》 將生命教育融入數學領域教學

生命教育的內涵包括了解自我生命的起源、生命的維護、生命的循環及其終極關懷。而生命教育是經由課程設計與學習活動，讓學生觸摸到生命的深處，主動認識自己生命，體驗到生命的意義而建構正確的價值觀，進而能欣賞生命的豐富與可貴、珍惜與尊重生命以激發生命的潛能、歌頌生命，乃至於學習包容，尊重他人、接納他人的生命，甚至於融合於地球上所有的生命之中。

由於生命的意義並不是經由別人來定義的，生命的價值也非由講師傳授，而是個體在生活中的體驗。也由於生命教育必須省視並及正確地建立自己的價值觀，並將之作為個人思考的準繩及基礎，所以其教育內涵實已涉及數學領域。

數學教育之可貴之處，在於培養學習者之思考力，並且能在生活中思考解決問題，並不只是要學生練習加、減、乘、除及煩人的代換公式而已；而是邏輯思辨、假設歸納推演及抽象思維的訓練。一個缺乏思考能力的人，就如同瞎子摸象，毫無章法，漫無頭緒，如何能理解生命的意義呢？

「911 恐怖攻擊行動」是全世界關注的焦點，我們可藉此一事件做為生命教育主題，以課程統整方式將之融入數學領域。現舉一實例簡單說明此主題教學之數學部分內容：

《主題名稱》 消滅恐怖份子

《教學內容分析》 本單元藉「紐約世貿大樓恐怖攻擊行動之省思」來瞭解思考生命之意義，進而瞭解生命的可貴。

《引起動機》 觀賞 911 災難現場短片及新聞報導彙整介紹事件始末

《教學目標》認知 1.能運用各種思考方式(假設、推論、求證及逆向思考)來理解生命的意義 2.思考「奧賽·賓拉登所主使的恐怖自殺攻擊行動」的行為對生命所可能帶來的浩劫。 3.思考「美國與其盟國對阿富汗境內的軍事報復行動，對一些無辜的阿富汗民眾造成的傷亡」，是否也會造成不良影響？

技能：1.能獨立思考並建立自己正確的生命價值觀 2.從各種角度審思生命的意義

情意：1.堅信自己信念不輕易被權威所影響 2.能瞭解正確思考的重要性

《教學方法》教師提出下列五個問題 讓學生分組討論

- (1) 美國聯航班機遭受恐怖份子劫持，並撞毀紐約雙子星大樓及國防部五角大廈，造成五千多無辜生命的喪失，雖然他們國內外仍有不少反對美國出兵阿富汗的抗議行動，你覺得美國仍應該以牙還牙作報復行動嗎？
- (2) 請同學提出「911 恐怖攻擊行動」之問題所在
- (3) 請同學提出所有「解決問題」的可行方法
- (4) 假設聯合國不反對美國使用核子武器，你認為美軍可以發動核戰終結阿富汗佔恐怖組織嗎？
- (5) 逆向思考：美國是否該重新反省其中東政策？

融入生命教育數學教學活動設計

主題名稱	消滅恐怖份子	領域名稱	數學領域
教材來源	911 紐約世貿大樓恐怖攻擊行動		
學習本單元的預備知識	回教國家的歷史、文化、宗教及地理初步的認識		
單元教學目標	認知：1.能運用各種思考方式(假設、推論、求證及逆逆向思考)來理解生命的意義 2. 努力思考「奧賽·賓拉登所主使的恐怖自殺攻擊行動」的行為是對或錯？3.能瞭解正確思考的重要性 技能：1.能獨立思考並建立自己正確的生命價值觀 2.從各種角度審思生命的意義 情意：1.堅信自己信念不輕易被權威所影響 2.肯定唯有透過思考才能明辯是非		



