

數學教學問題與改進

陳冒海

要探討「如何改進我國高中的數學教學」，當然應先瞭解目前我國高中數學教學的現狀中的一些重大弊端，以及造成這些弊端的原因何在，然後才能探究籌謀改進之道。爲此，讓我們先來探究我國高中數學教育的成效到底如何？

壹、高中學生學習數學的興趣不高，學習成就亦不理想

關於這個問題，我們似乎可以從以下的幾份研究報告中，看出此端倪：

一、大專院校聯合招生考試，數學科的考試成績往往偏低，遠落在其他各考試科目成績之後，這是大家熟知的事實。以民國六十九年度的聯招數學科的考試成績爲例（參考資料三），各組成績之高低標準如下：

組別	高	低
	標準	標準
甲	三六·五一	二三·六九
乙	一五·九九	八·五〇
丙	二九·六六	一七·八五
丁	二四·三〇	一三·七七

此表中之甲組的高低標準已加重比重百分之二十五，否則的話，其高低標準應與丙組之高低標準大約相等。

當然考試成績偏低也可能導因於試題過份偏難，那麼六十九年度大專院校聯招的數學科試題是否過份偏難呢？根據臺灣省立嘉義中學數學教師們的研究分析，該試題之內容層次分配與難易分配如下（參考資料三）：

試題之內容層次分配

組別	層次	配題	配分
甲	知識	八	三
甲	理解	五、六、一二、一三、一四	二
甲	應用	一、二、一八、一九、二〇	一
甲	分析	三、四、九、一〇、一一、一七	一
甲	綜合	七、一六、二二、二三、二四、二五	一
甲	評鑑	一五、三一、二六、二七、二八	一
乙	知識	一一、一五	七
乙	理解	四、五、二二、二三	一
乙	應用	一、二、六、七、八、一〇、一六、一七、二一	三
乙	分析	三、一二、一三、一四、二四、二五、二六	一
乙	綜合	九、一八、一九、二〇	一
乙	評鑑	二二、二七	一

試題之難易分配

組別	題類	配題	配分
甲 丙 組	簡易題 標準題 計算較繁題 難題	八、二〇、 一四、二六、 一四、一六、 一七、一八、 一九、二〇、 二一、二二、 二二、二三、 二四、二五、 二六、二七、 二八	六 五 四 三 二 二 二 二 二 二
乙 丁 組	簡易題 標準題 計算較繁題 難題	一一、一五、 二一、二三、 二四、二五、 二六、二七、 二八、二九、 三〇、 一八、一九、 二〇、二二、 二七	三 三 四 六 一 二 一 一 一

再比對該年度大專聯招數學科的試題，高低標準如此之偏低，實在不得不使人懷疑我國高中學生的數學學習成就似乎太不理想了。

二、中華民國數學研究中心研究報告第四卷（參考資料一）所刊登的「高中數學教學效果實態追蹤抽樣調查」中指出：

對數學課程是否有興趣之統計表

	高		中		立		私		全	
	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女
有興 趣	六七	四七	四一	四二	八九	四二	二八	二八	一、三三	四、五
被 動 不 得 不 學	四八	三〇	三、四	三、四	五八	三、四	二五〇	三、五	八八	三、八
不 知 道	三九	二四	三、三	三、三	四〇	三、三	一七〇	二、四	五〇	三、八
合 計	一、四四	一、〇六	一〇〇.〇	一〇〇.〇	一、八七	一〇〇.〇	七〇三	一〇〇.〇	二、五〇	一〇〇.〇
	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比

對數學課本之習題是否自己做过之統計表

	高		中		立		私		全	
	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女
完 全 自 己 做	八九	三五	三、二	三、二	九六	五、二	二九	四、〇	二四	四、八
大 部 份 自 己 做	六五	五〇	五、四	五、四	九七	五、二	二七八	三、八	一、三五	四、〇
大 部 份 非 自 己 做	六八	四二	三、八	三、八	七二	三、四	三八	四、五	一、〇九	四、三
完 全 不 是 自 己 做	三四	三七	三、四	三、四	九七	五、二	七四	一、〇、六	一七一	六、七
合 計	一、四六	一、〇八	一〇〇.〇	一〇〇.〇	一、八五	一〇〇.〇	六九八	一〇〇.〇	二、五九	一〇〇.〇
	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比	百分比

