

教學節數：小 1(每週 3.4→4 節)、小 2(每週 4.4→5 節)、小 3~小 6(每週 4.3→5 節)；國中數學增加 75 節(315 節→386 節，約 22.2%)，中 1 與中 3 數學每週增加 1 節(3 節→4 節)(林宜臻，2009；文部科学省，2008a、e)。

2) 重新檢討指導內容的系統性

以數理的國際通用性、培養擔任學術研究及科學技術的人材、培養全國民具備必要的科學素養的觀點重新檢討數理內容的系統性。

3) 整備教育條件

充實數理教育內容外，也整備數理教育的條件，例如改善教職員數以充實習熟度別與少人數的指導、活用外部人材以為高年級專科教師、充實促使反覆學習與自我發展的教科書等。

(五) 美國

1. 美國數學課程沿革

(1) 新數學運動

1957 年蘇俄發射人造衛星「史潑尼克一號」(Sputnik I)，美國學術界驚覺其科學教育落於蘇聯之後，1958 年成立學校數學研究組，編寫中學數學教材，開啟「新數學運動」，1960 年代幾乎波及所有西方國家，「新數學運動」旨在加強數學課程的現代化，培養高級技術人才，因此在中學數學課程中引進集合、純邏輯和抽象概念等現代數學概念，強調知識的結構，促使數學課程結構化、代數化，歐氏幾何代之以公理，學生提早接觸現代數學的概念與方法。

(2) 回歸基礎

「新數學」過於強調數學結構與抽象，學習障礙；忽視推理的培養、數學的實際應用，以及的培養，造成學生計算能力及應用能力的低落，「新數學」課程改革失敗之後，1970 年代「回歸基礎(Back to Basics)」重新重視學生的基礎知識和基本技能的培養，強調反覆演練以熟練各種數學的基本計算。

(3) 重視問題解決

鑒於：「回歸基礎」過於強調基礎，引發學生的解決問題及理解概念的數學能力下降；過於偏重理論結構，忽視應用的傾向；國際數學評比的排名低落，以及社會需要能應用數學思考解決問題並能處理資訊的公民，美國自 80 年代起重視問題解決，1983 全國教育卓越委員會(National Commission on Excellence in Education)發表《處於危險中的國家(A Nation at Risk)》的報告中，指出包括數學教育美國公教育的一系列問題(National Commission on Excellence in Education, 1983; Pascopella, 2007)。全美數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) 於 1980 年公布的《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議(An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s)》，8 項建議中的第 1 項建議為：「問題解決必須成為 18 世紀學校數學的核心(problem solving should be the focus of school mathematics in the 1980s)」將解決問題作為 80 年代數學教育的核心(NCTM, 1980)。

(4) 標準導向

直至 1989 年 3 月 NCTM 公布美國第一套的課程及評鑑標準《學校數學課程與評鑑標準(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)》前，美國沒有國家的課程標準，而由學校根據各州及學區自行設定的各學年的指導內容設計課程。該標準具體提出了五項目標：① 重視數學的價值；② 對自己的數學能力有自信；③ 具解決數學問題的能力；④ 學會數學溝通；⑤ 學會數學的思考方法，並將 K-12 分為 K-4、5-8、9-12 三個階段，按階段擬訂課程標準，內容由記憶事實與計算方法轉為概念的理解、數學的多種表達、數學的問題解決、連結以及模型化，重視統計、機率及離散數學(NCTM,1989)。然而以「問題解決」作為數學課程的核心，雖教會學生解決問題，學生學會數學的思維，卻有一定的侷限。於是 NCTM 自 1996 年開始籌備課程標準的修訂，採納各方回饋、爭辯與反省的意見，針對 1989 年《學校數學課程與評鑑標準》進行澄清和評鑑，2000 年 4 月公布以「公平原則」、「數學課程原則」、「教學原則」、「學習原則」、「評量原則」和「科技原則」等六條原則為前導的《學校數學的原則和標準 (Principles and Standards for School

