

之後將此關鍵概念與民國 100 年要實施的九七年國民中小學數學課程綱要進行比對，解析出 TIMSS 和 PISA 所評量的能力，我國課程綱要是否已呈現。最後，再對課綱提出建言。當然，我們在分析時，也會適時聘請專家學者提供建言，使我們儘可能在 TIMSS 和 PISA 試題的解析中，對課綱提出更貼切的建言。

本研究將關鍵概念所屬的能力指標分為屬於該年級（四年級、八年級、九年級 – 指 15 歲組）或該年級之前、該年級之後、以及指標未羅列的關鍵概念。當關鍵概念在該年級或該年級之前的能力指標或說明已呈現其相關內容，但學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在該指標之中應再「強調」這類的內容。當關鍵概念的內涵在該年級或之前的能力指標已呈現，但未觸及或說明其內容，同時學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在該指標之中應再「添加」這類的內容。當關鍵概念的內涵在該年級之後的能力指標呈現，或者指力指標未羅列，同時學生的成就表現並不如理想，此時我們建議在應「增加」這類的的能力指標。本研究在比對能力指標時是將所有相關的能力指標與指標之說明一一檢視，務求指標與關概念的妥適性與系統性。

資料分析的信度和效度則採三角校正法檢核之。我們也在不同時間點對同一問題進行分析務求分析的一致性，同時也邀請二位學者同時進行檢核。

伍、研究結果

本研究針對 TIMSS 和 PISA 試題逐題分析其內容之後，針對能力指標提出應強調、添加或增加的內容分析如下，但限於文章篇幅，試題內容與分析之表格不再加以呈現。

一、強調之內容

（一）強調生活語意的問題

八年級學生在 TIMSS 試題 M012037 的統計圖表問題中，對於問題「有多少學生的成績超過 7 分？」的答對率只有 50.5%，另一個包含 7 分的錯誤選項：10 人卻有 40.7% 的學生填答。分析發現這個試題的內涵在我國的能力指標 3-d-01 中已呈現，但學生作答不理想，主要是對生活中「超過」和「以上」語意的混淆。此外四年級 M011017 的試題中，也有 14.9% 的學生把「三星期後」的問題，選擇成「第三個星期」的答案。雖然有些語意我國的課程在教學時已不再特別強調，例如「增加 2 倍」和「增加為 2 倍」，「6 除以 2」和「2 除 6」的問題。

但是 TIMSS 在八年級的試題中仍出現類似的語意的了解的問題。因此我們建議在能力指標「3-d-01 能報讀生活中常見的直接對應（一維）表格。」中強調生活中「超過」和「以上」的語意的差異；在能力指標「2-n-13 能認識年、月、星期、日，並知道某月有幾日、一星期有七天」中強調「三星期後」和「第三個星期」的差異。

我們在生活當中有時候對於「7 分以上」是否包含 7 分的問題；「增加 2 倍」到底是變成來的兩倍或是三倍；可不以說「下降 2 倍」？有些人似乎沒有共識，但它在數學上的意義是很明確的，因此在數學學習過程當中應加以強調。若我國要針對每一個生活語意逐指標建議強調，怕會掛一漏萬。因此我們建議在老師的教學過程中要適當的強調生活中常見的語意的定義。我們期望學生能依據他對中文語意的了解來了解類似的語意問題，而非盲目的背誦語意。

