

3. 形成有系統的行爲目標，以作為助長優點方面的繼續發展，或弱點方面的補救教學。
4. 補救或重新教學。
5. 診斷各階段的繼續性評量，可以了解是否進行掃除困難或強化優點。

## 第二章 編製的依據

### 第一節 心理學依據

「螺旋式課程」(spiral curriculum)的原理是本測驗編製的主要根據。其基本原理是：(一)先確定有那些重要概念與原則將包括在課程單元中。(二)將應學習的概念與原則，依其難度層次盤旋前進。即要兼顧縱橫兩面的層次，使學童的經驗漸次加廣且加深。也就是說，要使診斷測驗有一定程度的廣度與深度，故必須由教材的大範圍著手，再進至特定的領域，並將試題依難易程度依序排列。

### 第二節 數概念的發展

#### 一、學習者主動地組織自己的數學知識(李詠吟主編，民82)

Resnick(1989)認為學童在學前階段，已有非數字的數量相關知識，如：大 / 小、多 / 少的基模，增多 / 減少的基模，部份 / 全體的基模，只是缺少測量的知識；另外，學童在計算上，通常有自己的計算方式，即依自己的方式來組織數與運算的知識。Ginsburg(1977)發現學童不一定全盤接納學校所傳遞的方法，偶而會採用自己覺得最合適的方法，故學習者不是被動地、原封不動地接納外界傳遞給他的知識，他以自己能理解的方式重新組合外界的知識。

#### 二、錯誤是有規則的

目前我國的小學數學教學法，只要求學生在考試前記住許多要考的數學知識，而沒有要求他們理解這些知識的形成原由(黃敏晃，民82)。沒有理解的知識都是孤立的，無法和其他的知識作任何聯結，因此也無法形成知識的結構系統；這種只求學生記住最後結果，而不重視知識的形成過程，造成學生缺乏對知識作檢驗和批判的能力。倘若學生記住了錯誤的知識或部份殘缺的知識(如文字題中有「共」字時不是用加法就用乘法)，這些概念遲早會與該生學到的其他概念相矛盾，若在產生認知衝突的關鍵時刻，不做好知識的重整工作，該生的數學記憶和學習系統即開始慢慢崩潰。

錯誤的答案產生時，學生通常不知道自己使用了錯誤的計算過程和概念，而認為自己所使用的計算過程是正確的，錯誤是隨機出現的，以致不去檢視答案，雖然有時會懷疑自己的答案而想檢查卻苦於無從下手。

### 1. 導致錯誤概念的原因

Van Lehn (1983) 提出修補理論 (repair theory)，來說明學生解題錯誤的發生是因學生使用不完整算術法則，而面對解題困境時，學生主動運用過去習得的其他法則來解題所造成，這是一種學生自行建構的知識的重整及智慧創作。Aslock(1990) 和 Cebullski(1984) 指出學生計算錯誤並非由於粗心或缺乏過程性知識 (procedure knowledge) 所造成的。錯誤是由於不完全的學習和漸漸養成習慣所造成的 (Baxter & Dole, 1990)。就以上多位學者的論點，研究者認為：兒童解答算術問題時系統性的錯誤，是來自內在知識的運用。

利用錯誤型態的規則性來推論個體內在算術運算的架構，是研究者常採用的研究方法之一 (Resnick & Ford, 1984)。Resnick & Ford 認為錯誤的來源有二：其一來自個體過度地概化某些已習得之運算規則；其二是因個體忽略了運算規則中的某些限制。

### 2. 文字題錯誤類型之分類

文字題之所以困難，主要是因為把語文式的數學變成形式的數學涉及許多的轉換所產生的。其錯誤的來源有四 (鄭昭明，民 79)：

- (1) 兒童可能仍未能使用某些構念 (schemata)，尤其是「比較」構念。
- (2) 只注意文字的表面線索往往導致錯誤的回答 (例如：只注意「較多」或「較少」的字眼)。
- (3) 一個未知數量若不置於題目的末尾，則使得問題的表徵更易出現錯誤。
- (4) 語言的概念與數學的符號並沒有穩定不變的關係，即數學符號的運作意義可能與一般語言的運作意義不同，以致兩者間的翻譯出現錯誤。例如：乘號有「倍數」的意義，但一公尺的布用去了  $\frac{1}{3}$ ，基本上有「減少」的意義，因此用乘法去求「剩下多少」或「用去多少」顯然是有衝突的，除非分式相乘具有「減少」的理念，否則學生是容易在這類題型出現錯誤的。

### 3. 計算錯誤類型之分類

Baxter & Dole (1990) 將不正確的反應或錯誤分為兩種：粗心（或隨機錯誤）和系統性（一致性）的錯誤。

Ginsburg(1987) 對學生在計算上的錯誤類型分為三類：

- (1) 對數字運算的錯誤；
- (2) 偶而的錯誤 (slips)：是在執行過程中，小小的缺陷。通常偶而的錯誤被視為粗心，而不會多加注意，因其產生原因不是由於基礎的算術概念迷失或是嚴重的計算過程不足；這錯誤通常發生在學生匆忙之際、分心或一下子要回憶太多的東西所導致；
- (3) 永久的錯誤 (bug)：非上述 slips 所導致的錯誤，而是系統性的錯誤策略所導致的，可算是一個有組織的方法，是由一致性的過程所產生的錯誤。

Englhardt 於 1982 年將計算錯誤分為四類：

- (1) 機械性的錯誤 (mechanical)：由於知覺動作困難或動作困難所導致的，如：錯誤的符號或排列錯誤；
- (2) 粗心 (careless)：沒有將心思放在作答上；
- (3) 概念 (conceptual)：由於缺乏或不正確的概念或原則所導致，如：對 0 或減法的錯誤概念；
- (4) 過程 (procedural)：由於錯誤的順序或不適當的過程所導致。

