

年度	教學時間(每週)	目標	課程內容
		<p>的能力。</p> <p>4.發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。</p> <p>5.培養數學的批判分析能力。</p> <p>6.培養欣賞數學的能力。</p>	
92	<p>1.七、八年級 3-5/28 節</p> <p>2.九年級 3-5/30 節</p>	<p>1. 培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。</p> <p>2. 學習應用問題的解題方法。</p> <p>3. 奠定下一階段的數學基礎。</p> <p>4. 培養欣賞數學的態度及能力。</p>	<p>1.數與量</p> <p>2.幾何</p> <p>3.代數</p> <p>4.統計與機率</p>
97	<p>1.七、八年級 3-5/28 節</p> <p>2.九年級 3-5/30 節</p>	<p>《總體目標》</p> <p>無</p> <p>第四階段(國中一至三年級):</p> <p>1. 在數方面,能認識負數與根號數之概念與計算方式,並理解坐標表示的意義。</p> <p>2. 代數方面則要熟練代數式的運算、解方程式,並熟悉常用的函數關係。</p> <p>3. 幾何方面要學習三角形及圓的基本幾何性質,認識線對稱與圖形縮放的概念,並能學習簡單的幾何推理。</p> <p>4. 能理解統計與機率的意義,並認識各種簡易統計方法。</p>	<p>1. 數與量</p> <p>2. 幾何</p> <p>3. 代數</p> <p>4. 統計與機率</p>

(二) 芬蘭

1990 年代前，芬蘭的所有綜合學校的課程架構、組織、內容、資源、方法，以及教科書等的國家核心課程都建立在嚴密和精細的規範之上。嚴密控管下，教育目標無論在校間和教室間都有高度的一致性。但隨著 1994 年課程綱要

(FNBE,1994;Kupiainen, Hautamäki, & Kupiainen,2009:17)的頒布，芬蘭課程哲學和實踐發生重大變化，學校自主性提升，去中央化授權給地方政府，走向教育權限的下放與地方化，中央負責課程教學時數、大綱以及走向，國家課程的重新組織，課程變得更靈活、不集中而且不那麼精細，當局認為教育應普及於所有的人，得以縮短學生成績的優劣 (Väljjarvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen, & Arffman,2007:50)。

1. 芬蘭數學課程沿革

芬蘭的數學教育沿革可分成以下幾個階段(Kupiainen, & Pehkonen, 2008)：

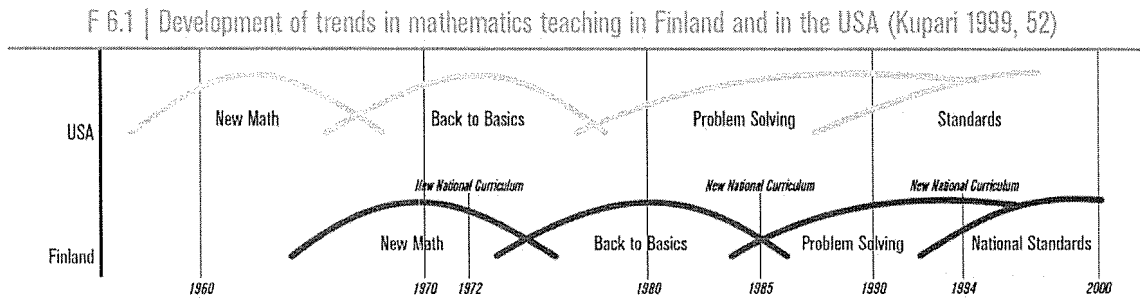
(1) 自行發展

芬蘭在1960年代前，學生在中學階段每週都用自己國家發展的教科書學習代數和幾何，維持百年之久，傑出的數學家擔任學校教師或編寫教科書，在芬蘭是很普遍的事，芬蘭知名的數學家Rolf Herman Nevanlinna和他的父親Otto Wilhelm Nevanlinna (1867~1927)、伯父Lars Theodor Nevanlinna (1850~1916)在芬蘭數學教育的發展上，扮演了重要角色。Lars Theodor Nevanlinna於1902年擔任國家教育委員會(National Board of Education)的數學科負責人，由他編輯的教科書更被使用超過半個世紀。而1946~1970年，芬蘭中學校最常使用的教科書則是由Väisälä所編，自從1917年芬蘭獨立後，隨著新大學的建立和中學校的擴展，數學家參與學校教育的情況便明顯減少 (Malaty, 2009:391)。原採分流制度的芬蘭，學生10歲時必須參加全國考試，按考試成績分普通班及職業教育班，由於轉班幾乎不可能，所以分班決定學生的未來。基於需要更多的人才與人力因應國家發展，1970年代芬蘭開始實施九年一貫的教育，廢除原10歲必須參加的全國考試，並規定16歲前一律在綜合中學就讀，以學生為本，教師擁有自主權 (盧楓，2003；范信賢，2009)。