此項抽樣調查是於民國六十四年十二月四日，以郵寄方式分送下列各校自選高三二班（文理各班）學生填表的：

建國中學、北一女中、成功中學、復興中學、中正高中、新竹中學、新竹女中、臺中一中、臺中女中、彰化高中、彰化女中、臺南二中、臺南女中、高雄中學、高雄女中、花蓮中學、花蓮女中、臺東中學、臺東女中，以及（以下為私立高級中學）再興中學、光仁中學、滬江中學、衛道中學、曉明女中、長榮中學、光華女中、國光中學、道明中學。

三、國立臺灣師範大學附屬中學對六十三學年度，全國高中畢業生所作的調查報告（見參考資料二）亦指出：

學生有無預習教材的習慣

有	八三三 二〇%	無	三、一九九 八〇%	合 計	四、〇二二 一〇〇%
---	------------	---	--------------	-----	---------------

教師講解後學生對教材的了解程度

能融會貫通	二四二 六%	大部份已了解	二、八五一 六八%	僅小部份能了解	九九五 二四%	仍不了解	一〇六 二%	合 計	四、一九四 一〇〇%
-------	-----------	--------	--------------	---------	------------	------	-----------	-----	---------------

上數學課時如果發生疑問之反應

一定舉手發問	偶而發問	從來不敢發問	其 他	合 計
三五四 一〇%	二、二二三 六〇%	七三八 二〇%	三八一 一〇%	三、六九六 一〇〇%

學生學習數學之方法

一、凡學過的教材一定求其徹底了解	四八〇	一〇%
二、所有習題均逐題習作	五四八	一二%
三、有困難時，專心思考求解解答	一、一〇八	二四%
四、暗中摸索	九〇九	一九%
五、順其自然，會的就會，不會就算了	一、二五四	二七%
六、其 他	三六五	八%
	四、六六四	一〇〇%

從以上兩份資料中，我們不難覺察到高中學生學習數學的興趣與學習成就都不太樂觀了。

貳、高中數學教與學方面之主要弊端與困擾

我們都知道，造成學生學習興趣低落，學習成就不理想的因素很多，例如教學目標是否適當？課程標準之內容與教學目標是否配合？教材之呈現（即教科書之編寫）是否完美？授課時數之安排是否適當？教師之素質、教學熱忱、教學方法如何？學生的素質如何？學習態度與方法是否適當？教學設備是否完善？其他如教育行政、學生家長、社會風氣、坊間之升學參考書與補習班、大專聯招之方式與命題等都對學生的學習興趣與學習成就有影響。而這些因素中，教科書之編寫、教師之素質、教學熱忱、教學方法（包括教學評量），以及學生的素質、學習態度與方法，都跟學生的學習成就有直接而且緊密的關連。

根據筆者的瞭解，高中數學教師師資堪稱相當整齊，雖有部份教師並非師範院校之數學科系畢業，但他們很多都是理工科系畢業而且是教學經驗豐富的資深教師。高中學生的素質也應該無太大的問題，因為他們都是通過高中聯招考試淘汰的。至於教科書方面，雖有許多有待改進之處，但亦非造成目前高中學生數學學習成就不理想的主要原因，這可從中華民國數學研究中心所作的「高中數學教學效果實態追蹤抽樣調查」（參考資料一）以及國立臺灣師範大學附屬中學所編印的「數學教科書研究報告」（參考資料二）中獲得一些佐證：

一、有六四%的學校只採用一種教科書，三六%學校採用二種教科書（參考資料二第三頁）。

二、您（數學教師）認為你們採用的課本（參考資料二第四頁）

反 版 應 本	(A) 取材新穎	二二	東 華 范 氏 黃 氏
	(B) 取材尚可	六四	一〇八
	(C) 取材不當	五	三
			八
			五
			三

由上表可看出各校均一致認為各版本取材「尚可」

三、（教師）在實際上課時（參考資料二第四頁）

反 版 應 本	(A) 完全照課本	四三	東 華 范 氏 黃 氏
	(B) 部份跳過	四八	六七
	(C) 不按課本	三	四
			一〇
			二九
			一

四、您（教師）認為課本教材應（參考資料二第四頁）

反 應	版 本	實 驗	東 華	范 氏	黃 氏
(A) 重新編寫	一三	一八	〇	〇	
(B) 大部原改寫材	二三	一九	一	三	
(C) 小部原改寫材	五六	七一	二	六	
(D) 無需改寫	一	〇	一		

