

四、文獻探討

p9-54

本節首先探討我國數學課程之沿革，再探討芬蘭、荷蘭、日本、美國等國數學課程之沿革及其近期中小學數學領域課程(課程主要學習目標、核心內容、學習時數等)、教學(教學觀等)、評量等理論與發展的趨勢，進而釐清各國近期中小學數學領域課程的特色與取向。

(一) 我國

1. 我國數學課程沿革

我國數學教育沿革可分成以下幾個階段

(1) 新數學運動

1957年蘇俄發射人造衛星「史潑尼克一號」(Sputnik I)，美國學術界驚覺其科學教育落後於蘇聯，艾森豪總統謂「戰場決勝於教室」，為短時間內能培養出很多科學家於是大量投入經費從事科學計畫的研究，進行課程改革，翌年通過國防教育法案推動科學課程研究，美國國家科學基金會補助課程研究計畫，召集了許多學者編輯如BSCS新生物、PSSC新物理、CHEM新化學、SMSG新數學等計畫。由Begle領導的School Mathematics Study Group(學校數學研究組，簡稱SMSG)編著一套課本，推廣到中小學使用，強調知識結構的「新數學」，改用集合的觀點來解決有關數、量、形的問題，由集合及邏輯出發，有許多公設、公理化系統，當時清華大學校長陳可忠將SMSG課程引入國內，清華大學教授以此為藍本，改編我國的新數學(王九達，2000)。民國54年起各高中普遍實施的高中教材，引進線性代數、統計…等，民國57年修訂的國中、小課程，也將SMSG延伸到國中小階段，掀起第一次數學課程改革，學生提早接觸現代數學的概念和方法。考量教師不知如何教學，台灣省國民學校教師研習會當時主任陳梅生在教育廳的支持下，結合師專教授指導各縣市輔導員組成新教學種子隊，編寫教學活動設計，並由各縣市輔導員分區辦理該學期的數學教師研習，新數學課程得以從一年級逐年實施(陳梅生，1986)。

(2) 數學教學實驗

SMSG 課程與中小學生認知差距下，中小學生無法應用數學將實際問題數學化，進而解決問題的方法；也無法學會純數學中臆測、證明、推廣與再臆測的循環研究程序，集合論凌駕整個中小學數學下，造成喪失學習初等數學的重要課題；高三下介紹「群」、「環」與「體」等名詞，卻未就其性質討論及舉例，因此，該項數學教育變革遭到徹底的失敗(王九達，2000)。旅美數學家項武探義對台灣實施的「新數學」便提出警告，並提供一套課本的稿件取代「新數學」，並提出「課本未經實驗教學，不可冒然推廣到全國」的理念。因此第二次的數學課程改革刪除 SMSG 新數學課程集合相關的教材及其相關知識的推理部分，並在彰化高中進行數學實驗教材實驗，共使用十年的實驗本將教材分為自然組數學與社會組數學，教材內容雖仍抽象，但較不明顯地處理集合、公設系統，教材也開放成東華版(SMSG)、實驗本(高中數學實驗教材編輯小組)等版本，集合論退居輔助敘述數學問題的地位，教育部再修訂的課程標準幾乎完全揚棄了集合論的語言，而將初等統計、微積分與線性代數納入高中課程之中(呂溪木，2007)。

(3) 數學課程研發

民國 63 年起陳梅生結合小學老師、主任、校長、師專教材教法教授、大學教育心理學教授、課程專家、數學教授、教育行政官員、教育、課程、心理學專家組成研究小組，從事國民小學數學課程實驗研究，該套先實驗後試用，世稱「板橋模式」(由位居板橋的台灣省國民學校教師研習會開創，故有此稱號)的課程發展模式，先於實驗小學進行實驗，配合國立編譯館成立編審委員會，編輯試用教材，由試用學校試用一年後，編審委員會根據回饋資料再作修訂，方成為國小國定本數學教科書(邱石虎、莊仁宗，1999)，透過教學實驗修改教材的第三次數學課程改革，應用皮亞傑(Piaget)認知發展階段的理論，布魯納(Bruner)的動作、形象、符號三階段學習，配合學生的心智發展，應用布魯姆(Bloom)的完全學習(Master Learning 或譯 精熟學習)及認知領域教育目標分類，促進完全學習，國小數學新課程引進電算器作為計算工具，降低了對於學生計算能力的要求，強調四則運算的意義及基本的計算能力，不要求學生對於複雜的計算的熟練度，使學生有更多的時間從事更有意義的學

習。

國中數學課程實驗研究小組於民國 64 年在師大科學教育中心成立，以國小課程研究模式實施之。幾何課程淡化公理化系統(如將三角形的內角合為 180 度當作已知的事實，以推出其他的幾何性質)，國中教材強調數值「逼近法」，並引進電算器、微電腦(以微處理器作為其中央處理器 CPU 的電腦)、基本語言程式、流程圖等計算與解題的工具解決無理方程式、高次方程式的繁雜計算。

高中數學課程改進研究實驗小組也於民國 65 年師大科學教育中心成立，參照國小、國中課程發展方式，由科學指導委員會吳大猷主任委員號召各大學一百多位自然科學與數學的教授以及中學教師共同參與，從事大規模的實驗研究，並在中正國防幹部預備學校進行實驗教學，進行數學科與科學課程的改進研究。高中數學課程編入大量原是大學才開設的微積分教材，以選修代替分組、因材施教(呂溪木，2007)。

歷年來規模最大的第三次數學課程改革，其主要特色為：(1) 由國小、國中、高中由下而上的一貫數學修訂作業，得以連貫與配合；(2) 經由教學實驗修改教材，得以根據實驗教學回饋資料修改教材；(3) 考量學生的性向與個別差異，將國中數學課程分「數學(甲)」、「實用數學」供彈性選擇；(4) 配合學生心智發展取捨及呈現教材內容；(5) 學生由觀察實際問題討論解決方法中，抽出涉及之數學概念與方法成為定義或定理；(6) 順應時代的潮流調整教材內容。但也存在：(1) 教具與微電腦設備不足問題；(2) 國高中選修科目多造成學校行政配合困難；(3) 國二分組過早；(4) 教師直接提供結論或公式致教材設計目標無法達成等之新課程執行上的隱憂(呂溪木，2007)。

(4) 數學建構論辯

民國 82 年及 83 年公布國民中小學課程標準，數學領域強調建構主義(constructivism)主張學生主動參與教學活動下，學習方才發生；民國 83 年 4 月 10 日民間教改團體啟動教育改革運動，訴求中小學課程革發起「410 教改大遊行」；民國 89 年 9 月 30 日教育部公布「國民中小學九年一貫課程暫行綱要」；92 年 7 月 20

日「重建教育連線」指出當前教改十三大亂象，建構式數學被列入其中（重建教育連線，2003）。

建構主義理念下，85年實施的九年一貫數學課程，學生得以「一題多解」，錯誤解讀下，演變成學生必須瞭解每一解題方法，甚至要求利用多種方法解決同一題目(林宜臻、林沂昇，2007)，建構數學推行一學期後仍有70%的教師不知道建構理論的想法或建構教學的作法(胡志偉，1997)。

針對「學生計算能力下降」的爭議，教育部提供「樂在數學」手冊（教育部，2003b）加強學生的計算能力。國家科學委員會的研究指出：同樣受傳統數學教育學生的國二學生在概念、程序性知識及解題進步幅度接近，接受建構式的數學教學的小四學生的程序性知識進步幅度較小外，概念及解題得分大幅提升，程度較差的小四學生的進步較國二學生進步幅度大(詳見：民國92年8月1日聯合報「國科會：學建構式數學 能力未下滑」)。93年國二生(小學接受82年版建構式數學，93暫綱的第一屆國中學生)較之於92年國二生(小學接受64年版數學課程標準編寫的數學教材，83年版的最後一屆學生)，93年國二生整體答對率雖略高於92年國二生，雖未達顯著差異，可以得知接受建構式數學的學生，其數學能力並未變差。93年學生的「概念瞭解」顯著高於92年，具有顯著意義，93年學生「計算能力」也略高於92年國二生，雖未達顯著差異，亦可得知建構式數學並不會影響學生計算能力的差異(詳見：民國93年8月19日聯合報「建構式使數學能力微揚」(洪萬生、曹博盛、譚克平、張少同、陳創義、林碧珍、鄭芳枝、蔡文煥，2003)。大多數的教師認為建構教學不但可以提高學生的學習動機，也能增加學生課堂所學的能力，也提升了學生的分析、表達等學科以外的能力(胡志偉，2002)。

2. 我國歷屆數學課程內涵

(1) 我國歷屆小學數學課程內涵

表 2：我國歷屆小學數學課程內涵表

年 度	教學時間（每週）	目 標	課程內容
41	1. 三年級 210 分鐘 2. 四年級 180 分鐘 3. 五、六年級 210 分鐘	1. 指導兒童了解日常生活中關於數的意義，有數的正確觀念。 2. 指導兒童解決日常生活中關於數的問題，培養其理解思考的能力。 3. 養成兒童計算正確迅速的能力和習慣。	1. 筆算 2. 珠算 3. 第一、二學年隨機學項目 4. 認數 5. 數 6. 日常的活動和問題 7. 計算方法
51	1. 一、二年級 60 分鐘 2. 三、四年級 180 分鐘 3. 五年級 180 分鐘 4. 六年級 210 分鐘	1. 從接觸日常生活中有關數量問題，養成兒童正確數量觀念，了解數量的意義。 2. 從處理日常生活中有關數量問題，培育兒童基本數量知識，訓練計算技能。 3. 從應用日常生活中有關數量問題，指導兒童了解數量關係，解決數量問題。 4. 從接觸、處理、應用日常生活中有關數量問題，輔導兒童發展計算的興趣，實測的技能，以及計算正確迅速的能力和習慣。	【低年級】 1. 認數 2. 實測 3. 計算 4. 應用 【中年級】 1. 認數 2. 實測 3. 計算 4. 應用 【高年級】 1. 認數 2. 實測 3. 計算 4. 應用 5. 高年級珠算
57	1. 一、二年級 90 分鐘 2. 三、四年級 180 分鐘 3. 五年級 180 分鐘 4. 六年級 210 分鐘	1. 從解決有關數量問題之經驗中，訓練兒童解決家庭、學校、社會、日常生活中有關數量問題之能力。 2. 訓練兒童對日常生活中之問題，做數量方面之考慮 3. 發展兒童對數、計算、實測之興趣及能力 4. 發展兒童思考及組織能力 5. 瞭解我國發明珠算的貢獻，及學習珠	1. 數 2. 集合 3. 實測 4. 計算 5. 簡易錢幣的認識

年 度	教學時間 (每週)	目 標	課程內容
		算的重要 6. 指導兒童熟練珠算四則運算方法，增進正確、迅速的計算技能。	
64	1. 一、二年級 120 分鐘 2. 三年級 160 分鐘 3. 四年級 200 分鐘 4. 五、六年級 240 分鐘	1. 養成數、量、形的正確觀念，進而考慮其形成的需要與功能 2. 學習數、量、形的基本知識與原理，獲得其基本技能，進而有效地提高在生活上的實踐能力。 3. 能運用數、量、形之間的相互關係，及使用適當的數學語言，進而解決日常生活中有關的問題。 4. 養成從數學的觀點考慮日常事象向的興趣與習慣，進而運用數學的知識與方法，發展其推理、組織與創造能力	1. 數與量 2. 實測與計算 3. 圖形與空間 4. 統計與圖表 5. 集合與關係 6. 術語與符號
82	1. 一、二年級 120 分鐘 2. 三、四年級 160 分鐘 3. 五、六年級 240 分鐘	1. 養成主動地從自己的經驗中，建構與理解數學的概念，並透過了解及評鑑別人解題方式的過程，進而養成尊重別人觀點的態度。 2. 養成從數學的觀點考慮周遭事物，並運用數學知識與方法解決問題的能力。 3. 培養以數學語言溝通、討論、講道理和批判事物的精神。 4. 養成在日常生活中善用各類工具從事學習及解決問題的習慣。	1. 數與計算 2. 量與實測 3. 圖形與空間 4. 統計圖表 5. 數量關係 6. 術語與符號
89	1. 一、二年級 2-4/20 節 2. 三、四年級 3-5/25 節 3. 五、六年級 3-5/27 節	1. 掌握數、量、形的概念與關係。 2. 培養日常所需的數學素養。 3. 發展形成數學問題與解決數學問題的能力。 4. 發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。 5. 培養數學的批判分析能力。 6. 培養欣賞數學的能力。	1. 數與量 2. 圖形與空間 3. 統計與機率 4. 代數 5. 連結

