

肆、美國高中數學

洪有情

美國 Addison-Wesley 公司針對高中課程的代數與三角 (Algebra and Trigonometry) 出版了一套共 14 冊的教科書及參考書籍。包括學生版教科書 (Student's Edition)、教師手冊 (Teacher's Edition) ; Problem Bank; Enrichment; Technology; Master Grapher; Investigative Activities for Master Grapher; Skills Practice and Mixed Review; Making Practice Fun; Assessment; Math Test; Management and Teaching Tools; Overhead Transparencies; Solutions Manual。

在國立台灣師範大學科學教育中心編印的國際數理科高級中學教科書比較一書 (民 82.6 出版) 中, 筆者曾對學生版的教科書作了介紹。本文係對教師版的教師手冊再作介紹, 供讀者參考指教。

一、教師手冊介紹

1. 書名: 代數與三角 (Algebra and Trigonometry)

2. 作者: Stanley A. Smith (Coordinator, Office of Mathematics (K-12), for Baltimore County Public Schools, Maryland.)

Randall I. Charles (Associate Professor of Mathematics at San Jose State University)

John A. Dossey (Professor of Mathematics at Illinois State University)

Mervin L. Keedy (Professor of Mathematics Emeritus at Purdue University)

Marvin L. Bittinger (Professor of Mathematics Education at Indiana University-Purdue University at Indianapolis)

3.出版年份與頁數：1992年，946頁

4.出版者／出版地點：Addison-Wesley Publishing Company, Inc./ 美國

5.出版文字：英文

二、教師手冊內容

除了學生版的內容在教師手冊中都有外，也增添下列內容：

本書各章的標題之前均包括：

(一)教材摘要 (Chapter Overview)：

扼要列出該章的主要內容摘要。

(二)教學目標 (Chapter Objectives)：

列出該章各單元的所有教學目標。

(三)適應 4 種不同課程的教學時數與進度之指引 (Multi- Course Pacing Guide)：列表比較 4 種不同課程的教學時數與進度。

(四)測驗的參考題目 (Multi- Course Testing References)：

提供兩份測驗題供教師參考。

本書各章裡包括：

(一)首 5 分鐘 (First Five Minutes)：

在上課之前有一個幾分鐘的復習。

(二)教學註解 (Teaching Notes)：

提供註解和提示有助於每一教學目標的了解。

(三)數學觀點 (Math Point)：

包含各種有趣的奇聞軼事、人類的展望以及背景、經歷和訊息。

(四)避免常犯的錯誤 (Avoiding Common Errors)：

藉由這些提醒，教師可以指引學生避免易犯的錯誤型式。

(五)關鍵問題 (Key Questions)：

關鍵問題能用來鼓舞課堂上的討論和提昇對數學概念的認知。

(六)黑板例題 (Chalkboard Examples)：

除了學生版的例子外，附加這些額外的例題，並附參考解答。

(七)課堂補充 (Lesson Enrichment)：

給予額外的補充。

(八)課堂小考 (Lesson Quiz)：

供給一些小考題目，讓教師在每一單元結束前對學生的學習效果作簡短的評量。

(九)隨堂練習 (Try This) 的答案：

在隨堂練習的各題旁都有附答案 (用藍色印刷)。

(十)習題和試題的解答：對於每個習題和試題，都附有解答 (用藍色印刷)。

除了上述的內容外，在本書的前幾頁也包含：

(一)如何掌握教學原則：

例如：營造良好的教室上課氣氛 (Developing a Positive Classroom Atmosphere)；將學生分成若干組 (Using Cooperative Learning Groups)；運用解題指引 (Using Problem-Solving Guidelines)；評量解題成效 (Evaluating Problem-Solving Performance)，等等均作詳細的說明。

(二)教室管理的方法與技巧：

對於課前複習；回答學生的問題；引起學習動機；隨堂練習；課堂小考；家庭作業的指定；各章節後的習題的指定；參考資料；補充教材；各類考試 (例如每一單元的小考，每一章的測驗以及學期考試) 等等。應注意事項都有詳細的解說。