Mathematics)》(NCTM,2000)，以為制定課程標準的基礎，而進而建立高品質的數學教學，該標準將有關課程內容、評鑑、教學和評量等的 1989 年《學校數學課程與評鑑標準》、1991 年《數學教學的專業標準 (Professional Standards for Teaching Mathematics)》以及 1995 年《學校數學的評量標準 (Assessment Standards for School Mathematics)》三種標準合而為一，便於教師更容易掌握教學內容、如何教以及如何評量，並將 K-12 原分為三個階段改為 Pre-K-2、3-5、6-8、9-12 等四階段，使教師能夠更加具體明確地掌握各個階段數學教學的內容、方法和要求。

如前所述，美國沒有國家的課程標準，而由學校根據各州及學區自行設定各學年的指導內容設計課程，以致「第三次國際數學與科學教育成就研究(Third International Mathematics and Science Study, TIMSS)」的國際評比中，因內容廣、深度淺而且零散，美國數學課程被嘲諷「1 哩廣而 1 吋深(A Mile Wide and an Inch Deep)」(Schmidt, McKnight, and Raizen, 1996)，此外，2002 年實施《沒有落後學生法案(No child left behind act)》時，也發現各州設定的每學年目標及各學年內容的位置並不一致。因此，以明示各學年學習內容的核心點，及課程首尾一貫的目標下，NCTM 在 2000 年《學校數學的原則和標準 (Principles and Standards for School Mathematics)》的基礎上，將重要的數學內容系統化安排，出版《課程焦點：追求一致性 (Curriculum Focal Points: A Quest for Coherence)》, 明示各學年數學核心課程內容，將課程內容分為「數與運算」、「代數」、「測量」、「幾何」，以及「數據分析」等類別，並對每一個年級學生必須掌握的內容進行了描述，年級不同要求也就不同，如表 4 所示：從 K-12 的每個年級都列有三個主要數學目標，明示每個年級應該學習的基準和掌握的要點，使課程得以首尾一貫，確定每年教什麼樣的關鍵數學技能與知識 (清水美憲，2007；NCTM，2006；Pascopella，2007)。

表 4：美國 1-八年級主要數學目標

年級	課程焦點 Curriculum Focal Points
1	數與運算、代數：發展對加、減的理解，以及基本的加減法。

年級	課程焦點 Curriculum Focal Points
	<p>數與運算：發展對整數關係的理解，包括聚十與一(grouping in tens and ones)。</p> <p>幾何：組合與分解幾何圖形。</p>
2	<p>數與運算：發展對十進制和位值的理解。</p> <p>數與運算、代數：發展能迅速以基本加減法進行多位數加減計算並能流暢通過位</p> <p>測量：發展對線性測量的理解與測量長度的技能。</p>
3	<p>數與運算、代數：發展對乘除的瞭解及有關基本乘法及其相關除法的策略。</p> <p>數與運算：發展對分數和等值分數的理解。</p> <p>幾何：描述和分析平面的特質。</p>
4	<p>數與運算、代數：發展能迅速想起基本乘法及其相關除法，進行整數乘法的流暢計。</p> <p>數與運算：發展對小數的理解，以及分數和小數的關係。</p> <p>幾何：發展對面積的理解，並求出平面圖形的面積。</p>
5	<p>數與運算、代數：發展對整數除法的理解且流暢的計算。</p> <p>數與運算：發展對分數及小數加減法的理解且流暢的計算。</p> <p>幾何、測量、代數：描述立體形狀並分析包括體積和表面積的性質，。</p>
6	<p>數與運算：發展對分數及小數乘除法的理解且計算流暢。</p> <p>數與運算：將比例(ratio)、比率(rate)與乘除連結 (Connecting ratio and rate to multiplication and division)</p> <p>代數：用數學表達式和方程式書寫與解釋。</p>
7	<p>數與運算、代數、幾何：發展對比例及相似性的理解及應用。</p> <p>測量、幾何、代數：發展對立體面積和體積公式的理解，並應用於計算。</p> <p>數與運算、代數：發展對有理數運算的理解，並求解線性方程式。</p>
8	<p>代數：分析、說明並求解線性方程式。</p>