(2) 新數學

如圖 2 所示，1960 年代後期，芬蘭的數學教育受到西方數學教育的影響，參與了「新數學 (New Math)」改革計畫，1970 年代開始各校執行「新數學」課程。

圖 2：芬蘭與美國數學教學發展趨勢



(Kupiainen, & Pehkonen, 200 : 119 引自 : Kupari,1999:52)

自 1975 年，芬蘭以「回歸基礎 (Back-to-Basics)」取代「新數學」。1985 年公布新課程，於 1994 年再公布新課程(FNBE,1994)，芬蘭的數學課程深受美國的「新數學」、「回歸基礎」、「問題解決」以及荷蘭的日常生活數學 (Everyday Life Mathematics) 等之影響發生改變(FNBE, 1985;Hautamäki,Harjunen, Hautamaki,Karjalainen,Kupiainen,& Laaksonen,2008 : 29 , Malaty, 2007 : 420-421)。

(3) 回歸基礎

自 1975 年，芬蘭的學校雖以「回歸基礎」取代「新數學」課程，然歐幾里德幾何及其推論 (Euclidean structured Geometry and its deduction) 並未因「回歸基礎」重返學校。「回歸基礎」下，芬蘭的數學教育的重點在於數學技能的掌握，在綜合學校，算術教育以訓練為基礎 (based on drilling)；製作具節奏背誦乘法表的錄音帶(rhythmic cassettes)；代數學習變成不斷練習的額外算術；高中階段，現成的公式與算法被以機械的方式(in mechanical way)使用於解決代數問題；幾何成為周長、面積和體積的計算，以及在給定步驟的幫忙下，使用工具畫出架構(make constructions)；幾何只是大量利用三角計算面積和體積(Malaty, 2009 : 392)。

(4) 問題解決

「問題解決」被視為一種增進思考技能的手段，解決問題並不只是學習數學的目標，也是主要的手段，在開始解決問題時，學生只需洞察力找出解答，就可以處理問題，關鍵點通常在於用新的角度察覺問題情境，這種問題被稱為一步驟問題、簡單的數學問題，或數學猜謎(mathematical puzzle) (NCTM, 2000 : 52)。

芬蘭自 1985 年將「問題解決」列為課程總體目標之一，而且超過 20 年（FNBE, 1985、1994、2004），「問題解決」課程從小一開始安排，鼓勵學生解決問題，此時，常識的運用甚於數學的學習，而且在「問題解決」之名下，提供孩子們難題後，只能等到他們找到解決方法出現為止(Malaty, 2009)。

1980 年末，芬蘭就已落實於教師的職前與在職教育，1986 年，芬蘭國家教育委員會（FNBE）計畫性地在學校推動數學的「問題解決」，1986 和 1987 年為教師舉辦問題解決研討會，使用不同的問題於演講、示範及班級教學，與會者被強烈要求使用這些問題在教學中，並於隔年研討會中發表。在此之前，「問題解決」作業鮮少出現在芬蘭的數學課本上，但在研討會後，無論是小冊子或紙卡方式，幾乎每家出版商都出版了一套問題集，教科書中也安排探討問題的時間。1990 年代 FNBE 出版指導手冊（Pehkonen,2007 引自 Seppälä, 1994）以協助教師如何落實課程架構（curricular framework），三、四種類的新教科書也根據課程架構編寫綜合學校小學 1-6 年級及中學 7-9 年級的用書，以為訓練綜合學校學生的思考和問題解決能力。但由於時機不夠成熟到採用這種徹底更動的教科書(adical textbooks)，仍有部分教師們不願意接受，堅持使用傳統數學書籍(Pehkonen,2007)。

(5) 日常生活數學

相對於歐洲中心主義的數學，「民族數學（Ethnomathematics）」將數學課程與各民族不同的文化傳統連結，已經被解釋為「日常生活數學」。自 1990 年起，芬蘭開始重視「日常生活數學」，在就學之初甚至學前教育就已成為一項普遍的活動(Malaty, 2009)。前述之「新數學運動」、「回歸基礎」、「問題解決」以及「日常生活數學」等至今仍影響著芬蘭的數學，尤其是「日常生活數學」使芬蘭因此在 OECD 的 PISA2003 及 2006 分居第二(Malaty, 2007：420)。