（二）強調數學名詞語意的感覺問題

我們的研究及實務經驗發現，教師在教導數學名詞時，都不強調數學名詞的感覺問題，例如小數的百分位是把一平分成一百等分的感覺，因此有些學童會過度一般化他在整數位值名詞 – 個位、十位、百位 -- 到小數為個分位、十分位、百分位。所以，有 34.6% 的八年級學童在 M022044 的小數問題中把 78.2437 四捨五入到百分位時選擇 78.244。有 13.8% 的四年級學生在 M011020 的分數化成小數問題中把 $\frac{7}{10}$ 的答案選擇 0.07。八年級 M022154 的問題是將長方形旋轉成另一長方形，然後要求學生找出它的「旋轉中心」。旋轉中心的名詞，我國在能力指標「4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。」是針對旋轉角提到的名詞，此外再也沒有提到。因此我們建議在「3-n-12 能認識一位小數，並做比較與加減計算。」和「4-n-09 能認識二、三位小數與百分位、千分位的位名，並作比較。」中強調十分位、百分位、千分位的數學名詞的語意的感覺是因為它代表著十分中的幾分、百分中的幾分的感覺。在「4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。」中強調旋轉中心的語意的感覺，使學生能將此一名詞應用到相關的概念的學習上。

除了上述問題之外，八年級 M022035 的統計圖表報讀，是問「冷卻了 20 度」但有 40.4% 的學童選擇「冷卻到 20 度」的答案。八年級 M012037 的統計問題中是問「超過」的語意，但卻有 40.7% 的學生填答「以上」的答案。因此若我國要針對每一個數學名詞（或者 TIMSS、PISA 出現的名詞），再一一強調，會掛一漏萬。研究者認為最重要的就是讓學生能依據他對

中文語意的了解，來學習數學的名詞。把數學名詞和它的數學意涵連結在一起，這樣學生對數學名詞便會更有感覺。如此他面對新的數學名詞，他便可以會意，再配合數學的概念，兩者結合成一個新的知識結構體。他的數學可以學得更好，我們也可以不用再怕那些名詞，我們沒有教過。

（三）強調量感

在 TIMSS 四年級 M012023 的量感問題，有 24.9% 的學生用公斤來秤一個蛋的重量，顯示我國學生的量感有待加強。因此建議在能力指標「3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。」強調公斤和公克的量感。當然，有關量感的學習建議教師要多強調「參考量」的概念。通常的參考量是學生生活週遭常見的量的感覺。例如學生的身高大約是 140 公分或 1.4 公尺；一瓶小的瓶裝水大約 600 毫公升；教室的長度大約 8 公尺；...。當學生所熟知的參考量愈多時，他愈能正確的估計量感。當然，我們也可以思考，我們時常用的單位時常是可以用愈接近 1 的整數來表示。因為愈接近 1 的整數我們愈能掌握。

（四）強調學生易犯的迷思概念問題的釐清

TIMSS 八年級 M012016 問題是要求學生將分數化成小數或者小數化成分數的大小比較問題。學生的答對率只有 60.2%。分析這個問題，學生將分數化成小數再來比較，較為簡單。同時發現有 22% 的學生選擇 $2.5 < 2.25 < 2.75$ 。這個錯誤符合學者研究的小數大小比較的整數法則的迷思概念：學生把小數當做整數來比較。八年級 M022198 的問題則是小數的大小比較問題，學生的答對率只有 62.5%，且有 29.2% 的學生選擇 $0.3 < 0.32 < 0.332 < 0.233$ 。其原因比較符合學者研究中分數法則的迷思概念：分割的分數愈多，小數愈小。

因此我們建議在「4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。」和「5-n-08 能認識多位小數，並作比較與加、減的計算，以及解決生活中的問題。」的教學過程中強調小數大小比較中易犯的迷思概念問題的釐清。

TIMSS 四年級 M011025 的面積與周長的問題，有 41.2% 的學生將周長的問題選擇了面積的答案。八年級 M012030 只有 25.9% 的學生用面積求周長的邊長問題。因此我們建議老師教學時應強調學生的迷思概念。在「3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。」應強調長度和面積的差異。

TIMSS 八年級 M012004 的比例問題，只有 65.5% 的學生答對，其餘的學生大都可能犯了使用加法來計算。因此在「7-n-16 能理解比例的意義（以實例說明正比、反比關係的意義）」應強調學生使用加法進行比例計算的迷思概念的釐清。