五、您（教師）認為您的學生適合學習版本教材嗎？（參考資料二第五頁）

反 應	版 本	實 驗	東 華	范 氏	黃 氏
(A) 適合	五六	一〇五	三	九	
(B) 不適合	二九	二一	〇		

六、就整體而言，您（教師）認為本教材在編寫上（參考資料二第五頁）

反 版 應 本 實 驗 東 華 范 氏 黃 氏	(A) 太 難	三九	一六	四	
	(B) 簡 單	〇	三	四	
	(C) 適 中	四六	一〇七	三一	

註：上述問卷之樣本取自全國公私立高中數學教師。

七、高中數學老師是否按照課本內容教學之統計表（參考資料一第二〇六頁，問卷對象在本文壹中已說明）：

是 部 份 採 用 材 料	完 全 採 用 材 料	課 外 採 用 材 料	合 計	男		女		省		立		私		立		全	
				人 數	百 分 比	人 數	百 分 比	人 數	百 分 比	人 數	百 分 比	人 數	百 分 比	人 數	百 分 比	人 數	百 分 比
七六	七三	元	一、四七	五〇	四九	五〇	四九	四四	四九	三三	三三	三三	三三	一、四六	四六	一、二七〇	四六
四一	四九	一八	一〇〇	四九	四九	四九	四九	四九	四九	三三	三三	三三	三三	一、二七〇	四六	一、二七〇	四六
五〇	五〇	一七	一、〇四	四九	四九	四九	四九	四九	四九	三三	三三	三三	三三	一、二七〇	四六	一、二七〇	四六
四九	四九	一五	一〇〇	四九	四九	四九	四九	四九	四九	三三	三三	三三	三三	一、二七〇	四六	一、二七〇	四六
四四	四九	二九	一、八三	四九	四九	四九	四九	四九	四九	三三	三三	三三	三三	一、二七〇	四六	一、二七〇	四六
三三	三三	一六	七〇	三三	三三	三三	三三	三三	三三	三三	三三	三三	三三	一、二七〇	四六	一、二七〇	四六
三三	三三	二二	一〇〇	三三	三三	三三	三三	三三	三三	三三	三三	三三	三三	一、二七〇	四六	一、二七〇	四六
一、四六	四六	一七	二、五二	四六	四六	四六	四六	四六	四六	三三	三三	三三	三三	一、二七〇	四六	一、二七〇	四六

八、對高中數學課本下列各項目中，已教過之部份那些內容較差，較好或適中之統計表（參考資料一第二〇七頁）

科目	較					差					較好				
	男性	女性	省立	私立	全部	男性	女性	省立	私立	全部	男性	女性	省立	私立	全部
	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數	人數
(三一) 極限觀念	374.1	484.8	884.7	274.7	1,084.9	146.9	54.9	346.1	46.2	156.1	51.5	310.5	6.2	156.1	51.5
(三二) 因式分解	172.8	91.8	206.9	61.8	267.0	352.2	264.4	361.9	165.3	510.5	343.9	278.4	71.0	343.9	278.4
(三三) 指數及對數函數	362.3	267.3	443.8	183.5	629.3	274.6	279.2	278.4	261.0	543.4	277.9	278.4	261.0	543.4	277.9
(三四) 三角函數	353.8	239.4	482.8	203.5	568.9	303.4	203.4	352.1	227.7	572.0	352.1	352.1	227.7	572.0	352.1
(三五) 向量	190.8	131.2	201.2	103.4	333.1	498.1	259.3	542.5	142.0	678.2	468.2	498.1	142.0	678.2	468.2
(三六) 座標幾何及解析幾何	224.4	178.6	279.4	125.8	392.5	380.5	253.8	492.8	237.3	530.6	380.5	492.8	237.3	530.6	380.5
(三七) 座標變換及線性映射	448.5	333.0	578.0	279.5	777.3	202.4	221.0	277.8	257.6	332.8	202.4	277.8	257.6	332.8	202.4
(三八) 複數	354.3	184.6	388.0	150.0	538.0	187.2	282.6	243.2	82.1	352.6	243.2	243.2	82.1	352.6	243.2
(三九) 極座標	378.5	273.4	483.5	167.3	650.5	222.4	189.8	338.2	82.1	392.3	222.4	338.2	82.1	392.3	222.4
(四〇) 排列組合	377.5	250.3	466.5	142.9	607.2	287.9	279.3	342.8	153.2	466.8	279.3	342.8	153.2	466.8	279.3
(四一) 機率	294.7	282.5	424.6	124.6	547.2	282.5	238.2	260.3	105.4	365.4	238.2	260.3	105.4	365.4	238.2
(四二) 行列式	133.8	88.0	156.8	55.7	212.2	174.2	96.8	177.9	93.3	270.9	174.2	177.9	93.3	270.9	174.2
(四三) 方程式	128.7	67.6	130.6	55.7	185.7	137.9	176.5	144.7	64.8	208.8	137.9	176.5	64.8	208.8	137.9
(四四) 其他	0.0	20.2	20.1	0.0	20.1	1.0	1.0	1.0	1.4	20.0	1.0	1.0	1.4	20.0	1.0