學生分析	國三學生	
教師活動	學生活動	培養的基本能力
準備活動 準備投影片或報表	準備活動 從相關網站及圖書館相關書籍中搜尋有關中亞回教國家的資訊	
發展活動 1.引起動機 觀賞災難短片 介紹 911 事件始末及各國對事件的反應 2.分組討論	1.學生觀賞影片 2.聽取老師報告	1. 能獨立思考的能力 2. 國際觀與文化學習 3. 表達、溝通與分享 4. 尊重、關懷與團對合作

### 提供可討論的教材

「認知」是學習者組織和了解個人的經驗過程，知識是主動的建構，而不是被動的吸收。在社會性方面來說，Piaget 學派認為認知的發展是個體與環境互動的過程，由於認知的衝突，引發一連串的同化和調整，因此學童在與同儕的互動過程中，社會與認知均有獲益。情意方面：培養同儕間的表達與溝通能力，同時也強化了學習的動機與信心

九年一貫新課程的重要目標之一，就是在培養「表達、溝通與分享」及「尊重、關懷與團隊合作」的能力。試想，一個沒有討論能力的人如何適應未來社會？所以我們期待能發展出「可討論的教材」，引導學習者在學習活動中培養討論的能力。

### 《教案實例》 公尺(meter)的故事

兩百多年前法國爆發了人類歷史上很重要的一件事，就是所謂的「法國大革命」，此次革命非但是推翻法王專制政權的政治革命，同時也是文化大革命。為什麼呢？在這

個文化轉捩點上，法國科學家趁機制定一個全世界都能接受的度量衡。既然要全球的人都能接受又要展現法國科技，於是，1790 年代，一群法國科學家丈量敦克爾克與巴塞隆納的距離，然後再配合天文觀測，計算出地球北極到赤道的長度。他們把這段長度的一千萬分之一定義成「公尺」。爲了更具體告訴民眾公尺的長度，還用合金製成一個幾乎不會熱漲冷縮的標準「公尺原器」，於是世界上就開始有了公制的基礎單位「公尺」。簡單的說，就是他們把「地球四分之一的周長」定爲一千萬公尺(就是一萬公里)。

《問題》地球上高山、丘陵地及湖泊，北極到赤道的長度並不明確，怎知一公尺爲「地球四分之一的周長」呢？

### 增加「操作中學習」課程

在前面我已述及：「學習是個人主觀經驗的知識建構」，所以活動的設計應儘量讓學生參與。除了讓孩子參與討論之外，最直接的方式就是肢體上的運作，讓他們利用拼圖、繪圖、剪貼、測量、製作模型、結繩及攝影.....等等操作增強他們的心智活動。

### 以思考爲取向的教學模式

既然數學教育的目標是在培育人的智慧解決問題的能力，所以在教學過程中我們要強調的是：

- 1.發展學生解題的能力、培養思辨的技巧
- 2.促使學生能運用已有的知識於陌生的情境中
- 3.讓學生在面對新情境時能以新觀念探究

這一點可說是「數學教育」的核心，我覺得未來數學教育的走向是要強調數學與日常生活及時代需求的關連性，並且把數學看成是一種探索世界的方法。二十一世紀是數位時代也是知識急遽膨脹的年代，一個新的科技知識往往在我們未能理解之前，更新的知識又出現了，我們會一直活在新舊觀念的認知衝突中。

### 5.開放性評量試題

九年一貫的數學課程期望學生達成下列目標：

- 5.(a)掌握數、量、形的基本概念

- (b)培養日常所需的數學素養
- (c)發展形成數學問題與解決數學問題的能力
- (d)發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力
- (e)培養欣賞數學的能力
- (f)培養數學的批判分析的能力

### 柒、教學評量(instruction evaluation)

教學是有意義及有目標的活動，而要知道在教學之後學生能否在認知、情義及技能上產生如教學目標所期望的改變？教學評量就是要回答這個問題。

在心理學上，測驗(test)及評量(evaluation)是彼此關係密切但涵意不相同的概念。測驗(test)是包括多個問題所構成的用來鑑別能力或性格差異的工具。因使用的目的不同，測驗有多種形式，教育上應用最多的是學習成就測驗。教學評量(instruction evaluation)是指有系統地收集有關學生的學習行為的資料，加以分析處理之後，再根據預定之教學目標給予價值判斷的歷程。在蒐集學生資料時，可以根據實施測驗的結果。簡單的說，教學評量的概念包括了測驗，但在教學評量的價值判斷時，並不限於測驗所得的資料，而加入平日觀察之所得。