爲了防止掛一漏萬，我們建議在適當的能力指標上，應強調學生迷思概念的釐清，尤其是研究上已實證的迷思概念。例如，真分數愈乘愈大的迷思概念，... 等等。

（五）強調相對數值的問題

八年級 M032557 的問題是三個未知數兩個方程式的問題，它無法把 a,b,c 的值先求出來，再求出 $a+2(b+c)$ 的值。這類的問題在某些能力指標中曾經出現過。例如「7-a-06 能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。」但未知數比方程式多的問題的求解，在我國的能力指標中未被強調，僅談到它有無限多解。因此我們建議在「7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。」剛開始建立學生未知數的概念時，能強調我們雖然不知道未知數的值，但是我們仍然可以知道在某些特定情形下的解。

其實這類的問題是一種相對數值的問題。它雖然有無限多解，但是在特定的情況下仍然可以求出它的解。有時候我們的公式也有相似的結果，例如 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ ，無論 θ 的值是多少，它的結果永遠等於 1。例如爸爸和兒子的年齡每年變動，但是它們的差永遠固定。

相對數值的概念，在課程綱要中並未被充分討論它的意義。例如，它的一個特例的值也是對的， $\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ$ 也會等於 1。因此它可以用某一特例來求它。但是它有一個危險性，所以最好多找幾個數值來檢驗是否完全相等。當然最好的求解方法是找出已知方程式和求解方程式間的關係，並利用其關係求解

二、添加之內容

（一）添加成人生活經驗的問題

我國的數學課程綱要強調數學與生活連結的問題，同時我們發現大部份強調的問題都是學童生活中的問題。在 TIMSS M032762-4 的題組中是一個不同方案的電話費率問題。在這類的問題中，學童的答對率在 30% 以下。因爲這類的問題是成人生活中的問題，學童生活中是無法驗到的。倘若學童能學習這類的問題，也將有助於他將來的生活理財。因此我們建議在

相關的單元中添加成人生活經驗的問題。例如在「5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。」或者「7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。(修 7-a-04)」添加電話費率的問題。

在數學課程綱要中，我們強調學生的學習要連結生活經驗，而學生的生活經驗是有限度的，成年人的生活經驗，並不是他們在學期間可以經驗到的。例如生活中電費的問題、手機費率的問題、計程車計費的問題...等等，雖然是學生生活中會碰到的成年人的問題，但是他們都是沒有機會去解決這些成年人生活中的問題。若我們想培養學生解答問題的能力，讓他成年以後能解決成年人的問題。我們建議在學生時期，相關的單元和能力指標應添加這些成年人會碰到的問題，讓學生有解題的經驗。

(二) 添加概念的反例問題

PISA 2006 M505 的問題要求學生說明一統計表為什麼不能繪成統計圖。M509 是探究機率和比例概念差異的問題。在概念的學習過程中，若學生一直學習正向的概念，他對反向的問題便會失去警惕心，他的概念學習便無法察覺在什麼情況下不能使用，而容易將概念過度一般化。因此學生在學習每一個概念的時候，需要一些反例來突顯正例的重要性。因此我們建議在「6-d-01 添加不能製作長條圖的問題。」添加一些不能繪成統計圖的相關問題。在「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。」添加一些不是機率的概念的相關概念的釐清。相同的，我們也建議在所有概念的能力指標上適時的添加反例的問題來突顯正例的重要性。例如分數概念學習時，平分概念的學習上添加不平分的判別；在加法交換律的學習上，添加減法不能交換的例子。

TIMSS 四年級 M011006 的問題需要讓學生判別平面和曲面，我國學生的答對率只有 61.6%。我國在能力指標「1-s-01 能認識直線與曲線。」中有曲線的介紹，但在「2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面(含簡單立體形體)。」沒有曲面的介紹。它也可以看成不是平面的問題，因此我們建議在 2-s-01 中添加非平面的概念的介紹。