(6) 數學課程均衡設計

「問題解決」與「日常生活數學」的數學課程，雖使芬蘭在 PISA 獲得成功。然而芬蘭存有「中學畢業的數學程度無法滿足高中所需」的課題。Nevanlinna (1966) 等芬蘭數學家們當初反對「新數學」的改變，因此，在「回歸基礎」的一開始，並

沒受到很大的反對。然而在「新數學」的效應消失之後，芬蘭的大學和理工學院學生的程度，讓國內所有的數學家對學校數學的改變很不開心，大多數的數學教育者都參與了這樣的改變活動，1980~1990 最具代表的領導人物 Erkki Pehkonen 也參與其中，Pehkonen 認為學校的數學並未是真正的數學，而是個綜合性的教育科目 (Malaty, 2006:422 引自 Pehkonen & Zimmermann, 1990:10)。因此，自 1995 年起，一些數學家開始在某種程度上參與數學教育，課程朝向均衡設計，一方面保持重視日常所需的優勢，另一方面建立數學結構。國家教育委員會 (National Board of Education) 在 2004 年出版的「國家基礎教育核心課程 (National Core Curriculum for Basic Education)」，將「數學思維 (mathematical thinking)」和「數學結構 (structure of mathematics)」也列為新課程的基本要素 (FNBE, 2004b; Malaty, 2007: 424)。

2. 芬蘭數學課程內涵

芬蘭於 2004 年 1 月公佈的現行的核心課程，參照 2001 年公佈的課程時數分配 (FNBE, 2001)，於 2006 年 8 月開始實施 (FNBE, 2004a, b; Aho, Pitkanen, & Salhlberg, 2006:25)，其數學教育目標 (FNBE, 2004b: 158) 及教學時數如下：

(1) 數學教育目標

1-2 年級		
核心任務	目標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> ●發展數學思維 ●練習專注、傾聽、溝通 ●獲取經驗做為數學概念與結構的基礎 	<ul style="list-style-type: none"> ●學習專心、傾聽、溝通和發展他們的思維；他們將藉由理解和解決問題獲得滿足和樂趣。 ●用表達數學概念的不同方法獲得多種經驗；在概念的形成過程中，將主要觀點以口語、文字、工具和符號來表達。 ●理解概念形成架構。 ●理解自然數和學習適用於自然數的基本計算技能。 ●學習利用圖片、具體模型和工具，以書寫或口頭方式證明他們的解法和結論，並找出現象間的相似處、相異處、規律和因果關係。 ●熟練地進行觀察從他們個人觀點而言具有挑戰性和重要性將發生的數學問題。 	<ul style="list-style-type: none"> ●數與計算 ●代數 ●幾何 ●測量 ●數據處理與統計

(引自 FNBE, 2004a:158)

3-5 年級		
核心任務	目 標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> ●發展數學思維 ●介紹數學思維學習模式 ●加強基本計算能力 ●提供經驗做為理解數學概念與結構的基礎 	<ul style="list-style-type: none"> ● 增加數學成功的經驗。 ● 學習經由調查與觀察，形成數學概念和概念系統。 ● 學習使用數學概念。 ● 學習基本的計算能力並解決數學問題。 ● 找出現象間的相似處、相異處、規律和因果關係。 ● 證明他們的行動和結論，並呈現解法給其他人。 ● 學習在觀察的基礎下，呈現問題和結論。 ● 學習運用規則和遵循指引的方向(follow directions)。 ● 學習持續與集中精神於工作，以及團隊合作。 	<ul style="list-style-type: none"> ●數與計算 ●代數 ●幾何 ●數據處理 ●統計與機率

(引自 FNBE ,2004a:161)

6-9 年級		
核心任務	目 標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> ● 加深對數學概念的理解 ● 提供足以建立日常數學問題模式的基本能力 ● 學習數學模式思維，並練習記憶、專注和精確表達 	<ul style="list-style-type: none"> ● 學習相信自己，並對數學學習負責。 ● 理解數學概念與規則的重要性，並領會數學和實際世界之間的關連。 ● 學習如何計算與解決數學問題。 ● 學習邏輯和創造性思考。 ● 學習應用各種方式去獲得與處理資訊。 ● 學習明確地表達他們的想法，並證明他們的方法與結論。 ● 學習以觀察為基礎，呈現問題與推論。 ● 學習理解規律。 ● 學習如何持續、集中注意力及團隊的運作。 	<ul style="list-style-type: none"> ●思考技能與方法 ●數與計算 ●代數 ●函數 ●幾何 ●機率與統計

(引自 FNBE ,2004a:163)