#### 一、標準化試題

##### 國民中學基本學力測驗對教學的影響

備受各界矚目的國民中學基本學力測驗，已於 90 年三月舉行。從各界普遍肯定試題的靈活度以及原創性來看，已經跨出新的里程碑。接受委託研發國民中學基本學力測驗的師大心理與教育測驗中心主任林世華指出，國民中學基本學力測驗，希望在維持制度公平的前提下，消除入學考試對國中教育的不利影響，進而充分發展學生的潛能。因此基本學力測驗的命題，會偏重在對學生未來學習與生活有幫助的基礎的知識與能力。因此如果像過去以「過度學習」和「機械式練習」的學習方法，就收不到預期效果的。

關於國民中學基本學力測驗的精神，簡單的說未來的考試是原理有範圍，但是場景沒範圍，學生只要真懂學會基本的能力只要真正的了解就能達到預期效果，就能消除過度的競爭。

## 基本學力的定義

長久以來，入學方式與評量試題一直是教育議題的焦點。綜合社會各界對入學方式的想法，我們得到一個結論，那就是傳統聯考制度已不再是選材的適切方式，因而教育部宣布自 90 學年度起改採基本學力測驗取代傳統高中聯考。基本學力是一個複合的名詞，它包括「基本」與「學力」兩個觀念。綜合國內外學者們見解的交集，我們可以將基本學力定義為「學習者經由特定系統化的學校教育後所獲得的基本且完整的學習成就、社會能力與發展潛能」。簡單的說就是對學生未來學習與生活有幫助的基礎的知識與能力。

## 基本學力測驗

「基本學力測驗」源自於美國高中的升學觀念，是一種比較有彈性的入學方式，其目的是為學校提供請入學者數學科目上的學習成就與表現評估。它是一套經教育學術機構參照基本學力指標後所發展而成的標準化工具，其標準化的過程是：先由測驗之學者專家組成研究小組，然後進行試題編製的正常程序，如命題、修題、審題、預試、試題分析、再修題、再審題最後再進入題庫備用。

「國中基本學力測驗」的目標是期望在試題的引導之下，所有國中學生在三年的學習過程中都能享有快樂充實的歷程。在數學科的命題理念上，是希望將數學知識朝向活用於生活化的命題方式。雖然在國中三年內所學到的內容頗為有限，但是如能將這些知識充分地應用於生活上，我們相信學習者本身就具備了所謂的基本能力。

## 命題精神

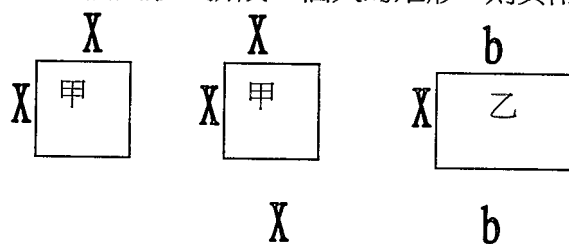
### 1. 試題需具有原創性

新課程已經如火如荼地展開，教改列車也已啓動，但現實面也須兼顧，畢竟教改不是一蹴可幾的。以目前來說，高中入學仍然是個要面對的「問題」，而「國中基本學力測驗」既然要取代眾所詬病的高中聯考作為入學的依據，則必須在命題技巧上改善有別於聯考試題，首先我認為學測一定要做到「原創性」，就是問題本身除了不能在所有學校段考或其它坊間補習班出現過之外，也要有創意。「創意試題」之所以要彰顯它的重要性，除了能凸顯時代的需求之外，乃是因為「基本學力」之本質也！