TIMSS 四年級 M031267 的問題需要學生直觀的判斷兩個圖形是否形狀相同(相似)學生的答對率只有 66.0%。我國的能力指標在四年級「4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。」教授平面圖形全等的意義，而到了九年級「9-s-02 能理解多邊形相似的意義。」才教授相似的意義。本研究發現，若針對每一個 TIMSS 或 PISA 的施測問題，我國的能力指標都要添加或

增加該能力指標，那可能會掛一漏萬。研究者認為在每個單元中添加概念反例的問題，可能可以解決此一問題。例如，在教全等概念的直觀意義時，它是狀況一樣，大小相同。因此我們需要介紹形狀一樣但大小不同的反例，要教大小一樣但形狀不同的反例。學生有了這樣的能力，便能解決 M031267 的問題。

（三）添加有規律的解答方法

四年級 M022227 的題組主要的概念是要求學生從已知的正方形面積中求出邊長或周長。雖然這個問題是求平方根的問題，但是當它要做為四年級學生可以解答的問題一定是整數邊長的問題。它是課程中由邊長求面積的逆向思考的問題，它只需要學生有規律的去思考邊長是 1,2,3,...的時候正方形面積是 1,4,9,...便可以解答，但我們的學生只有 64.1%可以正確回答。因此我們建議在「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。」的學習過程中，能添加出現這類的問題，讓學生能利用有規律的試錯誤，或者有規律的思考可能的解答，以便解答相類似的問題。

PISA 2006 M510 是一個簡單的排列組合的問題，它只需要學生有規律的進行配對或者用樹狀圖便可以解答問題。因此我們建議在「9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。」添加有規律的找尋事件或母群體的問題。

相同的，建議在所有概念的學習上，在適當的時機都能添加或強調有規律的找尋答案，或者有規律的嘗試錯誤的方法。

（四）添加逆向思考和逆運算的問題

八年級 M032046 的問題是給學生最習慣的表示法 $y=3x+2$ ，要求學生逆運算用不習慣的 y 來表示 x 的問題，我們的學生只有 47.7%的學生答對。此外四年級 M022227 的題組也需要學生運用逆向思考的問題。

逆向思考或運算的問題，在數學的學習上有著非常重要的地位。有些逆向的性質仍然成立，有些逆向的性質就會錯誤，例如「正方形的四個邊長都相等」，但「四個邊長都相等的正方形並不一定是正方形」。

但這個概念在我們的能力指標中都已出現，只是沒有逆向思考的問題。M032046 和 M022227 相對應的能力指標中並未見到這樣的內容。因此，我們建議在「7-a-05 能利用移項

法則來解一元一次方程式，並做驗算。」和「4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。」應該添加逆向思考和逆運算的問題，同時在所有的數學概念的學習上也應該一致的被強調出來。若我們的老師都知道教一概念時，也應該反問它的逆向問題或概念，老師的教學將會更有條理。若學生了解每一概念都需要思考它的逆向概念或逆向問題，我們的學生可以學得更有感覺，會學得更好。

(五) 添加概念溝通的問題

八年級 M022261 的題組問題中，主要是找尋規律的問題，之後寫出「你如何得到答案的理由」。解釋理由的問題學生的答對率 48.9%。八年級 M022002 的問題中，也是一個概念溝通的問題，在這問題中只有 50.3%的學生能了解問題中 K 所代表的意義。

從八二年版開始，我國的課程綱要便開始強調學生建構自己的知識，強調學生能溝通他的數學概念。雖然我國的數學課程綱要列有「連結」的主題，也強調溝通的內涵，但是這類的理念，在課程綱要能力指標的說明中，並未被強調出來。同時學生口述他的數學概念與書寫他的數學概念仍有一段差距。因為用講的比較快，用寫的比較花時間，同時要考慮是否能清楚表達的文法問題。因此我們建議在相關的能力指標「6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並驗解的合理性。」中能添加相關的說明，要求學生用書寫的方式解釋他的想法，或說明他的理由。在相關的能力指標「7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。」中要求學生溝通他人所表示出來的式子或者符號的意義。此外，在各概念的學習上也應添加概念溝通的內容，使我國學生習於書寫概念的溝通。