年度	教學時間 (每週)	目 標	課程內容
92	1.一、二年級 2-4/20 節 2.三、四年級 3-5/25 節 3.五、六年級 3-5/27 節	<p>總體目標</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。 2. 學習應用問題的解題方法。 3. 奠定下一階段的數學基礎。 4. 培養欣賞數學的態度及能力。 <p>國民小學階段的目標為：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 在第一階段（一至三年級）能掌握數、量、形的概念。 2. 在第二階段（四至五年級）能熟練非負整數的四則與混合計算，培養流暢的數字感。 3. 在小學畢業前，能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單幾何形體的幾何性質、並理解其面積與體積公式；能報讀簡單統計圖形並理解其概念。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 數與量 2. 幾何 3. 代數 4. 統計與機率 5. 連結
97	1.一、二年級 2-4/20 節 2.三、四年級 3-5/25 節 3.五、六年級 3-5/27 節	<p>《總體目標》 無</p> <p>九年一貫數學學習領域的教學目標為：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 第一階段(國小一至二年級)：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形之認識。 2. 第二階段(國小三至四年級)：在數方面要能熟練自然數的四則與混合計算，培養流暢的數字感；另外，應初步學習分數與小數的概念。在量上則以長度的學習為基礎，學習各種量的常用單位及其計算。幾何上則慢慢發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。 3. 第三階段(國小五至六年級)：在小學畢業前，應能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 數與量 2. 幾何 3. 代數 4. 統計與機率 5. 連結

年 度	教學時間(每週)	目 標	課程內容
		生活的問題；能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積或體積之計算；能製作簡單的統計圖形。	

(2) 我國歷屆初級中學數學課程內涵

表 3：我國歷屆初級中學數學課程內涵表

年 度	教學時間(每週)	目標	課程內容

年度	教學時間(每週)	目標	課程內容
37 修訂草案	第一學年：6 節 第二學年：6 節 第三學年：6 節	<ol style="list-style-type: none"> 1. 瞭解形與數之性質及關係，並知運算之原則與方法。 2. 供給日常生活中數學之知識，及研究自然環境中數量問題。 3. 訓練關於計算測量之工具及作圖之技能，有計算準確迅速及精密整潔之習慣。 4. 培養以簡馭繁以已知推未知之能力。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 算術 <ol style="list-style-type: none"> (1) 記數法及命數法 (2) 整數四則 (3) 速算法 (4) 複名數 (5) 約數及倍數，因素、質數 (6) 最大公約數，最小公倍數 (7) 分數四則 (8) 小數四則 (9) 近似算 (10) 比例 (11) 百分法。 (12) 利息。 (13) 開方法 (14) 統計圖表及方法。 2. 代數 <ol style="list-style-type: none"> (1) 代數學之目的。 (2) 文字數之基本運算及運算律。 (3) 正負數。 (4) 代數式。 (5) 整式之基本運算 (6) 一元一次方程式解法及應用問題 (7) 聯立一次方程式解法及應用題 (8) 一次函數及其圖解 (9) 乘除公式—二項式定理 (10) 因式分解 (11) 公因式，公倍式 (12) 分式之基本運算 (13) 分式方程式解法及應用問題 (14) 比及比例 (15) 開方法 (16) 根式之基本運算 (17) 指數、負指數及零指數 (18) 虛數及複數。 (19) 一元二次方程式解法及應用問題 (20) 二次函數極其圖解 (21) 二次函數及其圖示 (22) 簡易二元二次聯立方程式解法及應用問題。 (23) 等差、等比、調和級數 (24) 複利。 3. 幾何 <ol style="list-style-type: none"> (1) 幾何學之基礎 (2) 直線形 (3) 基本作圖 (4) 圓 (5) 作圖問題 (6) 比例及相似形 (7) 面積 (8) 簡易立體面積及體積之計算 (9) 數值三角
51	<ol style="list-style-type: none"> 1. 第一學年：3-4 節 2. 第二學年： 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 瞭解形與數之性質及關係，並熟悉之運算之原則與方法。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 算術 <ol style="list-style-type: none"> (1) 記數法及命數法 (2) 整數四則 (3) 速算法

年度	教學時間(每週)	目標	課程內容
	3-4 節 3. 第三學年： 3-4 節	2. 供給日常生活中數學之知識，並啟發學生研究自然環境中數量之問題。 3. 訓練關於計算測量之工具及作圖之技能，始有準確迅速及精密整潔之習慣。 4. 培養以簡馭繁以已知推未知之能力。	(4) 約數及倍數，因素、質數 (5) 最大公約數，最小公倍數 (6) 分數四則 (7) 小數四則 (8) 近似算 (9) 複名數 (10) 比例 (11) 百分法 (12) 利息。 (13) 開方法 (14) 統計圖表及方法 2. 代數 (1) 代數學之目的 (2) 文字數之基本運算及運算律 (3) 正負數之意義、基本運算與括號 (4) 代數式 (5) 整式之基本運算 (6) 一元一次方程式解法及應用問題 (7) 二元一次聯立方程式解法 (8) 乘除公式 (9) 因式分解 (10) 最高公因式，最低公倍式 (11) 分式之基本運算 (12) 分式方程式解法及應用問題 (13) 比及比例，變數法 (14) 開方法 (15) 根式之基本運算 (16) 分指數、負指數及零指數 (17) 虛數及複數 (18) 一元二次方程式解法及應用問題 (19) 一次函數及其圖示，聯立一次方程式之圖解法 (20) 二次函數及其圖示 (21) 簡易二元二次聯立方程式解法及應用問題 (22) 等差、等比、調和級數 (23) 複利 3. 幾何 (1) 幾何學之基礎 (2) 直線形 (3) 基本作圖 (4) 圓 (5) 作圖問題 (6) 比例及相似形 (7) 面積 (8) 簡易立體面積及體積之計算 (9) 數值三角
57	1. 第一學年： 3-4 節 2. 第二學年： 3-4 節 3. 第三學年： 3-4 節	1. 使學生瞭解形與數之性質及關係，並熟悉之運算之原則與方法。 2. 供給日常生活中數學之知識，並啟發學生研究自然環境中數量之問題。	【第一學年】 1. 集合之概念 2. 數之計法 3. 非量幾何 4. 自然數與整數 5. 有理數 6. 度量 7. 面積、體積、重量與時間

年度	教學時間(每週)	目標	課程內容
		3. 訓練學生關於簡單計算測量之工具及基本作圖之技能，使有準確迅速及精密整潔之習慣。 4. 培養以簡馭繁以已知推未知之能力。 5. 使學生認識數學之特質。	8. 比例、小數、百分法 9. 簡單之直線形 10. 圓之簡單性質 11. 統計圖表 【第二學年】 1. 有理數與座標 2. 方程式簡介 3. 指數與十進制 4. 基本作圖 5. 誤差 6. 實數 7. 相似三角形與變數法 8. 直線與圓之他種性質 9. 非量立體幾何 【第三學年】 1. 數線 2. 數字與變數 3. 數學語句 4. 實數之運算 5. 實數之次序 6. 算術級數與幾何級數 7. 因式與指數 8. 根數 9. 多項式與有理式 10. 開放語句之真集 11. 一次式與二次式之圖形 12. 變數之開放語句 13. 方程組 14. 函數
61	1. 第一、二、三學年：3-4 節 2. 第三學年另增選課二小時	1. 使學生瞭解形與數之性質及關係，並培養其對空間函數的直觀概念。 2. 訓練學生關於計算查表及基本做圖的技能。 3. 培養以簡馭繁以已知推未知之能力。 4. 供給學生日常生活中數學的知識，使其認識數學之應用價值，並啟發其研究自然環境中數量問題的興趣。	【第一學年】 1. 算術四則問題的複習 2. 用符號代表未知數，如何把問題立式 3. 文字 X 的引入，代數解法與算術解法的比較 4. 負解、負數 5. 整數與直線上的點 6. 一元一次方程式 7. 二元一次聯立方程式 8. 多項式 9. 因數分解、因式分解、因式分解法、二次方程式 10. 最高公因式與最低公倍式 11. 分式 【第二學年】 1. 簡單幾何圖形 2. 開方法 3. 近似值、誤差、查表法 4. 比例與相似形 5. 平面上的座標系，一次方程式及複數 6. 二次方程式及複數 7. 二次方程式的應用 8. 二次函數的圖形，極值問題 10. 分式方程式 11. 統計圖表 【第三學年】

年度	教學時間(每週)	目標	課程內容
			1. 三角形 2. 四邊形 3. 相似形 4. 圓 5. 簡易做圖 6. 數值三角 7. 等差數列與等比數列 【選修】 1. 一元二次方程式 2. 根式與無理方程式 3. 一元二次不等式 4. 簡易二元二次聯立方程式 5. 三角函數 6. 指數與對數 7. 三角形的心
72	<p>就業取向者：</p> 1. 第一學年： 國一數學 3-4 節 2. 第二學年： 國二數學 2 節 3. 第三學年：0 節 <p>升學取向者：</p> 1. 第一學年： 國一數學 3-4 節 2. 第二學年： 國二數學(甲) 4 節 3. 第三學年： 國三數學(甲) 4-6 節	1. 引導學生認識數學的功用，以提高學習興趣。 2. 輔導學生以獲得數、量、形的基本知識與技能。 3. 培養學生思考、推理的基本能力。 4. 配合教育輔導，鑑別與試探學生數學的能力。	【第一學年】 第一冊 1. 量與數 2. 正負數的四則運算 3. 簡單幾何圖形 第二冊 1. 一次方程式 2. 平行 3. 直角座標與二元一次聯立方程式的圖形 【第二學年】 第三冊 1. 乘法公式 2. 二次三項式的因式分解及應用 3. 近似值與開平方根 第四冊 1. 簡單立體圖形 2. 比例及其應用 3. 統計資料處理 【【選修】】 【第二學年】 1. 比例與函數 2. 乘法公式與多項式 3. 方根與開方 4. 一次不等式 5. 簡單立體圖形 6. 因式分解 7. 方程式 8. 等差數列與等比數列 9. 資料的整理 【第三學年】 1. 幾何與證明 2. 三角形 3. 四邊形 4. 圓 5. 相似形 6. 二次函數 7. 數值三角及其應用 8. 機率與統計