(三)使用計算器及電腦：

使用計算器於代數課程以及用電腦幫助解題，用電腦繪圖等等一些原則與注意事項也有詳細的說明。

三、範 例

我們以第 9 章二次函數和變換為例加以說明。

教材摘要 (Chapter Overview)

第 9 章內容包含二次函數圖形；標準式；對稱式；平移；放大與縮小；如何求極大與極小值； x 截距與根的關係，而二次函數的問題解和大學入學考試解題策略也包含在內。

教學目標 (Objectives)

9.1

- 能寫出關於軸對稱的方程式
- 能寫出關於原點對稱的方程式
- 能判別一個函數是否為偶函數或奇函數

9.2

- 能畫出將圖形鉛直平移後的圖形
- 能畫出將圖形水平平移後的圖形

9.3

- 能畫出將圖形鉛直放大或縮小後的圖形
- 能畫出將圖形水平放大或縮小後的圖形

9.4

- 能畫出函數 $f(x) = a(x-h)^2$ 的圖形，並能寫出它的各種特徵

9.5

- 能畫出函數 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 的圖形，並能寫出它的各種特徵。
- 能寫出函數 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 的各種特徵。（在不畫函數圖形之下）

9.6

- 能寫出二次函數的標準式，以及它的頂點、對稱軸、和極大或極小值
- 能解與二次函數有關的極大、極小值問題。

9.7

- 能找出二次函數圖形的 x 截距（若 x 截距存在）

9.8

- 給定二次函數圖形或圖形上三個給定點，能寫出二次函數
- 能用二次函數解題

適應 4 種不同課程的教學時數與進度之指引

MULTI-COURSE MANAGEMENT GUIDE: CHAPTER 9

Day	Algebra 代數	Algebra w/Finite 代數 (含有限數學)	Algebra w/Tring 代數 (含三角)	Comprehensive 綜合代 數(含有限數學及三角)
1	9-1:1-24 e/o, MR	9-1:1-47 e/o, 48, MR Master Grapher: 12	9-1:1-47 e/o, 48, MR Master Grapher: 12	9-1:1-36 m3, 37-47 e/o 48, 49-54 e/o, MR Master Grapher: 12
2	9-1:25-44 e/o, Making Practice Fun: 49	9-2:1-19 m3, 20-29 e/o, 30, MR Master Grapher: 13 Technology: BASIC Project 8	9-2:1-19 m3, 20-29 e/o, 30, MR Master Grapher: 13 Technology: BASIC Project 8	9-2:1-19 m4, 20-29 e/o 30-33, MR Master Grapher: 13 Technology: BASIC Project 8
3	9-2:1-19 e/o, MR	9-3:1-27 m3, 28-37 e/o, 38, MR Skills Practice/ Mixed. Review: Skills Practice 24 Master Grapher: 14	9-3:1-27 m3, 28-37 e/o, 38, MR Skills Practice/ Mixed Review: Skills Practice 24 Master Grapher: 14	9-3:1-37 m3, 38, 39-44 e/o, MR Master Grapher: 14
4	9-3:1-27 e/o, MR Skills Practice/ Mixed Review: Skills Practice 24	Assessment: Quiz 17 9-4:1-20 m3, 21-28 e/o, 29, MR Skills Practice/ Mixed. Review: Mixed Review 17 Master Grapher: 15	Assessment: Quiz 17 9-4:1-20 m3, 21-28 e/o, 29, MR Skills Practice/ Mixed Review: Skills Practice 17 Master Grapher: 15	Assessment: Quiz 17 9-4:1-28 m3, 29-31, MR Master Grapher: 15
5	Assessment: Quiz 17 9-4:1-20 e/o , MR Skills Practice/ Mixed Review: Mixed Review 17 Making Practice Fun: 50	9-5:1-16 m3, 17-25 e/o, 26, MR Skills Practice/ Mixed. Review: Skills Practice 25	9-5:1-16 m3, 17-25 e/o, 26, MR Skills Practice/ Mixed Review: Skills Practice 25	9-5:1-25 m3, 26, 27-32 e/o, MR Enrichment: Critical Thinking 9
6	9-5:1-16 e/o, MR Skills Practice/ Mixed Review: Skills Practice 25	9-6:1-12 m3, 13-28 e/o, 29, MR Problem Bank: Problem Bank 15 Technology: Calculator 15	9-6:1-12 m3, 13-28 e/o, 29, MR Problem Bank: Problem Bank 15 Technology: Calculator 15	9-6:1-28 m3, 29, 30-35 e/o, MR Enrichment: Bonus Topic 9
7	9-6:1-12	Assessment: Quiz 18 9-7:1-18 e/o, 19, MR Enrichment: Critical Thinking 9 and Looking for Errors9	Assessment: Quiz 18 9-7:1-18 e/o 19, MR Enrichment: Critical Thinking 9 and Looking for Errors9	Assessment: Quiz 18 9-7:1-18 m3, 19-21, MR Application: Merchan- dising