民國 90 年國民中學第一次學測數學科出現這樣的試題：

〈試題〉如圖，有甲、乙、丙、丁四種不相似之矩形，已知邊長均為正整數。其中有兩個甲，一個乙、兩個丙、一個丁。今將這六個圖形，拼成一個大的矩形，則其兩鄰邊的長分別為多少？

- (A)  $2x+1, x+b$
- (B)  $2x+b, x+1$
- (C)  $x+2b, 2x+1$
- (D)  $x+1, 2x+2b$





這道試題是「多重解法」的問題，可以用幾何剪貼的方式、可以用代數的方法，也可以用畫圖的方法解題，學生在尋找最佳解法的時候，同時也在訓練整理思考的能力。

2. 生活化的命題方式

九年一貫從 91 年至 93 年逐年全面實施，新課程具有學校本位課程與學習領域統整的特色，教學方式將會朝向生活化及靈活化發展。新課程是非常重視學童的心智發展，希望能從孩子的生活經驗出發，在自然的學習過程中透過與同儕的討論研究，建構自己所能理解的知能。因此「學測」在理念上應與課程呼應，而實施「國中基本學力測驗」的積極目的是希望藉由測驗的方式引導老師的教法，而讓所有的國中生都能經驗「自然、正常、充實而且快樂」的學習生活。因此在數學科的命題理念上，我們希望是將數學知識以口語化的方式朝向具活用於生活的命題方式。

〈實例〉民國 91 年國民中學第一次學測數學科出現這樣的試題：

圖(16)為一拱橋之側面圖，其拱橋下緣呈一弧形，若洞頂為橋洞的最高點，且知當洞頂至水面距離為 90 公分時，量得洞內水面寬為 240 公分。後因久旱不雨，水面位置下降，使得拱橋下緣成半圓，這時，橋洞內的水面寬度變為多少公分？

- (A) 240
- (B) 250
- (C) 260
- (D) 270

這個題目是相當獲得好評的，因為它不但能測驗出數學能力，同時也配合時事；但我必須指出這道題目的缺點，就是題目雖然生活化，但很不真實，世界上有一座橋長度只有 250 公分嗎？這樣講，雖然有些挑剔，但也凸顯了學測命題的困難度。

### 3. 向度廣化跳脫以往聯考偏重知識記憶及計算型考題的侷限

無論是作為門檻性或是篩選性的高中入學依據，學測既然是在強調知識在生活上的實用性，所以試題除了生活化之外，還必須與各領域結合。

請看 91 年第依次學測第 30 題，這是很實用的問題：

《問題》某公司每天晚上必須派保全人員留守，表(四)是甲、乙、丙、丁、戊五位保全人員留守值班表。該公司排班的規則如下：

(1) 按甲、乙、丙、丁、戊的順序，各排一天班。

(2) 五人排完之後再以原順序排班。

請問丙先生再下列週次中的哪一週必須留守兩次？

(A) 第 38 週

(B) 第 39 週

(C) 第 40 週

(D) 第 41 週

星期	一	二	三	四	五	六	日
週次							
第 1 週	甲	乙	丙	丁	戊	甲	乙
第 2 週	丙	丁	戊	甲	乙	丙	丁
...	..	..	..	..	..	..	..

#### 4. 具有「基本」及「能力」題性

所謂「基本學力測驗」的「基本」一詞之涵意乃指核心的、能廣泛用於生活的數學能力。而學力乃是經由一段時間的系統化教育而獲致的能力，而非學習者天賦或自然成長而來的能力。

未來國中教學應作如何改變，才能因應升學考試的變革？

目前，國家舉才及企業用人多以學歷為重，所以基本上台灣仍然是一個考試國家，試題依舊會影響教學。「基本學力測驗」如果是要作為多元入學的一個主要的工具，那麼它的目的是希望能影響學校老師改變教學方式，而引導學習者過一個「自然、正常、充實而且快樂」的學習生活。