那麼高中數學之教學現狀又如何呢？從國立臺灣師範大學附屬中學的數學老師們曾對六十三學年度全國高中畢業生作抽樣調查，在該校所編印之「數學教科書研究報告」(參考資料二)中，我們可以發現許多教與學方面之不正常的怪現象：

二、多數老師花太多時間於補充課外問題，尤其是演算技巧問題而少去注意學生的啟發與了解，以致一半以上的學生連日常舉辦的考試都無法應付。(第三五頁)

二、出考題的老師不顧教材的內容，目的不在測驗學生對教材的了解程度，而在訓練學生應付大學聯考的能力。完全以應付聯考為依歸、為考試而考試。顯然觀念上有極大的偏差。此為目前數學教育的危機。(第三五頁)

三、有預習教材習慣的學生約佔二〇%。(第三五頁)

四、顯示數學教育無法引導學生真正的興趣，使學生樂於事先研讀。顯然教學方式及教材尚需改進。(第三五頁)

五、表現出「現在學生的急功近利，不肯多花時間了解數學」，念數學只是為了考試，如何消除這種偏差，是數學教育者應努力之處。(第三五頁)

六、顯示教學的另一面，即教師上課不依教本的順序，亦不須事先指明進度或隨意調整。課堂上沒有留下時間讓事先預習的學生發問，料係促使學生無所適從，不事先預習的原因之一。(第三五頁)

七、此現象十分可信，顯示約有四分之一左右的高中學生已完全放棄數學。雖經教師詳細講解，

仍無法了解教材內容。(第三六頁)

八、高中數學非為專攻數學者而設，仍為通才教育所必需，故應在教材上及教法上求改進，以減少不接受數學之人數。(第三六頁)

九、從上列數字看來，一般學生均自認阻礙學習的原因在於本身之學習態度(佔四三%)及不做習題(佔三一%)，而對於外在之原因指責較少。(第三七頁)

十、唯影響學生學習態度在於：

(一) 教材內容是否足以激起學習興趣。

(二) 教師教學方法是否足以啓發學習動機。

(三) 在目前的功利社會裏，數學在學生的心目中是否有實用的價值。

(四) 學校日常考試成績不理想，打擊了學生的信心(第三八頁)

十一、不做習題應為阻礙數學學習的主要原因之一。(不做習題的佔三二%) (第三八頁)

十二、完全拋棄課本，以課外講義為應付考試手段者佔二二%之多，其與數學背道而馳莫此為甚，此種數學老師應檢討，此種教學風氣應檢討。(第三九頁)

十三、一個良好的教師，並不是將課本講完再補充一些問題就算了事，他有責任將該單元的教材內容及精神內容再作一番整理、研究，設計出一套學生容易接受，能以很短時間學好的方法。學生也該信任老師，追隨老師學習簡單的方法。目前的教師不做此圖，盡是教一些與教材不配合的個別問題，學生學得支離破碎，考試當然考不好，於是教師認為學生努力不夠，學生也自認習題做得不夠

多，因為他們不能夠把所有的補充習題做完，他們從不檢討教學方法是否有問題？學習方法是否有問題？（第三九頁）

十四、上數學課時，如果發生疑問一定舉手發問的學生約佔一〇%。（第三九頁）

十五、「從不發問或偶而發問」是中國傳統式教學的特徵，此處又獲一具體的明證。外國的教師對於中國此種單向式，只有灌輸而沒有回授（*feed back*）的被動式數學常有特別的感受，只是數學特別嚴重罷了。（第四〇頁）

十六、本問項的統計顯示，本國數學教育大部份是一種缺乏動機（*motivation*）的教學，難怪成就有限，數學教育者應深自反省。（第四〇頁）

十七、學生學習數學，凡學過的教材一定求其徹底了解的約佔一〇%，暗中摸索或順其自然，會就會，不會就算了的佔四六%。（第四〇頁）

十八、顯示目前中學生學習數學缺乏明確的目標，除了應付考試外，對數學沒有任何需求。（第四〇頁）

十九、顯示目前中學生學習數學需有人熱忱的指導。（第四〇頁）

從上面的摘錄中，我們不難發現目前高中數學教育的正常實施已受到嚴重的扭曲，且其造成的影響也已非常之嚴重。試想每四個高中學生就有一個完全放棄數學（見上文之(7)與(17)）。能不使吾輩痛心疾首嗎？此外，我們也可看出造成這種不正常現象的主要可能來自以下幾個方面：