年級	課程焦點 Curriculum Focal Points
	幾何、測量：分析二維與三維的空間，並利用距離和角度計算。 數據分析、數與運算、代數：分析和彙整數據。

(5) 概念與運算何者為先的論辯

1989 年的《學校數學課程與評鑑標準》公布後，各州的數學主要課程據此重新改寫，評量方式也隨之翻修(Roitman,2000)。加州於 1992 年以 NCTM 公布的《學校數學課程與評鑑標準》為基礎，訂定《加州公立學校數學課程綱要(Mathematical Framework for California Public School)》，在偏重教學法忽略數學知識內容的批評下，加州學術標準委員會(California Academic Standards Commission)另行制定，於 1997 年向加州教育評議會(California State Board of Education)提出，數學家無法認同該新課程強調概念理解而忽略學生數學計算能力的養成，因此評議會責由 Stanford 大學數學教授組成的小組修訂，約經兩個月，提出反應部份專業數學思維的《加州 K-12 數學內容標準 (The California Mathematics Academic Content Standards for Grades K-12)》。然而該課程著重技巧輕忽分析，深恐新數學課程標準將重蹈 1960 年代一樣是由數學家所主導的「新數學」之轍，因此公布後引發批評。美國數學戰爭雙方最主要的爭議點為究竟是須具備純熟的數學運算練習才能引出真正的概念理解，或是須先理解數學概念才能進行有意義的數學運算。Roitman(1999) 認為數學戰爭根本不存在，只是知識論的建構主義「知識是主動建構的結果，而非被動接受的產物」的信念，被誤解讀成「學生應該自我發展解題策略，老師不宜過度介入」的教學法，反對 NCTM 課程的數學家被誤解讀成反對課程改革運動，事實上，數學家也投入諸如非營利組織的 Project SEED 等 K-12 的課程改革運動，數學家並非反對課程改革運動，而是數學家認為只要聘用訓練有術的數學家及專精的教師(master teachers)擅用蘇格拉底的詰問法(Socratic method)，即使直接教學還是能成功教會低成就學生更高層次的數學(劉柏宏，2004；<http://www.projectseed.org/>)。NCTM

在撰寫 2000 年公布的《學校數學的原則和標準》草案的 26 位委員中，有 5 位來自美國數學學會的數學專家，而且制定過程公開，設有監督委員會(oversight committee) 掌握《標準》的前瞻性，NCTM 協會(NCTM Board)則對組織架構行使同意權，複審組(Association Review Groups)負責初稿形成過程中問題的回應及事後批判 (Roitman,2000)。

(6) 實證研究導向

美國公民的數學素養與中小學數學教育面臨如下問題：78%的成人不會計算貸款利率；71%不會計算每加侖汽油所能夠走的里程數；58%不會計算一成小費的金額(Phillips,2007)；多數的成人與學生對於分數仍有困難(Hecht, Vagi, & Torgeson, 2007;Mazzocco & Devlin, in press)； National Assessment of Educational Progress(NAEP)指出 27%的八年級學生不能正確畫出矩形的；數學成績達到熟練水準(proficient level)僅 32%、12 年級學生達到熟練水準甚至只有 23% (U.S. Department of Education, 2004)；在 Trends in Mathematics and Science (TIMSS)的國際測試中，發現八年級學生的表現較四年級學生差，自 1995 年迄今，12 年級學生的表現一直很差(Evan & Olchefske,2006)；美國揭示 2000 年擬達到四、八、十二年級學生在數學等核心課程達到的一定能力(第三條)，並預期美國學生數學與科學表現領先世界(第五條)的全國性教育預期目標 (McCarty, 2005)，然而，美國學生 PISA2000 在 31 國中列居第 19 名，平均成績為 493 分；PISA2003 在 40 國中列居第 28 名，平均成績為 483 分，兩者都低於 OECD 國家的平均值的 500 分；PISA2006 年在 57 國中列居第 35 名，平均成績為 474 分，低於 OECD 國家 498 分的平均值(Organisation for Economic Co-operation and Development, 2001, 2004, 2007)等諸多嚴重問題(National Mathematics Advisory Panel,2008：3-4)。