(2) 數學教學時數

在1900-1910年代，芬蘭的數學教學時數明顯高於其他科目，後由於中學階段須學習4種語言，所以語言教學時數較數學的兩倍還要多，但數學教學時數仍高於美術、體育等四科的總時數，1914年，數學科的教學時數開始些許減少，改變了數學科在學校的地位 (Malaty2009引自Halonen，1982：33、51)，在1918、1941和1948又有

些許減少，而在綜合學校建立的1972年縮減最明顯，1985年又再次減少(Malaty2009引自Kouluhallitus, 1985：316-317)，在1914年以前，數學科教學時數在中學的五個年級每週共23小時，而1972年共18小時。

1986年，聯合國教育科學文化組織(United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, UNESCO) 公佈調查各國12年以上的數學教學平均時數，結果指出各國數學教學的平均時數界於芬蘭的每週2.6小時至瑞士6.1小時(UNESCO, 1986:35)，芬蘭的數學教學時數在94個參與國家中最低。

即便現今階段，芬蘭的綜合學校九個年級每週共32節（每節45分）數學課，相當於每週每個年級2.7小時，符合1998年《基礎教育法案》(Basic Education Act, 1998) 著重日常生活及各科均衡的目標(FNBE,2001；Malaty, 2007：421；Education, Audiovisual and Culture Executive Agency [EACEA],2008:64；2009:63)。

3. 芬蘭數學課程特色

芬蘭在 OECD 的 PISA2003 及 2006 的數學素養平均得分各分居第二，雖 PISA 2006 整體成績落後於排名第一的我國之後，然我國在層級 1 及其以下者高達 11.9% (OECD, 2007)，而芬蘭數學低於基本程度僅 5.9%，學生的數學優劣差距遠較我國小，不同地區各校之間的差異也最小，芬蘭的數學教育品質高且全面均衡發展。OECD 的報告指出「由芬蘭學生的表現可以得知成功的教育制度，既可提高教育水準，亦可拉近學生間成績的差距。」。芬蘭的數學教育品質高且全面均衡發展原因在於如下之因素(范信賢，2009；陳之華，2009；盧楓，2003a，2003 b；Fergus Bordewich，2005；Malaty, 2006；Väljörvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen, & Arffman,2007)：

(1) 學生本位

1) 普及教育：芬蘭政府為保持全民族的知識和技能水準，將普及教育置於國家政策的中心，1998 年《基礎教育法案》(Basic Education Act, 1998)指出教育的宗旨在於滿足孩子們天生的求知欲，循序漸進傳授知識與技能，讓學生充分自主發展；

綜合學校是為了每一個孩子，因此配合孩子的需要進行調整，將指導和教學結構化，以便適合異質性的學生(范信賢，2009；盧楓，2003a，003b)；芬蘭的老師不會將任何一位學生排除而送往其他學校，因此，學校在規劃課程、選擇內容、教材、學習策略、方法和評估方式時，都考慮學生個人的興趣和選擇，而這些需要建立於彈性、校本和教師以學生為中心的教學、輔導和補救教學課程的規劃(Väljjarvi et al.,2007:47)。

2) 學習遲緩者能獲得輔導：芬蘭不設資優班，不將學生貼優劣標籤，學校不排名次也沒有明星學校等，每位老師有義務和責任教好不同類型的學生，各地根據課程標準設計本地的各門課程(陳之華，2008)；芬蘭人不認為需輔導的學生為失敗者，而視輔導為進步的手段，輔導教師因應每個學生不同的資質，各自制訂循序漸進而且切實可行的學習計畫，要求學生和自己以往的成績相比，而不是和其他同學相比，因此，芬蘭學生學業優劣者差距小 (Fergus Bordewich，2005；Malaty, 2006：421)。

3) 學生獨立學習。教師認為真正的知識來自搜尋，所以要求學生自己搜集資料，而不是從課本學習(Fergus Bordewich，2005)；芬蘭學生的讀書計劃都由他們在家長和教師輔導下自行制定，他們能有自己的學習方法以及不同的學習目標和學習進度，他們不一定在同一時間做同樣的事，彼此進度也未必相同(陳之華，2009)。

4) 學生自我評估成績：為培養學生對自己負責，學校從幼稚園開始，教學生評核自己的成績，教師不會經常監視學生在做什麼(Fergus Bordewich，2005)。

5) 學校氣氛輕鬆：在芬蘭所有中學，除非有課，否則學生不必上學；而下課後，學生就可回家(陳之華，2008；Fergus Bordewich，2005)。

(2) 師資素質高

1) 教育課程錄取門檻高：大學教育課程錄取率，每七名申請人之中僅取一人，比法律和醫學課程更為嚴格，雖然學校有權解聘不勝任的教師，但幾乎不曾發生(Fergus Bordewich，2005)；