一、教材份量是否適當？是否足夠具體化、實用化？縱與橫的連繫完善嗎？習題之安排妥善嗎？

教材安排能與學生認知的程度配合嗎？再者教材之準備價值又如何？彈性夠嗎？

二、社會過份重視學位，在學位主義、升學主義、功利主義下，教師承受來自學生家長、學校當局、學生本身，甚至其他教師方面的壓力必不小。

三、大專聯招數學科之命題方式與難易度。

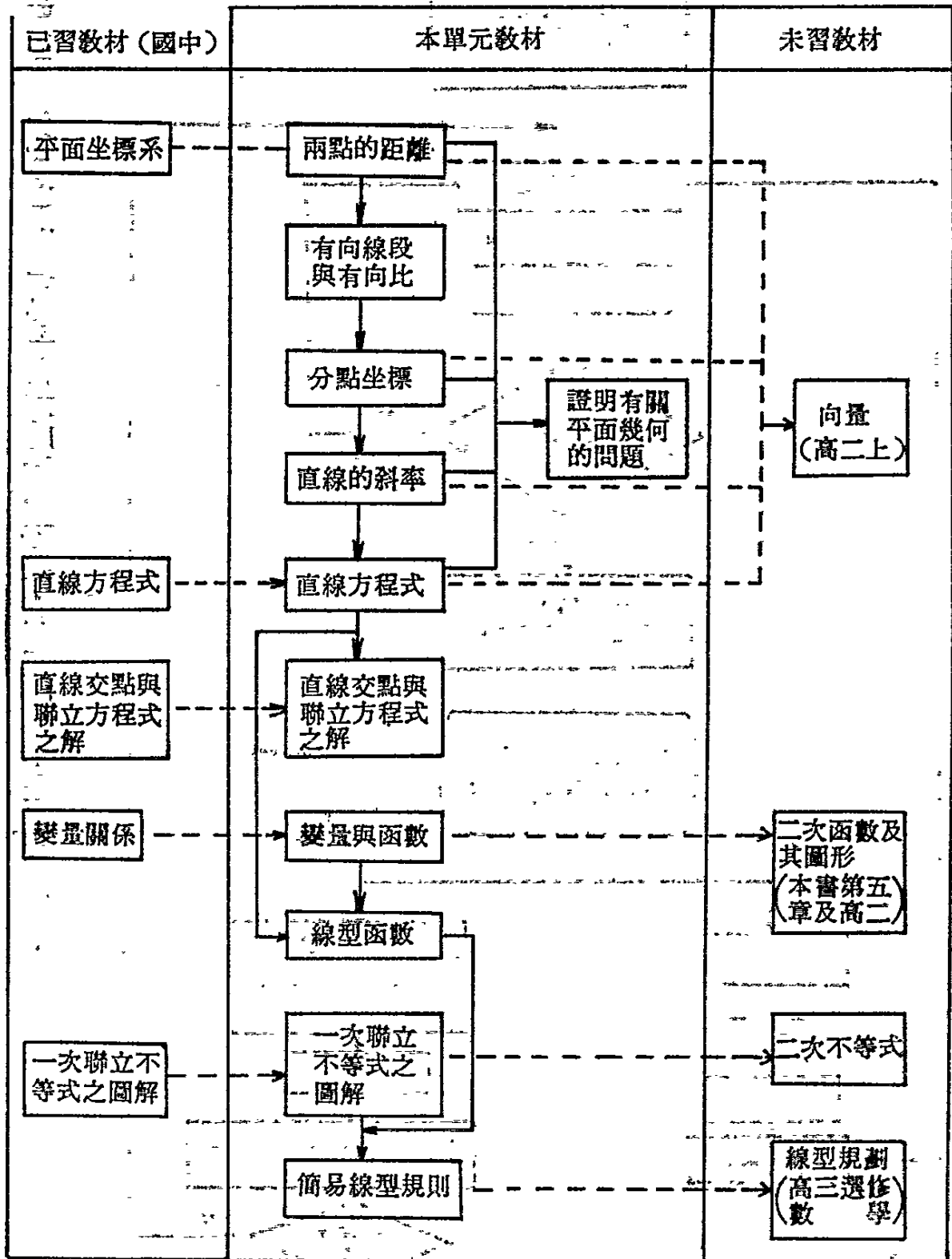
叁、正常教學之實施

從上面的分析中，我們很清楚地就可看出改進目前高中數學教學的根本途徑就是實施正常教學。