年度	教學時間(每週)	目標	課程內容
74	1. 第一學年：3-4 節 2. 第二學年：4 節 3. 第三學年：4-6 節	1. 引導學生認識數學的功用，以提高學習興趣。 2. 輔導學生以獲得數、量、形的基本知識與技能，以為日後研究的基礎。 3. 培養學生思考、推理與創造的能力。 4. 啟發學生思考、推理與創造的能力。 5. 配合教育輔導，鑑別與試探學生數學的能力。	【第一學年】 1. 量與數 2. 正負數的四則運算 3. 簡單幾何圖形 4. 一次方程式 5. 平行 6. 直角座標與二元一次聯立方程式的圖形 【第二學年】 1. 近似值與平方根 2. 比例與線型函數 3. 乘法公式與多項式 4. 方根與用表查法求方根 5. 一次不等式 6. 因式分解 7. 方程式 8. 等差數列與等比數列 9. 資料的整理 【第三學年】 1. 三角形 2. 四邊形 3. 相似形 4. 圓 5. 二次函數 6. 數值三角及其應用 7. 機率與統計
83	1. 第一學年：3 節 2. 第二學年：4 節 3. 第三學年：2 節+(2)節 *()指個別差異教學時間 數學選修 1. 第一學年：1-2 節 2. 第二學年：1-2 節 3. 第三學年：2 節	1. 引導學生認識數學的功用，以提高學習興趣。 2. 輔導學生以獲得數、量、形的基本知識與技能，以提升數學素養。 3. 培養學生運用數學方法解決問題的習慣與能力。 4. 啟發學生思考、推理與創造的能力。 5. 培養學生主動學習的態度極欣賞數學的能力。	【第一學年】 1. 數與數線 2. 因數與倍數 3. 直角座標與二元一次聯立方程式的圖形 4. 比與比例 5. 近似值與方根 【第二學年】 1. 乘法公式與多項式 2. 因式分解 3. 一元二次方程式 4. 一次與二次函數 5. 簡單的幾何圖形 6. 三角形的基本性質 7. 平行 【第三學年】 1. 相似三角形 2. 四邊形 3. 圓 4. 等差數列與等比數列 5. 資料的整理與機率
89	1. 七、八年級 3-5/28 節 2. 九年級 3-5/30 節	1. 掌握數、量、形的概念與關係。 2. 培養日常所需的數學素養。 3. 發展形成數學問題與解決數學問題	1. 數與量 2. 圖形與空間 3. 統計與機率 4. 代數 5. 連結

年度	教學時間(每週)	目標	課程內容
		<p>的能力。</p> <p>4.發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。</p> <p>5.培養數學的批判分析能力。</p> <p>6.培養欣賞數學的能力。</p>	
92	<p>1.七、八年級 3-5/28 節</p> <p>2.九年級 3-5/30 節</p>	<p>1. 培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。</p> <p>2. 學習應用問題的解題方法。</p> <p>3. 奠定下一階段的數學基礎。</p> <p>4. 培養欣賞數學的態度及能力。</p>	<p>1.數與量</p> <p>2.幾何</p> <p>3.代數</p> <p>4.統計與機率</p>
97	<p>1.七、八年級 3-5/28 節</p> <p>2.九年級 3-5/30 節</p>	<p>《總體目標》</p> <p>無</p> <p>第四階段(國中一至三年級):</p> <p>1. 在數方面,能認識負數與根號數之概念與計算方式,並理解坐標表示的意義。</p> <p>2. 代數方面則要熟練代數式的運算、解方程式,並熟悉常用的函數關係。</p> <p>3. 幾何方面要學習三角形及圓的基本幾何性質,認識線對稱與圖形縮放的概念,並能學習簡單的幾何推理。</p> <p>4. 能理解統計與機率的意義,並認識各種簡易統計方法。</p>	<p>1. 數與量</p> <p>2. 幾何</p> <p>3. 代數</p> <p>4. 統計與機率</p>

(二) 芬蘭

1990 年代前，芬蘭的所有綜合學校的課程架構、組織、內容、資源、方法，以及教科書等的國家核心課程都建立在嚴密和精細的規範之上。嚴密控管下，教育目標無論在校間和教室間都有高度的一致性。但隨著 1994 年課程綱要

(FNBE,1994;Kupiainen, Hautamäki, & Kupiainen,2009:17)的頒布，芬蘭課程哲學和實踐發生重大變化，學校自主性提升，去中央化授權給地方政府，走向教育權限的下放與地方化，中央負責課程教學時數、大綱以及走向，國家課程的重新組織，課程變得更靈活、不集中而且不那麼精細，當局認為教育應普及於所有的人，得以縮短學生成績的優劣 (Väljjarvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen, & Arffman,2007:50)。

1. 芬蘭數學課程沿革

芬蘭的數學教育沿革可分成以下幾個階段(Kupiainen, & Pehkonen, 2008)：

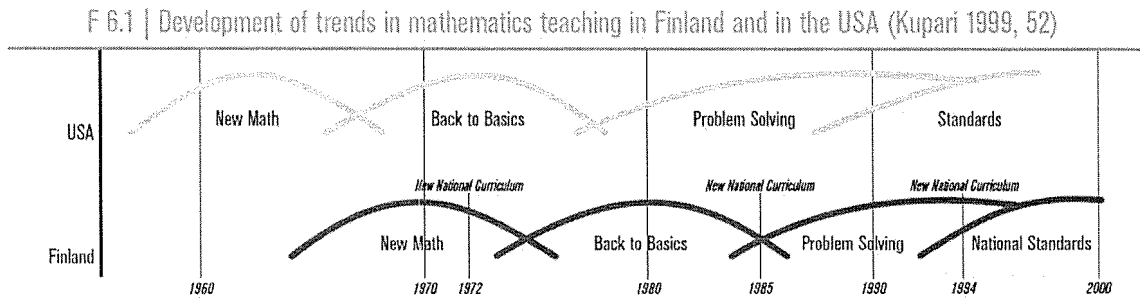
(1) 自行發展

芬蘭在1960年代前，學生在中學階段每週都用自己國家發展的教科書學習代數和幾何，維持百年之久，傑出的數學家擔任學校教師或編寫教科書，在芬蘭是很普遍的事，芬蘭知名的數學家Rolf Herman Nevanlinna和他的父親Otto Wilhelm Nevanlinna (1867~1927)、伯父Lars Theodor Nevanlinna (1850~1916)在芬蘭數學教育的發展上，扮演了重要角色。Lars Theodor Nevanlinna於1902年擔任國家教育委員會(National Board of Education)的數學科負責人，由他編輯的教科書更被使用超過半個世紀。而1946~1970年，芬蘭中學校最常使用的教科書則是由Väisälä所編，自從1917年芬蘭獨立後，隨著新大學的建立和中學校的擴展，數學家參與學校教育的情況便明顯減少 (Malaty, 2009:391)。原採分流制度的芬蘭，學生10歲時必須參加全國考試，按考試成績分普通班及職業教育班，由於轉班幾乎不可能，所以分班決定學生的未來。基於需要更多的人才與人力因應國家發展，1970年代芬蘭開始實施九年一貫的教育，廢除原10歲必須參加的全國考試，並規定16歲前一律在綜合中學就讀，以學生為本，教師擁有自主權 (盧楓，2003；范信賢，2009)。

(2) 新數學

如圖 2 所示，1960 年代後期，芬蘭的數學教育受到西方數學教育的影響，參與了「新數學 (New Math)」改革計畫，1970 年代開始各校執行「新數學」課程。

圖 2：芬蘭與美國數學教學發展趨勢



(Kupiainen, & Pehkonen, 200 : 119 引自 : Kupari,1999:52)

自 1975 年，芬蘭以「回歸基礎 (Back-to-Basics)」取代「新數學」。1985 年公布新課程，於 1994 年再公布新課程(FNBE,1994)，芬蘭的數學課程深受美國的「新數學」、「回歸基礎」、「問題解決」以及荷蘭的日常生活數學 (Everyday Life Mathematics) 等之影響發生改變(FNBE, 1985;Hautamäki,Harjunen, Hautamaki,Karjalainen,Kupiainen,& Laaksonen,2008 : 29 , Malaty, 2007 : 420-421)。

(3) 回歸基礎

自 1975 年，芬蘭的學校雖以「回歸基礎」取代「新數學」課程，然歐幾里德幾何及其推論 (Euclidean structured Geometry and its deduction) 並未因「回歸基礎」重返學校。「回歸基礎」下，芬蘭的數學教育的重點在於數學技能的掌握，在綜合學校，算術教育以訓練為基礎 (based on drilling)；製作具節奏背誦乘法表的錄音帶(rhythmic cassettes)；代數學習變成不斷練習的額外算術；高中階段，現成的公式與算法被以機械的方式(in mechanical way)使用於解決代數問題；幾何成為周長、面積和體積的計算，以及在給定步驟的幫忙下，使用工具畫出架構(make constructions)；幾何只是大量利用三角計算面積和體積(Malaty, 2009 : 392)。

(4) 問題解決

「問題解決」被視為一種增進思考技能的手段，解決問題並不只是學習數學的目標，也是主要的手段，在開始解決問題時，學生只需洞察力找出解答，就可以處理問題，關鍵點通常在於用新的角度察覺問題情境，這種問題被稱為一步驟問題、簡單的數學問題，或數學猜謎(mathematical puzzle) (NCTM, 2000 : 52)。

芬蘭自 1985 年將「問題解決」列為課程總體目標之一，而且超過 20 年（FNBE, 1985、1994、2004），「問題解決」課程從小一開始安排，鼓勵學生解決問題，此時，常識的運用甚於數學的學習，而且在「問題解決」之名下，提供孩子們難題後，只能等到他們找到解決方法出現為止(Malaty, 2009)。

1980 年末，芬蘭就已落實於教師的職前與在職教育，1986 年，芬蘭國家教育委員會（FNBE）計畫性地在學校推動數學的「問題解決」，1986 和 1987 年為教師舉辦問題解決研討會，使用不同的問題於演講、示範及班級教學，與會者被強烈要求使用這些問題在教學中，並於隔年研討會中發表。在此之前，「問題解決」作業鮮少出現在芬蘭的數學課本上，但在研討會後，無論是小冊子或紙卡方式，幾乎每家出版商都出版了一套問題集，教科書中也安排探討問題的時間。1990 年代 FNBE 出版指導手冊（Pehkonen,2007 引自 Seppälä, 1994）以協助教師如何落實課程架構（curricular framework），三、四種類的新教科書也根據課程架構編寫綜合學校小學 1-6 年級及中學 7-9 年級的用書，以為訓練綜合學校學生的思考和問題解決能力。但由於時機不夠成熟到採用這種徹底更動的教科書(adical textbooks)，仍有部分教師們不願意接受，堅持使用傳統數學書籍(Pehkonen,2007)。

(5) 日常生活數學

相對於歐洲中心主義的數學，「民族數學（Ethnomathematics）」將數學課程與各民族不同的文化傳統連結，已經被解釋為「日常生活數學」。自 1990 年起，芬蘭開始重視「日常生活數學」，在就學之初甚至學前教育就已成為一項普遍的活動(Malaty, 2009)。前述之「新數學運動」、「回歸基礎」、「問題解決」以及「日常生活數學」等至今仍影響著芬蘭的數學，尤其是「日常生活數學」使芬蘭因此在 OECD 的 PISA2003 及 2006 分居第二(Malaty, 2007：420)。

(6) 數學課程均衡設計

「問題解決」與「日常生活數學」的數學課程，雖使芬蘭在 PISA 獲得成功。然而芬蘭存有「中學畢業的數學程度無法滿足高中所需」的課題。Nevanlinna (1966) 等芬蘭數學家們當初反對「新數學」的改變，因此，在「回歸基礎」的一開始，並

沒受到很大的反對。然而在「新數學」的效應消失之後，芬蘭的大學和理工學院學生的程度，讓國內所有的數學家對學校數學的改變很不開心，大多數的數學教育者都參與了這樣的改變活動，1980~1990 最具代表的領導人物 Erkki Pehkonen 也參與其中，Pehkonen 認為學校的數學並未是真正的數學，而是個綜合性的教育科目 (Malaty, 2006:422 引自 Pehkonen & Zimmermann, 1990:10)。因此，自 1995 年起，一些數學家開始在某種程度上參與數學教育，課程朝向均衡設計，一方面保持重視日常所需的優勢，另一方面建立數學結構。國家教育委員會 (National Board of Education) 在 2004 年出版的「國家基礎教育核心課程 (National Core Curriculum for Basic Education)」，將「數學思維 (mathematical thinking)」和「數學結構 (structure of mathematics)」也列為新課程的基本要素 (FNBE, 2004b; Malaty, 2007: 424)。