-續-

Day	Algebra 代數	Algebra w/Finite 代數 (含有限數學)	Algebra w/Trig 代數 (含三角)	Comprehensive 綜合代 數(含有限數學及三角)
8	9-6:13-20, MR Problem Bank: Problem Bank 15 Technology: Calculator 15	9-8:1-14 e/o, 15, MR Application: Merchandising Skills Practice/ Mixed Review: Skills Practice 26 and Mixed Review: 18 Problem Bank: Problem Bank 16 Enrichment: Manipu- lative Activity 9	9-8:1-14 e/o, 15, MR Application: Merchandising Skills Practice/ Mixed Review: Skills Practice 26 and Mixed Review 18 Problem Bank: Problem Bank 16 Enrichment: Manipu- lative Activity 9	9-8:1-14 m3, 15-18, MR Technology: BASIC Projects 9 & 10
9	Assessment: Quiz 18 9-7: 1-16 e/o, MR Enrichment: Looking for Errors 9	College Entrance Exams: Odd and Even Problems Technology: BASIC Projects 9 & 10	College Entrance Exams: Odd and Even Problems Technology: BASIC Projects 9 & 10	College Entrance Exams: Odd and Even Problems Chapter 9 Summary and Review Problem Bank: Strategy Problem Bank 9
10	9-8: 1-5, MR Making Practice Fun: 51	Chapter 9 Summary and Review Problem Bank: Strategy Problem Bank 9	Chapter 9 Summary and Review Problem Bank: Strategy Problem Bank 9	Chapter 9 Test
11	9-8: 6-10 Application: Merchandising Skills Practice/ Mixed Review: Skills Practice 26 and Mixed Review 18 Problem Bank: Problem Bank 16 Enrichment: Manipulative Activity 9	Chapter 9 Test Ready for Chapter 10?	Chapter 9 Test Ready for Chapter 10?	Cumulative Review Chapters 1-9, pp.377- 381, problems 1-112, p. 564, problems 55- 62
12	College Entrance Exams: Odd and Even Problems			Mid-Year Test: Chapters 1-9 ready for Chapter 10?
13	Chapter 9 Sum- mary and Review			
14	Chapter 9 Test Ready for Chapter 10?			

e/o: Even or odd exercises, m3: Exercises which are multiples of 3(i.e., 3,6,9,...),
m4: Exercises which are multiples of 4 (i.e., 4,8,12,...), MR: Mixed Review exercises.

測驗的參考題目

MULTI-COURSE TESTING PROGRAM: CHAPTER 9

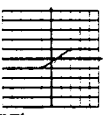
Regular Course

DC _____
CHAPTER 9 TEST NAME _____
 Form A DATE _____

8.1. Test for symmetry with respect to the x -axis, y -axis, and origin.

- $x = 3$ 1. x -axis
- $y = x^2 + 3$ 2. x -axis, y -axis, origin
- $x = y^2 + 3$ 3. origin
- $y = -x$ 4. y -axis
- $x^2 = y^2 + 4$ 5. x -axis, y -axis, origin
- $x^2 = y + 9$ 6. y -axis


Here is a graph of $y = \sqrt{x}$.



8.2. Sketch each graph on the same grid.

- $y = \sqrt{x} + 3$
- $y = \sqrt{x} - 3$

7. 8.