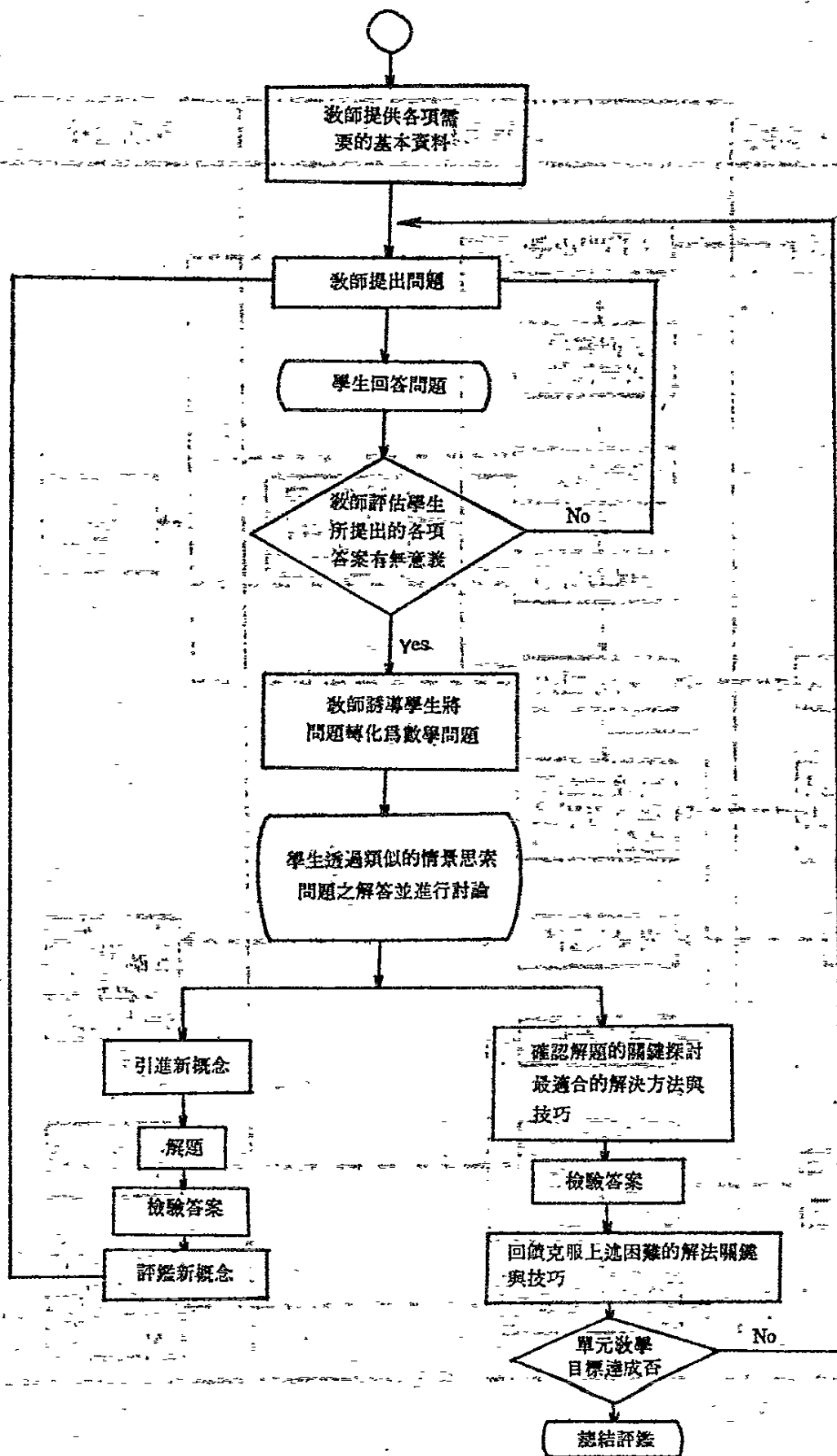
至於應如何實施正常教學，應特別注意那些事項，筆者在此針對上述教學弊端試擬幾點改進建議，望有識之士不吝指正，以收羣策羣力之效：

一、教學前，教師應認清欲教之單元教材中，應發展的主要概念與技能是什麼，該單元教材的教學目標是什麼，並作好該單元教材之地位分析（即該單元教材之主要概念的發展途徑與流程，以及它們與已習教材，未習教材間的關連性），最好也能注意到它們與大學數學課程等（如大一數學即有限數學或離散數學、商用數學、微積分、線性代數、初等統計與機率）的相關性。