Lerner(1988) 對學生常犯的計算錯誤類型分成四類：位值錯誤 (place value)、計算錯誤 (computation)、計算過程錯誤 (using the wrong process)、由左而右計算 (working from right to left)。

由以上各學者的論點可知：學生的錯誤包含系統性與偶發性的而準確的運算是數學解題的先備要件之一，所以，找出學生的系統性錯誤是數學教學者相當迫切的課題。

### 三、因情境而異的數學認知

未上過小學的孩童都採用重組及一些類似聯結和移位的方法來做加減乘除的問題，這說明了孩童原來會因情境不同而使用不同的運算，學童有他的原始的數學解法及可能產生的錯誤概念，這解法與概念，並不侷限於某一特殊的年齡群，故學童的原始解題，往往不受學校教學的影響。學校的數學教育應從學童的自然解題法開始，來輔導學童發展較高層次的解法，如此方可有助於學童的解題發展，成為最根本有效的教學。故學校的數學教學應運用學童已有的數學能力來教導，進而將正式數字符號、公式清楚的傳遞，使學童能正確組織學校所教授的數學知識，將數學知識做最佳的融合。

### 第三節 現行課程的依據

爲了解現行數學課程的組成，及掌握八十二公佈預計八十五年推出之新教材的課程標準，以利測驗的內涵的界定，在準備階段，本研究小組人員分析現行國民小學數學課程之全部教材，包括課程標準、課本、教學指引、習作及相關之參考教材；另外，爲了因應未來新教材的推出，及使本測驗具有前瞻性，研究者也參照新教材的課程標準與部份推出之實驗教材（實驗課本、習作與教學指引）與新教材所提出的學生自行建構解題的構想等來編製測驗。

### 第四節 現有測驗的依據

#### 一、KeyMath-R 算術診斷測驗(Connolly et al,1988)

在現有數學能力診斷測驗中，KeyMath Revised: A Diagnostic Inventory of Essential Mathematics(KeyMath-R) 被選爲本測驗的主要參考對象。這是由於它具有以下幾個特點：

- 1.在結構上極爲符合螺旋式課程的原理，在內容上強調功能性數學，融合傳統算術與新數學的要素。
- 2.它所評鑑的數學能力範圍相當廣泛，包括下列三個領域與十四個分測驗：
  - (1)概念：認數，有理數(分數、小數、百分率)，幾何。
  - (2)運算：加法、減法、乘法、除法與心算。
  - (3)應用：測量、時間與金錢、估測、統計圖表與解題。
- 3.它提供了一目瞭然的診斷側面圖，能同時提供三個層次的診斷資料(測驗總分、領域得分、分測驗得分)，便於作分析性的診斷。
- 4.試題可依教學須要加以組合，使測驗與教學得以密切配合。
- 5.信度與效度皆令人滿意。
- 6.測驗實施的方法簡單，測驗的題目設計新穎(以畫架式折板展示，易取得受試學童的合作)，適用範圍從幼稚園至九年級。

#### 二、美國全國性數學評量

美國於 1990 年進行第五次數學評量，其中將數學能力分爲概念理解 (conceptual understanding)、程序知識 (procedural knowledge)、及解題 (problem solving)。其中解題能力之評估原則是本測驗編製解題策略部份的依據，其大綱如下 (謝豐瑞，民 82)：

- 1.辨識並明確的陳述問題之能力。
- 2.瞭解題目中所給資料的充分性及一致性之能力。
- 3.運用策略、資料、模式及相關數學之能力。
- 4.一般性、擴充、及修改過程步驟之能力。
- 5.以空間圖形分析、歸納法、演繹法、統計分析等方式提出解題步驟的理由之能力。
- 6.判斷解答的合理性及正確性之能力。

### 三、英國數學發展評量

英國科學教育部、北愛爾蘭教育部、威爾斯教育局等組成評量表現單位 (Assessment of Performance Unit, APU)，APU 數學評量架構的一大向度是以學習結果來分類，其在認知方面的結果分類如下：

- 1.概念(concepts)：概念的學習結果是以須記憶關係的題目來測驗。
- 2.技能(skills)：技能的學習結果是以學童曾經練習過的例行性問題來測驗。
- 3.問題解決策略(problem solving strategies)：學習結果的評量項目有處理資料、陳述問題、解決問題的策略和方法、推廣解答、證明、評鑑結果，以紙筆測驗或一對一的實際晤談測驗二種方法來評量。

### 四、國際數學成就評量

在認知行為的評量方面，國際數學成就評量就計算、理解、應用、分析四個層次加以評量，各層次所包括的能力如以下。

- 1.計算(computation)：記憶特殊事實的能力、使用術語的能力、執行運算的能力。
- 2.理解(comprehension)：概念的能力、記憶數學原理、規則和通則的能力、轉換問題要素的能力、遵從一定思考方向的推理能力、閱讀和解釋問題的能力。
- 3.應用(application)：解決例行問題的能力、比較的能力、分析資料的能力、辨認組型、同構和對稱的能力。
- 4.分析(analysis)：解決非例行問題的能力、發現關係的能力、構成證明的能力、形成和驗證通則的能力。

本研究小組人員綜合上述各測驗的特性及評量的重點，並配合現行數學教材，來編製符合國小學童使用的數學診斷測驗，以期能適切的診斷學童的學習困難之處，並依據本測驗的診斷結果來提供適當的處方，來提昇學童的學習成果。