DC _____
CHAPTER 9 TEST NAME _____
 Form A (page 2) DATE _____

8.3. Sketch each graph on the same grid.

- $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
- $y = 3/\sqrt{x}$

9. 10.



8.4. For each function, find standard form, the vertex, line of symmetry, and the maximum or minimum value.

- $f(x) = x^2 - 8x + 2$
 - 11. $f(x) = x^2 - 8x + 2$
 - 12. **Vertex:** $(4, -14)$
 - 13. **Line of sym.:** $x = 4$
 - 14. **Minimum:** -14
- $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$
 - 15. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
 - 16. **Vertex:** $(1, 1)$
 - 17. **Line of sym.:** $x = 1$
 - 18. **Minimum:** 1

8.5. Find the x -intercepts if they exist.

- $f(x) = 2x^2 - 4x - 14$ 19. **No x -intercepts**
- $f(x) = x^2 + 4x - 1$ 20. $x = -2 \pm \sqrt{7}$

8.6. 15. Find the quadratic function that fits the data points $(-1, 6)$, $(-1, 2)$, $(1, 3)$.

15. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Advanced Course

DC _____
CHAPTER 9 TEST NAME _____
 DATE _____

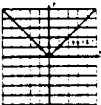
8.1. Test for symmetry with respect to the x -axis, y -axis, and origin.

- $4x = 4y$ 1. origin
- $y = \ln x - 3$ 2. y -axis

Determine whether each function is even, odd, or neither.


- $f(x) = -x^2 + 5$ 3. even
- $f(x) = -4x^2 + 3x$ 4. neither


8.2. 8. Consider the graph $y = \ln x$. Then graph $y = -3\ln x + 1$.



9. **vertex:** $(3, 0)$

10. **line of sym.:** $x = 3$




11. 

DC _____
CHAPTER 9 TEST NAME _____
 (page 2) DATE _____

11. Graph the quadratic inequality $y < x^2$.

12.



8.3. 9. Write the equation of the parabola that is a translation of $f(x) = x^2$ and has a minimum value at the point $(3, 2)$.

10. $g(x) = -(x - 3)^2 + 2$

8.4. 9. For the function $f(x) = x^2 - 4x + 1$, find standard form, the vertex, the line of symmetry, and the maximum or minimum value.

11. $f(x) = (x + 2)^2 - 3$

12. **vertex:** $(-2, -3)$

13. **line of sym.:** $x = -2$

14. **min. value:** $(0, -3)$

10. **14 m x 14 m**

8.5. 11. Find the x -intercepts, if they exist, of the function $f(x) = x^2 - x - 6$.

11. $3, -2$

8.6. 12. Find the quadratic function that fits the data points $(-1, 8)$, $(2, -2)$, and $(3, 6)$.

12. $f(x) = x^2 + 3x - 12$

13. **13. $y = 2x^2 + 4x + 5$**

11. **11. $y = 2x^2 + 4x + 5$**

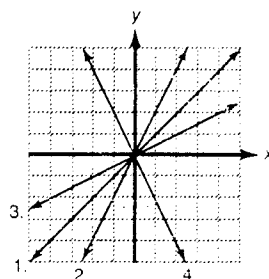
An alternate test (Form B) and a multiple choice test (Form C) are available in Assessment. In addition MathTest test-generating software, can be used to produce tests for all levels.

我們再以第三章第五節斜率為例：

首 5 分鐘 (First Five Minutes)

在同一個坐標系上，畫出下列直線的圖形

1. $y = x$
2. $y = 2x$
3. $y = \frac{1}{2}x$
4. $y = -2x$



找出直線的斜率

斜率也可定義成“上升除以延伸” (rise over run)。上升表示正y軸方向的改變量，而延伸表示正x軸方向的改變量。

指出直線的斜率與直線上所取的兩點無關，我們可以說明如下：在例 1 中選取第三個點例如(2,4)，然後分別找出過(1,2)和(1,4)的直線的斜率；以及過(2,4)，和(3,6)的直線的斜率，無論如何其斜率均為 2。

避免常犯的錯誤 (Avoiding Common Errors)