(六) 添加正負數的前置經驗問題

TIMSS 四年級 M011013 的問題是零下溫度的上升和下降問題。我國學童的答對率只有 60.1%，有 31.7%的學生直接將 5 度和零下 3 度的兩數相減 $5-3=2$ 。因為我國地處亞熱帶，因此不會出現零下的溫度，所以在教材上沒有這類的問題。若我國想要讓學童能解答這類的問題，建議在「3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。」的教材中，可以添加輸贏、比多少、...等等有正負數概念的前置概念的問題，以增加學生的解答經驗，使學生有助於七年級正負數概念的學習。

(七) 添加比例型的乘法問題

TIMSS 四年級 M031108 的問題是一種比例型的乘法問題，我國有 20.1%的學童用加法來解題。因為比例型的問題的單位可以全部相同，它與學生學習累加型的乘法啓蒙概念（不相同的單位）不同，因此學童有沒真正了解問題的情形下，會誤用加法來解題。因此我們建議，在「3-n-04 能熟練三位數乘以一位數的直式計算。」的問題中添加相同單位卻需要用乘法來算的問題，例如比例型的乘法問題。

（八）添加時間縮短的百分率問題

有關 TIMSS 八年級 M022039 時間改變的百分率問題「25 分鐘變成 20 分鐘，縮短的時間百分比」，我國學童的答對率只有 39.7%，且有 47.8%的學童都回答 5%。我們相信學童可能不知道怎麼作答，因此直接用 $25-20=5$ 來作答。有關這類的問題，我國六到八年級能力指標的內容並未出現。但在「5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用(含百分率、折)。」和「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」分別有百分率和時間的乘除問題。我們認為這兩個能力指標已經可以含蓋其內涵，只是從未出現這類的問題。因此我們建議在「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」的能力指標中添加時間的改變的百分率問題。

（九）添加圖形放大、縮小對面積的影響問題

PISA 的 M148 試題是有關圖形放大、縮小對面積的影響的問題。而我國的相關能力指標，在「6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。」我們認為除了了解圖形放大、縮小對於長度、角度之影響外，也應了解對於面積之影響。因此我們建議添加「6-s-02 為能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度以及面積的影響，並認識比例尺。」

（十）添加獨立事件的機率

PISA 2006 的 M417 是兩個獨立事件的機率問題，然而我國「9-d-05 能在具體情境中認識機率的觀念。」只是基本的機率問題。兩個獨立事件（或者不同母群體）的機率問題，學生可以很直觀將兩個機率乘起來。因此建議我國課程綱要可以添加類似的問題說明，以引導教科書編列相類似的問題。

二、增加之指標

（一）各年級增加怎樣解題的能力指標

在 TIMSS 和 PISA 的試題中，有許多的推理或解題性知識的問題，例如八年級的 M022008、M032744，四年級 M031347、M031344、M031345，PISA2006 M316 和 M484 的問題。這些問題雜散在各個單元之中，同時學生的答對率不高。雖然我國的能力指標列有「連結」的主題，之內也強調「解非例行性的問題」，但是連結的主題時常被忽視。因此我們建議在各個年級都增加的能力指標，或者要求教科書著者在每一本教科書的最後一個單元加列「怎樣解題」，以增加學生解題的經驗。

（二）四年級增加空間中全等的能力指標

四年級 M012069 的問題是空間形體的旋轉問題。我國學生的答對率只有 57.5%。它是智力測驗常見的問題，可是我國的能力指標在並未出現類似的問題，只有在「4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。」有判別平面圖形的全等問題。因此我們建議在四年級的能力指標中，可以增加一個能力指標「4-s-04 能認識空間圖形全等的意義。」