2. 芬蘭數學課程內涵

芬蘭於 2004 年 1 月公佈的現行的核心課程，參照 2001 年公佈的課程時數分配 (FNBE, 2001)，於 2006 年 8 月開始實施 (FNBE, 2004a, b; Aho, Pitkanen, & Salhlberg, 2006:25)，其數學教育目標 (FNBE, 2004b: 158) 及教學時數如下：

(1) 數學教育目標

1-2 年級		
核心任務	目標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> ●發展數學思維 ●練習專注、傾聽、溝通 ●獲取經驗做為數學概念與結構的基礎 	<ul style="list-style-type: none"> ●學習專心、傾聽、溝通和發展他們的思維；他們將藉由理解和解決問題獲得滿足和樂趣。 ●用表達數學概念的不同方法獲得多種經驗；在概念的形成過程中，將主要觀點以口語、文字、工具和符號來表達。 ●理解概念形成架構。 ●理解自然數和學習適用於自然數的基本計算技能。 ●學習利用圖片、具體模型和工具，以書寫或口頭方式證明他們的解法和結論，並找出現象間的相似處、相異處、規律和因果關係。 ●熟練地進行觀察從他們個人觀點而言具有挑戰性和重要性將發生的數學問題。 	<ul style="list-style-type: none"> ●數與計算 ●代數 ●幾何 ●測量 ●數據處理與統計

(引自 FNBE, 2004a:158)

3-5 年級		
核心任務	目 標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> ●發展數學思維 ●介紹數學思維學習模式 ●加強基本計算能力 ●提供經驗做為理解數學概念與結構的基礎 	<ul style="list-style-type: none"> ● 增加數學成功的經驗。 ● 學習經由調查與觀察，形成數學概念和概念系統。 ● 學習使用數學概念。 ● 學習基本的計算能力並解決數學問題。 ● 找出現象間的相似處、相異處、規律和因果關係。 ● 證明他們的行動和結論，並呈現解法給其他人。 ● 學習在觀察的基礎下，呈現問題和結論。 ● 學習運用規則和遵循指引的方向(follow directions)。 ● 學習持續與集中精神於工作，以及團隊合作。 	<ul style="list-style-type: none"> ●數與計算 ●代數 ●幾何 ●數據處理 ●統計與機率

(引自 FNBE ,2004a:161)

6-9 年級		
核心任務	目 標	核心內容
<ul style="list-style-type: none"> ● 加深對數學概念的理解 ● 提供足以建立日常數學問題模式的基本能力 ● 學習數學模式思維，並練習記憶、專注和精確表達 	<ul style="list-style-type: none"> ● 學習相信自己，並對數學學習負責。 ● 理解數學概念與規則的重要性，並領會數學和實際世界之間的關連。 ● 學習如何計算與解決數學問題。 ● 學習邏輯和創造性思考。 ● 學習應用各種方式去獲得與處理資訊。 ● 學習明確地表達他們的想法，並證明他們的方法與結論。 ● 學習以觀察為基礎，呈現問題與推論。 ● 學習理解規律。 ● 學習如何持續、集中注意力及團隊的運作。 	<ul style="list-style-type: none"> ●思考技能與方法 ●數與計算 ●代數 ●函數 ●幾何 ●機率與統計

(引自 FNBE ,2004a:163)

(2) 數學教學時數

在1900-1910年代，芬蘭的數學教學時數明顯高於其他科目，後由於中學階段須學習4種語言，所以語言教學時數較數學的兩倍還要多，但數學教學時數仍高於美術、體育等四科的總時數，1914年，數學科的教學時數開始些許減少，改變了數學科在學校的地位 (Malaty2009引自Halonen，1982：33、51)，在1918、1941和1948又有

些許減少，而在綜合學校建立的1972年縮減最明顯，1985年又再次減少(Malaty2009引自Kouluhallitus, 1985：316-317)，在1914年以前，數學科教學時數在中學的五個年級每週共23小時，而1972年共18小時。

1986年，聯合國教育科學文化組織(United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, UNESCO) 公佈調查各國12年以上的數學教學平均時數，結果指出各國數學教學的平均時數界於芬蘭的每週2.6小時至瑞士6.1小時(UNESCO, 1986:35)，芬蘭的數學教學時數在94個參與國家中最低。

即便現今階段，芬蘭的綜合學校九個年級每週共32節（每節45分）數學課，相當於每週每個年級2.7小時，符合1998年《基礎教育法案》(Basic Education Act, 1998) 著重日常生活及各科均衡的目標(FNBE,2001；Malaty, 2007：421；Education, Audiovisual and Culture Executive Agency [EACEA],2008:64；2009:63)。

3. 芬蘭數學課程特色

芬蘭在 OECD 的 PISA2003 及 2006 的數學素養平均得分各分居第二，雖 PISA 2006 整體成績落後於排名第一的我國之後，然我國在層級 1 及其以下者高達 11.9% (OECD, 2007)，而芬蘭數學低於基本程度僅 5.9%，學生的數學優劣差距遠較我國小，不同地區各校之間的差異也最小，芬蘭的數學教育品質高且全面均衡發展。OECD 的報告指出「由芬蘭學生的表現可以得知成功的教育制度，既可提高教育水準，亦可拉近學生間成績的差距。」。芬蘭的數學教育品質高且全面均衡發展原因在於如下之因素(范信賢，2009；陳之華，2009；盧楓，2003a，2003 b；Fergus Bordewich，2005；Malaty, 2006；Väljörvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen, & Arffman,2007)：

(1) 學生本位

1) 普及教育：芬蘭政府為保持全民族的知識和技能水準，將普及教育置於國家政策的中心，1998 年《基礎教育法案》(Basic Education Act, 1998)指出教育的宗旨在於滿足孩子們天生的求知欲，循序漸進傳授知識與技能，讓學生充分自主發展；

綜合學校是為了每一個孩子，因此配合孩子的需要進行調整，將指導和教學結構化，以便適合異質性的學生(范信賢，2009；盧楓，2003a, 003b)；芬蘭的老師不會將任何一位學生排除而送往其他學校，因此，學校在規劃課程、選擇內容、教材、學習策略、方法和評估方式時，都考慮學生個人的興趣和選擇，而這些需要建立於彈性、校本和教師以學生為中心的教學、輔導和補救教學課程的規劃(Väljjarvi et al.,2007:47)。

2) 學習遲緩者能獲得輔導：芬蘭不設資優班，不將學生貼優劣標籤，學校不排名次也沒有明星學校等，每位老師有義務和責任教好不同類型的學生，各地根據課程標準設計本地的各門課程(陳之華，2008)；芬蘭人不認為需輔導的學生為失敗者，而視輔導為進步的手段，輔導教師因應每個學生不同的資質，各自制訂循序漸進而且切實可行的學習計畫，要求學生和自己以往的成績相比，而不是和其他同學相比，因此，芬蘭學生學業優劣者差距小 (Fergus Bordewich，2005；Malaty, 2006：421)。

3) 學生獨立學習。教師認為真正的知識來自搜尋，所以要求學生自己搜集資料，而不是從課本學習(Fergus Bordewich，2005)；芬蘭學生的讀書計劃都由他們在家長和教師輔導下自行制定，他們能有自己的學習方法以及不同的學習目標和學習進度，他們不一定在同一時間做同樣的事，彼此進度也未必相同(陳之華，2009)。

4) 學生自我評估成績：為培養學生對自己負責，學校從幼稚園開始，教學生評核自己的成績，教師不會經常監視學生在做什麼(Fergus Bordewich，2005)。

5) 學校氣氛輕鬆：在芬蘭所有中學，除非有課，否則學生不必上學；而下課後，學生就可回家(陳之華，2008；Fergus Bordewich，2005)。

(2) 師資素質高

1) 教育課程錄取門檻高：大學教育課程錄取率，每七名申請人之中僅取一人，比法律和醫學課程更為嚴格，雖然學校有權解聘不勝任的教師，但幾乎不曾發生(Fergus Bordewich，2005)；

2) 成功的職前師資養成教育與在職師資教育：芬蘭 10 所綜合大學均有教育學院，這些學院除開設常規課程外，根據教育改革需要，增設教育諮詢專業，所有教

師具有碩士以上的文憑以及教師資格證書，以保證教學品質，大學和其他教育機構免費提供教師的終身培訓，不斷提高辦學品質和效益，以提高教師的專業素質與知識的更新(盧楓，2003a，2003b)。大學教學實習學校 (University Practice Schools) 提供了理想的實習環境，教學實習學校通常在大學校園內，並靠近教師訓練部門，數學教育專家在該部門擔任教學實習的輔導老師 (tutor)，實習生 (trainee) 只要他們願意，都會有機會接觸數學教育專家獲得指導，另一方面，他們也能獲得所有包括來自於圖書館的大學技能(university facilities)。 (Malaty,2006)

(3) 教學專業的文化(the culture of the teaching profession)

1) 享有教學自主權：芬蘭的學校沒有督學(inspections)，受聘後，不會受到定期視察與評核，如此不只節省經費，也使教師感覺自由及負有責任感，教師可自行決定使用何種教學法也可自行制訂課程，自選教科書或完全不用教科書，芬蘭當局完信任任教師，這些自由讓每位老師的專業發揮了積極的作用，讓他們對自己的工作感到興趣，也提供他們發展自身經驗的機會 (Fergus Bordewich ,2005；Malaty,2006)。

2) 具教學專業：芬蘭的每位教師都能夠以全國教育委員會(National Board of Education) 公佈的基本課程以及學校公認的更詳盡課程為基礎，發展自己的課程 (Malaty,2006)。

3) 關注學生的傳統：對大多數的芬蘭教師而言，他們的興趣在於本身的專業成長，常見教師在學生桌前或坐或跪地與學生面對面安靜討論等關注學生學習狀況的個別輔導方式，是芬蘭長期以來的傳統(Malaty,2006)。

4) 視學生成敗為己任：教師會將未能教好學生，歸因為自己教學工作出了問題 (Fergus Bordewich ，2005)

(4) 芬蘭的學校生活的日常傳統(the daily traditions of school life in Finland)

45 分的課堂與課堂間，有 15 分鐘的休息時間，學生在休息時間必須離開教室到操場，教師們則輪流觀察在戶外的學生，學生和教師都一起在餐廳享用免費午餐

用，校長可以利用擴音器與學生及老師聯絡，但很少使用(Malaty,2006)。

(5) 教師工作具持續性

芬蘭教師工作的持續性(the continuity of teacher's work)有兩項優勢：(1) 選擇教學為終生的職業及(2) 極少換校。芬蘭年輕人記得小學放學時和老師握手、擁抱，所以多數小學實習教師 (Primary School Teacher students) 會以教小學新生為其選擇，決定投入教職的要素是情感因素而非薪水(Malaty,2006)。

(6) 各種不同的發展數學教育的努力

芬蘭在數學教育上的主要問題是缺乏具備數學專長的小學教師，3-4 學分的數學及數學教育是必修，另可選 1-2 門學科作為主修，或選修教育研究，但數學一直都不是熱門的選擇。1992 年 Joensuu 大學的根本變革前，只有少於 2%的學生選擇數學作為專業，然目前在 Joensuu 大學，數學是小學師資培訓課程中，最熱門的其中一項主修科目，有超過 80%的學生主修數學(15 學分)，其中一半的人修 35 學分，再取得中學數學教師的資格。係由於 Joensuu 大學的「師範學校 (Normal School)」在數學的教學實習期間，會有班級老師和大學的數學教育家到師範學校的小學擔任監督人，這種監督包含備課的監督，會要求學生教數學要比教科書更有系統，且將重點放在理解和使用探索策略。