美國布希總統為確保成為世界領袖的地位並改善學生的數學，簽署總統行政命令，於 2006 年 4 月 18 日成立國家數學諮詢委員會(National Mathematics Advisory Panel[NMAP]，主席 Larry Faulkner)，NMAP 由數學家、認知學家和數學教育家組成，下設置概念知識與技能(Conceptual Knowledge and Skills)、學習過程

(Learning Processes)、教學實踐(Instructional Practices)、教師與教師教育(Teachers and Teacher Education)、評量(Assessment)等 5 個工作小組(Task Groups)，針對可用證據，進行詳細分析；並設置證據標準(Standards of Evidence)、教材(Instructional Materials)、全國代數教師調查 (National Survey of Algebra Teachers)等 3 個小組委員會，擔任委員會的特別諮詢功能，論辯數學訓練是否能同時加深學科見解，再利用數學教學和學習的相關研究成果解答前述兩派爭議的焦點在於數學如何教才會使學生擁有基礎數學能力，從而順利銜接進階課程。向總統和教育部長提供「什麼是為學習代數打好基礎的最好數學教學法」的建議(Pascopella，2007)。NMAP (2008)共參閱了 16,000 萬份研究出版物和政策報告，聽取 110 位公開證言(public testimony)，檢視 160 篇機構與個人的評論以及分析來自 743 位代數教師的調查結果，最後形成 8 份小組報告，綜合分析後形成總報告，將美國未來數學教育改革方向植基於實證研究的後設分析。

2. 美國數學課程特色

NMAP 的總報告點出許多不曾被重視的改革重點，為提升數學教育提出許多具體可行的方法，為美國形塑數學教育的改革方向(National Mathematics Advisory Panel,2008)，茲就其建議改善數學教育的管道以及有關課程內容及教與學之建議，分述如下：

(1) 數學教育改善管道

NMAP 發現學生的四則運算能力及分數能力不足，將造成無法進一步學習代數及其他高等教學，認為改善數學教育應從如下六方面著手(NMAP,2008:13-14)：

- 1) 有效組織中小學數學課程，從低年級開始重點學習一系列最關鍵的數學內容。
- 2) 將研究所得 (例：①及早學習的益處；②「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果；③ 數學成績決定於努力程度而不是能力) 加以應用。
- 3) 具備豐富數學知識的課堂教師在數學教育中扮演核心角色，宜有計畫性吸引及培養未來教師，加強評鑑激勵與留住有效能的教師。

- 3) 特定教學方式只有在特定的條件下才能有效發揮作用，不執著於特定教學方式。
- 4) 測驗宜著重於代數學習所須的先備關鍵知識與技能，以改善美國全國教育進展測驗(National Assessment of Educational Progress, NAEP: NAEP 起自 1969 年，係針對不同課程領域學生所學的知識與能力的測驗，屬標準參照)與各州的測驗品質。
- 5) 加強全國數學教育研究的能力，以為改進數學教育政策與教學實踐。

(2) 課程內容及教與學之建議

NMAP 針對美國中小學數學「課程內容」、「學習過程」、「教師教育」、「教學實踐」、「教材」、「考試」、「數學教育研究」等 7 方面提出 45 條結論與建議，以為美國數學教育改進用，以下就「課程內容」、「學習過程」、「教學實踐」之建議分述如下(NMAP,2008)：