假使學測果真能達到「考能力不考知識」、「考基本學力」及「生活化」的理想，那麼老師的教學應作如何調整呢？學生的學習又該有哪些轉變呢？

- 生活化的命題由於會有生活情境、有主題、有背景、有故事，故勢必會增加題幹的長度，對一個考生而言在短短一小時之內要作 32 題，除非有很好的閱獨能力否則是很難有好成績的。因此學校平時要緊的是培養學生的閱獨能力。
- 學測若果真是「考能力不考知識」，首先我們先要釐清「能力」和「知識」的差別。依據九年一貫新課程的精神，「數學能力」依其層次是(a)能掌握數量形的「基本」觀念 (b)日常所須之「基本」素養 (c)發展形成數學問題與解決數學問題的能力(d)發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力(e)培養欣賞數學的能力(f)培養數學的批判分析的能力(e)獲得知識的能力(g)運用知識的能力

知識性的考題和能力性的考題區別可由下兩例作說明

〈知識性的考題〉下列何者為方程式  $91x^2-53x+6=0$  的解？

(A)  $-2/7$  (B)  $-3/7$  (C)  $2/13$  (D)  $3/13$

〈能力性的考題〉

(甲) 實施「多元化教學」及「多元化評量」：「多元化評量」的口號唱得很響亮，但是我們看到的學校段考試題還是知識性或計算型題目太多，根本難以培養能力，更何況啓發孩子的智慧了。

(乙) 平時老師要注意「解題教育」：所謂「解題教育」就是以問題為中心及團隊討論的課程，在「開放」的情境下讓學習者練習先認清「問題所在？」，再研擬「解題策略」、提出「解題之道」及「找到最佳解答」培養他們在陌生的環境中勇於面對問題解決問題。

3. 學測若果真能作到「試題原創」，自然會衝激到學校數學教育。也就是說老師設計的教學活動必須要富有創意，才能激勵學習者的創造潛力；倘使老師照本宣科念教科書作參考書歷屆聯考試題

### 基本學力測驗應有的特色

基測中心標榜的

- 1.原創性
- 2.生活化試題 (知識應用的能力)
- 3.基本教義 (消除「過度學習」和「機械式練習」)
- 4.難易適中
- 5.鑑別度

1.必須表現創意 台灣基本上是個考試國家，所以「國家考試」除了在「為學校提供入學者數學科目上的學習成就與表現評估」之外，更重要的是要能對以後的教學有好的影響。事實上，一些數學能力例如作圖、證明及操作等若要以選擇題方式命題是不容易的。

- 2.生活化試題 (應用的能力)
- 3.靈活度(鑑別度)
- 4.基本教義(難易度)

我們所期待的還必須還有：

- 1.創意
- 2.閱讀的能力
- 3.靈活度

4.開放性

5.試題能檢視「情意」的教育目標

### 篩選論與門檻論 — 「國中基本學力測驗」的隱憂

「國中基本學力測驗」的成績，學理上應解讀為「已達到某種水準以上」或是「每位國中畢業生都要得到的分數」，如此才能說這位學生達至應有的基本學力水準，才能繼續下一步的學習階段。基於這樣「門檻論」的看法，學生可藉由學測的結果檢視自己學習上的優劣處，作為自己精進的依據而及時作補救學習。但是若把學測的成績作為入學分發的「篩選」工具，豈不是有違學測精神呢？其所引發的問題和高中聯考有何兩樣？況且學測所帶來的普遍的高分會不會引起考生焦慮及壓力，這也是大家須加以思考的。