2) 成功的職前師資養成教育與在職師資教育：芬蘭 10 所綜合大學均有教育學院，這些學院除開設常規課程外，根據教育改革需要，增設教育諮詢專業，所有教

師具有碩士以上的文憑以及教師資格證書，以保證教學品質，大學和其他教育機構免費提供教師的終身培訓，不斷提高辦學品質和效益，以提高教師的專業素質與知識的更新(盧楓，2003a，2003b)。大學教學實習學校 (University Practice Schools) 提供了理想的實習環境，教學實習學校通常在大學校園內，並靠近教師訓練部門，數學教育專家在該部門擔任教學實習的輔導老師 (tutor)，實習生 (trainee) 只要他們願意，都會有機會接觸數學教育專家獲得指導，另一方面，他們也能獲得所有包括來自於圖書館的大學技能(university facilities)。 (Malaty,2006)

(3) 教學專業的文化(the culture of the teaching profession)

1) 享有教學自主權：芬蘭的學校沒有督學(inspections)，受聘後，不會受到定期視察與評核，如此不只節省經費，也使教師感覺自由及負有責任感，教師可自行決定使用何種教學法也可自行制訂課程，自選教科書或完全不用教科書，芬蘭當局完信任任教師，這些自由讓每位老師的專業發揮了積極的作用，讓他們對自己的工作感到興趣，也提供他們發展自身經驗的機會 (Fergus Bordewich ,2005；Malaty,2006)。

2) 具教學專業：芬蘭的每位教師都能夠以全國教育委員會(National Board of Education) 公佈的基本課程以及學校公認的更詳盡課程為基礎，發展自己的課程 (Malaty,2006)。

3) 關注學生的傳統：對大多數的芬蘭教師而言，他們的興趣在於本身的專業成長，常見教師在學生桌前或坐或跪地與學生面對面安靜討論等關注學生學習狀況的個別輔導方式，是芬蘭長期以來的傳統(Malaty,2006)。

4) 視學生成敗為己任：教師會將未能教好學生，歸因為自己教學工作出了問題 (Fergus Bordewich ，2005)

(4) 芬蘭的學校生活的日常傳統(the daily traditions of school life in Finland)

45 分的課堂與課堂間，有 15 分鐘的休息時間，學生在休息時間必須離開教室到操場，教師們則輪流觀察在戶外的學生，學生和教師都一起在餐廳享用免費午餐

用，校長可以利用擴音器與學生及老師聯絡，但很少使用(Malaty,2006)。

(5) 教師工作具持續性

芬蘭教師工作的持續性(the continuity of teacher's work)有兩項優勢：(1) 選擇教學為終生的職業及(2) 極少換校。芬蘭年輕人記得小學放學時和老師握手、擁抱，所以多數小學實習教師 (Primary School Teacher students) 會以教小學新生為其選擇，決定投入教職的要素是情感因素而非薪水(Malaty,2006)。

(6) 各種不同的發展數學教育的努力

芬蘭在數學教育上的主要問題是缺乏具備數學專長的小學教師，3-4 學分的數學及數學教育是必修，另可選 1-2 門學科作為主修，或選修教育研究，但數學一直都不是熱門的選擇。1992 年 Joensuu 大學的根本變革前，只有少於 2% 的學生選擇數學作為專業，然目前在 Joensuu 大學，數學是小學師資培訓課程中，最熱門的其中一項主修科目，有超過 80% 的學生主修數學(15 學分)，其中一半的人修 35 學分，再取得中學數學教師的資格。係由於 Joensuu 大學的「師範學校 (Normal School)」在數學的教學實習期間，會有班級老師和大學的數學教育家到師範學校的小學擔任監督人，這種監督包含備課的監督，會要求學生教數學要比教科書更有系統，且將重點放在理解和使用探索策略。

1990 年組織的數學社團在 1990 年代前半期，擴展到在職教育，由社團所出版的材料和教師手冊，都為教師的工作提供了幫助。歷經了 20 年一直沒有幾何課本後，1995 年，數學社團出版高中的幾何課本了 (Malaty, 2006)。

(三) 荷蘭

1. 荷蘭現實數學課程沿革

自 1960 年代末起，荷蘭數學教育採用「現實數學教育 (Realistic Mathematics Education, RME)」，相對於此，無論是我國或是芬蘭、日本的數學教育都深受美國數學教育的影響，荷蘭數學教育沒受到美國 1960 年代早期的「新數學」的影響，