有些學生計算成正 x 軸的改變量 ÷ 正 y 軸的改變量。必須向他們強調斜率是“上升除以延伸”也就是，正 y 軸的改變量 ÷ 正 x 軸的改變量。

另外有些學生可能寫成 $\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ ，跟學生指出坐標的相減必須依相同的次序。

關鍵問題 (Key Questions)

- 欲求直線的斜率，我們必須至少找出直線上的多少個點？ 2 點
- 同一直線上，任意兩點所決定的斜率是否相同？ 是的

黑板例題 (Chalkboard Examples)

1. 求通過 (3,5) 和 (7,11) 的直線斜率。

$$\text{斜率} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 5}{7 - 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2. 求通過 (5,3) 和 (2,8) 的直線斜率。

$$\text{斜率} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 3}{2 - 5} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

斜率是負的，表示當我們由左向右移動時，直線向下傾斜

課堂補充 (Lesson Enrichment)

在斜率為 m 的直線中，找出此直線與正 x 軸所夾角的範圍。

- $0 \leq m \leq 1$? $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$
- $1 \leq m \leq \infty$? $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
- $-1 \geq m \geq -\infty$? $90^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$
- $0 \geq m \geq -1$? $135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

水平和鉛直線

強調沒有斜率的直線和斜率為 0 的直線，兩者間之差異性。

數學觀點 (Math Point)

微積分在 17 世紀由牛頓 (Newton) 和萊布尼茲 (Leibniz) 所發展，是數學上頗具影響的重大發現之一。研究微積分的一個重要主題是，找出曲線的斜率，例如 $y = x^2$ 在某一點的斜率。

直線的點斜式

在例 4 中，我們必須驗證這個給定的點 $(\frac{1}{2}, -1)$ 是否在所求出的直

線 $y = 5x - \frac{7}{2}$ 上。

這裏我們證明定理 3.5

設 P 為直線上的任意點，設其坐標為 (x, y)

則此直線的斜率為 $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

由乘法原理， $\frac{y - y_1}{x - x_1} (x - x_1) = m (x - x_1)$

化簡得 $(y - y_1) = m (x - x_1)$

課堂小考 (Lesson Quiz)

1. 找出通過 (2,4) 和 (6,9) 的直線斜率

$$\frac{9-4}{6-2} = \frac{5}{4}$$

找出下列直線的斜率 (如果斜率存在)

2. $y=5$ 斜率 = 0
3. $x=-4$ 沒有斜率
4. 找出斜率為 4 且通過 (2,3) 的直線方程式

$$y-3=4(x-2)$$

$$y-3=4x-8$$

$$y=4x-5$$

四、教師手冊之特色

1. 在每一章之前都有教材摘要，教學目標與教學時數及進度，便於教師掌握各章節各單元重點及掌握教學進度。
2. 在每一單元上課之前，提供 5 分鐘的復習題目，教師便於參考之用。
3. 除了學生版的教科書上的例子外，教學指引亦提供一些例題，方便教師教學之用。同時也提供隨堂小考的題目供教師參考。
4. 指出各單元中學生常犯的錯誤，便於教師指引學生避免犯這些錯誤。
5. 每一單元有關問題，以鼓舞課堂上的討論和提昇對教學概念的認知。
6. 參考資料提供與該單元有密切關聯的奇聞、軼事、典故、背景知識和發展史等資料，供教師選擇作補充教材。唯縱觀本書，這類參考資料似乎不夠充實。
7. 對於如何掌握教學原則；如何善用上課的每一分鐘，以及教室的管理與方法等等，都作詳細的說明與指導，對教師的教學頗有助益。
8. 本書彩色印刷，印刷裝釘精美。學生版的內容印在各頁的內側，而教師版增添的教材用藍色印刷列在各頁的外側。教師上課時使用方便。
9. 各單元的教學方法與注意事項不夠充實。
10. 欠缺各單元的評量方法與注意事項。

五、結 語

本書的特色頗多，其教材及編排形式均與國內之教師手冊迥異，僅列舉其重要部分供讀者參考指正。

六、參考資料

國際數理科高級中學教科書比較，國立台灣師範大學科學教育中心編印（民82年6月）