1990 年組織的數學社團在 1990 年代前半期，擴展到在職教育，由社團所出版的材料和教師手冊，都為教師的工作提供了幫助。歷經了 20 年一直沒有幾何課本後，1995 年，數學社團出版高中的幾何課本了(Malaty, 2006)。

(三) 荷蘭

1. 荷蘭現實數學課程沿革

自 1960 年代末起，荷蘭數學教育採用「現實數學教育(Realistic Mathematics Education, RME)」，相對於此，無論是我國或是芬蘭、日本的數學教育都深受美國數學教育的影響，荷蘭數學教育沒受到美國 1960 年代早期的「新數學」的影響，

歸功於 Freudenthal，係由於 Freudenthal 沒有抵制抽象概念，而且他確信抽象概念應與現實基礎連結，由學生在指導下自行發明數學，並經由精心挑選學生所熟悉的實際問題來增進理解(Case, 2005：378)，因此以荷蘭現實數學教育發展的歷程，探討荷蘭現實數學教育的沿革。

(1) 做數學

荷蘭的數學課程最大特色在於現實主義數學教育的理念和實踐，Utrecht 大學的 Freudenthal 研究所發展的現實數學教育課程在過去 30 年已經成為荷蘭國家標準 (Case, 2005：374-375)，已蔚為國際數學教育的一個基本趨勢。荷蘭現實數學教育 (Realitic Mathtmetics Education，RME)，主要來自於 Freudenthal「數學是人類的活動」(mathematics as a human activity) 的哲學理念，該「活動」主要包括：尋找問題與組織論點(subject matter)、解題的活動(Freudenthal，1971，1973)，基此，主張從「做數學(doing mathematics)」學習數學。目前荷蘭中學展開的全國性現實數學教育改革，與美國的 NCTM (2000) 強調學校數學教育的基本原則的《學校數學的原則和標準 (Principles and Standards for School Mathematics)》改革路線相似 (Case, 2005：374)，憑藉其小面積和僅有的 16 萬人口，荷蘭能夠轉換本身成為改變數學教育的全國性實驗室，荷蘭人似乎提前完成改革。

(2) 從真實世界的脈絡著手學習

Freudenthal 主張「學生不是學習『數學』，而是學習『數學化』」，強調「數學來自於現實生活，將其再利用於現實生活」以及「學生經由自己熟悉的現實生活，自行發現和理出數學結論」，自 1970 年代起呼籲數學應該與現實連結，貼近孩童的生活經驗，由數學概念的實體現象教孩子學習數學 (Freudenthal, 1983；周玉秀，2006：4)。1980 年的荷蘭，只有 5% 的課本可以說是趨向現實數學教育，但到了 1990 年，則有 75% 的課本是現實數學(Case, 2005 引自 Streefland & Leen ed, 1991)，多數的學校都在使用以現實數學教育理念編寫的數學課程，讓學生從自己熟悉的生活發現數學概念，再將學到的數學概念運用到現實生活 (何淑真，2003)。RME 營造豐富的學習環境，讓學生主動學習，取代講授式的知識傳遞，配合學生非正式的

知識，引導他們重新發明，使之達到更高階的理解層次(Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)，教學從真實世界的情境中出發，學生根據真實世界的素材，在視覺化下發現規則，粹取數學概念形成基模，再經由同儕間和師生間的說明、討論、賞析等相互質疑與反思的過程，以及一般化的過程，發展成更完整的概念，進而形成數學概念 (de Lange, 1996)。

(3) 水平式及垂直式數學化並重

Freudenthal(1968)認為在數學教育的焦點不在於將數學視為一個封閉的系統，而是一種活動，一種數學化的過程(Van den Heuvel-Panhuizen, 2000：3)，針對 Freudenthal 所提出的數學化，Treffers (1978, 1987)進一步闡述，將數學化分為「水平式的數學化 (horizontal mathematization)」與「垂直式的數學化 (vertical mathematization)」(Gravemeijer, & Terwel, 2000：782)，視該二種數學化型式是組織與構建的活動，「水平式數學化」過程，係藉由數學工具來組織和解決現實生活情境的問題，從現實世界的問題轉化為數學問題或轉化為已知的數學模型，首先將問題以圖式化與形象化手段的數學方式陳述，進而發現規律、關係和結構，或從不同的問題中辨識其同構的本質；「垂直式數學化」過程，重視數學系統本身的重組再構的過程：以式子表達關係、證明規則、彙整模型、完備模型、形成新的數學概念、建立一般化理論等。

Freudenthal (1905-1990) 的最後一本書(指 1991 年版)，接受 Treffers(1978 年獲得博士學位，指導教授即為 Freudenthal)將數學化分為水平式及垂直式的新觀點，視水平式數學化為從生活的世界進入到符號的世界，而視垂直式數學化為在符號世界的探討，並視水平式及垂直式這兩種數學化形式的價值相等，認為水平式及垂直式的數學化，適用於各種層次的數學活動(Van den Heuvel-Panhuizen,2003：12)，但荷蘭數學教育深受 Freudenthal 的強烈影響，實際參與 RME 的理論發展及實踐的 Panhuizen 指出 1985~2000 年的 15 年間荷蘭的數學教育比較重視與現實的連結，重視水平式的數學化勝於垂直式(Van den Heuvel-Panhuizen,2000：2)。

(3) 以學生有意義的方式著手解題

荷蘭的數學教育改革被視為「現實(realistic)」並不僅只是因為與真實世界連結，而是因為 RME 提供學生可以想像的問題情境。荷蘭文的「想像」是「zich REALISEren」，強調讓某些事在你心中成真，由此產生 RME 這個名稱。將問題呈現給學生時，可取自真實世界，但非必要，只要在學生的心中是真實的，無論是童話的幻想世界，甚至是能提供適當情境的數學正式世界，都是合適的情境(Van den Heuvel-Panhuizen,2000：4；Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers,2005：288)。

Gravemeijer(1994)及 de Lange(1996)沿循學習從脈絡著手，進一步闡述水平式數學化的過程：(1) 從學生熟悉方式著手；(2) 以能幫助自己了解的方式描述問題；(3) 操弄相關特徵；(4) 經由基模化(schematizing)與問題情境關係的說明，使得自己對問題更了解；(5) 逐漸發展成更正式的語言；(6) 內化等的過程學習數學。強調以對學生而言較有意義的非正式數學語言的描述與訊息的辨識著手，相對地比較容易解題，再發展成更正式的語言，學生再運用已有的知識與技能去發現未知的規律、關係和結構將符號與策略運用於另一脈絡問題，熟練所學的數學語言。

2. 荷蘭數學課程內涵

(1) 數學教育目標

荷蘭將目標分為「跨學科目標(Cross-curricular attainment targets)」與「學科目標」。

1) 跨學科目標

跨學科目標的目在於發展或加強一般的技能，是任何一門學科都應指向的目標，是課程目標的核心。小學階段的跨學科目標包括：① 工作態度；② 按計劃工作；③ 運用多種學習策略；④ 自我認識(Self-image)；⑤ 社會行為；⑥ 新媒介(New media)。中學階段的跨學科目標則包括：① 跨學科議題(Cross-disciplinary themes)；② 學會做；③ 學會學習；④ 學會溝通；⑤ 學會反思學習過程；⑥ 學會思考未來(Peschar, & van der Wal, 2001:13-14)。

2) 主要核心目標

① 小學

荷蘭小學的數學教育的主要核心目標如下 (Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008a : 8) :

A. 數學洞察力(insight)與運算

- (A) 學生學習使用數學語言。
- (B) 學生學習解決實際(practical)與正式的算術及數學的問題，並能明確提出論點(argumentation)。
- (C) 學生學習使用方法解決算術/數學的問題，並能評估解決方案。

B. 數與計算

- (A) 學生學習理解數量、整數、小數、百分比和比例的總體結構及相互關係，並利用於實際情況的算術進行。
- (B) 學生學習迅速在腦海進行至少 100 的整數及其加減 20 的基本運算，並能夠背誦九九乘法表。
- (C) 學生學習計算和估算。
- (D) 學生學習利用靈巧的方法(clever ways)進行加減乘除。
- (E) 學生學習利用紙筆縮減或多或少的標準程序(more or less contracted standard procedures)，進行加減乘除的計算。
- (F) 學生學習利用洞察力(with insight)使用計算機。

C. 測量與幾何

- (A) 學生學習解決簡單的幾何問題。
- (B) 學生學習使用單位和測量方法，進行如時間、金錢、長度、周長、面積、體積、重量、速度和溫度等的測量和計算。

② 中學

荷蘭中學的數學教育的主要核心目標如下 (Ministerie van Onderwijs & Cultuur en Wetenschap, 2008b : 2) :

A. 核心目標

學生學會使用適當的數學語言來組織自己的想法，向其他人解釋，並學會理解其他人的數學語言。

B. 較低層中學教育核心目標

- (A) 學生學習獨自以及與他人在實際情況中辨別數學，並使用其來解決問題。
- (B) 學生學習建立數學論點並能從中區辨意見(opinions)和主張(allegations)，以及學習尊重他人的思維方式，給予與接受批評。
- (C) 學生學習理解正負數、小數、分數、百分數和比例的結構與一致性(coherence)，並學習運用於有意義的實際情況中。
- (D) 學生學習正確的計算，並經由洞察力的推理與估算、精確地調整之，以及適切地用於特殊情況。
- (E) 學生學習測量，理解度量系統的結構與一致性，並學習以常用的度量單位進行計算。
- (F) 學生學習使用非正式的標記法、概要圖、表格、圖表和公式，以掌握數量和變量間的關係。
- (G) 學生學習利用形狀(forms)與結構於二維與三維空間，創造想像並解釋之，並用其特徵與測量法，進行計算和推理。
- (H) 學生學習有系統地描述、組織及視覺化數據，並學習以批判的角度評估數據、表達與下結論。

(2) 數學教學時數

荷蘭政府並無規定各科課程的時間與範圍，只規定每年的最少教學時數 Education, Audiovisual and Culture Executive Agency. (2008, September : 67)，前兩年平均每週上課時數 22 小時，後六年平均每週 25 小時(Education, Audiovisual and Culture Executive Agency 2009 ,April : 4/10)。

3. 荷蘭數學課程課題

荷蘭 12 年級學生在 TIMSS1995 的數學國際評比中獲得第一名，而荷蘭前 25%

的學生也在參賽國家的前 25% 中名列第一，而這些參與 TIMSS1995 測驗的 12 年級學生，許多在 1980 年代都是使用現實數學的課本(Case, 2005：378)。

荷蘭的一般數學教育，尤其是現實數學教育的數學學習中，學生在現實世界情境中尋找和組織數學要素，解決問題、應用及創造延伸並以單獨或集體方式，向其他人解釋及報告，這種數學學習方法與培養學生的創造力不能分開，遠離了機械式的背誦，或是「未分析問題的本質直接機械式死記硬背」，或「在灌輸中前進（plug-and-chug）」的學習方法。由於現實數學教育目前已是荷蘭的國家標準(Case, 2005：381)，目前老師必備的這些教學技能與 25 年前師資培育的重點大相逕庭，這些障礙可能會限制許多目前從事教學老師的成長。教學內容、教學型態和學生學習的數學教育改革中，荷蘭認為若要繼續保持數學教育的成功，要從根本上改變教學的品質，而其三項要素是教師、教師、教師，教師的素質是現實數學教育成功的關鍵(Case, 2005：381)。

(四) 日本

1. 日本數學課程沿革

日本戰後的數學教育歷經以下幾個時期(林宜臻，2009；清水靜海，2003；教育學研究会，1997)：

(1) 生活單元學習（1947-1957）

第二次世界大戰日本敗戰後，日本教育史上首次的學習指導要領以試案形式登場，告示各級學校的教育課程制訂的基準，要求各校教師自力制訂自校的教育課程(教育情報ナショナルセンター，1947)，昭和 22 年(1947 年)5 月發行《學習指導要領 算數科・數學科編（試案）》設定首次的中小學數學科目標，內含總目標與具體目標。昭和 26 年 12 月發行的《學習指導要領 算數科編（試案）》在目標中再加入「數學與我們的生活」及「數學與教育的一般目標」，各級學校的裁量權大，強調從生活經驗展開數學的學習，同年 11 月公布的《學習指導要領 數學科編（試案）》的數學一般目標中，強調「培養能善用數學所需的數學理解與能力」，以及