1) 課程內容建議

- A. 中小學數學課程的數學學習應著重於使學校代數成功的內容，前後一貫循序漸進，應強調熟練關鍵主題(key topics)及避免年復一年重複相同主題。
- B. 從 K-8 的教學要求宜明確化，並論及代數在整個數學課程中的角色，委員會希望學生在高中畢業前至少能夠學完代數 II (Algebra II)的內容。
- C. 應將表 1(NMAP,2008:16)有關學校代數的主題內容(符號與表徵、線性方程式、一元二次方程、函數、多項式及組合與有限機率)，視為學校代數課程的架構、課程、教材和期末測驗的標準。
- D. 從 K-8 數學教育的主要目標應使學生熟練分數(包括小數、百分數、負分數)，為學習代數打好基礎。整數的熟練對分數學習是必要的，如同測量和幾何也是必要的。整數、分數以及某部份的測量和幾何(例相似三角形、周長、面積、體積和表面積等)是學習代數的關鍵基礎。
- E. 為使學生在 K-8 能有效學習，NMAP 於表 2(NMAP,2008:20)針對整數、分數以及部份的測量和幾何(例相似三角形、周長、面積、體積和表面積等)

制定了一系列建議性的基準(Benchmarks)。建議將這些基準用於課堂教學、教材開發和州級測驗的指導。

F. 所有學區應確保所有準備學代數的學生有機會學習真正的代數(authentic algebra course[指表 1 的內容及表 2 的基準所要求的代數課程]) 並且讓比現在還要多的八年級學生學到。

2) 學習過程建議

(A) 培養學生概念理解、計算流暢以及問題解決的能力：教師應當全面培養學生概念理解、計算流暢以及解決問題的能力，為學習代數做準備。為使整數計算流暢力，須足量及適當的練習，使學生發展到加減乘除自動化的程度，還須理解交換律、分配律、結合律等核心概念，以及有練習的經驗，將使概念與算則相互增強。

(B) 藉由小組學習改善學生學習數學的社會、感情和動機因素：研究發現小組學習可以改善學生學習數學的社會、感情和動機因素，並有助於改善學習代數的主要障礙的分數(含小數與百分數)學習。

(C) 學童由「注重能力」轉為「努力能變得更棒(smarter)」的信念，將有助於數學學習的投入，從而提高數學學習成績。

(D) 能否學習某一數學概念與否，大多數是端賴於先前的學習機會(prior opportunities to learn)，此觀點已打破某一數學概念的學習，必需等到大腦成熟到某一程度不可的假設(NMAP,2008：19-20)。

3) 教學實踐

教學實踐 (Instructional Practices)的建議中指出：

(A) 「以學生為中心」，或是「教師主導(teacher directed)」的教學方式，何者為宜，都得不到研究的支持，研究並不支持擇其一的教學方式。

(B) 「小組協助的個別化學習(Team Assisted Individualization, TAI：首先根據診斷測驗結果，形成個別化的問題，由不同能力學生組成相互幫助的小組，並有特別教師指導(specific teacher guidance)，以及根據小組及個人兩

者表現給予獎賞的學習方式)」對概念理解及問題解決的效果雖不明顯，但能夠改善學生的計算技能。

- (C) 經常性實施形成性評量(formative assessment)能夠改善小學生的數學學習。
- (D) 使用「真實世界(real-world)」的情境引入數學概念，有助於涉及類似「真實世界」問題的測驗成績提高，但對於計算、簡單文字題以及解方程式並無助益。
- (E) 清晰教學(Explicit Instruction：教師提供解決問題的明確示範，學生參照示範使用於新的學習策略和技能並進行大量練習，而且大聲說出思考過程，以獲得充分回饋的教學方式) 非適用於所有學生，但有助於文字題及計算有困難的學生，對無能力學習(learning disabilities)者及一般的班級名列於後三名者也有效。
- (F) 11 項長期的嚴謹研究(僅一項研究少於 20 年)發現，使用計算器對學生的計算技能、問題解決能力、概念形成能力的影響有限或沒有影響 (NMAP,2008：22-24)。