（三）四、六年級增加生活中統計圖表的報讀和解讀的能力指標

八年級學童在試題 M022035 的曲線統計圖表報讀中，答對率只有 44.7%。TIMSS 四年級 M031333 的問題需要學生報讀兩點高、低溫差的問題，學生的答對率只有 57.1%。此外，我們也發現我們的能力指標編排方式，八年級學童在五、七、八年級是學習統計單元，在六年級是強調長條圖和折線圖製作，以及圓餅圖的報讀與製作。在四年級則報讀長條圖和折線圖，完全沒有出現曲線圖的內容。由於生活中仍會出現曲線圖的報讀，因此我們建議在四年級的能力指標中修改 4-d-01 和 4-d-02 為「能報讀生活中常用的統計圖表」。

此外 PISA M150 也是曲線圖表的報讀和解讀問題。M525 則是統計圖表的報讀和解讀問題。因為統計圖表的解讀問題，有時候會涉及比率問題，因此我們建議將 6-d-03 能報讀生活中常用的圓形圖，並能整理生活中的資料，製成圓形圖。」一分為二：「6-d-03 能報讀和解讀生活中常用的統計圖(包含圓形圖、曲線圖、...)。」和「6-d-04 能整理生活中的資料，製成圓形圖。」。

（四）六年級增加機率的能力指標

2003 年八年級 M032271 的問題、M022252 的問題是機率的問題。機率的問題，在八二年版和九年一貫暫行綱要中，六年級都要進行教學，但是在九年一貫課程綱要和 97 年的課綱

中都被刪除。此一問題的答題學生當時還就讀暫綱之前的版本，因此答對率尚可 77.2%。可是現在學習九年一貫課程綱要的學生在八年級之前已沒有機率的問題。再者研究者今年在某縣市進行國小數學科展的評審時，六年級學生在做「猜 1 到 100 之間的數，用中位數的方法是最好的方法」的問題，發現學生只知道他是算 1 到 100 被猜中的次數的平均數，他並不知道機率的概念。

機率的問題在日常生活中是一個常見的問題，但它不是平均數的概念，不是比例的概念，同時相關的國際評量仍然會施測，因此我們考量整個能力指標的編排精神，建議我國課程綱要在六年級時，可以增加機率相關概念的能力指標。

陸、討論與啓示

一、討論

雖然我國歷年來在 TIMSS 和 PISA 的成就或素養表現都非常優異，但是從 TIMSS 和 PISA 的個別試題表現，仍有許多試題的表現不如理想。因此值得進行質性分析。

在質性分析方面，我們依據 TIMSS 和 PISA 的試題內容，以及學生的答題情形，建議我國課程綱要應強調的指標內容有：應強調生活語意的內容、應強調數學名詞的語意感覺、應強調量感的教學、應強調學生常犯的迷思概念問題、應強調相對數值的問題。

應添加的指標內容有：建議添加成人生活經驗問題、建議添加概念的反例問題、建議添加有規律的解答方法的問題、添加逆向思考和逆運算的問題、添加概念溝通的問題、添加正負數的前置概念問題、添加比例型的乘法問題、添加時間縮減的百分率問題、添加圖形放大縮小對面積的影響問題、添加獨立事件的機率問題。

應增加的能力指標有：各年級增加怎樣解題的能力指標、四年級增加空間中全等的指標、四、六年級增加生活中計圖表的報讀和解讀的指標、六年級增加機率的能力指指標。

二、啓示

從 TIMSS 和 PISA 試題的質性分析，讓我們找到一些我國課程綱要能力指標在鋪陳和說明時應強調或添加、增加的內容。其中主要的內容是應讓我國教師更了如何進行教學，例如

- 應教導我們的學生用他的語文能力去了解數學名詞和數學的概念，應用對比的語法讓學生了解關鍵詞的差異；