「使用數學解決問題所需的能力與態度」，「試案」性質，所以尚未具有法的基準性(清水靜海，2003：6-11)。

(2) 強調學科的特性與內容的系統性 (1958-1967)

昭和 33 年(1958 年)版學習指導要領，由文部省正式公佈所以不是「試案」，具法律的拘束力，成為必須嚴守的國家基準 (教育情報ナショナルセンター，1958a，1958b)。

數學科的目標除學科目標外，也設有分年目標，除了要求知識與技能的充分理解外，還要求熟練與活用，以及創意與數學思考，並以義務教育的角度，考慮中小學數學的一貫性。修訂的學習指導要領廢除「生活單元學習」強調「系統學習」，中學數學設置「選修科目」，中學數學科內容包括「式」、「數量關係」、「計量」、「圖形」4 領域，內容較以往程度高，中三選修科目的數學內容程度高。

(3) 數學教育現代化 (1968-1976)

受 1957 年蘇俄發射人造衛星「史潑尼克一號」(Sputnik I)發射成功的影響，1968 年版學習指導要領展開「教育內容的現代化運動」充實學校教育，發展科學技術，導入高難度現代化課程的教學內容，但教學節數卻與 1958 年版一樣，「新幹線」的授課速度外，教師無法勝任教學內容，造成無法跟進的學生群出(教育情報ナショナルセンター，1968、1969)。數學教育被要求反應現代化的數學內容，中學的《學習指導要領》強調培養「數學的思考方式」，學科內容包括「數與式」、「函數」、「圖形」、「機率與統計」、「集合與邏輯」5 領域，函數明確化並強化邏輯；導入集合、函數、機率、不等式、圖形變換等新概念；廢除中三選修科目的數學，因此中三增加 35 節，中學階段每個年級都有 140 節(4 節/週)的數學。

(4) 重視基礎與基本 (1977-1988)

數學教育現代化，造成教學者的困擾與混亂，並引發指導內容過密及指導過度等批判，為解決 1968 年版現代化課程的過密、現場準備不足以及教師力不足等造成大量無法跟進的學生，並基於高中升學率高達 90%以上，中教審 1971 年的答詢(文部省，1971)欲除填鴨教育的弊害，認為與其進行高難度知識的教學，建議精選教育

內容、發展孩子個性與培育人性，實施寬鬆(ゆとり)且充實的學校生活。在回應美國「回歸基礎」運動與「寬鬆與充實」的口號下，1977年版刪減學習內容並精簡各學科等的目標，同時減少教學節數(教育情報ナショナルセンター，1977a、1977b)。

數學修正現代化的軌道，重視基礎與基本，中學數學科內容包括「數與式」、「函數」、「圖形」、「機率與統計」4領域的內容，刪除「集合與邏輯」領域，並降低全部的內容程度，刪減教學時數，「集合與邏輯」領域的內容，則與其他4領域關聯之，改為以適宜的程度處理之。

(5) 教育質轉換的新學力觀(1989-1998)

隨著第二次嬰兒潮世代(1971年~1974年)學校的填鴨教育、培養具協調性勞動者的管理教育、考試戰爭等引發校內暴力、欺凌、拒絕上學、跟不上進度等學校教育及青少年相關多數的社會問題，「小政府、民營化、體制鬆綁」的體制鬆綁後，終身雇用制度瓦解，複合型、綜合型、有創新能力的知識人才需求倍增，1989年版學習指導要領以新學力觀取代舊學力觀，重視學生的體驗活動，評量重視關心、意願、態度，教師角色由指導轉為支援、援助。圖求教育的質轉換(教育情報ナショナルセンター，1989a、b、c)。

相對於以知識與技能為中心的舊學力觀，新學力觀重視學習過程及培養能主動因應社會變化的能力與態度，數學學科強調「培養邏輯思考力與直觀力」不僅只是有條理思考而且能先推估(見通しをもつ)、由「瞭解數理處理的好處」進而培養「主動活用於生活的態度」等，增加體驗學習及問題解決學習的學習內容，重視關心、意願、態度的評量。強調「個性化與自由化」，教師的角色由指導改為支援學生本身探索知識與真理。學力的重心由「知識與理解」轉為「思考力與應用力」，中學設置「課題學習」與選修科目，強調必要之際活用計算器等之效果。新學力觀被批判「輕視基礎與基本，導致學力下降」、「關心、意願、態度評量不易，導致以舉手次數決定的偏差」等。

(6) 教育內容的嚴選(1999-2008)

1998(1999)年版學習指導要領如**錯誤! 找不到參照來源。**。中小學同時於 1998 年公佈，也同時於 2002 年開始實施，高中 1999 年公佈，2003 年度從 1 年級逐年實施。

針對學童生活現狀中缺乏悠閒、社會性不足與倫理觀問題、自立延遲、體力等問題，1996 年第 15 期中教審的第 1 次答詢中，提出培養全人「生存能力」的必要性，「生存的能力」成為 1998 年版學習指導要領的基本理念，小學中年級到高中階段創設只規定節數不規定學習內容的「綜合學習時間」以為橫向的聯繫與綜合，培養學生主動性與自主性的思考力及問題解決能力；各校得以展開有特色的教育。藉由教學內容與現實生活結合，提升學生的學習意願，並培養學生主動、自主性的思考力、問題解決的能力，以及因應社會與生活等諸問題的能力，學生獲得綜合性課題知識的同時，並提升自我思考之能力。

隨著 2002 年學校週 5 日制的開始實施(文部科学省，2002 年 3 月 04 日)，以及培養學生的「生存的能力(生きる力)」及減輕學生負擔的考量下，1998 年版學習指導要領縮減總教學節數，中小學每個年級縮減 70 節(每週約 2 節)，小學數學縮減 14%，中學數學縮減 18%，每個年級縮減教學節數，每單位時間並可彈性化；擴大選擇學習幅度，增加中學選修科目時數，學校得以自行設定學科與科目；嚴選學科學習內容，刪除難度高單元或挪至高年級；數學學科目標特別強調「數學活動」及其帶來的「樂趣」，希藉此學生主體性探討數學(教育情報ナショナルセンター，1998a、b、c)。

(7) PISA 型學力觀(2007-)

日本現行課程提倡「生存能力(生きる力)」，重視 OECD 提唱的 PISA 型的學力觀，較之學科知識的學習，重視「社會中能使用的能力」，提出「觀點別評量」，由僅評量「知識與理解」的觀點再增加「關心與意願」、「技能與表達」、「思考與判斷」，其中的「關心與意願」、「思考與判斷」是 OECD 強調的「社會中能使用的能力」(中原忠男，2008)。日本自 2007 年起每年 4 月以中三及小六全體為對象，實施的學力調查內容除了調查生活習慣和學習環境的問卷調查外，尚有紙筆測

驗，借鏡 PISA 國際學力調查，將試題除「知識」外，同時將「活用」列入試題是一大特色，「知識」的部份鎖定會影響後續學年學習的內容及生活中活用不可或缺的知识、技能為主；「活用」則以能將知識、技能等活用於生活中各種場面的能力，以及為解決各種課題的構思及評鑑、改善的能力等之內容為主，重視 PISA 型的學力觀(文部科学省，2009)。

2. 日本數學課程內涵

(1) 數學教育目標

小學數學課程目標：「經由數學活動，獲得數量形的基礎、基本知識與技能，培養對日常的事象能推估及邏輯思考，以及表達的能力，同時培養由發現活動的樂趣及數理處理的好處，主動地應用於生活與學習的態度」(文部科學省，2008a：35)。

中學的數學學科目標：「經由數學的活動，加深理解數量形等相關的基礎概念及原理與法則，學會數學的表達與處理的方法，以提高數理考察事象及表達的能力，並由實際感受數學活動的樂趣與數學的好處，培養主動活用、思考及判斷的態度」(文部科學省，2008e：40)。

(2) 數學教學時數

日本為充分確保基礎/基本知識與技能的反覆學習，以及利用於觀察與實驗、報告撰寫、論述、數量形相關知識與技能活用於實際場面等的時間以培養思考力與表達力等，促使實感理解的喜悅及學習的意義，增加教學節數：小 1(每週 3.4→4 節)、小 2(每週 4.4→5 節)、小 3~小 5(每週 4.3→5 節)；中 2 仍維持 3 節外，中 1 與中 3 數學每週增加 1 節(3 節→4 節)(林宜臻，2009；文部科学省，2008a、e)。

3. 日本數學課程特色

日本 2008 年 3 月公布新學習指導要領(相當於我國的課程標準)。數理兩學科的上課時數與內容都增加外，2011 年實施的新課程，中小學的數學及理科的部份內容則提前於 2009 年度先行實施。新學習指導要領再度強調「生存的能力」，經由數學和實際日常生活的結合，提升學生的數學學習意願與內容。基於日本學生在

TIMSS2003 及 2007 無論是國二或小四都在 5 名以內，但學習意念卻是最低水準，回答「數學學習是快樂」佔 40%（國際平均 67%）是最後第 6 名，此外，日本在 PISA2000、PISA2003 及 PISA2007 學生的數學應用能力名次也逐次下滑（第 1 名→第 6 名→第 10 名），如何提升學習意願及增進數學應用能力等方法知識是日本數學教育課題（林宜臻，2009）。日本新數學課程特色有如下之特色（文部科学省，2008a-g）：

(1) 根據學習現況提出數學課程改善方向

日本根據全國學力調查、教育課程實施狀況調查以及國際教育成就調查協會（The International Association for the Evaluation of Educational Achievement, IEA）的 TIMSS2003 調查，以及 OECD 的 PISA 2003 與 2006 等調查結果，發現日本學生的數學學習尚存有如下課題：① 意義理解不夠未能充分活用：無論是日本國內的教育課程實施狀況或國際性學力調查的結果分析，雖然計算等技能沒有下降的傾向，基礎與基本知識與技能的紮根情形良好，但存有對計算意義理解不夠等的課題，而且對於已學的知識與技能未能充分活用於生活與學習的課題；② 「讀解力」不理想：活用學習於解決實際生活上的「數學素養」及「科學素養」大致良好，但有每況愈下的現象，對於事件與現象未能以數學角度擷取資訊、深思、批判、提出結論及以記述式方式表達自我思考及判斷不拿手等之課題；③ 學習意願低並感不安與無趣：由 PISA 調查發現：日本學生對於數學學習內容的興趣低於國際平均值，對於數學學習感到不安的學生比例比國際平均值高；TIMSS 的調查同樣發現學生認為數學學習是快樂的比例比國際平均值低；日本國內數學喜惡調查發現小六及中一學生回答喜歡數學的比例有下降的現象，覺得數學學習無趣、無益的孩童增多；（文部科学省，2007a；文部科学省，2007b）等之課題。根據前述課題，日本新數學課程改善的方向如下：① 充實數學的活動、紮實學會基礎/基本的知識與技能、培養數學思考力與表達力、提高學習意願；② 從數量形的基礎/基本的知識與技能確實扎根的觀點，重視數學內容的系統性，重複學年間與學校階段間內容的部份，按發展與學年的階段螺旋式安排數學課程；③ 具體明示培養能根據數據，有條理、有系統的「數學思考力」以及在理解言語、數、式、圖、表及統計圖表等下，將自己的想