不久前，監察院完成的一份教改調查報告指出，「國中基本學力測驗」無法完全測出九年一貫課程強調的「十大基本能力」：1.瞭解自我與發展潛能 2.欣賞、表現與創新 3.生涯規劃與終身學習 4.表達、溝通與分享 5.尊重、關懷與團對合作 6.文化學習與國際瞭解 7.規劃、組織與實踐 8.運用科技與資訊 9.主動探索與研究 10.獨立思考與解決問題。但我們也相信絕不可能有認何一份評量試題可以測驗出「十大基本能力」的，雖然「國中基本學力測驗」不能完全測出「十大基本能力」，但是它的命題的確可引導學校教學方式，而有助於九年一貫新課程的實施。再說，學校乃為培養健全國民而設，並非為升學作準備。教育是教育，入學考是入學考，兩者並不能混為一談的。

### 二、 數學開放性評量問題(OOPEN-ENDED PROBLEM)

從心理學觀點看，人類的創造行為是知而後行的表現；在創造的心理歷程中，帶有高度的認知成分。

「數學開放性評量問題」是一種評量型態，學生在答題時不受時空限制，也可翻閱書籍，甚至可和同儕討論。

「開放性問題」比「封閉性問題(傳統測驗)」有三個優越的地方，第一，他要求更高層次的思考和參與。第二、有更多個合適的解答。第三、學生在探索與思考這些問題之後學習會產生而非在聽教之後。底下試舉數例以區別「開放性問題」及「封閉性問題」的優劣：



(1) 封閉性評量問題：底邊長 6 公分，高 4 公分的三角形面積是多少？

開放性評量問題：請你畫一個面積是 12 平方公分的三角形。

(2) 封閉性評量問題： $(10+2\times 3-1)\div 5= ?$

開放性評量問題：請在  $\square$  內選取 + -  $\times$   $\div$  填入下列格中：

$(10 \square 2 \square 3 \square 1) \square 5 = 3$

(3) 請先畫一個白色矩形，然後在上面著色，使著色的面積佔全部的 60%

### 捌、在職教師的專業發長

#### 教師專業成長四個重要策略

**朔造願景：**教師主動討論教育機構發展的議題，例如：討論好教育的本質、課程研發、學習模式、教學評量、學習的角色定位以及在其脈絡中學生成就的比較及教學品質等。

**超越自我：**教師勇於寫出自己的教學經驗才能豐富知識，其次作品可讓人讀用，有助於教師專業知識的再造。

**改變思考模式：**社會不斷在變動，教育問題也不斷翻新，身為教師自應不斷改變思考模式解決新的問題。

**發揮團隊合作精神：**引動維繫教師的反思與組織，再促進教師探究個人的工作時，儘可能讓教師們及相關人士都參與建立夥伴間的網路。

### 玖、結語

未來社會變遷愈來愈快，知識更隨著 e-時代而加速膨脹，往往我們還沒會用一種知識之前，另一種新知識又產生了。李遠哲博士在多次場合中都說過『學比教重要』，他主張學校不要教那麼多東西，學生反而能學到更多東西。他又說『小家庭不是培養小孩的合適環境，應發展社區，構成社會完整的單位幫助小孩成長』。李遠哲雖短短數語卻已將教改理念敘述得淋漓盡致，未來教育改革的重點即是在改變學校教學模式，也就是以思考為導向、學習為中心的教學模式，這種會讓學生為學習而學習的的教學方式，將引導學生如何獲得有用的知識及如何運用知識。

發展教學活動最要緊的是要給孩子一個快樂的學習經驗，勝過於在知識本身的取

得。學校所學到的知識，很可能一生都用不到，但是一個好的學習技能及求知態度卻是高等教育的根基，是提昇國家競爭力的基礎。大學院校的教師都很清楚，基層教育若沒作好，高等教育是很難辦好的。在每一個教學事件中，都要讓學習者體會接觸知識的樂趣、每一個人都會有好表現和進步並且讓大家看得見、學習進路的通暢、參與學習是有價值的以及用心學習就會成功的信念。

教育是營造知識經濟的磐石，面對變革的時代，教育工作者能否抱持樂觀即積極的態度，將是教育成敗的主因。藉由教育系統不斷地反思與創新，教育價值將直接回饋於社會中，學習遂同時成爲新經濟時代的生產者與消費者，