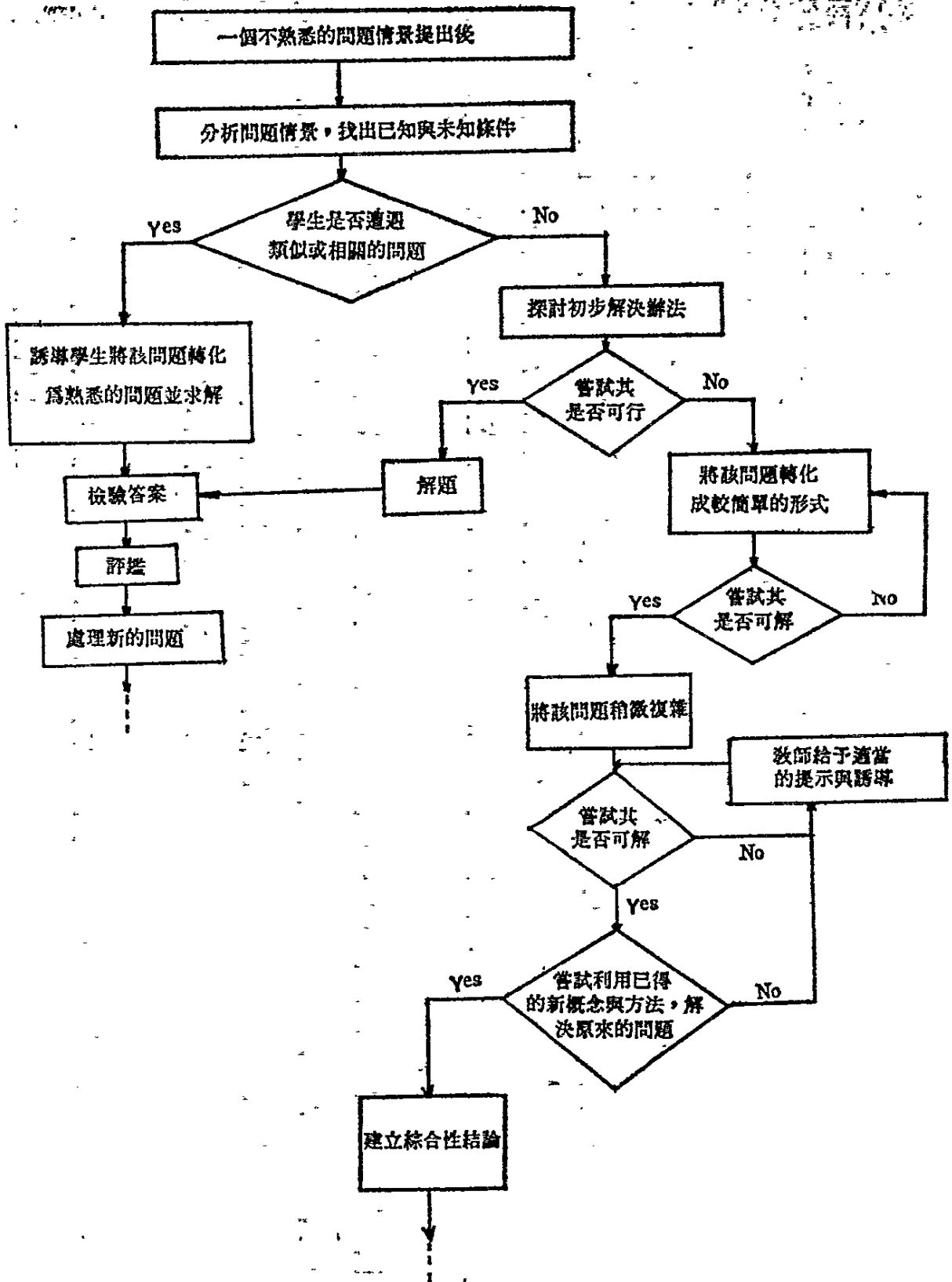
二、教學前應根據教科書內教材單元之內涵妥善作好教學活動設計，對如何來引起學生的學習動機與興趣，以及（根據已往教學經驗）學生最不容易弄清的概念，較難達成的教學目標應特別加以注意。為避免教學活動流於過份呆滯，並鼓勵學生參與，以提高他們的學習興趣，可採用解決問題式