法以容易明白方式說明及相互溝通自己想法的「數學表達力」等的指導內容與活動；(4) 重視經由體驗與活動，理解數量形的意義，以及由螺旋式的課程感受學習的進步，並將學過的數學活用於日常生活、其他學科和更進一部的數學學習；(5) 中小學各年級內容明示數學的活動(文部科學省，2007b；文部科學省，2008：4-6)。

因此，小學階段重視經由充實數學活動，實際感受數量形，豐富感覺，讓數學基礎/基本的知識與技能確實扎根，提高數學的思考力與表達力，並將所學活用於生活與學習。中學階段重視經由數學活動的主動探討，學習基礎/基本的知識與技能，培養數學思考力，由瞭解數學的好處，加深理解數學在生活中的功能及數學與科學技術間的關係等，培養以數理角度考察事象的能力與態度(文部科學省，2007b)。

(2) 課程目標強調數學的活動、思考力與表達力、數學的好處、活用於生活與學習

小學數學課程目標：「經由數學活動獲得數量形的基礎、基本知識與技能，培養對日常的事象能推估及邏輯思考，以及表達的能力，同時培養由發現活動的樂趣及數理處理的好處，主動地應用於生活與學習的態度」(文部科學省，2008a：35)。

中學的數學學科目標：「經由數學的活動，加深理解數量形等相關的基礎概念及原理與法則，學會數學的表達與處理的方法，以提高數理考察事象及表達的能力，並由實際感受數學活動的樂趣與數學的好處，培養主動活用、思考及判斷的態度」(文部科學省，2008e：40)。

小學數學課程目標：「經由數學活動獲得數量形的基礎、基本知識與技能，培養對日常的事象能推估及邏輯思考，以及表達的能力，同時培養由發現活動的樂趣及數理處理的好處，主動地應用於生活與學習的態度」(文部科學省，2008a：35；粗體字表新更動處，以下同)；中學的數學學科目標：「經由數學的活動，加深理解數量形等相關的基礎概念及原理與法則，學會數學的表達與處理的方法，以提高數理考察事象及表達的能力，並由實際感受數學活動的樂趣與數學的好處，培養主動活用、思考及判斷的態度」(文部科學省，2008e：40)。無論是中小學的數學課程目標，其最大的變化在於增加「經由數學的活動」及「培養表達的能力」，期待學生能於自我知識的獲得、資訊的掌握、判斷、思考的前提下，「培養表達的能力」，中

學數學課程的目標由 1998 年版的「得知(知る)數學活動的樂趣」改為「實際感受(実感する)數學活動的樂趣」，相對於現行課程後半部「主動地應用於生活的態度」，新課程不僅只停於「主動地應用於生活的態度」，而增加為「應用於生活與學習的態度」，強調活用學過的知識與技能，創造新知識與技能。整體而言，日本數學學科目標強調：1) 數學的活動；2) 思考力與表達力；3) 數學的好處(有用性等)；4) 活用於生活與學習(教育出版教育研究所，2006、2008)。

(3) 強調反覆(螺旋式) 並重構數學內容

1) 反覆(螺旋式)指導：將數量形的基礎/基本知識與技能視為生活與學習的基盤，為使基礎/基本知識與技能扎根，重視數學的系統性，並將學年間與各級學校階段間內容的部份重複，依照發展與學年階段反覆(螺旋式)編排課程(文部科学省，2008b：4)。充實按照發展與學年階段的螺旋式)指導，以落實基礎與基本的知識與技能的扎根，例如整數的四則計算安排於小三，但為定義的扎根及擴展活用能力，小四再度學習。

2) 重構數學內容：基於國際的通用性、確保數學內容的系統性，圓滑接續中學學習的觀點，重新檢討指導內容的構成。

① 小學階段：「數與計算量」、「量與實測」、「圖形」、「數量關係」4 領域外，增設「算數的活動(註：算數指小學數學)」領域；從 1 年級開始增列「數量關係」；跨複數學年部份重複學習。

② 中學階段：由現行的「數與式」、「圖形」、「數量關係」3 領域，改為「數與式」、「圖形」、「函數」、「資料的活用」4 領域，將其中的「數量關係」改為「函數」，增設「資料的活用」以為培養判斷力及指導統計與機率用；部分重複文字式、比例與反比例、圖形的全等、圖形的移動等指導內容，得以反覆學習。

(4) 充實數理教育

1) 增加教學時數

將數理教育較原預定於 2011 年實施的新課程提前於 2009 年實施，並提高數學

教學節數：小 1(每週 3.4→4 節)、小 2(每週 4.4→5 節)、小 3~小 6(每週 4.3→5 節)；國中數學增加 75 節(315 節→386 節，約 22.2%)，中 1 與中 3 數學每週增加 1 節(3 節→4 節)(林宜臻，2009；文部科学省，2008a、e)。

2) 重新檢討指導內容的系統性

以數理的國際通用性、培養擔任學術研究及科學技術的人材、培養全國民具備必要的科學素養的觀點重新檢討數理內容的系統性。

3) 整備教育條件

充實數理教育內容外，也整備數理教育的條件，例如改善教職員數以充實習熟度別與少人數的指導、活用外部人材以為高年級專科教師、充實促使反覆學習與自我發展的教科書等。

(五) 美國

1. 美國數學課程沿革

(1) 新數學運動

1957 年蘇俄發射人造衛星「史潑尼克一號」(Sputnik I)，美國學術界驚覺其科學教育落於蘇聯之後，1958 年成立學校數學研究組，編寫中學數學教材，開啟「新數學運動」，1960 年代幾乎波及所有西方國家，「新數學運動」旨在加強數學課程的現代化，培養高級技術人才，因此在中學數學課程中引進集合、純邏輯和抽象概念等現代數學概念，強調知識的結構，促使數學課程結構化、代數化，歐氏幾何代之以公理，學生提早接觸現代數學的概念與方法。

(2) 回歸基礎

「新數學」過於強調數學結構與抽象，學習障礙；忽視推理的培養、數學的實際應用，以及的培養，造成學生計算能力及應用能力的低落，「新數學」課程改革失敗之後，1970 年代「回歸基礎(Back to Basics)」重新重視學生的基礎知識和基本技能的培養，強調反覆演練以熟練各種數學的基本計算。

(3) 重視問題解決

鑒於：「回歸基礎」過於強調基礎，引發學生的解決問題及理解概念的數學能力下降；過於偏重理論結構，忽視應用的傾向；國際數學評比的排名低落，以及社會需要能應用數學思考解決問題並能處理資訊的公民，美國自 80 年代起重視問題解決，1983 全國教育卓越委員會(National Commission on Excellence in Education)發表《處於危險中的國家(A Nation at Risk)》的報告中，指出包括數學教育美國公教育的一系列問題(National Commission on Excellence in Education, 1983; Pascopella, 2007)。全美數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) 於 1980 年公布的《行動綱領：18 世紀學校數學教育的建議(An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s)》，8 項建議中的第 1 項建議為：「問題解決必須成為 18 世紀學校數學的核心(problem solving should be the focus of school mathematics in the 1980s)」將解決問題作為 80 年代數學教育的核心(NCTM, 1980)。

(4) 標準導向

直至 1989 年 3 月 NCTM 公布美國第一套的課程及評鑑標準《學校數學課程與評鑑標準(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)》前，美國沒有國家的課程標準，而由學校根據各州及學區自行設定的各學年的指導內容設計課程。該標準具體提出了五項目標：① 重視數學的價值；② 對自己的數學能力有自信；③ 具解決數學問題的能力；④ 學會數學溝通；⑤ 學會數學的思考方法，並將 K-12 分為 K-4、5-8、9-12 三個階段，按階段擬訂課程標準，內容由記憶事實與計算方法轉為概念的理解、數學的多種表達、數學的問題解決、連結以及模型化，重視統計、機率及離散數學(NCTM,1989)。然而以「問題解決」作為數學課程的核心，雖教會學生解決問題，學生學會數學的思維，卻有一定的侷限。於是 NCTM 自 1996 年開始籌備課程標準的修訂，採納各方回饋、爭辯與反省的意見，針對 1989 年《學校數學課程與評鑑標準》進行澄清和評鑑，2000 年 4 月公布以「公平原則」、「數學課程原則」、「教學原則」、「學習原則」、「評量原則」和「科技原則」等六條原則為前導的《學校數學的原則和標準 (Principles and Standards for School

Mathematics)》(NCTM,2000)，以為制定課程標準的基礎，而進而建立高品質的數學教學，該標準將有關課程內容、評鑑、教學和評量等的 1989 年《學校數學課程與評鑑標準》、1991 年《數學教學的專業標準 (Professional Standards for Teaching Mathematics)》以及 1995 年《學校數學的評量標準 (Assessment Standards for School Mathematics)》三種標準合而為一，便於教師更容易掌握教學內容、如何教以及如何評量，並將 K-12 原分為三個階段改為 Pre-K-2、3-5、6-8、9-12 等四階段，使教師能夠更加具體明確地掌握各個階段數學教學的內容、方法和要求。

如前所述，美國沒有國家的課程標準，而由學校根據各州及學區自行設定各學年的指導內容設計課程，以致「第三次國際數學與科學教育成就研究(Third International Mathematics and Science Study, TIMSS)」的國際評比中，因內容廣、深度淺而且零散，美國數學課程被嘲諷「1 哩廣而 1 吋深(A Mile Wide and an Inch Deep)」(Schmidt, McKnight, and Raizen, 1996)，此外，2002 年實施《沒有落後學生法案(No child left behind act)》時，也發現各州設定的每學年目標及各學年內容的位置並不一致。因此，以明示各學年學習內容的核心點，及課程首尾一貫的目標下，NCTM 在 2000 年《學校數學的原則和標準 (Principles and Standards for School Mathematics)》的基礎上，將重要的數學內容系統化安排，出版《課程焦點：追求一致性 (Curriculum Focal Points: A Quest for Coherence)》, 明示各學年數學核心課程內容，將課程內容分為「數與運算」、「代數」、「測量」、「幾何」，以及「數據分析」等類別，並對每一個年級學生必須掌握的內容進行了描述，年級不同要求也就不同，如表 4 所示：從 K-12 的每個年級都列有三個主要數學目標，明示每個年級應該學習的基準和掌握的要點，使課程得以首尾一貫，確定每年教什麼樣的關鍵數學技能與知識 (清水美憲，2007；NCTM，2006；Pascopella，2007)。

表 4：美國 1-八年級主要數學目標

年級	課程焦點 Curriculum Focal Points
1	數與運算、代數：發展對加、減的理解，以及基本的加減法。

年級	課程焦點 Curriculum Focal Points
	<p>數與運算：發展對整數關係的理解，包括聚十與一(grouping in tens and ones)。</p> <p>幾何：組合與分解幾何圖形。</p>
2	<p>數與運算：發展對十進制和位值的理解。</p> <p>數與運算、代數：發展能迅速以基本加減法進行多位數加減計算並能流暢通過位</p> <p>測量：發展對線性測量的理解與測量長度的技能。</p>
3	<p>數與運算、代數：發展對乘除的瞭解及有關基本乘法及其相關除法的策略。</p> <p>數與運算：發展對分數和等值分數的理解。</p> <p>幾何：描述和分析平面的特質。</p>
4	<p>數與運算、代數：發展能迅速想起基本乘法及其相關除法，進行整數乘法的流暢計。</p> <p>數與運算：發展對小數的理解，以及分數和小數的關係。</p> <p>幾何：發展對面積的理解，並求出平面圖形的面積。</p>
5	<p>數與運算、代數：發展對整數除法的理解且流暢的計算。</p> <p>數與運算：發展對分數及小數加減法的理解且流暢的計算。</p> <p>幾何、測量、代數：描述立體形狀並分析包括體積和表面積的性質，。</p>
6	<p>數與運算：發展對分數及小數乘除法的理解且計算流暢。</p> <p>數與運算：將比例(ratio)、比率(rate)與乘除連結 (Connecting ratio and rate to multiplication and division)</p> <p>代數：用數學表達式和方程式書寫與解釋。</p>
7	<p>數與運算、代數、幾何：發展對比例及相似性的理解及應用。</p> <p>測量、幾何、代數：發展對立體面積和體積公式的理解，並應用於計算。</p> <p>數與運算、代數：發展對有理數運算的理解，並求解線性方程式。</p>
8	<p>代數：分析、說明並求解線性方程式。</p>

