(3) $r(x_0,x_i)$ 僅和 x_0 與 x_i 繪於二維平面之折線幾何形狀有關，而和其在於空間中之相對位置無關，簡言之，若存在實數α，則 x_0 與 x_i 的灰色關聯度 $r(x_0,x_i)$，和αx_0與αx_i的灰色關聯度$r(\alpha x_0,\alpha x_i)$應相等，及 $r(x_0,x_i)=r(\alpha x_0,\alpha x_i)$。

(4) 為當繪圖上的 x_0 與 x_i 之折線形狀完全吻合，或以折線一端為準做兩線重疊，出現完全重和情形時，$r(x_0,x_i)$之值才會等於 1。

滿足以上四點必要條件，則稱$r(x_0,x_i)$ 為 x_i 對於 x_0 在區間$(1,m)$的灰色關聯度。

第三節 灰色關聯度的量化模型

關聯性質上是曲線間的幾何形狀的差別，因此將以曲線間幾何形狀的大小， 作為關聯程度度量的尺度，對於一個參考數列 x_0，有好幾個比較數列 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的情形，可用下述關係式來表示各比較與參考曲線在各點(時刻)的差。

$$
\begin{aligned}
\xi_{1(k)} &= r(x_0(k),x_1(k)) \\
&= \frac{\min\limits_{j}\min\limits_{k}\left|x_0(k)-x_j(k)\right| + \delta\max\limits_{j}\max\limits_{k}\left|x_0(k)-x_i(k)\right|}{\left|x_0(k)-x_i(k)\right| + \delta\max\limits_{j}\max\limits_{j}\left|x_0(k)-x_i(k)\right|} \qquad (3\text{-}1) \\
&= \frac{\Delta\min+\delta\Delta\min}{\Delta_{0,i}(k)+\delta\Delta\max}
\end{aligned}
$$

上式中這種形式的相對差值稱為x_i對x_0在k時刻的關聯係數，其中序 $\Delta_{0,i}(k)$ 在為 k 時刻兩比較序列的絕對差，$1\le i\le m;m$ 為正數，$\Delta\min$、$\Delta\max$ 分別是所有比較序列在各個點的絕對差中最小值和最大

值，δ 為分辨係數，其值在 0 與 1 之間，分辨係數實際上是人為給定的(為定性分析的人為係數)，用來削弱數 $\Delta\max$ 值過大而失真的影響，提高關聯係數之間的差異顯著性，分辨係數分唯一，可在 0~1 之間取值，一般取值 0.1~0.5[6.8]。

應用灰色關聯四公理而產生的灰色關聯度 $r(x_0,x_i)$ 模型為

$$r(x_0,x_i)=\frac{1}{n}\sum r(x_0(k),x_i(k)) \tag{3-2}$$

以下兩個例題來說明灰色關聯分析及灰色關聯度

(1)理論例題：

給予初值化的序列如下：

$x_0=\{1,1,2,3,4,5\}$

$x_1=\{1,1.2,2,2.5,3.5,3.5\}$

$x_2=\{1,1.5,2.5,3.4,2.8,2.5\}$

$x_3=\{1,2,1.5,1.25,0.9,1.5\}$

第一步：求差序列

各時刻 x_i 對 x_0 的絕對差如表 3-1

表 3-1 各時刻 x_i 對 x_0 的絕對差

序號	1	2	3	4	5	6
$\Delta_1=\lvert x_0(k)-x_1(k)\rvert$	0	0.2	0	0.5	0.5	1.5
$\Delta_2=\lvert x_0(k)-x_2(k)\rvert$	0	0.5	0.5	0.4	1.2	2.5
$\Delta_3=\lvert x_0(k)-x_3(k)\rvert$	0	1	0.5	1.75	3.1	3.5

第二步：求兩最小差與最大差

$$\min_i\min_k=\lvert x_0(k)-x_i(k)\rvert=0$$

$$\max_i\max_k=\lvert x_0(k)-x_i(k)\rvert=3.5$$

第三步：計算關聯係數

將最大差與最小差及分辨係數$\delta=0.5$帶入關聯係數計算公式

$$\zeta_i(k)=\frac{0+0.5\times3.5}{\left|x_{0(k)}-x_i(k)\right|+0.5\times3.5.}=\frac{1.75}{\Delta_{i(k)}+1.75}$$

帶入各時刻的絕對差得

$$\xi_1(k)=(1,0.897,1.000,0.778,0.778,0.539)$$

$$\xi_2(k)=(1,0.778,0.778,0.814,0.539,0.142)$$

$$\xi_3(k)=(1,0.636,0.778,0.500,0.361,0.333)$$

第四步：求關聯度

曲線x_1和x_0的關聯度為

$$r_1=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\delta_1(k)=0.8319$$

同理$r_2=0.7291,r_3=0.6014$

總和討論：

x_1與x_0的關聯度$r_1=0.8319$為最大，即x_0與x_1的發展態勢為最接近的因素，或著說x_1對x_0影響最大因素。

x_3與x_0關聯度$r_3=0.6014$為最小，即x_0與x_3的發展態勢為最步接近的因素，或著說x_3對x_0影響最小因素。

(2)應用實例：

如果有某一研究者想了解台北市影響青少年生長發育的主要因素，他應用了灰關聯分析研究，$x_0(k)$為生長發育不良率，x_1k為所測體能訓練不及格率，x_2k為營養不良率，$x_3(k)$為常患病率，假設某年齡層女學生有關情況數據百分比如表 3-2。

表 3-2 學生生長發育不良率的主要影響因數百分比

序數	1	2	3	4	5	6
年齡	11	12	13	14	15	16
$x_0(k)$	31	45	46	45	51	47
$x_1(k)$	36	33	32	38	36	42
$x_2(k)$	37	38	25	13	10	17
$x_3(k)$	38	8	9	7	5	7

上表中找出兩級最小差與最大差

$$\min_{j\in i}\min_{k}\left|x_0(k)-x_j(k)\right|=5$$

$$\min_{j\in i}\min_{k}\left|x_0(k)-x_j(k)\right|=46$$

取$\zeta=0.5$的灰色關聯係數如下：

$$\zeta_1=(\zeta_1(1),\zeta_1(2),\zeta_1(3),\zeta_1(4),\zeta_1(5),\zeta_1(6))$$
$$=(1,0.8,0.7568,0.93333,0.7368,1)$$

同理

$$\zeta_2=(0.9333,0.9333,0.6364,0.5091,0.4375,0.5283)$$
$$\zeta_3=(0.5957,0.4667,0.4667,0.4590,0.4058,0.4444)$$

相對應的關聯度有$r_1=0.7812$，$r_2=0.6630$，$r_3=0.4713$

顯然，$r_1>r_2>r_3$

由計算得知影響中學女學生生長發育的主要因素是體育鍛鍊身體，其次是營養，在其次是疾病。

第四節 優勢分析

當參考數列不只一個，被比較的數列也不只一個時，就可進行優勢分析，下列參考數列為母數列(或母因素)，比較數列為子數列(或子因素)，由母數列與子數列可構成關聯矩陣。通過關聯矩陣個元素的關