(Problem-solving) 與誘導啓發式的教學方法，其概略的基本流程如下：



當所提出的問題是學生不熟悉者時，其處理流程大致如下：



三、過程評量問題亦應在教學前加以妥善設計好。

四、盡量利用教學資源與教具（據說有許多學校的教具都長年放在儲藏室裏，很少使用，不知是否事實？）

五、教學時應特別注意中下等學生的反應，並給予適當的鼓舞。

六、每節課都應摘要記下學生對某些問題與概念的特殊反應，以作為以後實教之參考。

七、每節課最好都能預留點時間，將該節課所發展的主要概念與解題技巧作一綜合性的總結。

八、每節課後最好都能指定部份作業，讓學生課後習作。避免等到一單元教材教完後再指定一大堆的作業。

九、學生的作業應盡可能加以批改訂正，否則亦應抽閱並在課堂上訂正討論。

十、問題求解後，應盡量鼓勵並誘導學生思索其他的解法。

十一、每單元教材教完後，最好能讓學生自己將該單元的主要概念與解題技巧等作一綜合性的總結，教師並隨時加以修正。

十二、總結性評量時應特別注意以下幾點：

（一）試題宜針對該單元教材之教學目標。

（二）試題之取材宜均勻適當。

（三）試題應避免過份偏難，以免打擊學生的學習興趣。

（四）應顧及學生的認知發展程度，避免專出些超標準或有特殊解題技巧的題目考學生。

(五) 答卷時間應該合理。

(六) 儘量避免用課本上或坊間升學參考書完全相同的題目考學生。

十三、評量後應施予適當的補救教學。

十四、自我檢討並謀求改進之道。

十五、對資優的學生亦應給予適當的輔導。

肆、後語

可喜的是前文中提及的，促使正常教學被扭曲之三個主要因素已在改善中。關於教材之革新改進方面，教育部已於民國六十六年委託國立臺灣師範大學科學教育中心組成課程研究委員會進行高中數學課程之實驗研究計劃，目前正進行實驗課程之試編，並在中正幹部預備學校進行試驗教學之工作；關於大專聯招數學科之命題方面，近幾年來難易度也較爲合理，同時大專聯招委員會也已正式公佈將改變全爲選擇題的命題方式，加考計算題、證明題等，（佔總分百分之四十以上）。同時社會大眾重視學位之程度，雖不太明顯，但亦有下降之趨勢。

樂見高中數學教育獲得改善當爲大家共同的心願。這除了有賴高中數學教師之努力外，學生家長、學校當局、教育當局等方面也應加以配合，特別是大專聯招有關方面之配合更是必需的。筆者認爲升學壓力存在一天，學校的教學就很難擺脫大專聯招之影響，因此成立一常設機構專責繼續不斷地

研究改進大專聯招命題是有必要的。

伍、參考資料

- 一、高中數學教學效果實態追蹤抽樣調查，姚景星、沈長庚，中華民國數學研究中心研究報告第四卷頁一九五—三〇二。
- 二、六十三學年度高中三年級數學教科書研究報告（附三年研究總結與建議），國立臺灣師範大學附屬中學編印，六十五年三月。
- 三、六十九學年度大學暨獨立學院入學考試數學科試題研究報告，臺灣省立嘉義高級中學編印，六十九年十二月。
- 四、六十六學年度大學暨獨立學院入學考試數學試題分析，鄭昭雄，科學教育月刊第十二期頁一五一—一八、二六。
- 五、臺灣省加強發展科學教育實施方案（上），科學教育月刊第三期頁四六—五三。
- 六、運用教學目標系統分類以改進教學，楊榮祥，科學教育月刊第三期頁七一—一四。
- 七、從皮亞傑理論看討論式教學的重要性，杜鴻模，科學教育月刊第三十八期頁一二—一五。
- 八、由一個設定的教案格式探討中等學校數學教育正常化的途徑，王振贏，南投縣立國民中學七十年度數學科研習會講稿。

九、如何教國中數學，李嘉淦，明日的國中教育頁二九七—三二四，國立臺灣師範大學學術研究委員會主編，幼獅文化事業公司印行。

十、數學課程設計和數學教育的理論基礎，林清山，科學教育月刊第十一、十二期。

十一、International Study of Achievement in Mathematics, Vol. 1&2, ed. by T. Husén, John Willey & Sons, New-York-London-Sydney, 1967.

十二、The Piaget's theory of cognitive development. B. J. Wandsworth. David McKay Company, Inc., New-York, 1971.

十三、Classroom Processes Revisited. International Mathematics Committee. IEA. Mathematics Study, College of Education, Univ. of Illinois, Urbana, U. S. A.

十四、Mathematical talent: Discovery, description and development; Stanley, Keating and Fox, The Johns Hopkins Univ. Press, 1974. Baltimore, Md. U. S. A.

十五、怎樣解題 G. Polya 原著、張燾譯、長橋出版社。

十六、You can teach problem solving. J. F. Le Blanc The Arithmetic Teacher, Vol. 25(2). November, 1977, pp. 16-20.