年級	課程焦點 Curriculum Focal Points
	幾何、測量：分析二維與三維的空間，並利用距離和角度計算。 數據分析、數與運算、代數：分析和彙整數據。

(5) 概念與運算何者為先的論辯

1989 年的《學校數學課程與評鑑標準》公布後，各州的數學主要課程據此重新改寫，評量方式也隨之翻修(Roitman,2000)。加州於 1992 年以 NCTM 公布的《學校數學課程與評鑑標準》為基礎，訂定《加州公立學校數學課程綱要(Mathematical Framework for California Public School)》，在偏重教學法忽略數學知識內容的批評下，加州學術標準委員會(California Academic Standards Commission)另行制定，於 1997 年向加州教育評議會(California State Board of Education)提出，數學家無法認同該新課程強調概念理解而忽略學生數學計算能力的養成，因此評議會責由 Stanford 大學數學教授組成的小組修訂，約經兩個月，提出反應部份專業數學思維的《加州 K-12 數學內容標準 (The California Mathematics Academic Content Standards for Grades K-12)》。然而該課程著重技巧輕忽分析，深恐新數學課程標準將重蹈 1960 年代一樣是由數學家所主導的「新數學」之轍，因此公布後引發批評。美國數學戰爭雙方最主要的爭議點為究竟是須具備純熟的數學運算練習才能引出真正的概念理解，或是須先理解數學概念才能進行有意義的數學運算。Roitman(1999) 認為數學戰爭根本不存在，只是知識論的建構主義「知識是主動建構的結果，而非被動接受的產物」的信念，被誤解讀成「學生應該自我發展解題策略，老師不宜過度介入」的教學法，反對 NCTM 課程的數學家被誤解讀成反對課程改革運動，事實上，數學家也投入諸如非營利組織的 Project SEED 等 K-12 的課程改革運動，數學家並非反對課程改革運動，而是數學家認為只要聘用訓練有術的數學家及專精的教師(master teachers)擅用蘇格拉底的詰問法(Socratic method)，即使直接教學還是能成功教會低成就學生更高層次的數學(劉柏宏，2004；<http://www.projectseed.org/>)。NCTM

在撰寫 2000 年公布的《學校數學的原則和標準》草案的 26 位委員中，有 5 位來自美國數學學會的數學專家，而且制定過程公開，設有監督委員會(oversight committee) 掌握《標準》的前瞻性，NCTM 協會(NCTM Board)則對組織架構行使同意權，複審組(Association Review Groups)負責初稿形成過程中問題的回應及事後批判 (Roitman,2000)。

(6) 實證研究導向

美國公民的數學素養與中小學數學教育面臨如下問題：78%的成人不會計算貸款利率；71%不會計算每加侖汽油所能夠走的里程數；58%不會計算一成小費的金額(Phillips,2007)；多數的成人與學生對於分數仍有困難(Hecht, Vagi, & Torgeson, 2007;Mazzocco & Devlin, in press)； National Assessment of Educational Progress(NAEP)指出 27%的八年級學生不能正確畫出矩形的；數學成績達到熟練水準(proficient level)僅 32%、12 年級學生達到熟練水準甚至只有 23% (U.S. Department of Education, 2004)；在 Trends in Mathematics and Science (TIMSS)的國際測試中，發現八年級學生的表現較四年級學生差，自 1995 年迄今，12 年級學生的表現一直很差(Evan & Olchefske,2006)；美國揭示 2000 年擬達到四、八、十二年級學生在數學等核心課程達到的一定能力(第三條)，並預期美國學生數學與科學表現領先世界(第五條)的全國性教育預期目標 (McCarty, 2005)，然而，美國學生 PISA2000 在 31 國中列居第 19 名，平均成績為 493 分；PISA2003 在 40 國中列居第 28 名，平均成績為 483 分，兩者都低於 OECD 國家的平均值的 500 分；PISA2006 年在 57 國中列居第 35 名，平均成績為 474 分，低於 OECD 國家 498 分的平均值(Organisation for Economic Co-operation and Development, 2001, 2004, 2007)等諸多嚴重問題(National Mathematics Advisory Panel,2008：3-4)。

美國布希總統為確保成為世界領袖的地位並改善學生的數學，簽署總統行政命令，於 2006 年 4 月 18 日成立國家數學諮詢委員會(National Mathematics Advisory Panel[NMAP]，主席 Larry Faulkner)，NMAP 由數學家、認知學家和數學教育家組成，下設置概念知識與技能(Conceptual Knowledge and Skills)、學習過程

(Learning Processes)、教學實踐(Instructional Practices)、教師與教師教育(Teachers and Teacher Education)、評量(Assessment)等 5 個工作小組(Task Groups)，針對可用證據，進行詳細分析；並設置證據標準(Standards of Evidence)、教材(Instructional Materials)、全國代數教師調查 (National Survey of Algebra Teachers)等 3 個小組委員會，擔任委員會的特別諮詢功能，論辯數學訓練是否能同時加深學科見解，再利用數學教學和學習的相關研究成果解答前述兩派爭議的焦點在於數學如何教才會使學生擁有基礎數學能力，從而順利銜接進階課程。向總統和教育部長提供「什麼是為學習代數打好基礎的最好數學教學法」的建議(Pascopella，2007)。NMAP (2008)共參閱了 16,000 萬份研究出版物和政策報告，聽取 110 位公開證言(public testimony)，檢視 160 篇機構與個人的評論以及分析來自 743 位代數教師的調查結果，最後形成 8 份小組報告，綜合分析後形成總報告，將美國未來數學教育改革方向植基於實證研究的後設分析。

2. 美國數學課程特色

NMAP 的總報告點出許多不曾被重視的改革重點，為提升數學教育提出許多具體可行的方法，為美國形塑數學教育的改革方向(National Mathematics Advisory Panel,2008)，茲就其建議改善數學教育的管道以及有關課程內容及教與學之建議，分述如下：

(1) 數學教育改善管道

NMAP 發現學生的四則運算能力及分數能力不足，將造成無法進一步學習代數及其他高等教學，認為改善數學教育應從如下六方面著手(NMAP,2008:13-14)：

- 1) 有效組織中小學數學課程，從低年級開始重點學習一系列最關鍵的數學內容。
- 2) 將研究所得 (例：①及早學習的益處；②「概念理解」、「熟練計算」、「事實中解決問題」的學習三階段將相互促進效果；③ 數學成績決定於努力程度而不是能力) 加以應用。
- 3) 具備豐富數學知識的課堂教師在數學教育中扮演核心角色，宜有計畫性吸引及培養未來教師，加強評鑑激勵與留住有效能的教師。

- 3) 特定教學方式只有在特定的條件下才能有效發揮作用，不執著於特定教學方式。
- 4) 測驗宜著重於代數學習所須的先備關鍵知識與技能，以改善美國全國教育進展測驗(National Assessment of Educational Progress, NAEP: NAEP 起自 1969 年，係針對不同課程領域學生所學的知識與能力的測驗，屬標準參照)與各州的測驗品質。
- 5) 加強全國數學教育研究的能力，以為改進數學教育政策與教學實踐。

(2) 課程內容及教與學之建議

NMAP 針對美國中小學數學「課程內容」、「學習過程」、「教師教育」、「教學實踐」、「教材」、「考試」、「數學教育研究」等 7 方面提出 45 條結論與建議，以為美國數學教育改進用，以下就「課程內容」、「學習過程」、「教學實踐」之建議分述如下(NMAP,2008)：

1) 課程內容建議

- A. 中小學數學課程的數學學習應著重於使學校代數成功的內容，前後一貫循序漸進，應強調熟練關鍵主題(key topics)及避免年復一年重複相同主題。
- B. 從 K-8 的教學要求宜明確化，並論及代數在整個數學課程中的角色，委員會希望學生在高中畢業前至少能夠學完代數 II (Algebra II)的內容。
- C. 應將表 1(NMAP,2008:16)有關學校代數的主題內容(符號與表徵、線性方程式、一元二次方程、函數、多項式及組合與有限機率)，視為學校代數課程的架構、課程、教材和期末測驗的標準。
- D. 從 K-8 數學教育的主要目標應使學生熟練分數(包括小數、百分數、負分數)，為學習代數打好基礎。整數的熟練對分數學習是必要的，如同測量和幾何也是必要的。整數、分數以及某部份的測量和幾何(例相似三角形、周長、面積、體積和表面積等)是學習代數的關鍵基礎。
- E. 為使學生在 K-8 能有效學習，NMAP 於表 2(NMAP,2008:20)針對整數、分數以及部份的測量和幾何(例相似三角形、周長、面積、體積和表面積等)

制定了一系列建議性的基準(Benchmarks)。建議將這些基準用於課堂教學、教材開發和州級測驗的指導。

F. 所有學區應確保所有準備學代數的學生有機會學習真正的代數(authentic algebra course[指表 1 的內容及表 2 的基準所要求的代數課程]) 並且讓比現在還要多的八年級學生學到。

2) 學習過程建議

(A) 培養學生概念理解、計算流暢以及問題解決的能力：教師應當全面培養學生概念理解、計算流暢以及解決問題的能力，為學習代數做準備。為使整數計算流暢力，須足量及適當的練習，使學生發展到加減乘除自動化的程度，還須理解交換律、分配律、結合律等核心概念，以及有練習的經驗，將使概念與算則相互增強。

(B) 藉由小組學習改善學生學習數學的社會、感情和動機因素：研究發現小組學習可以改善學生學習數學的社會、感情和動機因素，並有助於改善學習代數的主要障礙的分數(含小數與百分數)學習。

(C) 學童由「注重能力」轉為「努力能變得更棒(smarter)」的信念，將有助於數學學習的投入，從而提高數學學習成績。

(D) 能否學習某一數學概念與否，大多數是端賴於先前的學習機會(prior opportunities to learn)，此觀點已打破某一數學概念的學習，必需等到大腦成熟到某一程度不可的假設(NMAP,2008：19-20)。

3) 教學實踐

教學實踐 (Instructional Practices)的建議中指出：

(A) 「以學生為中心」，或是「教師主導(teacher directed)」的教學方式，何者為宜，都得不到研究的支持，研究並不支持擇其一的教學方式。

(B) 「小組協助的個別化學習(Team Assisted Individualization, TAI：首先根據診斷測驗結果，形成個別化的問題，由不同能力學生組成相互幫助的小組，並有特別教師指導(specific teacher guidance)，以及根據小組及個人兩

者表現給予獎賞的學習方式)」對概念理解及問題解決的效果雖不明顯，但能夠改善學生的計算技能。

- (C) 經常性實施形成性評量(formative assessment)能夠改善小學生的數學學習。
- (D) 使用「真實世界(real-world)」的情境引入數學概念，有助於涉及類似「真實世界」問題的測驗成績提高，但對於計算、簡單文字題以及解方程式並無助益。
- (E) 清晰教學(Explicit Instruction：教師提供解決問題的明確示範，學生參照示範使用於新的學習策略和技能並進行大量練習，而且大聲說出思考過程，以獲得充分回饋的教學方式) 非適用於所有學生，但有助於文字題及計算有困難的學生，對無能力學習(learning disabilities)者及一般的班級名列於後三名者也有效。
- (F) 11 項長期的嚴謹研究(僅一項研究少於 20 年)發現，使用計算器對學生的計算技能、問題解決能力、概念形成能力的影響有限或沒有影響(NMAP,2008：22-24)。